《量子力学 A》2024 年秋季学期 1 班期末考试（参考答案）

题目在第 3 页之后。下面结果可以直接使用，其中**黑体**符号为三分量的矢量：

- 一维谐振子：$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2=-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2+\frac{m\omega^2}{2}x^2$。定义升降算符：$\hat{a}_\mp=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}\pm\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$，

  则有 $[\hat{a}_-,\hat{a}_+]=1$，$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_-+\frac{1}{2}\right)$. $\hat{H}$的基态$|\psi_0\rangle$满足$\hat{a}_-|\psi_0\rangle=0$,波函数为

  $\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$；激发态为$|\psi_n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_+)^n|\psi_0\rangle$，能量 $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

- 高斯积分：$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-x^2/2a}\mathrm{d}x=(2n-1)!!\cdot a^n\cdot\sqrt{2\pi a}$，这里$n$为非负整数，$a>0$.

- 角动量：满足对易关系 $[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=i\hbar\hat{J}_z$，$[\hat{J}_y,\hat{J}_z]=i\hbar\hat{J}_x$，$[\hat{J}_z,\hat{J}_x]=i\hbar\hat{J}_y$。

  定义角动量升降算符 $\hat{J}_\pm=\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y$，有 $[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm]=\pm\hbar\hat{J}_\pm$，$\hat{\boldsymbol{J}}^2\equiv\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2=\hat{J}_\mp\hat{J}_\pm+\hat{J}_z^2\pm\hbar\hat{J}_z$。

  $\hat{\boldsymbol{J}}^2$和$\hat{J}_z$的正交归一共同本征态$|j,m\rangle$满足 $\hat{\boldsymbol{J}}^2|j,m\rangle=\hbar^2j(j+1)|j,m\rangle$，$\hat{J}_z|j,m\rangle=\hbar m|j,m\rangle$，和

  $\hat{J}_\pm|j,m\rangle=\hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|j,m\rangle$ （需要满足 Condon-Shortley 相位约定）。

  - 轨道角动量 $\hat{\boldsymbol{L}}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$。在球坐标下，$\hat{\boldsymbol{L}}$与半径$r$无关，$\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\partial_r(r^2\partial_r)+\frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2}$。

    球谐函数$Y_l^m(\theta,\phi)$是$\hat{\boldsymbol{L}}^2$和$\hat{L}_z$的正交归一本征函数，$\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,(Y_l^m)^*Y_{l'}^{m'}=\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$。

    $Y_0^0=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$，$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$，$Y_1^{\pm1}=\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,e^{\pm i\phi}$, ...

  - 自旋1/2：常用基矢为 $|\uparrow\rangle\equiv\left|j=\frac{1}{2},j_z=+\frac{1}{2}\right\rangle$，$|\downarrow\rangle\equiv\left|j=\frac{1}{2},j_z=-\frac{1}{2}\right\rangle$，在这组基矢下，

    自旋角动量算符为 $\hat{S}_a=\frac{\hbar}{2}\sigma_a$,其中 Pauli 矩阵$\sigma_a$为$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$,$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。

- 简并定态微扰论：$\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{V}$。$\hat{H}_0\left|\psi_{n,i}^{(0)}\right\rangle=E_n^{(0)}|\psi_{n,i}^{(0)}\rangle$，$\hat{H}_0\left|\psi_m^{(0)}\right\rangle=E_m|\psi_m^{(0)}\rangle$，本征基$|\psi_{n,i}^{(0)}\rangle$与$\left|\psi_m^{(0)}\right\rangle$

  完备正交归一（$m\neq n$）。$\hat{H}$与$E_n^{(0)}$对应的本征值$E_{n,i}$满足：$E_{n,i}-E_n^{(0)}$准至$O(\lambda^2)$阶，为久期方程矩阵$\langle\psi_{n,j}^{(0)}\left|\lambda\hat{V}\right|\psi_{n,k}^{(0)}\rangle+\sum_{m,m\neq n}\frac{\langle\psi_{n,j}^{(0)}|\lambda\hat{V}|\psi_m^{(0)}\rangle\langle\psi_m^{(0)}|\lambda\hat{V}|\psi_{n,k}^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$ 的本征值之一。对非简并情况该矩阵为1×1。

- 含时微扰论：$\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{V}(t)$。$\hat{H}_0$不含时，$\hat{H}_0|\psi_m\rangle=E_m|\psi_m\rangle$，$|\psi_m\rangle$完备正交归一。

  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle$的解为$|\psi(t)\rangle=\sum_m c_m(t)e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}}|\psi_m\rangle$，则$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t)=\lambda\sum_n\left[\hat{V}_I(t)\right]_{m,n}c_n(t)$,

  其中$\left[\hat{V}_I(t)\right]_{m,n}=e^{\frac{i(E_m-E_n)t}{\hbar}}\langle\psi_m\left|\hat{V}(t)\right|\psi_n\rangle$。$c_m(t)$的 Dyson 级数解为$c_m(t)=c_m(0)+$

  $\frac{\lambda}{i\hbar}\int_0^t\mathrm{d}t_1\sum_{n_1}\left[\hat{V}_I(t_1)\right]_{m,n_1}c_{n_1}(0)+\left(\frac{\lambda}{i\hbar}\right)^2\int_0^t\mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\sum_{n_1,n_2}\left[\hat{V}_I(t_1)\right]_{m,n_1}\left[\hat{V}_I(t_2)\right]_{n_1,n_2}c_{n_2}(0)+\cdots$。

  - 计算跃迁速率时经常用到的结果：$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2(xt)}{x^2t}=\pi\cdot\delta(x)$

下面 Clebsch-Gordon 系数表可以直接使用：

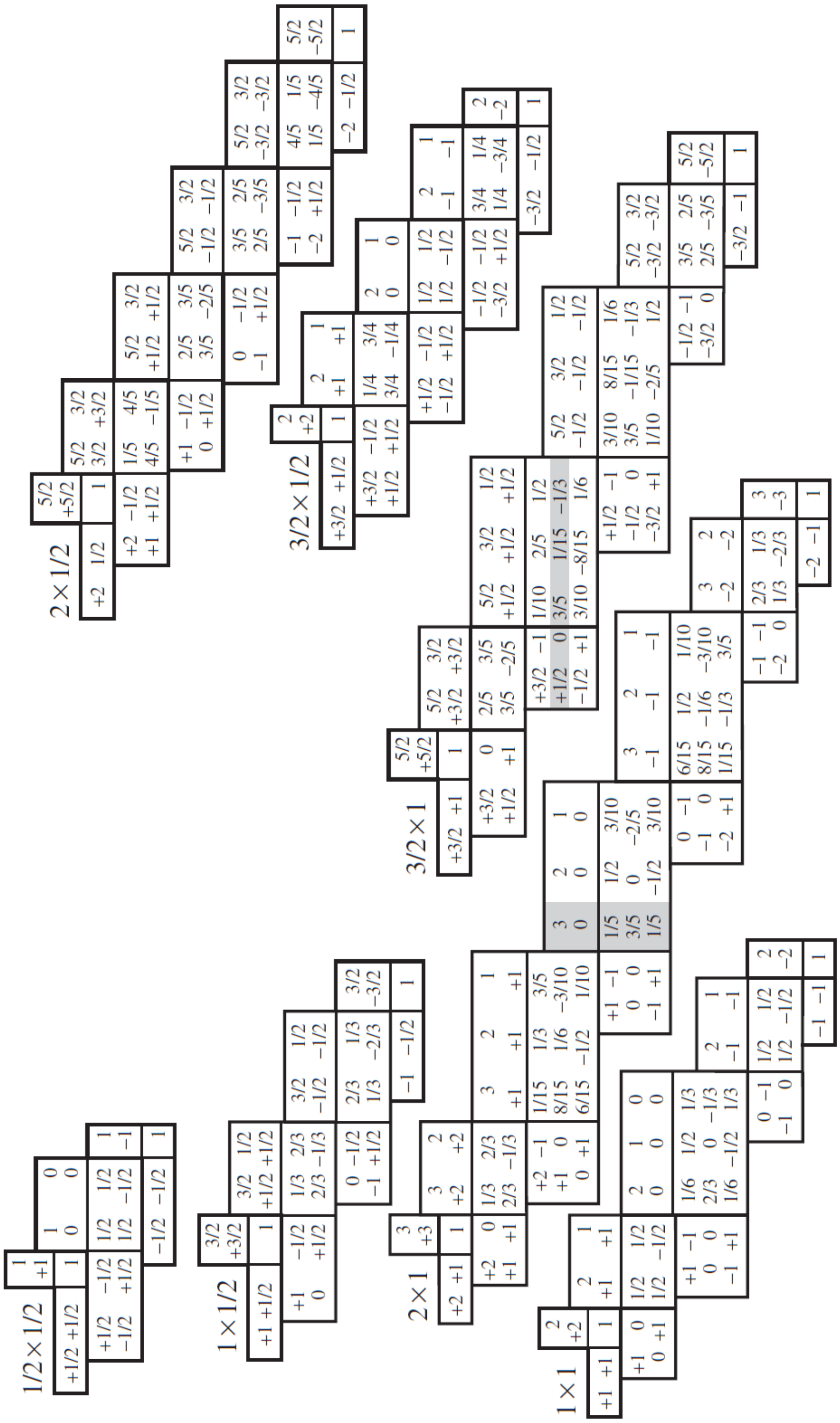


Table 4.8: *Clebsch–Gordan coefficients. (A square root sign is understood for every entry; the minus sign, if present, goes* outside *the radical.)*

第 1 题（15 分）．二维谐振子$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$为两个独立的一维谐振子（参见第一页）之和，其中$m,\omega$为正的常量，$\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$，$\hat{p}_y = -i\hbar\partial_y$。考虑微扰$\hat{V} = \lambda x^2 y^2$，其中$\lambda$为实的“小量”。

(a)（5 分）用微扰论近似计算$\hat{H}_0 + \hat{V}$的基态能量到λ^2阶。

(b)（10 分）考虑“变分哈密顿量”$\hat{H}(\Omega) = \frac{\hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2+y^2)$，$\Omega$为正的参数。记$\hat{H}(\Omega)$的归一化基态为$|\Psi(\Omega)\rangle$。计算能量期待值 $E(\Omega) = \langle\Psi(\Omega)|(\hat{H}_0+\hat{V})|\Psi(\Omega)\rangle$，**近似**求出最小值$\min_\Omega E(\Omega)$到$\lambda^2$阶。[提示：将$\Omega$对$\lambda$展开]

解答：

(a) 定义x和y方向的升降算符，$\hat{a}_{x,\pm} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} \mp \frac{i\hat{p}_x}{m\omega})$，$\hat{a}_{y,\pm} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{y} \mp \frac{i\hat{p}_y}{m\omega})$，则$[\hat{a}_{i,-}, \hat{a}_{j,+}] = \delta_{ij}$，

$\hat{H}_0$本征态为$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)$，本征值$E_{n_x,n_y} = \hbar\omega(n_x+n_y+1)$；

$\psi_{n_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{n_x!}}(\hat{a}_{x,+})^{n_x}\psi_0(x)$，$\psi_{n_y}(y) = \frac{1}{\sqrt{n_x!}}(\hat{a}_{y,+})^{n_y}\psi_0(y)$，$\psi_0$为一维谐振子基态，

$\hat{V} = \lambda x^2 y^2 = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2(\hat{a}_{x,+}\hat{a}_{x,+} + \hat{a}_{x,-}\hat{a}_{x,-} + 2\hat{a}_{x,+}\hat{a}_{x,-} + 1)(\hat{a}_{y,+}\hat{a}_{y,+} + \hat{a}_{y,-}\hat{a}_{y,-} + 2\hat{a}_{y,+}\hat{a}_{y,-} + 1)$，

$$\hat{V}|\psi_{0,0}\rangle = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\left(|\psi_{0,0}\rangle + \sqrt{2}|\psi_{2,0}\rangle + \sqrt{2}|\psi_{0,2}\rangle + 2|\psi_{2,2}\rangle\right)$$

根据二阶微扰的公式，$\hat{H}_0 + \hat{V}$的基态能量近似为

$$\hbar\omega + \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 + \left[\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\right]^2\left(\frac{|\sqrt{2}|^2}{-2\hbar\omega} + \frac{|\sqrt{2}|^2}{-2\hbar\omega} + \frac{2^2}{-4\hbar\omega}\right) = \hbar\omega + \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 - \lambda^2\frac{3}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^4$$

(b) $E(\Omega) = \langle\Psi(\Omega)|(\hat{H}_0+\hat{V})|\Psi(\Omega)\rangle = \langle\Psi(\Omega)|(\hat{H}_0 - \hat{H}(\Omega) + \hat{V})|\Psi(\Omega)\rangle + \langle\Psi(\Omega)|\hat{H}(\Omega)|\Psi(\Omega)\rangle$

$= \langle\Psi(\Omega)|\left(\frac{m(\omega^2-\Omega^2)}{2}(x^2+y^2) + \lambda x^2y^2\right)|\Psi(\Omega)\rangle + \hbar\Omega$

$= \frac{m(\omega^2-\Omega^2)}{2}\cdot\frac{\hbar}{m\Omega} + \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\Omega}\right)^2 + \hbar\Omega = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{\omega^2}{\Omega} + \Omega\right) + \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\Omega}\right)^2$ （该结果约 3 分）

极值条件为 $\frac{\mathrm{d}E(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\hbar}{2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} - \frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3}\cdot\frac{\omega^3}{\Omega^3}\right) = 0$ （该结果约 1 分）

设 $\Omega = \omega(1 + a\lambda + b\lambda^2 + O(\lambda^3))$，则$\frac{\omega}{\Omega} = 1 - a\lambda + (a^2-b)\lambda^2 + O(\lambda^3)$，

极值条件为

$$1-(1-2a\lambda+(3a^2-2b)\lambda^2)-\frac{\hbar}{m^2\omega^3}\cdot(\lambda-3a\lambda^2)+O(\lambda^3)$$
$$=\left(2a-\frac{\hbar}{m^2\omega^3}\right)\lambda+\left(3a\frac{\hbar}{m^2\omega^3}-3a^2+2b\right)\lambda^2+O(\lambda^3)=0$$

比较各阶系数得 （该结果约 2 分）

$$a=\frac{\hbar}{2m^2\omega^3},\qquad b=-\frac{3\hbar^2}{8m^4\omega^6}$$

最低能量约为 （最后结果约 4 分）

$$\min_{\Omega}E(\Omega)=\frac{1}{2}\hbar\omega\left(\frac{\omega}{\Omega}+\frac{\Omega}{\omega}\right)+\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\cdot\frac{\omega^2}{\Omega^2}=\frac{1}{2}\hbar\omega(2+a^2\lambda^2)+\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2(\lambda-2a\lambda^2)+O(\lambda^3)$$
$$=\hbar\omega+\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2-\lambda^2\frac{2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^4+O(\lambda^3)$$

注：变分法结果的 1 阶与微扰论相同，2 阶高于微扰论

学生的解法 2：迭代求解Ω（需选择合适的迭代公式），

极值条件$1-\frac{\omega^2}{\Omega^2}-\frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3}\cdot\frac{\omega^3}{\Omega^3}=0$可以化为 $\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2=\left(1+\frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3}\cdot\frac{\omega}{\Omega}\right)$，由此得迭代方程

$$\frac{\Omega}{\omega}=\sqrt{1+\frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3}\cdot\frac{\omega}{\Omega}}$$

0 阶解：$\frac{\Omega}{\omega}=1+O(\lambda)$，因此$\frac{\omega}{\Omega}=1+O(\lambda)$，代入右边得，

1 阶解：$\frac{\Omega}{\omega}=1+\frac{\lambda\hbar}{2m^2\omega^3}+O(\lambda^2)$，因此$\frac{\omega}{\Omega}=1-\frac{\lambda\hbar}{2m^2\omega^3}+O(\lambda^2)$，代入右边得，

2 阶解：$\frac{\Omega}{\omega}=1+\frac{\lambda\hbar}{2m^2\omega^3}-\frac{3}{8}\left(\frac{\lambda\hbar}{m^2\omega^3}\right)^2+O(\lambda^3)$，再代入$E(\Omega)$

学生的解法 3：直接最小化$E(\Omega)$，

$E\left(\Omega=\omega\left(1+a\lambda+b\lambda^2+O(\lambda^3)\right)\right)$

$=\frac{\hbar\omega}{2}[(1-a\lambda+(a^2-b)\lambda^2)+(1+a\lambda+b\lambda^2)]+\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2(1-2a\lambda)+O(\lambda^3)$

$=\hbar\omega+\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\hbar\omega}{2}a^2-2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2a\right)+O(\lambda^3)$

而 $\frac{\hbar\omega}{2}a^2-2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2a=\frac{\hbar\omega}{2}\left(a-\frac{\hbar}{2m^2\omega^3}\right)^2-\frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\hbar}{2m^2\omega^3}\right)^2\geq-\frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\hbar}{2m^2\omega^3}\right)^2$，

因此最小值为 $\hbar\omega+\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2-\lambda^2\frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\hbar}{2m^2\omega^3}\right)^2+O(\lambda^3)$，当 $a=\frac{\hbar}{2m^2\omega^3}$ 时取得。

第 2 题（20 分）．考虑一维谐振子$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$（参见第一页），及含时微扰$\hat{V}(t) = -f(t)\hat{x}$。这里$f(t)$是一个周期为$T$的方波，$f(t) = \begin{cases} +f, & nT < t < (n+1/2)T; \\ -f, & (n+1/2)T < t < (n+1)T. \end{cases}$ 其中n为任意整数，f为正的“小量”。设初态$|\psi(\mathrm{t}=0)\rangle = |\psi_0\rangle$为$\hat{H}_0$的基态，此后的时间演化满足$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \left(\hat{H}_0 + \hat{V}(t)\right)|\psi(t)\rangle$。

(a)（5 分）利用含时微扰论方法近似计算跃迁到$\hat{H}_0$的第一激发态$|\psi_1\rangle$的概率$P_{0\to1}(t) \equiv |\langle\psi_1|\psi(t)\rangle|^2$，保留关于小量$f$的最低阶的非零项。[注：结果显然也是分段函数]

(b)（10 分）在(a)中近似下，计算跃迁速率，$\Gamma_{0\to1} \equiv \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}P_{0\to1}(t)$。该结果有可能发散（微扰与这个跃迁“共振”），求共振时前述参量f, T, m, ω需要满足的条件。

(c)（5 分）精确地求出$|\psi(t=T)\rangle$和$P_{0\to1}(t=T)$。

解答：

(a) 跃迁振幅 $c_1(t) \equiv e^{iE_1 t/\hbar}\langle\psi_1|\psi(t)\rangle$ 的 Dyson 级数的第 0 阶为零，

第 1 阶不为零，涉及的矩阵元为 $\langle\psi_1|\hat{x}|\psi_0\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}\langle\psi_1|(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)|\psi_0\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega}$, 因此

$$c_1(t) \approx 0 - \frac{\sqrt{\hbar/2m\omega}}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t$$

令$N = \lfloor t/T \rfloor$,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{NT} e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t + \int_{NT}^t e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\omega T n}\right)\int_0^T e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t + e^{i\omega TN}\int_0^{t-NT} e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\int_0^T e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} e^{i\omega t} f\mathrm{d}t - \int_{\frac{T}{2}}^T e^{i\omega t} f\mathrm{d}t = f\frac{e^{i\omega T/2}-1}{i\omega} - f\frac{e^{i\omega T} - e^{i\omega T/2}}{i\omega} = \frac{if}{\omega}\left(1 - e^{i\omega T/2}\right)^2$$

对$0 \le t' < T$,

$$\int_0^{t'} e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} f\dfrac{e^{i\omega t'}-1}{i\omega}, & 0 \le t' < T/2; \\ f\dfrac{e^{i\omega T/2}-1}{i\omega} - f\dfrac{e^{i\omega t'} - e^{i\omega T/2}}{i\omega}, & T/2 \le t' < T. \end{cases}$$

综上

$$c_1(t) \approx -\frac{f\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}{\hbar\omega}\left(\frac{1-e^{i\omega TN}}{1-e^{i\omega T}}\right)\left(1-e^{i\omega T/2}\right)^2$$

$$-\frac{f\sqrt{\hbar/2m\omega}}{\hbar\omega}e^{i\omega TN}\begin{cases}(1-e^{i\omega(t-NT)}), & NT \le t < NT+T/2; \\ (e^{i\omega(t-NT)}-2e^{i\omega T/2}+1), & NT+T/2 \le t < (N+1)T.\end{cases}$$

最后 $P_{0\to1}(t) = |c_1(t)|^2$，

注：$c_1(t)$也有其它表达式（将$f(t)$看成常数减去周期脉冲），但不方便分析共振，如

$$c_1(t) \approx \frac{f\sqrt{\hbar/2m\omega}}{\hbar\omega}\begin{cases}\left(e^{i\omega t}-1\right)-2\left(\frac{1-e^{i\omega TN}}{1-e^{i\omega T}}\right)\left(e^{i\omega T}-e^{i\omega T/2}\right), & NT \le t < NT+T/2; \\ \left(1-e^{i\omega t}\right)+2\left(\frac{1-e^{i\omega TN}}{1-e^{i\omega T}}\right)\left(e^{i\omega T/2}-1\right), & NT+T/2 \le t < (N+1)T.\end{cases}$$

原表达式中的 $\frac{\left(1-e^{i\omega T/2}\right)^2}{1-e^{i\omega T}}$也可以化为 $\frac{1-e^{i\omega T/2}}{1+e^{i\omega T/2}} = -i\tan\left(\frac{\omega T}{4}\right)$。

(b) 绝大部分情况（非共振情况）下(a)中解得的$|c_1(t)|$为有限值，跃迁速率$\Gamma_{0\to1}$为零；

对$t\to\infty$情况，$|c_1(t)|$发散当且仅当$e^{i\omega T}=1$且$e^{i\omega T/2}\neq 1$，即

共振条件为$\omega T = 2\pi(2n+1)$，n为非负整数。

（$e^{i\omega T/2}\neq 1$的条件，即$\frac{\omega T}{2\pi}$必须为奇数的条件约 3 分）

直观上即方波包含的某个高阶简谐波的频率与ω相同。

$$\Gamma_{0\to1} \equiv \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\left|\frac{f\sqrt{\hbar/2m\omega}}{\hbar\omega}\left(\frac{1-e^{i\omega TN}}{1-e^{i\omega T}}\right)\left(1-e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)^2\right|^2 = \frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\left|\left(\frac{1-e^{i\omega TN}}{1-e^{i\omega T}}\right)\left(1-e^{\frac{i\omega T}{2}}\right)^2\right|$$

$$= \frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\left(\frac{\sin^2(\omega TN/2)}{\sin^2(\omega T/2)}\right)\cdot 16\sin^4(\omega T/4) = \frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\sum_{n\ge0}\frac{32\pi}{T}\delta\big(\omega T-2\pi(2n+1)\big)$$

$$= \frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\sum_{n\ge0}\frac{32\pi}{T^2}\delta\left(\omega-\frac{2\pi(2n+1)}{T}\right) = \begin{cases}0, & \omega T\neq 2\pi(2n+1); \\ \text{“}\infty\text{”}, & \omega T = 2\pi(2n+1).\end{cases}$$

（不要求以δ函数表示的形式）

(c) 每个时刻的哈密顿量都是谐振子，量子态始终为“相干态”，可以直接应用相干态的时间演化结果（作业题 3.42）

第一个周期的前半段（$0<t<T/2$）内，哈密顿量为

$$\hat{H}_{前} = \hat{H}_0 - f\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}-\frac{f}{m\omega^2}\right)^2-\frac{f^2}{2m\omega^2}$$

定义相应的升降算符$\hat{a}_{前\mp} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\left(\hat{x}-\frac{f}{m\omega^2}\right)\pm\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) = \hat{a}_\mp - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}$，

初态$|\psi(t=0)\rangle = |\psi_0\rangle$满足$\hat{a}_-|\psi_0\rangle = 0$即$\left(\hat{a}_{前-}+\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}\right)|\psi_0\rangle = 0$，因此初态为$\hat{H}_{前}$的相干态，

$$|\psi(t=0)\rangle = \left|\hat{a}_{\text{前}-} = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}\right\rangle$$

根据作业题 3.42，$t=T/2$时刻的态为

$$|\psi(t=T/2)\rangle = e^{-iE_{\text{前}\,0}T/2\hbar}\left|\hat{a}_{\text{前}-} = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}e^{-i\omega T/2}\right\rangle$$

$E_{\text{前}\,0} = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{f^2}{2m\omega^2}$为$\hat{H}_{\text{前}}$的基态能量

对于后半段（$T/2<t<T$），哈密顿量为

$$\hat{H}_{\text{后}} = \hat{H}_0 + f\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}+\frac{f}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{f^2}{2m\omega^2}$$

定义相应的升降算符$\hat{a}_{\text{后}\mp} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\left(\hat{x}+\frac{f}{m\omega^2}\right)\pm\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) = \hat{a}_{\mp} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2} = \hat{a}_{\text{前}\mp} + 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}$，

$t=T/2$时刻的态为

$$|\psi(t=T/2)\rangle = e^{-iE_{\text{前}\,0}T/2\hbar}\left|\hat{a}_{\text{后}-} = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2} - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}e^{-i\omega T/2}\right\rangle$$

因此

$$|\psi(t=T)\rangle = e^{-iE_{\text{前}\,0}T/2\hbar}e^{-iE_{\text{后}\,0}T/2\hbar}\left|\hat{a}_{\text{后}-} = \left(2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2} - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}e^{-i\omega T/2}\right)e^{-i\omega T/2}\right\rangle$$

$$= e^{-i\omega T/2}e^{if^2T/2\hbar m\omega^2}\left|\hat{a}_{-} = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}(1-e^{-i\omega T/2})^2\right\rangle$$

利用相干态的显式形式（HW3 附加题(a)或作业题 3.42）

$$|\psi(t=T)\rangle = e^{-i\omega T/2}e^{if^2T/2\hbar m\omega^2}\exp\left(-\frac{4f^2}{\hbar m\omega^3}\sin^4\left(\frac{\omega T}{4}\right)\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}(1-e^{-i\omega T/2})^2\hat{a}_{+}\right)|\psi_0\rangle$$

$$= e^{-i\omega T/2}e^{if^2T/2\hbar m\omega^2}\exp\left(-\frac{4f^2}{\hbar m\omega^3}\sin^4\left(\frac{\omega T}{4}\right)\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}(1-e^{-i\omega T/2})^2\right)^n}{\sqrt{n!}}|\psi_n\rangle$$

因此

$$P_{0\to1}(T) \equiv |\langle\psi_1|\psi(T)\rangle|^2 = \exp\left(-\frac{8f^2}{\hbar m\omega^3}\sin^4\left(\frac{\omega T}{4}\right)\right)\left|-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}\left(1-e^{-\frac{i\omega T}{2}}\right)^2\right|^2$$

$$= \exp\left(-\frac{8f^2}{\hbar m\omega^3}\sin^4\left(\frac{\omega T}{4}\right)\right)\cdot\frac{8f^2}{\hbar m\omega^3}\sin^4\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

其f^2阶与微扰论相同。

注：按上述方法可以递推求出

$$|\psi(t=NT)\rangle = e^{-i\omega NT/2}e^{if^2NT/2\hbar m\omega^2}\left|\hat{a}_{-} = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{f}{m\omega^2}(1-e^{-i\omega T/2})^2\left(\frac{1-e^{-i\omega TN}}{1-e^{-i\omega T}}\right)\right\rangle$$

第 3 题（30 分）. 一些粒子被限制在半径为R的圆环上运动，圆环上坐标用角度$\theta \in [0,2\pi)$表示。单个粒子（用下标$\dots_{单}$标记单粒子相关量）的哈密顿量为自由粒子动能 $\hat{H}_{单} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\partial_\theta^2$，其中正的常量$m$为粒子质量。单粒子波函数$\psi_{单}(\theta)$满足周期性$\psi_{单}(\theta) = \psi_{单}(\theta + 2\pi)$，其归一化条件为$\int_0^{2\pi} \left|\psi_{单}(\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta = 1$。考虑 3 个无自旋的粒子（用下标 1, 2, 3 标记），其哈密顿量为 $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(\partial_{\theta_1}^2 + \partial_{\theta_2}^2 + \partial_{\theta_3}^2\right)$，其波函数的归一化条件为$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_3\, |\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)|^2 = 1$。

(a) (10 分) 分别对 3 个全同**玻色子**和 3 个全同**费米子**，求$\hat{H}_0$的基态和第一激发态的能量和波函数（可以用单粒子本征基表示）。

(b) (10 分) 圆环上两个点的"距离平方"为$D(\theta_1,\theta_2) \equiv 4R^2\left(\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^2$（注意这个定义具有对于$\theta_1$和$\theta_2$的周期性）。**分别**对 (a) 中的 3 玻色子基态和 3 费米子基态计算，$D(\theta_1,\theta_2) \geq 2R^2$且$D(\theta_1,\theta_3) \geq 2R^2$且$D(\theta_2,\theta_3) \geq 2R^2$的概率[可以记为$P^{(B)}$(三粒子两两不同象限)和$P^{(F)}$(三粒子两两不同象限)]。

(c) (10 分) 考虑不含时微扰$\hat{V} = \lambda \cdot [D(\theta_1,\theta_2) + D(\theta_1,\theta_3) + D(\theta_2,\theta_3)]$，其中$\lambda$为实的"小量"。对 3 玻色子和 3 费米子两种情况，**分别**近似计算$\hat{H}_0 + \hat{V}$的基态能量到λ^2阶。

解答：

下面用平面波形式的单粒子本征基 $\varphi_k(\theta) = \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{2\pi}}$，$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2mR^2}$，$k \in \mathbb{Z}$。

用驻波形式单粒子本征基的表达式这里没有列出。

(a) 玻色子（约 5 分）：

基态：能量 $E_{0,0,0} = 0$，

$\left|\psi_{0,0,0}^{(B)}\right\rangle = |\varphi_0\rangle|\varphi_0\rangle|\varphi_0\rangle$，即$\psi_{0,0,0}^{(B)}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (2\pi)^{-3/2}$，

第一激发态：能量 $E_{0,0,1} = E_{-1,0,0} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}$，2 重简并，

$\left|\psi_{0,0,1}^{(B)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\varphi_0\rangle|\varphi_0\rangle|\varphi_1\rangle + |\varphi_0\rangle|\varphi_1\rangle|\varphi_0\rangle + |\varphi_1\rangle|\varphi_0\rangle|\varphi_0\rangle\right)$，

即$\psi_{0,0,1}^{(B)}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3}\right)$；

$\left|\psi_{-1,0,0}^{(B)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\varphi_{-1}\rangle|\varphi_0\rangle|\varphi_0\rangle + |\varphi_0\rangle|\varphi_{-1}\rangle|\varphi_0\rangle + |\varphi_0\rangle|\varphi_0\rangle|\varphi_{-1}\rangle\right)$，

即$\psi_{-1,0,0}^{(B)}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2} + e^{-i\theta_3}\right)$；

费米子（约 5 分）：$\left|\psi_{k_1,k_2,k_3}^{(F)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle + |\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle|\varphi_{k_1}\rangle + |\varphi_{k_3}\rangle|\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle - |\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle - |\varphi_{k_3}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_1}\rangle - |\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle\right)$，

基态：能量 $E_{-1,0,1} = \frac{\hbar^2}{mR^2}$，非简并，

$\left|\psi^{(F)}_{-1,0,1}\right\rangle$，即$\psi^{(F)}_{-1,0,1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\frac{2i}{\sqrt{6}}(\sin(\theta_3-\theta_1)+\sin(\theta_2-\theta_3)+\sin(\theta_1-\theta_2))$，

第一激发态：能量 $E_{-2,-1,0} = E_{-2,0,1} = E_{-1,0,2} = E_{0,1,2} = \frac{5\hbar^2}{2mR^2}$，4 重简并，

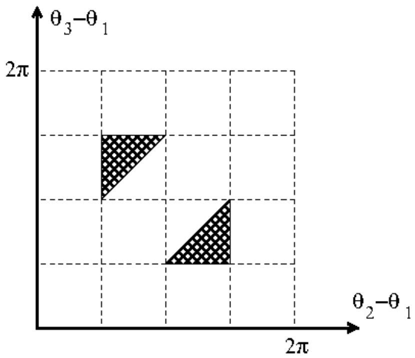
$\left|\psi^{(F)}_{-2,-1,0}\right\rangle$，$\left|\psi^{(F)}_{-2,-1,0}\right\rangle$，$\left|\psi^{(F)}_{-2,-1,0}\right\rangle$，$\left|\psi^{(F)}_{-2,-1,0}\right\rangle$，

(b) $D(\theta_i,\theta_j) \geq 2R^2$ 等价于 $\theta_j \in \left[\theta_i+\frac{\pi}{2}, \theta_i+\frac{3\pi}{2}\right] \bmod 2\pi$，即$\theta_i,\theta_j$不在同一个“象限”（1/4 个圆）。

在波函数$\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$下，三粒子两两不同象限的概率为

$$\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_{\theta_1+\frac{\pi}{2}}^{\theta_1+\pi} d\theta_2 \int_{\theta_2+\frac{\pi}{2}}^{\theta_1+\frac{3\pi}{2}} d\theta_3 |\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)|^2 + \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_{\theta_1+\pi}^{\theta_1+\frac{3\pi}{2}} d\theta_2 \int_{\theta_1+\frac{\pi}{2}}^{\theta_2-\frac{\pi}{2}} d\theta_3 |\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)|^2$$

积分区域如右图



可做如下简化：

平移对称性（所有$\theta_i \to \theta_i + \phi$，哈密顿量不变），3 粒子态都形如

$\psi^{(B/F)}_{k_1,k_2,k_3}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = e^{i\theta_1(k_1+k_2+k_3)} f^{(B/F)}_{k_1,k_2,k_3}\left(\theta_{1,2} \equiv \theta_1-\theta_2, \theta_{3,1} \equiv \theta_3-\theta_1\right)$，

对θ_1积分仅得2π因子；

3 粒子基态都具有空间反演对称性，$\psi(-\theta_1,-\theta_2,-\theta_3) = \pm\psi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$；
两个积分对应的构型可以用空间反演和平移联系，因此两个积分相等。

根据上面考虑，结果可以简化为 2 重积分 $4\pi\int_{-\pi}^{-\pi/2} d\theta_{1,2}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta_{1,2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta_{3,1}|\psi|^2$.

玻色子基态：$\psi^{(B)}_{0,0,0}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (2\pi)^{-3/2}$，

概率为 $\frac{1}{2\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta_{1,2}\int_{\frac{3\pi}{2}-\theta_{1,2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta_{3,1}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta_{1,2}\,(\pi+\theta_{1,2})\right) = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16}$。

费米子基态：下面为了简化符号，记 $e^{i(p\theta_{3,1}+q\theta_{1,2})} \equiv X_{p,q} = X^*_{-p,-q}$，

$$\psi^{(F)}_{-1,0,1} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(X_{1,0}-X_{-1,0}+X_{-1,-1}-X_{1,1}+X_{0,1}-X_{0,-1}\right)$$

先计算一般的积分 $I_{p,q} \equiv \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta_{1,2}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta_{1,2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta_{3,1} X_{p,q} = I^*_{-p,-q}$，

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{-\pi/2} d\theta_{1,2}\, e^{iq\theta_{1,2}}(\pi+\theta_{1,2}), & p=0; \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{-\pi/2} d\theta_{1,2}\, e^{iq\theta_{1,2}}\frac{e^{ip\frac{3\pi}{2}} - e^{ip\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{1,2}\right)}}{ip}, & p \neq 0. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8}, & p=0,q=0; \\ \dfrac{\pi}{2iq}(-i)^q+\dfrac{(-i)^q-(-1)^q}{q^2}, & p=0,q\neq 0; \\ \dfrac{\pi}{2ip}(-i)^p+\dfrac{(-i)^p-(-1)^p}{p^2}, & p\neq 0,q=0; \\ \dfrac{(i)^p-(-1)^p}{p^2}-\dfrac{\pi}{2ip}(i)^p, & p\neq 0,q=p; \\ \dfrac{(-1)^q-(-i)^q}{pq}(-i)^p+\dfrac{(-i)^{q-p}-(-1)^{q-p}}{p(q-p)}(i)^p, & p\neq 0,q\neq 0,q\neq p. \end{cases}$$

由$\theta_1,\theta_2,\theta_3$的轮换对称性可得，$4\pi\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta_{1,2}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta_{1,2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta_{3,1}\left|\psi_{-1,0,1}^{(F)}\right|^2$

$$=3\cdot\frac{1}{12\pi^2}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta_{1,2}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta_{1,2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta_{3,1}\left(X_{1,0}-X_{-1,0}\right)\left(X_{1,0}-X_{-1,0}+X_{-1,-1}-X_{1,1}+X_{0,1}-X_{0,-1}\right)^*$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\mathrm{Re}\left(I_{0,0}-I_{2,0}+I_{2,1}-I_{0,-1}+I_{1,-1}-I_{1,1}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\cdot\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{-1}{2}+1-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+1-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{2\pi}$$

注：如果不使用$\theta_1,\theta_2,\theta_3$的轮换对称性，$4\pi\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta_{1,2}\int_{\frac{\pi}{2}-\theta_{1,2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta_{3,1}\left|\psi_{-1,0,1}^{(F)}\right|^2$

$$=\frac{1}{12\pi^2}\cdot 2\mathrm{Re}\left(3I_{0,0}-I_{2,0}-I_{0,2}-I_{-2,-2}+2I_{2,1}+2I_{-1,-2}+2I_{-1,1}-2I_{0,-1}-2I_{1,1}-2I_{-1,0}\right)$$

$$=\frac{1}{12\pi^2}\cdot 2\left(3\cdot\frac{\pi^2}{8}-\frac{-1}{2}-\frac{-1}{2}-\frac{-1}{2}+2\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 1-2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)-2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

最后，

$P^{(B)}(\text{三粒子两两不同象限})=\frac{1}{16}$ （约 5 分）

$P^{(F)}(\text{三粒子两两不同象限})=\frac{1}{16}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{2\pi}$ （约 5 分）

（c）为简化记号，定义$X_{p,q,u}=e^{i(p\theta_1+q\theta_2+u\theta_3)}$

微扰项为

$$\hat{V}=\lambda R^2\left(6-\left(X_{1,-1,0}+X_{-1,1,0}+X_{0,1,-1}+X_{0,-1,1}+X_{-1,0,1}+X_{1,0,-1}\right)\right)$$

对玻色子

$$\hat{V}\psi_{0,0,0}^{(B)}=6\lambda R^2\psi_{0,0,0}^{(B)}-\sqrt{6}\lambda R^2\psi_{-1,0,1}^{(B)}$$

因此 3 玻色子情况$\hat{H}_0+\hat{V}$的基态能量近似为

$$0+6\lambda R^2+\frac{\left|-\sqrt{6}\lambda R^2\right|^2}{0-\frac{\hbar^2}{mR^2}}=6\lambda R^2-\frac{6\lambda^2R^4m}{\hbar^2}$$ （约 5 分）

对费米子

$$\hat{V}\psi^{(F)}_{-1,0,1} = 6\lambda R^2\psi^{(F)}_{-1,0,1} - \lambda R^2\left(\psi^{(F)}_{0,-1,1} + \psi^{(F)}_{-2,1,1} + \psi^{(F)}_{-1,1,0} + \psi^{(F)}_{-1,-1,2} + \psi^{(F)}_{-2,0,2} + \psi^{(F)}_{0,0,0}\right)$$

$$= 8\lambda R^2\psi^{(F)}_{-1,0,1} - \lambda R^2\psi^{(F)}_{-2,0,2}$$

因此 3 费米子情况$\hat{H}_0 + \hat{V}$的基态能量近似为

$$\frac{\hbar^2}{mR^2} + 8\lambda R^2 + |\lambda R^2|^2\left(\frac{1}{\frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{8\hbar^2}{2mR^2}}\right) = \frac{\hbar^2}{mR^2} + 8\lambda R^2 - \frac{\lambda^2 R^4 m}{3\hbar^2}$$ （约 5 分）

注：这里应用了下面简化矩阵元计算的技术（HW7 附加题 3(c)），

“合法”的全同粒子算符$\hat{O}$与 $\widehat{\text{对称化}}$、$\widehat{\text{反对称化}}$ 算符对易，因此

$$\hat{O}\psi^{(F)}_{k_1,k_2,k_3} = \hat{O}\,\widehat{\text{反对称化}}\left(|\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle\right) = \widehat{\text{反对称化}}\left(\hat{O}\left(|\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle\right)\right)$$

而 $X_{p,q,u}|\varphi_{k_1}\rangle|\varphi_{k_2}\rangle|\varphi_{k_3}\rangle = |\varphi_{k_1+p}\rangle|\varphi_{k_2+q}\rangle|\varphi_{k_3+u}\rangle$ （对平面波本征基）

第 4 题（25 分）. 将第 3 题中的三个无自旋粒子变为有自旋 1/2（参见第一页）的粒子，自旋角动量算符分别记为$\hat{\boldsymbol{S}}_{1,2,3}$。无相互作用哈密顿量仍为第 3 题中的$\hat{H}_0$，波函数$\psi(\theta_1, s_1; \theta_2, s_2; \theta_3, s_3)$的自变量包含粒子自旋状态$s_{1,2,3}=\uparrow,\downarrow$，归一化条件为$\sum_{s_{1,2,3}=\uparrow,\downarrow}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\,|\psi(\theta_1, s_1; \theta_2, s_2; \theta_3, s_3)|^2=1$

(a)（10 分）**分别**对 3 个全同自旋 1/2 的**玻色子**和**费米子**，求$\hat{H}_0$的基态能量和波函数（建议用单粒子本征基和 Dirac 符号表示）。

(b)（10 分）考虑不含时微扰$\hat{V}=\lambda\cdot\left(\delta(\theta_1-\theta_2)\hat{S}_{1,x}\hat{S}_{2,x}+\delta(\theta_1-\theta_3)\hat{S}_{1,x}\hat{S}_{3,x}+\delta(\theta_2-\theta_3)\hat{S}_{2,x}\hat{S}_{3,x}\right)$，其中$\lambda$为实的“小量”。$\hat{S}_{i,x}$为第$i$个粒子自旋角动量算符的$x$分量。**分别**对(a)中的 3 个全同自旋 1/2 的**玻色子**和**费米子**，近似计算$\hat{H}_0+\hat{V}$的基态能量到λ^1阶。[注：这里的 Dirac δ-函数其实应该视为周期扩展得到的“comb 函数”，$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(\theta_1-\theta_2-2n\pi)$][提示：某些对称性可以简化计算]

(c)（5 分）从(a)中的 3 费米子基态中“取出”2 个粒子（不失一般性，设取出的粒子指标为1,2）并测量其总自旋角动量，即测量$\left(\hat{\boldsymbol{S}}_1+\hat{\boldsymbol{S}}_2\right)^2$。求可能的测量结果与概率。

解答：

(a)

自旋 1/2 玻色子：（约 5 分）

3 个自旋 1/2 玻色子的基态为 4 重简并的总自旋 3/2 态，能量为$E_{0,0,0}=0$，

本征态为 $\left|\psi^{(B,S=1/2)}_{0s_1,0s_2,0s_3}\right\rangle=\left|\psi^{(B)}_{0,0,0}\right\rangle|\chi(s_1,s_2,s_3)\rangle$，

这里$\left|\psi^{(B)}_{0,0,0}\right\rangle$是第 3 题(a)中无自旋的玻色子基态，$\psi^{(B)}_{0,0,0}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(2\pi)^{-3/2}$

$\chi(s_1,s_2,s_3)$为对称化的自旋直积态(总自旋 3/2 态)，$s_{1,2,3}=\uparrow,\downarrow$，且“$s_1\le s_2\le s_3$”；

$$|\chi(\uparrow,\uparrow,\uparrow)\rangle=|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle=|S=3/2,S_z=3/2\rangle$$

$$|\chi(\uparrow,\uparrow,\downarrow)\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle+|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle)=|S=3/2,S_z=1/2\rangle$$

$$|\chi(\uparrow,\downarrow,\downarrow)\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle+|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle+|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle)=|S=3/2,S_z=-1/2\rangle$$

$$|\chi(\downarrow,\downarrow,\downarrow)\rangle=|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle=|S=3/2,S_z=-3/2\rangle$$

自旋 1/2 费米子：（约 5 分）

3 个自旋 1/2 费米子的基态为 4 重简并，能量为$E_{0,0,1}=E_{0,0,-1}=\frac{\hbar^2}{2mR^2}$，

本征态为 $\left|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{-1\uparrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$，$\left|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{-1\downarrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$，$\left|\psi^{(F,S=1/2)}_{0\uparrow,0\downarrow,1\uparrow}\right\rangle$，$\left|\psi^{(F,S=1/2)}_{0\uparrow,0\downarrow,1\downarrow}\right\rangle$，

$\left|\psi^{(F,S=1/2)}_{k_1,s_1;k_2,s_2;k\_3,s_3}\right\rangle=$

$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(|\varphi_{k_1},s_1\rangle|\varphi_{k_2},s_2\rangle|\varphi_{k_3},s_3\rangle+|\varphi_{k_2},s_2\rangle|\varphi_{k_3},s_3\rangle|\varphi_{k_1},s_1\rangle+|\varphi_{k_3},s_3\rangle|\varphi_{k_1},s_1\rangle|\varphi_{k_2},s_2\rangle-\right.$

$\left.|\varphi_{k_1},s_1\rangle|\varphi_{k_3},s_3\rangle|\varphi_{k_2},s_2\rangle-|\varphi_{k_3},s_3\rangle|\varphi_{k_2},s_2\rangle|\varphi_{k_1},s_1\rangle-|\varphi_{k_1},s_1\rangle|\varphi_{k_3},s_3\rangle|\varphi_{k_2},s_2\rangle\right)$；

或更具体为

$$\left|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{-1\uparrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle=(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left((e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_2})|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+(e^{-i\theta_2}-e^{-i\theta_3})|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+(e^{-i\theta_3}-e^{-i\theta_1})|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\left|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{-1\downarrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle=(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left((e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_3})|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+(e^{-i\theta_2}-e^{-i\theta_1})|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle+(e^{-i\theta_3}-e^{-i\theta_2})|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

$$\left|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{0\uparrow,0\downarrow,1\uparrow}\right\rangle=(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left((e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2})|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3})|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+(e^{i\theta_3}-e^{i\theta_1})|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\left|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{0\uparrow,0\downarrow,1\downarrow}\right\rangle=(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left((e^{i\theta_1}-e^{i\theta_3})|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+(e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1})|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle+(e^{i\theta_3}-e^{i\theta_2})|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

(b) 似乎对玻色子和费米子分别都是有4×4一阶久期方程的简并微扰问题，但是对称性可以直接确定“good states”即一阶久期方程的本征态，

$\hat{H}_0$在自旋旋转下不变，可以用一个自旋旋转将$\hat{V}$中涉及的$\hat{S}_{i,x}$都变为$\hat{S}_{i,z}$，本征值不变（或者可以在(a)中构造本征基时使用$\hat{S}_{i,x}=\pm\frac{1}{2}$的单粒子本征基），

对$\hat{V}_z=\lambda\cdot\left(\delta(\theta_1-\theta_2)\hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,z}+\delta(\theta_1-\theta_3)\hat{S}_{1,z}\hat{S}_{3,z}+\delta(\theta_2-\theta_3)\hat{S}_{2,z}\hat{S}_{3,z}\right)$，总$\hat{S}_z=\hat{S}_{1,z}+\hat{S}_{2,z}+\hat{S}_{3,z}$和总动量$\hat{p}=-\frac{i\hbar}{\mathrm{R}}(\partial_{\theta_1}+\partial_{\theta_2}+\partial_{\theta_3})$均为守恒量，(a)中的本征基具有不同的守恒量组合，都是$\hat{V}_z$对应的一阶久期方程的本征态，因此一阶能量修正为$\hat{V}_z$在每个态下的期待值

玻色子（约 5 分）：(a)中的本征基具有$\hat{p}=0$，$\frac{\hat{S}_z}{\hbar}=\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$；

计算中用到下列期待值结果，

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\,\delta(\theta_i-\theta_j)\left|\psi^{(B)}_{0,0,0}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\right|^2=\frac{1}{2\pi}$$

$$\langle S=3/2,S_z|\hat{S}_{i,z}\hat{S}_{j,z}|S=3/2,S_z\rangle=\begin{cases}\hbar^2/4, & S_z=\pm3/2,\\-\hbar^2/12, & S_z=\pm1/2.\end{cases}$$

	$\left|\psi^{(B,S=1/2)}_{0\uparrow,0\uparrow,0\uparrow}\right\rangle$	$\left|\psi^{(B,S=1/2)}_{0\uparrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$	$\left|\psi^{(B,S=1/2)}_{0\uparrow,0\downarrow,0\downarrow}\right\rangle$	$\left|\psi^{(B,S=1/2)}_{0\downarrow,0\downarrow,0\downarrow}\right\rangle$
总动量$\hat{p}$	0	0	0	0
总$\hat{S}_z/\hbar$	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-3/2$
一阶能量修正	$3\lambda\hbar^2/8\pi$	$-\lambda\hbar^2/8\pi$	$-\lambda\hbar^2/8\pi$	$3\lambda\hbar^2/8\pi$

注：利用$R_y(\pi)$自旋旋转$(\hat{S}_{i,x}\to-\hat{S}_{i,x}$，$\hat{S}_{i,z}\to-\hat{S}_{i,z})$对称性，只需计算前两列的结果

费米子（约 5 分）：(a)中的本征基$\hat{p}=\pm\frac{\hbar}{\mathrm{R}}$，且$\frac{\hat{S}_z}{\hbar}=\frac{1}{2},\frac{1}{2}$；

由轮换对称性，只需要计算$3\lambda\cdot\delta(\theta_1-\theta_2)\hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,z}$的期待值，用到

$$(2\pi)^{-3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\,\delta(\theta_1-\theta_2)\left|(e^{\pm i\theta_1}-e^{\pm i\theta_2})\right|^2=0$$

$$(2\pi)^{-3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\,\delta(\theta_1-\theta_2)\left|(e^{\pm i\theta_{1\,\text{或}\,2}}-e^{\pm i\theta_3})\right|^2=1/\pi$$

以及 $\hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,z}$ 在每个$\hat{S}_{iz}$直积态下的期待值 $\pm\hbar^2/4$

	$\left\vert\psi^{\left(F,S=\frac{1}{2}\right)}_{-1\uparrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$	$\left\vert\psi^{\left(F,S=\frac{1}{2}\right)}_{-1\downarrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$	$\left\vert\psi^{\left(F,S=\frac{1}{2}\right)}_{0\uparrow,0\downarrow,1\uparrow}\right\rangle$	$\left\vert\psi^{\left(F,S=\frac{1}{2}\right)}_{0\uparrow,0\downarrow,1\downarrow}\right\rangle$
总动量$\hat{p}$	$-\hbar/\mathrm{R}$	$-\hbar/\mathrm{R}$	$\hbar/\mathrm{R}$	$\hbar/\mathrm{R}$
总$\hat{S}_z/\hbar$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
一阶能量修正	$-\lambda\hbar^2/8\pi$	$-\lambda\hbar^2/8\pi$	$-\lambda\hbar^2/8\pi$	$-\lambda\hbar^2/8\pi$

注：利用$R_y(\pi)$自旋旋转（$\hat{S}_{i,x}\to-\hat{S}_{i,x}$，$\hat{S}_{i,z}\to-\hat{S}_{i,z}$）对称性、空间反演对称性，只需计算一个态的结果（表中一列），其它态的结果相同

方法 2：不用自旋旋转后的$\hat{V}_z$，直接用$\hat{V}$计算久期方程

玻色子：

久期方程矩阵为

$$3\cdot\lambda\cdot\frac{\hbar^2}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\pi} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\pi} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\pi} & 0 & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\pi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\lambda\cdot\frac{\hbar^2}{8\pi}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

只用对角化2×2矩阵$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$，其本征值为$3$和$-1$。

计算中涉及的自旋空间非零矩阵元为

$$\left\langle S=\tfrac{3}{2},S_z=\pm\tfrac{3}{2}\middle|\hat{S}_{i,x}\hat{S}_{j,x}\middle|S=\tfrac{3}{2},S_z=\pm\tfrac{1}{2}\right\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\left\langle S=\tfrac{3}{2},S_z=\pm\tfrac{1}{2}\middle|\hat{S}_{i,x}\hat{S}_{j,x}\middle|S=\tfrac{3}{2},S_z=\pm\tfrac{1}{2}\right\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot2=\frac{\hbar^2}{4}\cdot\frac{2}{3},$$

费米子：

久期方程矩阵为$\lambda\cdot\frac{-\hbar^2}{8\pi}$乘单位矩阵，

计算中涉及的积分有

$$(2\pi)^{-3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\,\delta(\theta_1-\theta_2)\left(e^{\pm i\theta_2}-e^{\pm i\theta_3}\right)^*\left(e^{\pm i\theta_3}-e^{\pm i\theta_1}\right)=-\frac{1}{\pi}$$

$$(2\pi)^{-3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\,\delta(\theta_1-\theta_2)\left(e^{\mp i\theta_2}-e^{\mp i\theta_3}\right)^*\left(e^{\pm i\theta_3}-e^{\pm i\theta_1}\right)=0$$

及下标 1, 2, 3 的轮换

（c）测量$\left(\hat{\boldsymbol{S}}_1+\hat{\boldsymbol{S}}_2\right)^2$会得到，（本征值 2 分，概率 3 分）

两粒子总自旋 1 态，本征值$2\hbar^2$，概率

$$\sum_{s_3=\uparrow,\downarrow}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\left[\left|\langle\uparrow,\uparrow,s_3|\psi\rangle\right|^2+\left|\langle\downarrow,\downarrow,s_3|\psi\rangle\right|^2+\left|\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow,\downarrow+\downarrow,\uparrow),s_3\middle|\psi\right\rangle\right|^2\right]$$

两粒子总自旋 0 态，本征值0，概率

$$\sum_{s_3=\uparrow,\downarrow}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\left[\left|\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow,\downarrow-\downarrow,\uparrow),s_3|\psi\rangle\right|^2\right]$$

计算中用到下面积分

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\left|(e^{\pm i\theta_i}-e^{\pm i\theta_j})\right|^2=2\cdot(2\pi)^3,$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_3\left|(e^{\pm i\theta_1}+e^{\pm i\theta_2}-2e^{\pm i\theta_3})\right|^2=6\cdot(2\pi)^3,$$

结果为（常数$c=(2\pi)^{3/2}\sqrt{6}$）

	$\left\|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{-1\uparrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$	$\left\|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{-1\downarrow,0\uparrow,0\downarrow}\right\rangle$	$\left\|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{0\uparrow,0\downarrow,1\uparrow}\right\rangle$	$\left\|\psi^{(F,S=\frac{1}{2})}_{0\uparrow,0\downarrow,1\downarrow}\right\rangle$
$c\langle\uparrow,\uparrow,\uparrow\|\psi\rangle$	0	0	0	0
$c\langle\uparrow,\uparrow,\downarrow\|\psi\rangle$	$e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_2}$	0	$e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}$	0
$c\langle\downarrow,\downarrow,\uparrow\|\psi\rangle$	0	$e^{-i\theta_2}-e^{-i\theta_1}$	0	$e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}$
$c\langle\downarrow,\downarrow,\downarrow\|\psi\rangle$	0	0	0	0
$c\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow,\downarrow+\downarrow,\uparrow),\uparrow\|\psi\rangle$	$\frac{e^{-i\theta_2}-e^{-i\theta_1}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}}{\sqrt{2}}$	0
$c\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow,\downarrow+\downarrow,\uparrow),\downarrow\|\psi\rangle$	0	$\frac{e^{-i\theta_1}-e^{-i\theta_2}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}}$
$c\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow,\downarrow-\downarrow,\uparrow),\uparrow\|\psi\rangle$	$\frac{2e^{-i\theta_3}-e^{-i\theta_2}-e^{-i\theta_1}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{2e^{i\theta_3}-e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}}$	0
$c\langle\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow,\downarrow-\downarrow,\uparrow),\downarrow\|\psi\rangle$	0	$\frac{2e^{-i\theta_3}-e^{-i\theta_2}-e^{-i\theta_1}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{2e^{i\theta_3}-e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{\sqrt{2}}$
$P_{(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2=2\hbar^2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$
$P_{(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2=0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

注：利用自旋旋转对称性、空间反演对称性，只需计算一个态的结果（表中一列），其它态的结果相同

学生的解法 2：用平均值计算测量结果的概率，

计算期待值$\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2\rangle$，因为只有两种本征值0和$2\hbar^2$，可以据此求出各自的概率$P(0)$和$P(2\hbar^2)$，

$$P(0)+P(2\hbar^2)=1$$

$$P(0)\cdot 0+P(2\hbar^2)\cdot 2\hbar^2=\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2\rangle$$

期待值

$$\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2\rangle=\frac{1}{3}\left(\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2\rangle+\langle(\hat{S}_2+\hat{S}_3)^2\rangle+\langle(\hat{S}_3+\hat{S}_1)^2\rangle\right)=\frac{3\hbar^2}{4}+\frac{1}{3}\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2+\hat{S}_3)^2\rangle$$

这里的费米子基态都是总自旋 S=1/2 的总自旋本征态(作业 HW7 附加题 3(c)),$\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2+\hat{S}_3)^2\rangle=\frac{3\hbar^2}{4}$,

因此$\langle(\hat{S}_1+\hat{S}_2)^2\rangle=\hbar^2$，$P(0)=P(2\hbar^2)=1/2$。

第 5 题（10 分）．一维全同粒子的统计性质会被相互作用的效果“掩盖”。考虑第 3 题中圆环上的无自旋玻色子，设每两个粒子之间有排斥δ势，$V(\theta_i,\theta_j)=\alpha\cdot\delta(\theta_i-\theta_j)$，并考虑$\alpha\to+\infty$的极限。下面结果将显示这些玻色子会表现出类似费米子 Pauli 不相容原理的性质。[注：见 4(b)中关于δ函数的注释]

(a)(5 分）对 2 个全同玻色子，$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(\partial_{\theta_1}^2+\partial_{\theta_2}^2\right)+V(\theta_1,\theta_2)$，本征函数形如（Bethe ansatz）

$$\psi_{k_1,k_2}(\theta_1,\theta_2)=A\cdot\begin{cases}e^{i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)}+e^{i\phi}e^{i(k_2\theta_1+k_1\theta_2)}, & 0\le\theta_1<\theta_2\le 2\pi;\\ e^{i(k_1\theta_2+k_2\theta_1)}+e^{i\phi}e^{i(k_2\theta_2+k_1\theta_1)}, & 0\le\theta_2<\theta_1\le 2\pi.\end{cases}$$

其中k_1,k_2,ϕ为待定的实数。注意ψ_{k_1,k_2}已经满足交换对称性$\psi_{k_1,k_2}(\theta_1,\theta_2)=\psi_{k_1,k_2}(\theta_2,\theta_1)$，其能量显然为自由粒子能量$\frac{\hbar^2}{2mR^2}(k_1^2+k_2^2)$。求出$\alpha\to+\infty$情况下所有可能的$k_1,k_2$组合。[注意：$(k_1,k_2,\phi)$与$(k_2,k_1,-\phi)$为同一个波函数，因此可以设$k_1\le k_2$；波函数应该对每个$\theta_i$有$2\pi$周期性]

(b)(5 分）对 3 个全同玻色子，$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(\partial_{\theta_1}^2+\partial_{\theta_2}^2+\partial_{\theta_3}^2\right)+V(\theta_1,\theta_2)+V(\theta_1,\theta_3)+V(\theta_2,\theta_3)$。对于$0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3\le 2\pi$，$\psi_{k_1,k_2,k_3}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\mathrm{A}\cdot\sum_{\sigma\in S_3}e^{i\phi(\sigma)}e^{i\left(k_{\sigma(1)}\theta_1+k_{\sigma(2)}\theta_2+k_{\sigma(3)}\theta_3\right)}$，这里$\sigma$对所有置换求和，$\phi(\sigma)$为依赖于$\sigma$的相位；对$\theta_{1,2,3}$的其它取值区域，可根据交换对称性得到$\psi_{k_1,k_2,k_3}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$。试求出$\alpha\to+\infty$情况下$k_1\le k_2\le k_3$的所有可能的组合。[注：不失一般性可取恒等置换的相位$\phi(\mathbf{1})=0$]

解答：

在$\alpha\to+\infty$的极限下，任意两个粒子在同一点时（$\theta_i=\theta_j$时）的波函数必须为零

(a)

由 $\psi_{k_1,k_2}(\theta_1,\theta_2=\theta_1+0)=\left(1+e^{i\phi}\right)e^{i(k_1+k_2)\theta_1}=0$ 得 $e^{i\phi}=-1$；

因此 $k_1\neq k_2$ （否则 $\psi_{k_1,k_2}=0$ ）；

由 $\psi_{k_1,k_2}(0,\theta_2)=A\left(e^{i(k_2\theta_2)}-e^{i(k_1\theta_2)}\right)$

$=\psi_{k_1,k_2}(2\pi,\theta_2)=\psi_{k_1,k_2}(\theta_2,2\pi)=A\left(e^{i(k_1\theta_2+2\pi k_2)}-e^{i(k_2\theta_2+2\pi k_1)}\right)$

可得

$$e^{i(2\pi k_2)}=e^{i(2\pi k_1)}=-1$$

因此 $k_1<k_2$，且k_1,k_2均为半奇整数（整数加$1/2$）

(b) 考虑各种 $\lim_{\theta_i\to\theta_{i+1}\pm 0}\psi_{k_1,k_2,k_3}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=0$ 的条件，可得 $e^{i\phi(\sigma)}=\mathrm{sgn}(\sigma)$：

将 $e^{i\phi(\sigma)}$ 记为 $\eta_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}$，

由 $0=\psi_{k_1,k_2,k_3}(\theta_1=\theta_2-0,\theta_2,\theta_3)$

$=(\eta_{123}+\eta_{213})e^{i((k_1+k_2)\theta_2+k_3\theta_3)}+(\eta_{231}+\eta_{321})e^{i((k_2+k_3)\theta_2+k_1\theta_3)}+(\eta_{312}+\eta_{132})e^{i((k_3+k_1)\theta_2+k_2\theta_3)}$，

可得 $\eta_{jik}=-\eta_{ijk}$，

由 $0=\psi_{k_1,k_2,k_3}(\theta_1,\theta_2=\theta_3-0,\theta_3)$

$=(\eta_{123}+\eta_{132})e^{i(k_1\theta_1+(k_2+k_3)\theta_3)}+(\eta_{231}+\eta_{213})e^{i(k_2\theta_1+(k_3+k_1)\theta_3)}+(\eta_{312}+\eta_{321})e^{i(k_3\theta_1+(k_1+k_2)\theta_3)}$ ，

可得 $\eta_{ikj}=-\eta_{ijk}$，

因为所有置换都可以表为序列中相邻数字的对换的乘积，所以得 $\eta_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}=\mathrm{sgn}(\sigma)\eta_{123}$，

在$\theta_{1,2,3}$的一个有序（如$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$）区域内，该波函数形如费米子波函数（！），
因此 k_1, k_2, k_3两两不等（否则波函数为零）。

由 $\psi_{k_1,k_2,k_3}(0, \theta_2, \theta_3)$
$= A\left(e^{i(k_2\theta_2+k_3\theta_3)} + e^{i(k_3\theta_2+k_1\theta_3)} + e^{i(k_1\theta_2+k_2\theta_3)} - e^{i(k_3\theta_2+k_2\theta_3)} - e^{i(k_2\theta_2+k_1\theta_3)} - e^{i(k_1\theta_2+k_3\theta_3)}\right)$
$= \psi_{k_1,k_2,k_3}(2\pi, \theta_2, \theta_3) = \psi_{k_1,k_2,k_3}(\theta_2, \theta_3, 2\pi)$
$=$
$A\left(e^{i(k_1\theta_2+k_2\theta_3+2\pi k_3)} + e^{i(k_2\theta_2+k_3\theta_3+2\pi k_1)} + e^{i(k_3\theta_2+k_1\theta_3+2\pi k_2)} - e^{i(k_1\theta_2+k_3\theta_3+2\pi k_2)} -\right.$
$\left. e^{i(k_3\theta_2+k_2\theta_3+2\pi k_1)} - e^{i(k_2\theta_2+k_1\theta_3+2\pi k_3)}\right)$
可得

$$e^{i(2\pi k_3)} = e^{i(2\pi k_2)} = e^{i(2\pi k_1)} = 1$$

因此 $k_1 < k_2 < k_3$，且k_1, k_2, k_3均为整数