

北京大学本科生考试试题专用纸

一、填空题（共 20 分，每题 4 分）

1. 设 $X \sim \chi^2(2n)$, 则当 n 特别大时, $\frac{X-2n}{2\sqrt{n}}$ 近似服从_____分布。
2. 设总体 X 的均值和方差分别为 μ 和 σ^2 , X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的一个简单随机样本, 则 μ 的有效估计量为_____, σ^2 的有效估计量为_____。
3. 总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta > -1$. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的一个简单随机样本, 则 θ 的矩估计量为_____, 最大似然估计量为_____。
4. 在假设检验中, 零假设为 H_0 , 记 $P_1 = P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真})$, $P_2 = P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假})$. 则 P_1 被称为_____错误, P_2 被称为_____错误. 有什么办法能使得 P_1 和 P_2 同时减小?
_____。
5. 记随机变量 X 和 Y 的不确定度分别是 σ_X 和 σ_Y , 则 $X - Y$ 的不确定度是_____。

二、计算题（共 80 分）

6. (10 分) 考虑对某泊松变量单次观测的值为 n . 求其均值 ν 的最大似然估计量. 证明该估计量是有效估计量. 已知 RCF 不等式: $\nu[\hat{\theta}] \geq (1 + \partial b / \partial \theta)^2 / E[-\partial^2 \log L / \partial \theta^2]$.
7. (10 分) 随机抽取某班 25 名学生的数学考试成绩, 得到平均分数为 84 分, 样本标准差为 8 分. 已知全年级的数学成绩服从正态分布且平均分数为 87 分. 试问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为该班的数学平均成绩为 87 分.
【提示: 学生氏分布的上分位数 $t_{0.05}(24) = 1.71$; $t_{0.025}(24) = 2.064$ 】
8. (20 分) 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, \theta)$, 其概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 未知. 从总体抽取一容量为 n 的简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 1$).

- (1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 及随机变量 $Y = \frac{\hat{\theta}}{\theta}$ 的概率密度函数 $g(y)$.

(2) 显然, $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量。求常数 c , 使 $\hat{\theta}_1 = c \hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。 $\hat{\theta}_2 = 2\bar{X}$ 也是 θ 的无偏估计量。请计算说明 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效?

(3) 以 $\frac{\hat{\theta}_1}{\theta}$ 为枢轴量, 求 θ 置信水平 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间。

现有从总体中抽取的简单随机样本, 如下所示:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	4.93	0.74	4.37	3.11	2.55	1.10	1.36	4.80	1.68	0.79

求: 置信水平 $1 - \alpha = 95\%$ 下, θ 的双侧置信区间是多少?

9. (15 分) 小车以恒定的速度沿轨道运动, 我们要测量它的速度。在 $t = 0$ 时刻它正好经过 $d = 0$ 的位置。轨道上特定的固定位置处有传感设备, 可以测量相应位置对应的时间, 误差为 0.1 秒。测量结果为:

时间 t (秒)	1.1	2.2	2.9	4.1	5.0	5.8
距离 d (毫米)	10	20	30	40	50	60

用最小二乘法求速度的值及其不确定度, 并给出 χ^2_{\min} 。

10. (15 分) 在研究质子衰变 (极为稀有, 衰变数目服从泊松分布) 的实验中, 一年内在 1000 吨氢原子样本中 (约合 6.022×10^{32} 个质子) 观测到 7 个事件。在假设没有任何本底的情况下, 求质子寿命 90% 置信水平的置信区间。提示: 参数为 λ 的泊松分布的累积分布函数与卡方分布的累积分布函数之间存在如下关系: $F_{\text{poi}}(k; \lambda) = 1 - F_{\chi^2}(2\lambda; 2(k + 1))$ 。可能会用到下列自由度为 $n=14, 15, 16$ 的卡方分布的上 α 分位数:

$$f_{0.95, n=14} = 6.57, f_{0.95, n=15} = 7.26, f_{0.95, n=16} = 7.96,$$

$$f_{0.05, n=14} = 23.68, f_{0.05, n=15} = 25.00, f_{0.05, n=16} = 26.30。$$

11. (10 分) 假设两个不同的实验对同一个物理量 X 进行了相互独立的测量, 得到的测量结果分别为

$$x_1 \pm \sigma_{s1} \pm \sigma_{c1}$$

$$x_2 \pm \sigma_{s2} \pm \sigma_{c2}$$

其中第一项不确定度为统计不确定度; 第二项不确定度为系统不确定度, 是由相同的外部输入中间变量引入的; 其他来源引入的系统不确定度可以忽略。

求这两个测量结果的最佳平均值及其不确定度。