

第一章 补充作业

习题 1.1. 证明德摩根律（又见集合运算）的一般形式。设 $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 是一列集合（可能是不可数多个），证明：

(a) $(\cup_\alpha A_\alpha)^c = \cap_\alpha A_\alpha^c$;

(b) $(\cap_\alpha A_\alpha)^c = \cup_\alpha A_\alpha^c$;

习题 1.2. 若多元函数有连续偏导数，则求导的先后次序对求导结果没有影响。例如，对于二元函数 $f(x, y)$ ，下面两个三阶偏导相等：

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y).$$

(a) 三元函数有多少个四阶偏导？

(b) 证明 n 元函数有 $\binom{n+r-1}{r}$ 个 r 阶偏导。

习题 1.3. A 和 B 两人分别轮流掷一枚硬币，最先掷得正面朝上的人胜出，假定 A 先开始掷。

(a) 如果所掷的硬币是公平硬币，A 胜出的概率是多少？

(b) 假设 $P(\text{正面朝上}) = p$ ， p 可能不等于 $\frac{1}{2}$ 。A 胜出的概率是多少？

(c) 证明：对任意的 p ， $0 < p < 1$ ， $P(A \text{ 胜出}) > \frac{1}{2}$ 。

习题 1.4. 假设 X 和 Y 是两个连续的随机变量，且其方差有限。证明相关系数 $\rho \equiv \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \pm 1$ 的充要条件是 X 与 Y 几乎处处有线性关系，即存在常数 $a \neq 0$ 和 b 使得 $Y = aX + b$ 。