五解：(1). $\vec{OC} = a(\cos\psi\,\vec{i}+\sin\psi\,\vec{j})$.

$\vec{CM} = r\sin\varphi\,\vec{k} + r\cos\varphi(\cos\psi\,\vec{i}+\sin\psi\,\vec{j})$.

$\vec{OM} = \vec{OC}+\vec{CM} = (a+r\cos\varphi)\cos\psi\,\vec{i} + (a+r\cos\varphi)\sin\psi\,\vec{j} + r\sin\varphi\,\vec{k}$.

$$\therefore \begin{cases} x=(a+r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y=(a+r\cos\varphi)\sin\psi, \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

(2). $\vec{e}_r = \dfrac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \cos\varphi\cos\psi\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\psi\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k}$.

$\vec{e}_\psi = -(a+r\cos\varphi)\sin\psi\,\vec{i} + (a+r\cos\varphi)\cos\psi\,\vec{j}$

$\vec{e}_\varphi = -r\sin\varphi\cos\psi\,\vec{i} - r\sin\varphi\sin\psi\,\vec{j} + r\cos\varphi\,\vec{k}$.

$|\vec{e}_r|=1$, $|\vec{e}_\psi| = a+r\cos\varphi$, $|\vec{e}_\varphi| = r$.　　拉梅子数的几何意义.

$\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\varphi$ 两两正交. ∴ 拉梅系数矩阵 $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$.

(3). $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{OM}}{\partial r}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\partial \vec{OM}}{\partial \psi}\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\varphi)\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\psi \\ \dot\varphi \end{pmatrix} = (\vec{e}_{r0}, \vec{e}_{\psi 0}, \vec{e}_{\varphi 0})\begin{pmatrix} \dot r \\ (a+r\cos\varphi)\dot\psi \\ r\dot\varphi \end{pmatrix}$.

其中 $(\vec{e}_{r0}, \vec{e}_{\psi 0}, \vec{e}_{\varphi 0})^T = H^{-1}(\vec{e}_r, \vec{e}_\psi, \vec{e}_\varphi)^T$.

(4). 雅可比矩阵 $P = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -(a+r\cos\varphi)\sin\psi & -r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi\sin\psi & (a+r\cos\varphi)\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$.

$Q = PH^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi\sin\psi & \cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

$$Q^T\dot Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot\psi\cos\varphi\sin\psi - \dot\varphi\sin\varphi\cos\psi & -\dot\psi\cos\psi & -\dot\varphi\cos\varphi\cos\psi + \dot\psi\sin\varphi\sin\psi \\ \dot\psi\cos\varphi\cos\psi - \dot\varphi\sin\varphi\sin\psi & -\dot\psi\sin\psi & -\dot\varphi\cos\varphi\sin\psi - \dot\psi\sin\varphi\cos\psi \\ \dot\varphi\cos\varphi & 0 & -\dot\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\dot\psi\cos\varphi & -\dot\varphi \\ \dot\psi\cos\varphi & 0 & -\dot\psi\sin\varphi \\ \dot\varphi & \dot\psi\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} = (\vec{e}_{r0}, \vec{e}_{\psi 0}, \vec{e}_{\varphi 0})(Q^T\dot Q v + \dot v)$　　$v = \begin{pmatrix} \dot r \\ (a+r\cos\varphi)\dot\psi \\ r\dot\varphi \end{pmatrix}$,　　$\dot v = \begin{pmatrix} \ddot r \\ (a+r\cos\varphi)\ddot\psi - r\sin\varphi\dot\varphi\dot\psi \\ r\ddot\varphi + \dot r\dot\varphi \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} = (\vec{e}_{r0}, \vec{e}_{\psi 0}, \vec{e}_{\varphi 0})\begin{pmatrix} \ddot r - (a+r\cos\varphi)\cos\varphi\dot\psi^2 - r\dot\varphi^2 \\ (a+r\cos\varphi)\ddot\psi + 2\cos\varphi\dot\psi\dot r - 2r\sin\varphi\dot\psi\dot\varphi \\ r\ddot\varphi + (a+r\cos\varphi)\sin\varphi\dot\psi^2 + 2\dot r\dot\varphi \end{pmatrix}$$