

# 理论力学 A 邵立晶 期末试题

2022 年 1 月 4 日

考试时间:2h, 一分钟不多一分钟不少

## 1

一根长为  $2l$  的轻杆两端分别附有质量为  $m, 2m$  的两个质点. 轻杆与竖直方向夹角  $\alpha$ . 轻杆中点固定, 绕竖直轴以角速度  $\omega$  旋转. 建立合适的坐标系, 求:

1. 系统的角动量
2. 作用在  $O$  点的力矩

## 2

一个半径为  $R$  的均匀球放在粗糙地面上, 球与地面的摩擦系数为  $\mu$ . 现在距球心竖直高度为  $6/7R$  的位置水平击打球, 击打后球的平动速度大小为  $v_0$ . 求球达到纯滚动时的平动速度.

## 3

如图. 单摆摆长  $l$ , 摆锤质量  $m$ . 摆的悬点可在直线  $y = x$  上移动. 现选取悬点横坐标  $x$  与图中的角  $\theta$  为广义坐标,

1. 写出拉格朗日量, 并求出运动方程, 要求写成  $\ddot{\theta} + f(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}) = 0, \ddot{x} + g(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}) = 0$  的形式.
2. 写出广义动量, 并写出哈密顿量

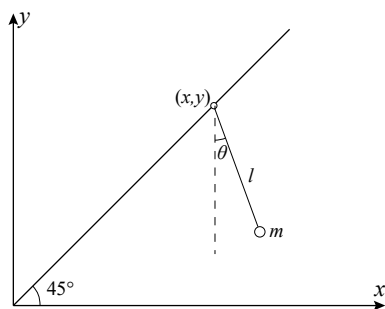


图 1: 第三题图

4

两根细棒之间用铰链链接 (只能在一个平面内转动). 其中一根质量  $m$ , 长度  $l$ . 另一根细棒竖直并绕自身以恒定角速度  $\Omega$  转动, 考虑重力:

1. 写出拉格朗日量, 并求运动方程
2. 讨论系统的稳定性

5

用 Hamilton-Jacobi 方程求解一维谐振子. 简单起见, 设

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$$

6

如图, 半径为  $R$  的圆环上有一个质量为  $m$  的滑块. 圆环可绕竖直的直径旋转. 圆环的转动惯量  $I$ . 初始时, 滑块在圆环最上方, 圆环角速度  $\omega_0$ . 之后滑块受微扰离开初始位置. 如图设滑块与圆心连线和竖直方向的夹角  $\theta$ .

1. 给出系统的哈密顿量以及正则方程
2. 写出系统的初积分, 并求出在  $A, B$  两点滑块的速度与环的角速度

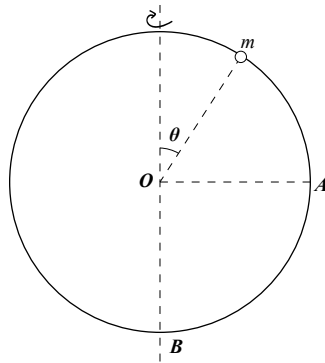


图 2: 第四题图

7

若物理量  $f(p_\alpha, q_\alpha, t)$  满足  $\frac{df}{dt} = 0$ , 那么称  $f$  是运动积分. 现已知  $f(p_\alpha, q_\alpha, t), g(p_\alpha, q_\alpha, t)$  是两个不含时的运动积分, 证明  $f, g$  的泊松括号  $[f, g]$  也是运动积分.

8

已知拉格朗日量密度

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V \psi^* \psi + i\hbar \psi^* \dot{\psi}$$

认为  $\psi, \psi^*$  是独立场变量:

1. 用修正的 Hamilton 原理导出  $\psi, \psi^*$  的运动方程.
2. 求对应的正则动量密度以及哈密顿量密度.