

理论力学 (A) 期末考试试题回忆

2019 年 6 月 17 日

总分: 94 分

一、(2+2+3+3+3+5+5) 简答题, 简单推导、论述

(内容包括正则变换母函数、Hamilton-Jacobi 方程、Noether 定理、转动参考系张量导数的变化、Hamilton 方程推导 Lagrange 方程、场的 Hamilton 原理等)

二、(17 分) 给一转动参考系 $O-xyz$, 给定参考系 $\dot{\omega}$ 点的速度 $\dot{\mathbf{q}}_0$, 加速度 $\ddot{\mathbf{q}}_0$, 参考系相对于 $\dot{\omega}$ 点的角速度 $\mathbf{\Omega}$ 有一质点在 $O-xyz$ 系中运动, 在该参考系看来质点相对于 $\dot{\omega}$ 点的位置为 \mathbf{r} , 速度为 $\dot{\mathbf{r}}$, 加速度为 $\ddot{\mathbf{r}}$.

1. 写出质点的拉格朗日量。
2. 由拉格朗日方程求出质点的运动方程。

三、(17 分) 一质点在势场 $\tilde{\omega} \omega = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2$ 中运动, 定义一个矢量

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\omega}_y \dot{\omega}_v}{\dot{\omega}_l} \mathbf{v} + \frac{\dot{\omega}_v^2}{\dot{\omega}_l} - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2$$

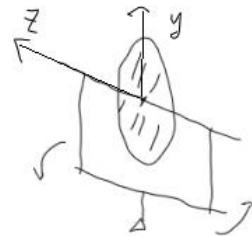
1. 求 Poisson 括号 $\dot{\alpha}, \tilde{\omega}$, 证明 $\dot{\alpha}$ 不变。
2. 通过计算 $\dot{\alpha} \cdot \dot{\omega}$, 求质点的运动轨道。
3. 说明 $\dot{\alpha}$ 的模 $|\dot{\alpha}|$ 的物理含义。

四、(17 分) 一倒置圆锥的顶角为 2α

1. 求圆锥上两点之间的短程线满足的微分方程。
2. 求圆锥上两点之间的短程线 (不需求出常数)。

五、(20 分) 在北半球纬度为 ϕ 的地方放置一装置如图所示。

一圆盘穿在水平杆上可以绕杆转动, 圆盘的对称轴与杆重合杆搭在支架上可以在水平面内自由转动, 支架与杆光滑接触仅有竖直方向作用力。圆盘的质量关于其对称轴对称分布, 且圆盘对其对称轴的转动惯量为 $2I$ 。地球自转的角速度为 Ω 。



在装置上以圆盘的中心为原点建立随支架运动的坐标系 $O-xyz$, y 轴竖直向上, z 轴平行于杆, $O-xyz$ 构成右手坐标系, 可以由此确定 x 轴的方向, 记此坐标系为 S' 。在水平面内用 ϕ

表示正北方向，并记 z 轴正方向与 \hat{o} 的夹角为 θ 。假设运动过程中 θ 是小角，可以作相应近似。圆盘绕其对称轴以 ω_0 的角速度旋转。

1. 求地球自转角速度在 S' 系中的分量 $\Omega_x, \Omega_{\hat{x}}, \Omega_z$. 用 ω_0, θ 以及题给的其他参量表示。
2. 求 S' 系旋转的角速度在 S' 系中的分量 $\Omega'_x, \Omega'_{\hat{x}}, \Omega'_z$. 用 ω_0, θ 以及题给的其他参量表示。
3. 求圆盘旋转的角速度在 S' 系中的分量 $\omega'_x, \omega'_{\hat{x}}, \omega'_z$. 用 ω_0, θ 以及题给的其他参量表示。
4. 求圆盘旋转的角动量在 S' 系中的分量 $\tilde{L}_x, \tilde{L}_{\hat{x}}, \tilde{L}_z$. 用 ω_0, θ 以及题给的其他参量表示。
5. 求支架对圆盘作用力的力矩在 S' 系中的分量 $N_x, N_{\hat{x}}, N_z$. 用时间 \hat{t} 以及题给的其他参量表示。你可以假设合适的初态。提示：本题需要作合理的近似