

2022-2023 学年秋季学期《理论力学 A》期末考试考题

1. 一维盒子里的粒子【25 分】

考虑一个质量为 m 的粒子被束缚在一个一维的盒子里，以非相对论速度做匀速直线运动。在初始时刻 $t = 0$ 时，粒子速度为 v_0 ，盒子长度为 x_0 。盒子的右壁和左壁分别以速度 ϵ 和 2ϵ 保持缓慢匀速向中间靠拢。（所谓缓慢，指的是 $\epsilon \ll v_0$ 。）当粒子运动至两壁处时，发生弹性碰撞。当盒子长度变为 $x_0/3$ 时，问：

(a) 粒子的速度大小 v 为多少？

(b) 在该时刻，保持盒子左右两壁做匀速运动的平均外力分别为多大？

2. α, β, γ 为何值时，变换

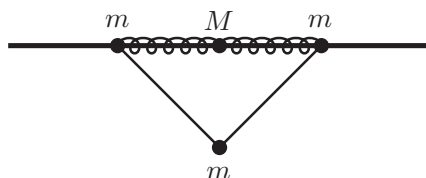
$$Q = q^\alpha \cos(\gamma p), \quad P = q^\beta \sin(\gamma p) \quad (1)$$

为正则变换，并给出相应的第四型母函数 $U_4(p, P)$ 。【25 分】

【考虑一般的情形，正则变换包括单价变换和非单价变换】

3. 有一群质量为 m 的粒子，它们围绕同一个中心做圆轨道运动。每个粒子具有相同的动能 T 。假设粒子之间的作用力只有相互间的万有引力。求粒子数密度 $\rho(r)$ 与离中心的距离 r 之间的函数关系（假设密度是球对称的）。【25 分】

4. 三个小球在光滑水平杆上滑动，位于两端的小球质量为 m ，位于中间的小球质量为 M 。小球之间由两条弹性系数为 k 的弹簧连接。端点处的两个小球之间连着一根长度为 $2a$ 的不可拉伸的细线。细线上套着一个质量为 m 的小球，该小球在细线上无摩擦滑动。当四个小球构成的系统处于平衡状态时，水平杆上的位于端点处的两个小球相距 $\sqrt{2}a$ 。现在考察小球相对平衡位置做小振动。【25 分】



令杆上两个质量为 m 的小球偏离平衡位置的位移分别为 x_1, x_2 ，质量为 M 的小球偏离平衡位置的位移为 x_0 。线上小球偏离平衡位置的横向位移为 x ，到杆的垂直距离为 r 。三个质量为 m 的小球构成的平面与竖直平面的夹角为 θ 。

(a) 给出体系的拉格朗日量和约束条件

(b) 当 $M = 0$ 时，请给出体系的所有简正坐标与振动频率

(c) 当 $M = \infty$ 时，请给出体系的所有简正坐标与振动频率

【为简化计算，约定 $mg = \sqrt{2}ka$ 。令 $\omega_0^2 = k/m$ ，第 (b) 问和第 (c) 问的振动频率结果请用 ω_0 表达出来；与每种振动频率对应的简正坐标，请用 x_1, x_2, x, a, θ 这几个量表达出来，并将系数约化到尽可能简单。】