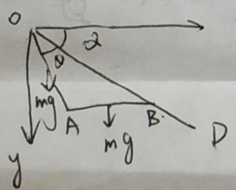
18春 理论力学 陈晓林 期中

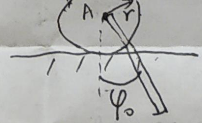
1. (15) 两根相同的均匀直棒OA与OB，光滑地连接于A端，然后O端固定于天花板，让B端沿一固定的光滑铁丝OD自由滑动（图）。铁丝与水平面夹角为 α，用虚功原理解平衡时OA棒与铁丝OD间夹角。

2. (15') 设体系受一瞬时力F的打击，试从拉氏方程出发，导出该体系在瞬时力作用下的动力学方程：$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_{\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_0=I_\alpha$ $(\alpha=1,2,3,\cdots)$；其中 $I_\alpha=\int_0^{\Delta t}Q_\alpha\,dt=\int_0^{\Delta t}\sum_{i=1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}\cdot\vec{F}_i\,dt$（广义冲量）

3. (20') 图，均质圆轮质量 m_1，半径 r，可在固定水平面上无滑动的滚动。匀质杆AB m_2，长 l，A端与轮心用光滑铰链连接。设 $t=0$ 时，圆轮静止不动，杆AB静止于一个小角度 φ_0。已知：圆轮绕质心轴 $I_{盘}=\frac{1}{2}m_1r^2$，杆AB绕质心 $I_{AB}=\frac{1}{12}m_2l^2$

求：1) 系统作小振动的本征频率；2) 圆轮和杆AB的运动规律。（即一切时刻的小振动解）





4 (15'). 用哈密顿-雅可比方程：$\frac{\partial F_2(q,\alpha,t)}{\partial t}+H(q,\frac{\partial F_2}{\partial q},t)=0$（其中 q 为广义坐标，α 为一常数），求解一维谐振子运动。

已知：一维谐振子 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2$；积分 $\int\frac{dq}{\sqrt{b^2-q^2}}=\arccos(q/b)$

5. (15'). 已知刚体欧拉动力学方程为

$$\begin{cases}I_x\dot{w}_x+(I_z-I_y)w_yw_z=L_x;\\ I_y\dot{w}_y+(I_x-I_z)w_xw_z=L_y;\\ I_z\dot{w}_z+(I_y-I_x)w_xw_y=L_z.\end{cases}$$

证明：旋转对称刚体 $(I_x=I_y\neq I_z)$ 的自由运动没有章动。

6.(20')

一个刚体在重力场中绕O点作定点运动，

以惯量主轴坐标系的欧拉运动方程为：

$$
\begin{cases}
\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\
\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\
\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}
\end{cases}
$$

(其中φ，θ，ψ分别为自转，章动、进动角)

假定 $I_x=I_y=I_z=I$，重力势能 $V=V(\theta,\varphi,\psi)$

求：

(1)用拉氏方程，给出动力学方程

(即：以欧拉角为广义坐标，求它们满足的微分方程)

(2).写出哈密顿函数，

用泊松正则方程 $\frac{dg_\alpha}{dt}=[g_\alpha, H]$，

求$\{\dot{\theta},\dot{\varphi},\dot{\psi}\}$与$\{p_\theta,p_\varphi,p_\psi\}$

之间的关系