2023 春理论力学 A 期末考试 - 回忆版

授课教师：刘川　　题目整理：LQY

2023/06/18

试题

1　双自由度小振动

考虑一个一维的双自由度小振动系统。建立水平向右的 x 轴，两个质量为 m 的小球分别处于 $x=l_0$ 和 $x=2l_0$ 的位置。$x=0$ 和 $x=3l_0$ 的位置为两刚性墙面。三个质量为零、原长为 l_0 的弹簧依次连接了墙面、小球、小球和墙面，两侧的弹簧弹性系数为 k，中间的弹簧弹性系数为 $4k$。系统在上述条件下能够保持平衡。现给定初始条件如下：两个小球都位于平衡位置，$x=l_0$ 处的小球初速度为 0，$x=2l_0$ 处的小球初速度为 v_0。

(a)　取两小球偏离平衡位置的距离 x_1, x_2 作为广义坐标，计算系统的拉格朗日量 $L=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T M\dot{\mathbf{x}}-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}K\mathbf{x}$。给出惯性矩阵 M 与弹性矩阵 K 的具体形式。

(b)　计算系统的本征频率 ω_i。

(c)　计算系统的模态矩阵 A。

(d)　根据前面计算的结果，求解题干中的初值问题。

2　球形陀螺

三个质量为 m 的质点构成一个边长为 a 的等边三角形。不失一般性，我们认为它在 $x-y$ 平面内，其中心位于原点，并假定三个顶点的坐标分别

为 $a(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0)$，$a(-\frac{\sqrt{3}}{6},+\frac{1}{2},0)$ 和 $a(-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},0)$。

(a) 我们现在将另外一个质量为 M 的质点（一般来说 $M \neq m$）放置在 z 轴上坐标为 $(0,0,z)$ 的位置。计算体系质心的位置。

(b) 现在将三维坐标的原点平移，取在质心。计算体系相对质心的转动惯量矩阵，并且证明：无论 z 如何取值，系统都是一个对称陀螺。

(c) 如果想让系统成为球形陀螺，求 z 的值。

3 各向同性的二维谐振子

本题中我们使用哈密顿-雅可比方程研究各向同性二维谐振子的运动。各向同性二维谐振子的哈密顿量可以写作 $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$。

可能用到的积分公式：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \arccos\left(\frac{b-2x}{\sqrt{b^2+4a}}\right) + C$$

(a) 写出 $S(x,y,t)$ 满足的哈密顿-雅可比方程。

(b) 现在将 S 分离变量：$S(x,y,t) = S_1(x) + S_2(y) + T(t)$，给出 $S_1(x)$、$S_2(y)$ 和 $T(t)$ 分别满足的常微分方程。

(c) 选取 $Q_i = E_i$ 作为新的广义坐标（式中 E_i 为各方向的能量），给出哈密顿-雅可比方程的完全解。这一问请先不要急着对完全解积分。

(d) 通过计算 $P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}$，给出 $x(t)$ 和 $y(t)$。证明 P_i 实际上和运动的相位有关。

(e) 判断轨道是否闭合，给出轨道的形状。

(f) 计算与广义坐标 x 和 y 对应的作用量变量 $I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \mathrm{d}q_i$。给出总能量 E 与 I_x、I_y 的关系，证明总能量只依赖于 I_x 和 I_y 的特定线性组合。最后，计算对应角度变量随时间的变化率 $\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i}$。

4 有质量的弹簧

大多数情况下（包括本卷的第 1 题），我们在处理振动问题时会忽略弹簧的质量。本题中我们将研究有质量的弹簧和质点耦合的情形。

建立水平向右的 x 轴，$x=-l_0$ 和 $x=l_0$ 的位置为两刚性墙面，$x=0$ 处有一质量为 m 的质点。两根原长为 l_0 的弹簧分别连接了质点和左、右墙面，弹簧的质量线密度为 μ，张力系数（杨氏模量乘以面积，单位为牛顿）为 T。系统在上述条件下保持平衡。

我们使用 $y(x,t)$ 来描述弹簧上各点的位移。注意：y 和 x 并不是垂直的，而是同向的，这意味着弹簧中传播的是纵波。此外，我们使用 $Y(t):=y(0,t)$ 来描述质点的运动。

(a) 计算系统的总动能 $\mathcal{T}$。（总动能包含质点和两根弹簧的动能）

(b) 计算系统的总势能 V。（总势能包含两根弹簧的弹性势能）

(c) 现在假设如下的初始条件：初始位移 $y(x,t)=\Delta\left(1-\frac{|x|}{l_0}\right)$（其中 $\Delta\ll l_0$），初始速度为零。计算该条件下的总势能 V。将该结果与弹簧无质量情况下的结果 $V=k\Delta^2$ 对比，给出 T 和 k 的关系。

(d) 计算系统的拉格朗日量 $L=\mathcal{T}-V$。把质点位移 $Y(t)$ 和弹簧位移 $y(x,t)(x\neq 0)$ 看作独立变量，将作用量对它们变分，从而给出系统的运动方程。请特别注意在 $x=0$ 附近弹簧与质点之间的耦合。

参考解答

第 1 题

(a) 系统总动能：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_2}^2$$

总势能：

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4k(x_1 - x_2)^2$$

拉格朗日量：

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2) - \frac{1}{2}k(5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2)$$

写成矩阵乘法的形式：

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x_1} & \dot{x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & \\ & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5k & -4k \\ -4k & 5k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

上式已经显式地写出了矩阵 M 和 K。

(b) 求解久期方程：

$$\det\begin{pmatrix} m\omega^2 - 5k & 4k \\ 4k & m\omega^2 - 5k \end{pmatrix} = 0$$

计算得到

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = 3\omega_0$$

(c) 对于 $\omega_1 = \omega_0$，本征矢量 $\eta^{(1)}$ 满足

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\eta^{(1)} = 0$$

在 $\eta^T m\eta = 1$ 的归一化条件下，解得

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

类似地，也可以解得 $\omega_2 = 3\omega_0$ 对应的本征矢量：

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

由此得到模态矩阵：

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

它满足归一化条件

$$A^T M A = \mathbb{1}_{2\times 2}$$

(d) 设

$$X = AQ,$$

其中

$$Q = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_0 t) + D_1 \sin(\omega_0 t) \\ C_2 \cos(3\omega_0 t) + D_2 \sin(3\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

为简正坐标。

代入初始条件：

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X(0) = A \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \dot{X}(0) = A \begin{pmatrix} \omega_0 D_1 \\ 3\omega_0 D_2 \end{pmatrix}$$

解得

$$C_1 = C_2 = 0, \quad D_1 = \frac{v_0}{\omega_0}\sqrt{\frac{m}{2}}, \quad D_2 = -\frac{v_0}{3\omega_0}\sqrt{\frac{m}{2}}$$

代入 $X = AQ$ 即可得到解：

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{2\omega_0}\left(\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)\right) \\ \frac{v_0}{2\omega_0}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)\right) \end{pmatrix}$$

第 2 题

(a) 三个质量为 m 的质点构成的整体可以等效为位于原点、质量为 $3m$ 的质点。设系统质心坐标为 $(0,0,h)$，其中 h 满足

$$(M+3m)\cdot h = M\cdot z$$

得到

$$h = \frac{M}{M+3m}z$$

(b) 记三个质量为 m 的质点为 A, B, C，并记质量为 M 的质点为 D。平移坐标原点后，各质点的坐标如下：

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a, 0, -\frac{M}{M+3m}z\right) \quad B\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a, \frac{1}{2}a, -\frac{M}{M+3m}z\right)$$
$$C\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a, -\frac{1}{2}a, -\frac{M}{M+3m}z\right) \quad D\left(0, 0, \frac{3m}{M+3m}z\right)$$

根据对称性，有

$$I_{33} = 3\cdot m\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = ma^2$$

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} &= \sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) \\ &= \left[3m\left(\frac{M}{M+3m}z\right)^2 + M\left(\frac{3m}{M+3m}z\right)^2\right] + \left[2m\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right] \\ &= \frac{3Mmz^2}{M+3m} + \frac{1}{2}ma^2 \end{aligned}$$

$$I_{13} = I_{23} = \sum(-m_i x_i z_i) = 0$$

$$I_{12}=\sum(-m_i x_i y_i)=0$$

得到

$$I=\begin{pmatrix} \frac{3Mmz^2}{M+3m}+\frac{1}{2}ma^2 & & \\ & \frac{3Mmz^2}{M+3m}+\frac{1}{2}ma^2 & \\ & & ma^2 \end{pmatrix}$$

可见无论 z 取值多少，I 总是对角的，且总有 $I_{11}=I_{22}$，因此系统为对称陀螺。

(c) 令 $I_{11}=I_{22}=I_{33}$，得到

$$z=\pm\sqrt{\frac{M+3m}{6M}}\,a$$

第 3 题

(a) 哈密顿-雅可比方程：

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(x_i,\frac{\partial S}{\partial x_i},t\right)=0$$

代入哈密顿量的具体形式，得到

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)=0$$

(b) 将方程写成下面的形式：

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]+\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2y^2\right]=0$$

若 S 可以按照题干给出的形式分离变量，则有

$$\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right]+\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]+\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}y}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2y^2\right]=0$$

每个方括号内的式子都只依赖于单个变量。但它们求和为零，因此每个方括号内的式子实际上为常数，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -E_1 - E_2$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E_1$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = E_2$$

这就是所求的常微分方程。

(c) 求解上述方程，得到

$$S = \int \sqrt{2mE_1 - m^2\omega^2 x^2}\,\mathrm{d}x + \int \sqrt{2mE_2 - m^2\omega^2 y^2}\,\mathrm{d}y - (E_1 + E_2)\,t$$

为所求的完全解。

(d)

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{\partial S}{\partial E_1} \\ &= t - \int \frac{m}{\sqrt{2mE_1 - m^2\omega^2 x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= t - \frac{1}{\omega}\arccos\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E_1}}x\right) \end{aligned}$$

简单变形后得到

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_1}{m\omega^2}}\cos\left(\omega(t - P_1)\right)$$

同理

$$y(t) = \sqrt{\frac{2E_2}{m\omega^2}}\cos\left(\omega(t - P_2)\right)$$

可见 P_i 决定了运动的初相位。

(e) 分类讨论：

$$P_2 = P_1 + \frac{n\pi}{\omega}$$

时，轨迹为直线；

$$P_2 = P_1 + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\pi\right)}{\omega}$$

时，轨迹为正椭圆；

其余情况下轨迹一般为斜椭圆。

(f)

$$\begin{aligned}
I_x &= \frac{1}{2\pi}\oint p_x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2mE_1 - m^2\omega^2x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[m\omega\cdot\sqrt{\frac{2E_1}{m\omega^2}}\sin(\omega t)\right]\cdot\left[\sqrt{\frac{2E_1}{m\omega^2}}\sin(\omega t)\cdot\omega\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{E_1}{\omega}
\end{aligned}$$

同理可得

$$I_y = \frac{E_2}{\omega}$$

因此总能量

$$E = (I_1 + I_2)\omega$$

可见总能量只依赖于 $(I_1 + I_2)$ 这一线性组合。

最后，计算 ω_i：

$$\omega_x = \frac{\partial E}{\partial I_x} = \omega, \quad \omega_y = \frac{\partial E}{\partial I_y} = \omega$$

第 4 题

(a) 总动能

$$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\int_{-l_0}^{0-0}\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{0+0}^{l_0}\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x$$

(b) 考虑 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 之间的小段。这段弹簧的伸长量为 $\mathrm{d}y$，等效弹性系数为 $k_{\mathrm{d}x}=\frac{T}{\mathrm{d}x}$，故

$$\mathrm{d}V=\frac{1}{2}k_{\mathrm{d}x}\cdot(\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

从而

$$V=\int_{-l_0}^{0-0}\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{0+0}^{l_0}\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

(c) 这种情况下，$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ 是常量：

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\Delta}{l_0}\right)^2$$

代入 (b) 的结果，得到

$$V=\frac{T\Delta^2}{l_0}$$

和 $V=k\Delta^2$ 对比，得到

$$T=kl_0$$

(d) 写出拉格朗日量：

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\int_{-l_0}^{0-0}+\int_{0+0}^{l_0}\right)\frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这里拉格朗日量的函数关系为 $L = L(\dot{Y}, \dot{y}, y')$。（后面积分符号都会这样写，因为分开两个写实在是太长了）

接下来计算对应的作用量：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{Y}, \dot{y}, y')\mathrm{d}t$$

对其变分，会出来三项：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\delta\dot{Y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}t = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3$$

第一项：

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\frac{\partial(\delta Y)}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{Y}\frac{\partial(\delta Y)}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= m\dot{Y}\delta Y\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{Y}\delta Y\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{Y}\delta Y\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

第二项：

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\frac{\partial(\delta y)}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left[\left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0}\right)\mu\dot{y}\frac{\partial(\delta y)}{\partial t}\mathrm{d}x\right] \\
&= \left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0}\right)\mathrm{d}x\left(\mu\dot{y}\delta y|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\mu\,\ddot{y}\,\delta y\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0}\right)\mathrm{d}x\int_{t_1}^{t_2}\mu\,\ddot{y}\,\delta y\,\mathrm{d}t \\
&= -\mu\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0}\right)\ddot{y}\,\delta y\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

第三项：

$$
\begin{aligned}
\delta S_3 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \mathrm{d}t \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0} \right) T y' \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \mathrm{d}x \right] \\
&= -T \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[(\delta y y')\big|_{-l_0}^{0-0} + (\delta y y')\big|_{0+0}^{l_0} - \left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0} \right) y''\, \delta y \, \mathrm{d}x \right]
\end{aligned}
$$

这里要小心处理式中的边界项。在 $\pm l_0$ 处，由于端点固定，边界项为零。但是，在 0 ± 0 处，边界项必须保留：

$$
(\delta y y')\big|_{-l_0}^{0-0} + (\delta y y')\big|_{0+0}^{l_0} = \delta Y (y'(0-0) - y'(0+0))
$$

这里利用了关系 $\delta Y = \delta y(x=0)$。

将边界项代入，第三项最终可以写为：

$$
\delta S_3 = T \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\delta Y (y'(0+0) - y'(0-0)) + \left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0} \right) y''\, \delta y \, \mathrm{d}x \right)
$$

将三项求和，就可以最终得到 δS 的表达式：

$$
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\delta Y \left[T(y'(0+0) - y'(0-0)) - m\ddot{Y} \right] + \left(\int_{-l_0}^{0-0} + \int_{0+0}^{l_0} \right) \delta y \left(T y'' - \mu \ddot{y} \right) \right] = 0
$$

由 δy 和 δY 的任意性，有

$$
m\ddot{Y} = T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \bigg|_{0+0} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \bigg|_{0-0} \right]
$$

$$
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \text{when } x \neq 0
$$

这就是所求的运动方程。