

北京大学 2022-2023 学年第 1 学期

《理论力学 A》期末考试试卷

本试卷共 6 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

姓名: _____ 学号: _____ 学院: _____

答题要求: 书写工整规范, 条理清晰, 文字阐述充分。

1. (15') 简要阐述以下概念: 洛伦兹变换、正则变换、泊松括号、惯性椭圆、相对性原理。
2. (15') 设一保守体系有 n 个自由度, 从相空间的哈密顿变分原理出发, 推导给出体系的正则方程, 并说明其与拉格朗日方程的等价性。
3. (15') 通过具体计算说明: 为什么系统随空间转动所做无穷小变换是无穷小正则变换? 为什么其生成元是角动量?
4. (15') 有一均匀正圆锥体, 质量为 m , 高度为 h , 顶角为 2α , 该圆锥体在一水平面上绕其顶点做无滑滚动, 已知其几何对称轴以恒定的角速度 ω 绕铅垂轴转动。若锥体的顶点固定于水平面上, 给出体系运动的动能; 若锥体的顶点固定于铅垂轴上某点, 使其几何对称轴平行于水平面, 给出体系运动的动能。
5. (20') 有一质点运动的哈密顿量为

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} + \lambda \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \right)^2, \quad \omega > 0, \lambda > 0$$

- 1) 利用正则变换将正则变量 (q, p) 变换成 (Q, P) , 使新变量 Q 在变换后的哈密顿量中为循环坐标, 通过求解变换后的哈密顿量, 给出系统运动的解 $q(t), p(t)$ 。2) 基于哈密顿量 $H(q, p)$, 利用哈密顿-雅可比方法求解系统运动的解 $q(t), p(t)$ 。
6. (20') 如图所示, 一个复摆系统由两个边长为 L 、质量为 m , 且处于同一平面的正方形薄板构成, 其中, 一个板绕固定点 O 在铅垂面内摆动, 另一板绕 P 点在铅垂面摆动, P 点为绕 O 摆动的板的一个端点, 1) 给出体系的哈密顿量; 2) 利用正则方程, 给出系统的运动方程, 并分析系统的平衡位置及其稳定性; 3) 求体系在稳定平衡附近作小摆动时的本征频率和简正模式。

