热统第八章作业

汪志诚著《热力学统计物理》（第五版）高等教育出版社

P245-249

习题 8.2，8.3，8.4，8.5，8.6，8.8，8.10，8.12，8.19，8.21

作业要求：提交纸质版作业（作业本或是 A4 纸装订，在醒目位置写好姓名+学号），在本章讲完后的下一周周三收作业，同时下发前一次作业。

8.2 试证明，理想玻色和费米系统的熵可分别表示为

$$S_{\mathrm{B.E.}}=-k\sum_s\left[f_s\ln f_s-(1+f_s)\ln(1+f_s)\right]$$

$$S_{\mathrm{F.D.}}=-k\sum_s\left[f_s\ln f_s+(1-f_s)\ln(1-f_s)\right]$$

其中 f_s 为量子态 s 上的平均粒子数，$\sum\limits_s$ 对粒子的所有量子态求和. 并证明当 $f_s<<1$ 时，有

$$S_{\mathrm{B.E.}}\approx S_{\mathrm{F.D.}}\approx S_{\mathrm{M.B.}}=-k\sum_s(f_s\ln f_s-f_s)$$

8.3 求弱简并理想费米（玻色）气体的压强和熵.

$\left[\right.$提示：$S=\int\frac{C_V}{T}\mathrm{d}T+S_0(V)$. 当 $n\lambda^3<<1$ 时弱简并理想费米（玻色）气体趋于经典理想气体，据此可以确定函数 $S_0(V)\left.\right]$

$\left[\right.$答：

$$p=nkT\left[1\pm\frac{1}{2^{5/2}g}\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right]$$

$$S=Nk\left\{\ln\left[\frac{gV}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\right]+\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2^{7/2}}\frac{N}{V}\frac{1}{g}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}\right\}\left.\right]$$

8.4 试证明，在热力学极限下均匀的二维理想玻色气体不会发生玻色凝聚.

〔提示：在热力学极限下理想玻色气体的凝聚温度 T_C 由积分

$$\int\frac{D(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{e}^{\varepsilon/kT_C}-1}=n$$

确定. 对于二维气体上述积分发散，这意味着在有限温度下二维理想玻色气体的化学势不可能趋于-0，因而不存在玻色凝聚现象〕

8.5 约束在磁光陷阱中的理想原子气体，在三维谐振势场 $V=\frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)$ 内运动. 如果原子是玻色子，试证明：$T\leqslant T_C$ 时将有宏观量级的原子凝聚在能量为 $\varepsilon_0=\frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)$ 的基态. 在 $N\to\infty$、$\bar{\omega}\to 0$、$N\bar{\omega}^3$ 保持有限的热力学极限下，临界温度 T_C 由下式确定：

$$N=1.202\times\left(\frac{kT_C}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3$$

其中 $\bar{\omega}=(\omega_x\omega_y\omega_z)^{\frac{1}{3}}$. 温度为 T 时，凝聚在基态的原子数 N_0 与总原子数 N 之比为

$$\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

（提示：在 $T\leqslant T_C$ 时原子气体的化学势趋于 $\frac{\hbar}{2}(\omega_x+\omega_y+\omega_z)$. 在热力学极限下临界温度 T_C 由下式确定：

$$N=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}n_x\mathrm{d}n_y\mathrm{d}n_z}{e^{\hbar(\omega_xn_x+\omega_yn_y+\omega_zn_z)/kT_C}-1}$$）

8.6 承前 8.5 题，如果 $\omega_z>>\omega_x,\omega_y$，则在 $kT<<\hbar\omega_z$ 的情形下，原子在 z 方向的运动将冻结在基态作零点振动，于是形成二维原子气体. 试证明 $T\leqslant T_C$ 时原子的二维运动中将有宏观量级的原子凝聚在能量为 $\varepsilon_0=\frac{\hbar}{2}(\omega_y+\omega_z)$ 的基态. 在 $N\to\infty$、$\bar{\omega}\to 0$、$N\bar{\omega}^2$ 保持有限的热力学极限下，临界温度 T_C 由下式确定：

$$N=1.645\left(\frac{kT_C}{\hbar\bar{\omega}}\right)^2$$

其中 $\bar{\omega}=(\omega_x\omega_y)^{\frac{1}{2}}$. 温度为 T 时，凝聚在基态的原子数 N_0 与总原子数 N 之比为

$$\frac{N_0}{N}=1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^2.$$

8.8 试根据普朗克公式求平衡辐射内能密度按波长的分布：

$$u_\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{\mathrm{d}\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$

并据此证明，使辐射内能密度取极大的波长 λ_m 满足方程：($x=hc/\lambda_mkT$)

$$5e^{-x}+x=5$$

这个方程的数值解为 $x=4.965\ 1$. 因此

$$\lambda_mT=\frac{hc}{4.965\ 1\ k}$$

λ_m 随温度增加向短波方向移动.

8.10 试根据热力学公式 $S=\int \frac{C_V}{T}\mathrm{d}T$ 及光子气体的热容 $C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$，求光子气体的熵.

$\left(答：S=\frac{4\pi^2 k^4}{45c^3\hbar^3}T^3 V\right)$

8.12 室温下某金属中自由电子气体的数密度 $n=6\times10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$；某半导体中导电电子的数密度为 $n=10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$. 试验证这两种电子气体是否为简并气体.

8.19 假设自由电子在二维平面上运动，面密度为 n. 试求 0 K 时二维电子气体的费米能量、内能和简并压.

$\left(答：\mu(0)=\frac{h^2}{4\pi m}n, U=\frac{1}{2}N\mu(0), p=\frac{1}{2}n\mu(0)\right)$

8.21 试根据热力学公式 $S=\int \frac{C_V}{T}\mathrm{d}T$，求低温下金属中自由电子气体的熵.

$\left(答：S=Nk\frac{\pi^2}{2}\frac{kT}{\mu(0)}\right)$