

院系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

本试卷共 3 页、11 题, 全卷满分 100 分, 考试用时 120 分钟

(考试结束后, 请将本试卷和答题纸一同上交)

热力学与统计物理(A)

2022/06/22

答题中可能用到的数学关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$$

一、简答题: 本题共 8 小题, 共 48 分

- 考虑由全同粒子组成的系统, 粒子之间的相互作用可以忽略.
 - 用 ε_l 表示单粒子的能级, ω_l 表示相应能级的简并度, a_l 标记能级 ε_l 上的粒子数. 请写出麦克斯韦-玻尔兹曼分布、费米-狄拉克分布与玻色-爱因斯坦分布, 并给出从费米-狄拉克分布和玻色-爱因斯坦分布还原到麦克斯韦-玻尔兹曼分布的条件. (4 分)
 - 请定性描述弱简并理想玻色(费米)气体在物态方程和内能上如何偏离经典理想气体的结果, 并简要说明统计关联的起源. (3 分)
 - 对于理想玻色气体, 请给出实现玻色-爱因斯坦凝聚的条件. (2 分)
- 考虑满足非简并条件的单原子分子理想气体. 在一定的近似下, 可以把单原子分子看作没有内部结构的质点, 忽略单原子分子间的相互作用.
 - 求单原子分子理想气体的单粒子配分函数(也称子系配分函数). (3 分)
 - 证明满足非简并条件的单原子分子理想气体的化学势非正. (3 分)
 - 求单原子分子理想气体的熵. (3 分)
 - 根据量子统计理论, 全同粒子不可分辨. 请叙述全同粒子不可分辨性在理想气体熵的热力学表达式中的反映, 并以此简单解释吉布斯佯谬. (2 分)
- 金属晶体热容由电子运动和晶格振动两部分的贡献构成. 请画出金属定容热容 C_V 随温度 T 变化的曲线, 并简单描述在高温、低温以及极低温下对金属热容有主要贡献的部分以及金属定容热容 C_V 随温度 T 变化的行为. (3 分)
- 试解释负绝对温度的意义, 并举例说明能够实现负绝对温度的物理系统. (3 分)
- 关于玻色-爱因斯坦凝聚现象, 下列说法正确的有:
(A)玻色-爱因斯坦凝聚现象是实空间的凝聚; (B)由空腔中的光子组成的气体体系不会发生玻色-爱因斯坦凝聚现象; (C)凝聚体的压强是一个极大的数值, 常被称为简并压; (D)在热力学极限下均匀的二维理想玻色气体不会发生玻色-爱因斯坦凝聚现象.
[注: 备选答案中有一个或多个正确选项. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.] (5 分)
- 关于强简并理想费米气体, 下列说法正确的有:
(A)金属中的巡游电子气体可以近似以强简并理想费米气体描写; (B)理想费米气体的定容热容 C_V 和熵 S 随温度 T 趋于零是能量量子化的结果; (C)零温下强简并理想费米气体具有很高的平均能量、平均速率及压强, 这是泡利不相容原理的结果; (D)在有限温度下, 费米分布函数与 $T = 0$ K 时的阶跃函数相比发生显著偏离的只在 μ_0 附近 $\pm kT$ 的能量范围.
[注: 备选答案中有一个或多个正确选项. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.] (5 分)

7. 考查一个布朗粒子的运动在水平方向 x 上的投影, 在不存在其他外力时,
- (1) 写出以粒子坐标 x 表示的朗之万方程, 并说明各项的物理含义; (3 分)
 - (2) 从朗之万方程出发, 求布朗粒子位移的平方平均值 $\overline{x^2(t)}$, 并证明: 当时间 t 远比弛豫时间 τ 短时, $\overline{x^2} \propto t^2$; 当时间 t 远比弛豫时间 τ 长时, $\overline{x^2} \propto t$. (5 分)
8. 玻耳兹曼 H 定理在统计物理学发展上具有里程碑的意义.
- (1) 请简述玻耳兹曼 H 定理的内容. (2 分)
 - (2) 庞加莱回归定理断言: 一个处于有限空间内的保守力学系统, 在足够长的时间后将回复到初始运动状态的附近. 策梅洛根据庞加莱的上述定理指出, 在足够长的时间之后 H 函数必将回复初值, 因而 H 函数不可能单向减少. 试对这一质疑给出回答. (2 分)

二、计算题: 本题共 3 小题, 共 52 分

9. 范德瓦耳斯方程的另一种推导方法是作平均场近似. 设气体的哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} \phi(r_{ij})$$

今假设第 i 个分子所受其他分子的相互作用可以用平均场 $\phi_{mf}(\mathbf{r})$ 来近似表达, 即 H 近似用下列平均场哈密顿量代替:

$$H_{mf} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{p_i^2}{2m} + \phi_{mf}(\mathbf{r}_i) \right\}$$

现对平均场作为进一步简化, 假设 $\phi_{mf}(\mathbf{r})$ 取下列形式:

$$\phi_{mf}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & r < r_0, \\ \bar{\phi}, & r \geq r_0, \end{cases}$$

其中 $\bar{\phi}$ 是一常数. 上述相互作用势相当于直径为 r_0 的刚球, 在 $r > r_0$ 时相互作用势为常数.

- (1) 求正则系综的配分函数 Z_N . (6 分)
 - (2) 证明由上述配分函数 Z_N 计算的压强遵从范德瓦耳斯方程. (6 分)
10. 自旋为 $\hbar/2$ 的粒子处于磁场 H 中, 粒子的磁矩为 μ , 磁矩与磁场方向平行或反平行所相应的能量分别为 $-\mu H$ 与 μH . 设有 N 个这样的定域粒子处于磁场 H 中, 整个系统处于温度为 T 的平衡态, 粒子之间的相互作用很弱, 可以忽略.
- (1) 求子系配分函数 Z . (3 分)
 - (2) 求系统的自由能 F , 熵 S , 内能 \bar{E} 和热容 C_H . (6 分)
 - (3) 绝热去磁是冷却物质到1 K以下的重要过程. 在该过程中, 首先使样品与温度为 T_0 的热源接触, 并将施于样品的磁场从0缓慢增加至 H_0 ; 然后将样品撤离热源, 同时将施于样品的磁场缓慢减小至 H_1 ($H_1 < H_0$). 试计算样品的最终温度. (3 分)
 - (4) 试求总磁矩的平均值 \bar{M} 和磁化率 χ 的表达式. (4 分)
 - (5) 试计算 \bar{M} 和 χ 的高温弱场及低温强场极限. (6 分)
- (提示: 总磁矩 \bar{M} 和磁化率 χ 的定义分别为

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^N \bar{\mu}_i, \quad \chi = \frac{\partial(\bar{M}/V)}{\partial H}$$

)

11. 考虑如下表示两股不交缠 DNA 分子的简化模型. 一条 DNA 由 N 对碱基组成, 它只能从一头打开, 即只有前面的 $p-1$ 个碱基对相继打开后, 第 p 个才能打开. 碱基对只能以一种方式结合在一起, 此时能量为零; 打开一个碱基对需要消耗能量 $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, 打开后每个碱基可能处于 $G (G > 1)$ 个不同的状态.

(1) 求打开 p 个碱基对时需要的能量 E_p 和与能级 E_p 相应的简并度 Ω_p . (3 分)

(2) 求温度为 T 时, DNA 的正则配分函数. (3 分)

(3) 求打开的碱基对的平均个数 \bar{p} 和涨落. (6 分)

(4) 在热力学极限下, 即 $N \rightarrow \infty$, 体系能否发生相变? 如果可以发生相变, 求发生相变的温度 T_c 和相变潜热. (6 分)

(提示:

- i. DNA 呈现双螺旋结构, 一个碱基只与另一个互补的碱基相结合形成碱基对.
- ii. 相变指 DNA 分子的熔解(双链分离)相变, 是指由双链脱氧核糖核酸开旋并通过断裂分离成单链疏水且堆叠的单链分子的过程.)