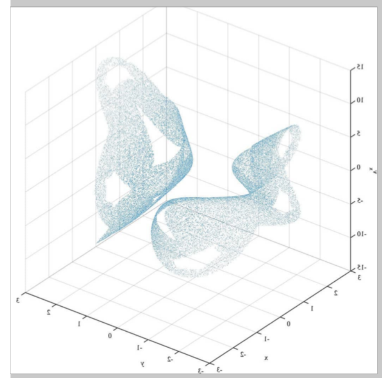
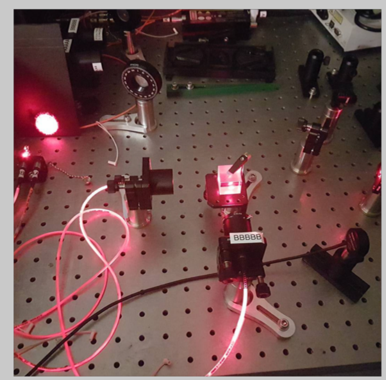
Introducción a probabilidad y estadística

Manuel Ferrer

¿Quién soy?

- Ingeniero en Física Industrial
- Maestría en Nanotecnología
- Investigación fundamental
- Taco lover





Temario del día

1. Teoría de Conjuntos
2. Fundamentos de probabilidad
3. Variables aleatorias

Teoría de Conjuntos

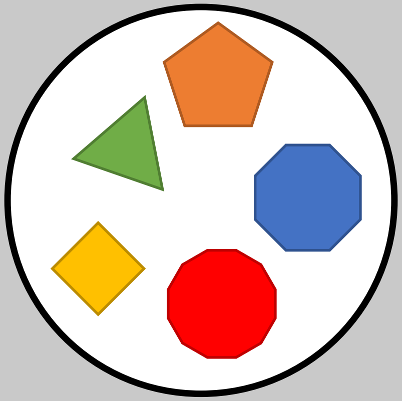
¿Qué es un conjunto?

Colección de objetos que cumplen una cierta regla

S es un conjunto que contiene a todos los números complejos cuya norma es menor a 1

$$S = \{x : x \in \mathbb{C} \text{ and } |x| < 1\}$$

$$S = \{\text{Granos de café} \\ \text{no tostados}\}$$



Definiciones clave

Experimento

Actividad cuya medición tiene variaciones

Evento

Una medición de nuestro experimento

Espacio muestral

Todas las posibles mediciones de nuestro experimento

Ejemplo:

Lanzar una moneda al aire

El resultado cuando cae

Operaciones

Unión $$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

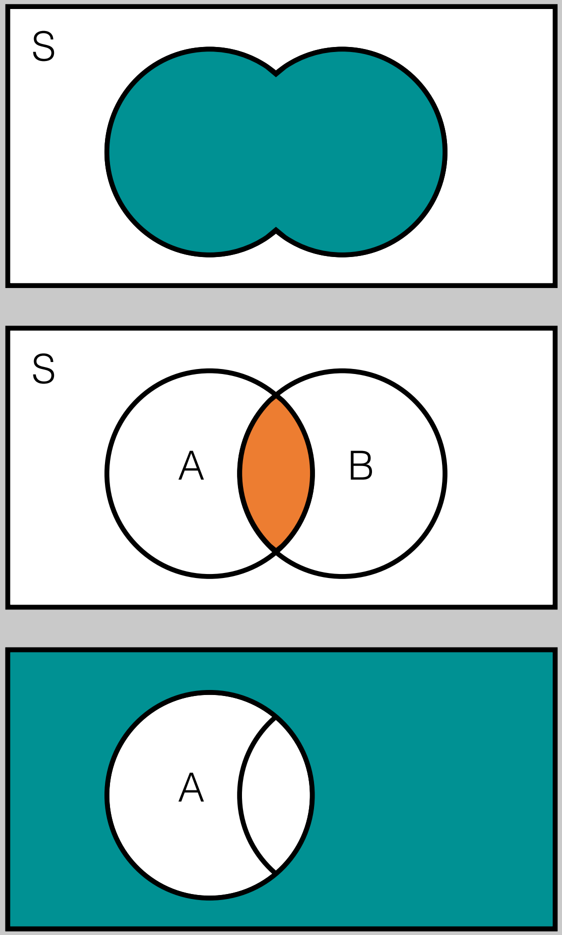
Todo es de todos

Intersección $$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

Lo que tienen en común

Complemento $$A^C = \{x : x \notin A\}$$

Lo que nos sobró



Ejercicios

Ejercicio 1

1. Consideremos experimento de sacar n cartas de mazo al mismo tiempo
   a. n=1
   b. n=2

2. Si definimos los eventos

$$A = \{D, T\} \qquad B = \{D, E, C\}$$

Realicen todas las operaciones sobre los eventos

$$S = \{D, E, C, T\}$$

$$S = \{DD, DE, DC, DT, EE, EC, ET, CC, CT, TT\}$$

$$A \cup B = \{D, E, C, T\}$$

$$A \cap B = \{D\}$$

$$A^c = \{E, C\}$$

$$B^c = \{T\}$$

Identidades

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributividad

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

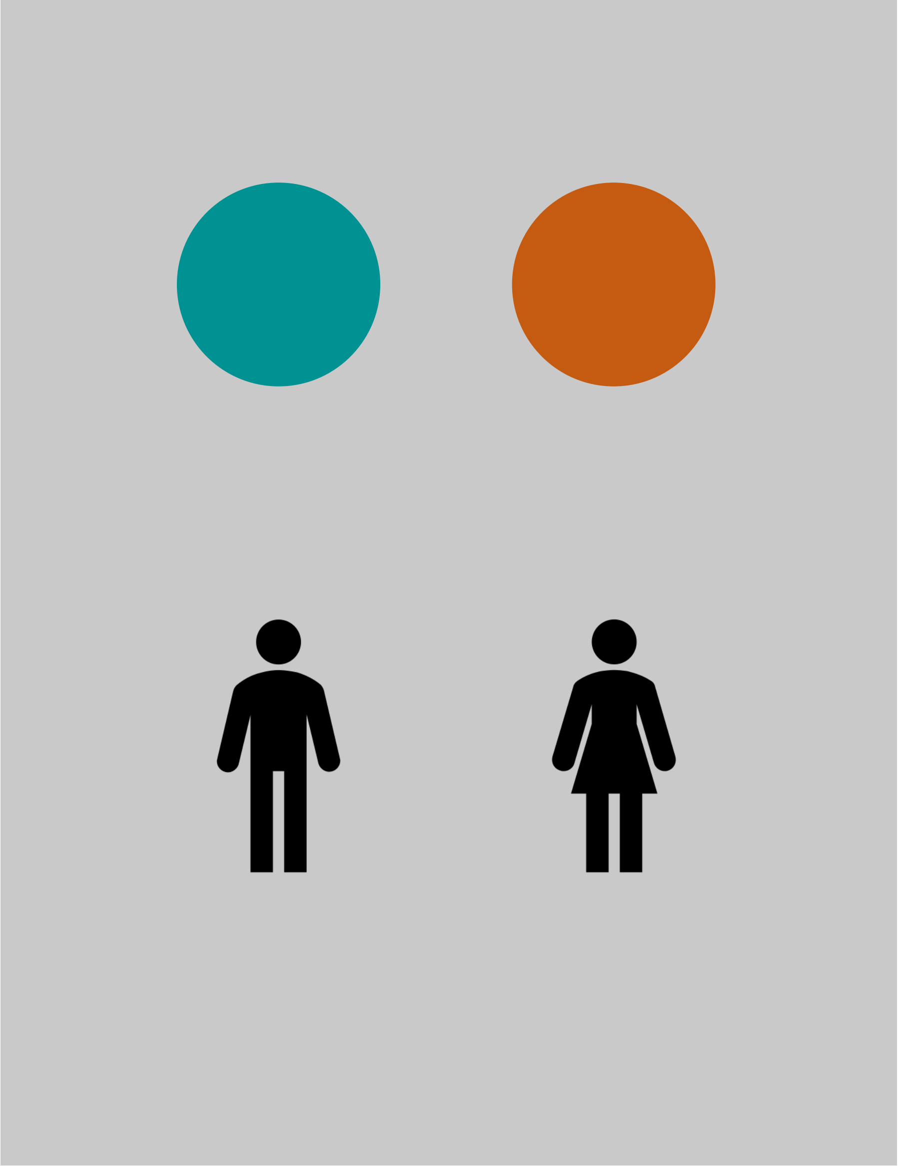
Leyes de DeMorgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Mutuamente exclusivos

No poseen ningún elemento común

$$A \cap B = \emptyset$$



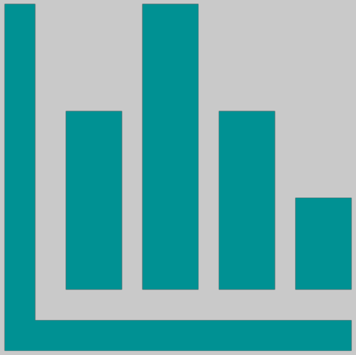
Probabilidad 101

Probabilidad

La medida de una posible ocurrencia

Hay dos "formulaciones"

1. **Frecuentista:** realizar un experimento N veces y visualizar la ocurrencia
2. **Subjetivista:** previo al experimento se realizan predicciones



Axiomas

Considerando un espacio muestral S podemos definir:

1. No hay probabilidades negativas
2. Todos los posibles eventos están en S
3. La unión de eventos mutuamente exclusivos es la suma de las probabilidades

$$P(A) > 0$$

$$P(S) = 1$$

$$P(\cup_i^N A_i) = \sum_i P(A_i)$$

Cálculos

$$P = \frac{\text{Veces que pasó A}}{\text{Total de veces que se hizo}}$$

$$P = \frac{\text{Número de posibilidades}}{\text{Total de posibilidades}}$$

Cálculos – Parte 2

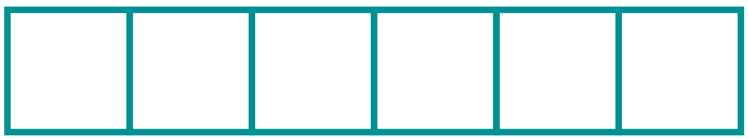
$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(A) \leq 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Técnicas de Conteo

¿Cuántos números puedo formar?



Existen dos preguntas:

1. ¿Puedo repetir dígitos?
2. ¿Importa el orden?

O,SR	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
O,R	n^r
D,SR	$\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
D,R	$\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

Probabilidad condicional

Es lo mismo

1. ¿Estar enfermo y ser universitario?
2. ¿Estar enfermo cuando se es universitario?

No

$$P(A \cap B)$$

$$P(A|B)$$

Probabilidad condicional

La probabilidad del evento A dado B:

La probabilidad de A ya que sucedió B

La probabilidad de A cuando se es B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

¿Invertir la probabilidad condicional?

$$P(A|B) \neq P(B|A)$$

¿Qué pasa si tenemos más de 2 eventos en juego?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

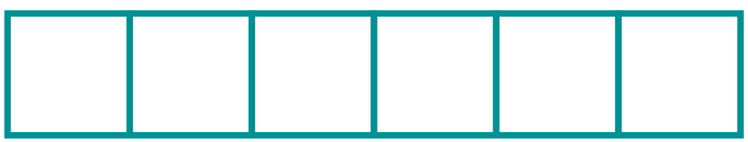
$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Variables Aleatorias

Experimento: 6 tiros seguidos de un dado

¿Cuál es la probabilidad de que 3 de los 6 tiros caigan pares?

¿Posibles soluciones?



$$X = \begin{array}{l}\text{No. de veces que}\\ \text{cae un número par}\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} PIPIPI & IIPIPP & PPIPII \\ PPPIII & PIPPII & \ldots \\ PIIPIP & \ldots & \ldots \end{array}$$

$$P(X = 3)$$

Probabilidad de que el número de veces que al realizar 6 lanzamientos consecutivos de un dado 3 sean pares

Variables Aleatorias

Representan el valor de alguna característica relevante en nuestro problema

Pueden ser discretas o continuas

Discretas:

- Personas
- Tomates
- Días
- Letras

Continuas

- Temperatura
- Estatura
- Mililitros de café

Distribuciones

A cada valor de tu variable aleatoria, se le asigna una probabilidad dependiendo de una regla

$$P(X = x_0) = p_0$$

Distribución de un dado

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Distribución binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^x (1-p)^{n-x}$$