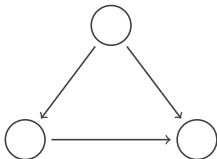


Modelo gráfico probabilístico (PGM)

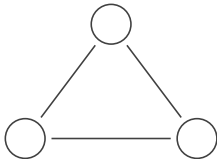
- ▶ Representación gráfica de las relaciones entre múltiples variables aleatorias de una distribución que permiten:
 - ▶ visualizar su estructura de manera simple e intuitiva,
 - ▶ codificar de manera compacta la distribución,
 - ▶ descubrir propiedades del modelo inspeccionando la gráfica (independencias condicionales),
 - ▶ inferir y razonar de manera tratable.

Tipos de PGM

- ▶ Gráficas dirigidas: **redes bayesianas**.

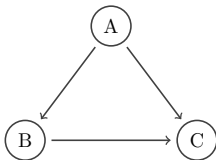


- ▶ Gráficas no dirigidas: **redes de markov**.



Red bayesiana (BN)

- ▶ Emplea gráficas acíclicas dirigidas (DAG) para representar una distribución conjunta donde:
 - ▶ los vértices son las variables aleatorias,
 - ▶ las aristas son las relaciones condicionales.

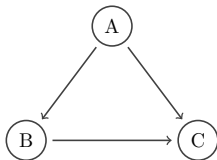


$\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{B}$ representa $P(B|A)$

Factorización I

- Dada una distribución conjunta $p(C, B, A)$ podemos factorizar:

$$\begin{aligned} p(C, B, A) &= p(C|B, A)p(B, A), && \text{regla del prod.} \\ &= p(C|B, A)p(B|A)p(A). \end{aligned}$$



$\textcircled{A} \rightarrow \textcircled{B}$ representa $P(B|A)$

Factorización II

- ▶ De manera general se conoce como la regla de la cadena:

$$p(X_1, \dots, X_k) = p(X_k | X_1, \dots, X_{k-1}) \dots p(X_2 | X_1) p(X_1).$$

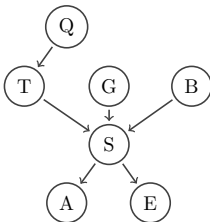
- ▶ Diferentes ordenes de descomposición se corresponden con diferentes gráficas.
- ▶ Las aristas ausentes codifican información de independencia condicional sobre la distribución.

Representación: ej. 1

- ▶ Construye una red bayesiana que modele el estilo de vida de un alumno del IIMAS de acuerdo a las siguientes variables:
 - ▶ Q : hasta el agua se me quema,
 - ▶ T : compro seguido vitamina T,
 - ▶ G : soy gamer,
 - ▶ B : siempre espero el pumabus,
 - ▶ A : el ascensor del IIMAS es mi amigo,
 - ▶ S : tengo sobrepeso,
 - ▶ P : mis pantalones se encogen.

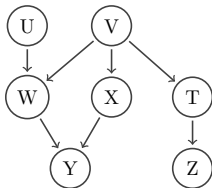
Representación: ej. 1

- ▶ Construye una red bayesiana que modele el estilo de vida de un alumno del IIMAS de acuerdo a las siguientes variables:
 - ▶ Q : hasta el agua se me quema,
 - ▶ T : compro seguido vitamina T,
 - ▶ G : soy gamer,
 - ▶ B : siempre espero el pumabus,
 - ▶ A : el ascensor del IIMAS es mi amigo,
 - ▶ S : tengo sobrepeso,
 - ▶ P : mis pantalones se encogen.



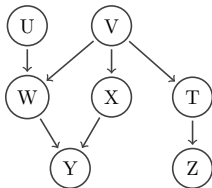
Representación: ej. 2

- ¿Cuál es la distribución conjunta de este modelo?



Representación: ej. 2

- ¿Cuál es la distribución conjunta de este modelo?



$$P(U, V, W, X, T, Y, Z) = P(U)P(V)P(W|U, V)P(X|V)P(T|V)P(Y|W, X)P(Z|T)$$

Representación: ej. 3

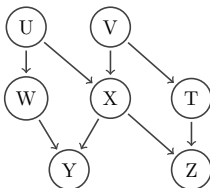
- ¿Cuál es el modelo de esta distribución conjunta?

$$P(U, V, W, X, T, Y, Z) = P(U)P(V)P(W|U)P(X|U, V)P(T|V)P(Y|W, X)P(Z|X, T)$$

Representación: ej. 3

- ¿Cuál es el modelo de esta distribución conjunta?

$$P(U, V, W, X, T, Y, Z) = P(U)P(V)P(W|U)P(X|U, V)P(T|V)P(Y|W, X)P(Z|X, T)$$



Independencia condicional

- Decimos que A es condicionalmente independiente de B dado C si:

$$p(A|B, C) = p(A|C)$$

- es decir:

$$p(A, B|C) = p(A|C)p(B|C)$$

Cadena causal

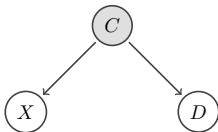
- Ej. Fumar (F) causa cáncer (C), lo que causa disnea (D).



... dado que se tiene cáncer, no importa si fumo o no.

Causa común

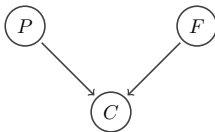
- Ej. El cáncer (C) es causa común de rayos X positivos (X) y disnea (D).



... se sufre de disnea dado que se tiene cáncer por lo tanto no son necesarios rayos X.

Efecto común

- Ej. El cáncer (C) es efecto común de polución (P) y fumar (F).



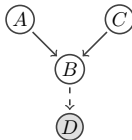
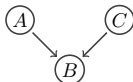
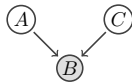
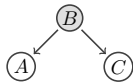
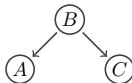
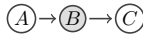
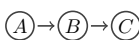
... dado que se fuma y se tiene cáncer, no es necesario asumir que el cáncer fue causado por la polución.

D-separación (I)

- ▶ X y Y son condicionalmente independientes dado Z si:
 - ▶ X y Y son separados por Z , es decir, no hay caminos activos entre X y Y .
- ▶ Un camino es activo si cada tripleta es activa.
 - ▶ cadena causal: $A \rightarrow B \rightarrow C$ donde B no ha sido observado,
 - ▶ causa común: $A \leftarrow B \rightarrow C$ donde B no ha sido observado,
 - ▶ efecto común: $A \rightarrow B \leftarrow C$ donde B o uno de sus descendientes D ha sido observado.

tripletas
activas

tripletas
inactivas



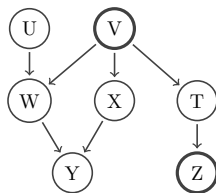
D-separación (II)

- ▶ $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$?
 - ▶ Si hay un camino (no dirigido) activo entre X y Y entonces no se garantiza $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.
 - ▶ Si no hay caminos (no dirigidos) activos entre X y Y entonces se garantiza $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

D-separación: ej. 1

► $V \perp\!\!\!\perp Z$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



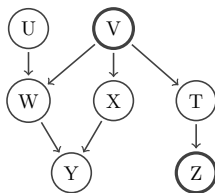
D-separación: ej. 1

► $V \perp\!\!\!\perp Z$?

- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

► Caminos:

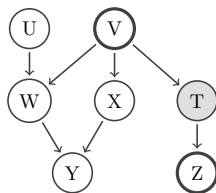
- Activos:
 - $\{V, T, Z\}$
- Inactivos:



D-separación: ej. 2

► $V \perp\!\!\!\perp Z \mid T$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



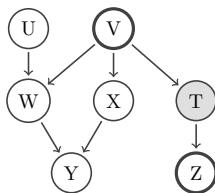
D-separación: ej. 2

► $V \perp\!\!\!\perp Z \mid T$?

- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

► Caminos:

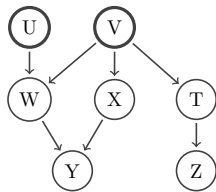
- Activos:
- Inactivos:
 - $\{V, T, Z\}$



D-separación: ej. 3

► $U \perp\!\!\!\perp V$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 3

► $U \perp\!\!\!\perp V$?

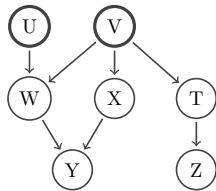
- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

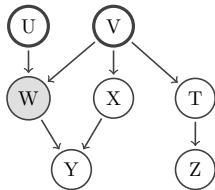
- $\{U, W(Y), V\}$
- $\{U, W, Y, X, V\}$



D-separación: ej. 4

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid W$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 4

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid W$?

- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

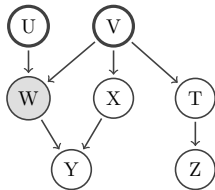
► Caminos:

► Activos:

► $\{U, W(Y), V\}$

► Inactivos:

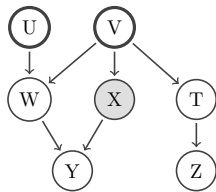
► $\{U, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, V\}$



D-separación: ej. 5

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid X$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 5

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid X$?

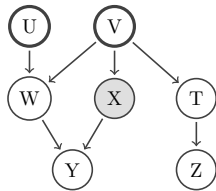
- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

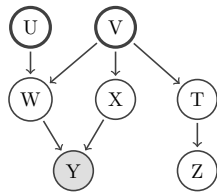
- $\{U, W(Y), V\}$
- $\{U, W, Y, X, V\}$



D-separación: ej. 6

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid Y$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 6

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid Y$?

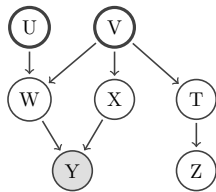
- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

► Caminos:

► Activos:

- $\{U, W(Y), V\}$
- $\{U, W, Y, X, V\}$

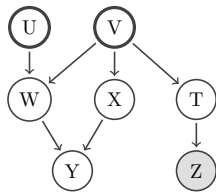
► Inactivos:



D-separación: ej. 7

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid Z$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 7

► $U \perp\!\!\!\perp V \mid Z$?

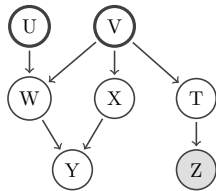
- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

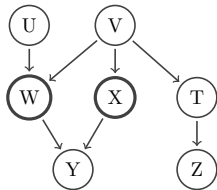
- $\{U, W(Y), V\}$
- $\{U, W, Y, X, V\}$



D-separación: ej. 8

► $W \perp\!\!\!\perp X$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 8

► $W \perp\!\!\!\perp X$?

- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

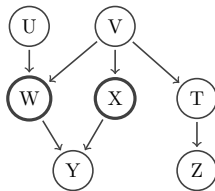
► Caminos:

► Activos:

► $\{W, V, X\}$

► Inactivos:

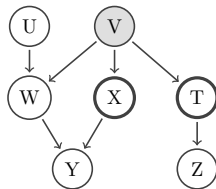
► $\{W, Y, X\}$



D-separación: ej. 9

► $X \perp\!\!\!\perp T \mid V$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 9

► $X \perp\!\!\!\perp T \mid V$?

- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

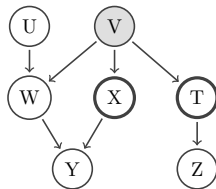
► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

► $\{X, V, T\}$

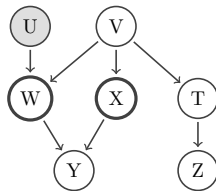
► $\{X, Y, W, V, T\}$



D-separación: ej. 10

► $X \perp\!\!\!\perp W \mid U$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 10

► $X \perp\!\!\!\perp W \mid U$?

- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

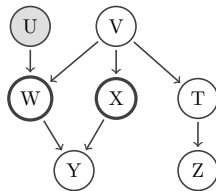
► Caminos:

► Activos:

► $\{X, V, W\}$

► Inactivos:

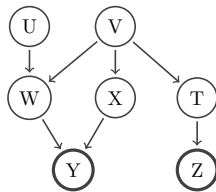
► $\{X, Y, W\}$



D-separación: ej. 11

► $Y \perp\!\!\!\perp Z$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 11

► $Y \perp\!\!\!\perp Z$?

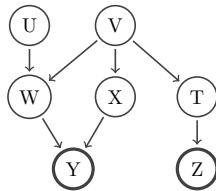
- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

► Caminos:

► Activos:

- $\{Y, X, V, T, Z\}$
- $\{Y, W, V, T, Z\}$

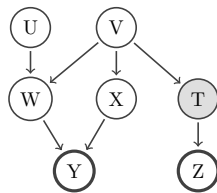
► Inactivos:



D-separación: ej. 12

► $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid T$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 12

► $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid T$?

- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

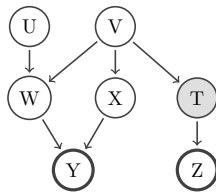
► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

► $\{Y, X, \mathbf{V}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}\}$

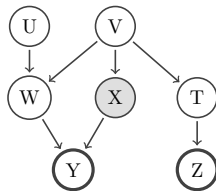
► $\{Y, W, \mathbf{V}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}\}$



D-separación: ej. 13

► $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 13

► $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid X$?

- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

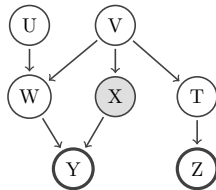
► Caminos:

► Activos:

► $\{Y, W, V, T, Z\}$

► Inactivos:

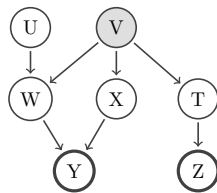
► $\{Y, X, V, T, Z\}$



D-separación: ej. 14

► $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid V$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 14

► $Y \perp\!\!\!\perp Z \mid V$?

- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

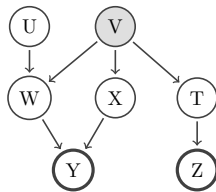
► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

► $\{Y, \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{T}, Z\}$

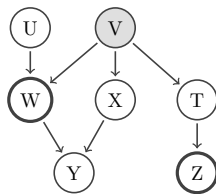
► $\{Y, \mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{T}, Z\}$



D-separación: ej. 15

► $W \perp\!\!\!\perp Z \mid V$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 15

► $W \perp\!\!\!\perp Z \mid V$?

- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

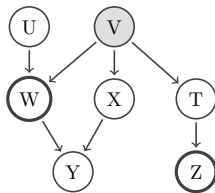
► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

► $\{W, V, T, Z\}$

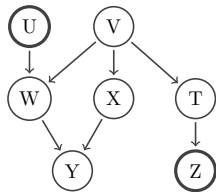
► $\{W, Y, X, V, T, Z\}$



D-separación: ej. 16

► $U \perp\!\!\!\perp Z$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 16

► $U \perp\!\!\!\perp Z$?

- ☒ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia

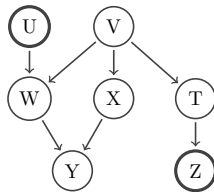
► Caminos:

► Activos:

► Inactivos:

► $\{U, W, V, T, Z\}$

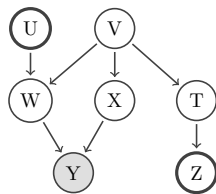
► $\{U, W, Y, X, V, T, Z\}$



D-separación: ej. 17

► $U \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$?

- ☐ garantiza independencia
- ☐ no garantiza independencia



D-separación: ej. 17

► $U \perp\!\!\!\perp Z \mid Y$?

- ☐ garantiza independencia
- ☒ no garantiza independencia

► Caminos:

► Activos:

- $\{U, W, Y, X, V, T, Z\}$
- $\{U, W, V, T, Z\}$

► Inactivos:

