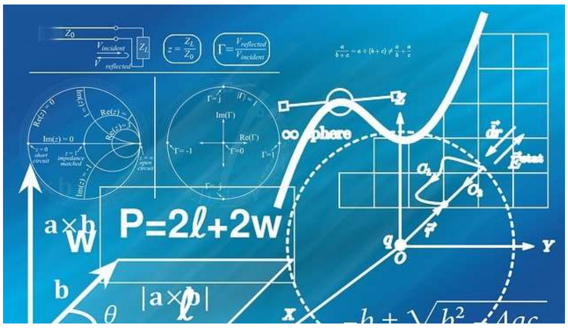
RAPPORT FINAL : FONDAMENTAUX SCIENTIFIQUES

Mathématiques de bases de l'ingénieur : Résolution de la problématique



Cree par :

- BOKANDJO Prince Hallal
- DJIOJIP OUANKAP Claude Rowane
- KAMDEM KAMDEM Leonard Joseph

Pilote : M TAWAMBA Lorince
Intervenante : Mme YIMNGA Flore
Promotion : X2026

Table des matières

.... 1

Table des matières.. 2

I. REFORMULATION DU CONTEXTE.. 3

II. ELEMENTS DE SOLUTIONS ....**Erreur ! Signet non défini.**

III. CONNAISSANCES NOUVELLES A ACQUERIR...**Erreur ! Signet non défini.**

IV. PLAN D'ACTION 3

V. REALISATION DU PLAN D'ACTION REEL 5

A. **Définition Des Mots Clés** 5

B. **Circuit de Reception** ....**Erreur ! Signet non défini.**

1. Calcul de la Resistance de charge R_c pour maximiser la puissance..................................

C. **Signaux de transmission** ....**Erreur ! Signet non défini.**

1. Equations analytiques des signaux V_1 , V_2 , V_3 ....
2. Les valeurs RMS de la derivee des signaux ....
3. Conditions sur les amplitudes des signaux pour obtenier les en bits en 1 ou en 0...............
4. Tracee des derivees des signaux V_1 , V_2 , V_3 ....

D. **Decryptage de l'image** ....

1. Equations sous forme de produits de matrices ....
2. Calcul des elements de la matrice E_1 par 02 methodes ....
3. Identification de la matrice E_2 pour le decryptage des points H a M................
4. Decryptage des points A a G ....
5. Decryptage des points H a M...

E. **Geometrie du batiment** ....

1. Equations de droites des aretes ....
2. Equations des planchers ....
3. Position de l'engin explosif par rapport aux differents planchers......................
4. Explication des mots " edifice mal au cœur " ....
5. Dessin en 3D du batiment ....

VI. VALIDATION DES HYPOTHÈSES...**Erreur ! Signet non défini.**

VII. CONCLUSION ET RETOUR SUR LES OBJECTIFS..................................**Erreur ! Signet non défini.**

VIII. BILAN CRITIQUE DU TRAVAIL EFFECTUE ....**Erreur ! Signet non défini.**

IX. SYNTHESE DU TRAVAIL EFFECTUE ET DES RESULTATS OBTENUS**Erreur ! Signet non défini.**

X. **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES FOURNIES DANS LE PROSIT** ......**Erreur ! Signet non défini.**

XI. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES COMPLEMENTAIRES ....**Erreur ! Signet non défini.**

I. ANALYSE DU CONTEXTE

Décrypter les messages intercepte pour avoir des images 3D des monuments cibles par des malfaiteurs

II. ELEMENTS DE SOLUTIONS

- Définition des mots clés
- Déterminer et justifier la résistance de charge RC optimale maximisant la puissance électrique en sachant que R(out) = 300ohms
- Équations analytiques des signaux v1, v2, v3
- Donner les conditions entre les amplitudes des signaux pour avoir 1 ou 0 et calculer la valeur RMS des 3 signaux
- Effectuer le décodage de haut niveau &bas niveau
- Déterminer l'existence d'un segment entre 02 points utilisant la matrice d'adjacence
- Déterminer les coordonnées des points a travers la matrice
- Calculer les équations des droites pour les arêtes
- Calculer les équations de plans pour les planchers
- Déterminer la position de la bombe

III. CONNAISSANCES NOUVELLES A ACQUERIR

- Dérivée
- Intégrale
- Vecteur et géométrie vectorielle
- Système d'équation linéaire et matrice
- Déterminants
- Études de circuits électroniques
- Études de signaux
- Algèbre linéaire
- Équation analytique

IV. PLAN D'ACTION

A) Définition des mots clés

B) Circuit de Réception

- Calculer la valeur de la R_c pour maximiser P

C) Signaux transmis

- Les équations analytiques pour modéliser les signaux transmis (c.à.d. V1, V2, V3)
- Calculer les valeurs RMS de la dérivée des signaux transmis
- Conditions sur les amplitudes des signaux transmis pour avoir un bit en 1 ou en 0

- Tracer les dérivées des signaux transmis sur quelques cycles.

D) *Décryptage de l'image*

- Equations sous formes de produit de matrices des éléments utilises pour crypter les points de l'image et équations que permettent le décryptage.
- Calcul des éléments de la matrice de cryptage E1 par 02méthodes
- Identification de la matrice E2 utilisée pour le décryptage des points H à M
- Décryptage des points A à G
- Décryptage des points H à M

E) *Géométrie du bâtiment*

- Équations des droites des arêtes
- Équations des plans des planchers
- Position de l'engin par rapport aux planchers
- Explication des mots "Édifice mal au cœur".
- Dessin en 3D du bâtiment.

V. REALISATION DU PLAN D'ACTION REEL

A. Définition Des Mots Clés

- **Signal de pair :**

Un signal de pair est tout simplement un signal ou il existe une symétrie entre la courbe et l'axe des ordonnées et dont la fonction est en pair

- **Circuit de réception :**

C'est un circuit qui a besoin d'un circuit d'antenne pour prendre le signal radio. L'onde électromagnétique de la station, un circuit d'accord qui exclut les éléments étrangers stations et zéros sur la station que vous voulez écouter et un orateur circuit pour extraire les informations codées sur le signal de la station de radio.

- **Résistance de charge :**

Elle est composée de 2 bornes conforme à la loi d'Ohm et dont l'impédance est réelle (purement résistive, aucune réactance d'admission quelle qu'elle soit). Ce qui en fait une résistance de charge, c'est le fait qu'elle est placée à la sortie de quelque chose. La clé ici est de comprendre qu'en réalité, une résistance de charge (ou une charge résistive) a plus de sens en tant que chose de modélisation / analyse qu'en tant que chose réelle. Elle est donc une résistance qu'on utilise pour modéliser le courant que vous attendez lorsque vous connectez quelque chose (c'est-à-dire lorsque vous "chargez") la sortie de votre circuit.

- **Puissance Électrique :**

Il est tout simplement un taux par une unité de temps ou l'énergie électrique ce transfert dans un circuit. Il se mesure en watt comme unité

- **Tension de Sortie :**

La tension de sortie est la tension libérée par un appareil, tel qu'un régulateur de tension ou un générateur. Les régulateurs de tension maintiennent des niveaux de tension constants

- **Image en 3D :**

L'image 3D est une image obtenue par un processus de manipulation de données 2D dans un format tridimensionnel, créant l'illusion de profondeur.

- **Valeur RMS :**

Elle est définie comme la racine carrée du carré moyen (la moyenne arithmétique des carrés d'un ensemble de nombres)

- **Signaux :**

Ils font référence à toute tension, courant ou onde électromagnétique variant dans le temps qui transporte des informations.

- **Décodage :**

Le décodage est le processus de conversion du code en texte brut ou en tout format utile pour les processus ultérieurs. Le décodage est l'inverse de l'encodage. Il convertit les transmissions et les fichiers de communication de données codés dans leur état d'origine.

- **Moyenne du signal :**

La moyenne du signal est une technique de traitement du signal appliquée dans le domaine temporel, destinée à augmenter la force d'un signal par rapport au bruit qui l'obscurcit.

B. Circuit de réception

1. Calcul de la résistance de charge R_C

Dans ce circuit électrique, la puissance se traduit par :

$$P = RI^2$$

Or ***R représente R**$_C$* dans ce signal et $\boldsymbol{I = \frac{V_{in}}{R_c + R_{out}}}$

On aura donc $\boldsymbol{P = R_c \frac{E^2}{(R_c + R_{out})^2}}$

Par ailleurs, nous devons trouver la valeur de la résistance de charge R_C par laquelle la puissance sera maximale, cela revient à trouver la valeur R_C pour laquelle la puissance (prise comme fonction de la résistance) s'annule. En d'autres termes, étudier la fonction

$$\boldsymbol{P = R_c \frac{E^2}{(R_c + R_{out})^2}}$$

Posons $\boldsymbol{P'_{(R_c)} = 0}$

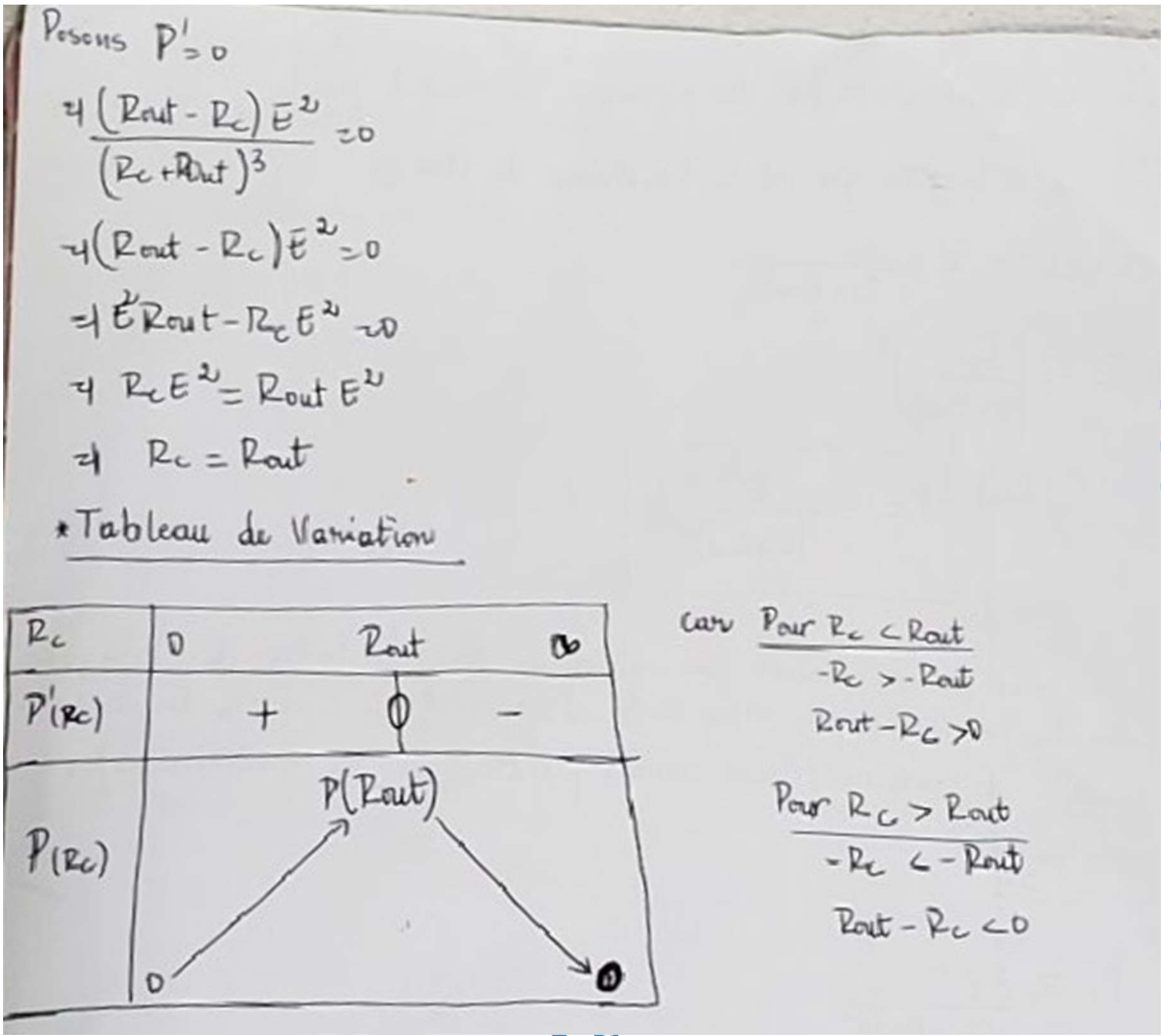
on a : $P = R_c \times \frac{E^2}{(R_c + R_{out})^2}$

$$\Rightarrow P' = \frac{(R_c)' . (R_c + R_{out})^2 - R_c \left[(R_c + R_{out})^2\right]'}{(R_c + R_{out})^4} . E^2$$

$$= \frac{(R_c + R_{out})^2 - 2(R_c + R_{out})R_c}{(R_c + R_{out})^4} . E^2$$

$$= \frac{(R_{out} + R_c)\left[R_c + R_{out} - 2R_c\right]}{(R_{out} + R_c)^4} . E^2$$

$$P' = \frac{R_{out} - R_c}{(R_c + R_{out})^3} . E^2$$



Posons $P' = 0$

$$\frac{4(R_{out} - R_c)E^2}{(R_c + R_{out})^3} = 0$$

$4(R_{out} - R_c)E^2 = 0$

$\Rightarrow 4E^2 R_{out} - R_c E^2 = 0$

$\Rightarrow R_c E^2 = R_{out} E^2$

$\Rightarrow R_c = R_{out}$

* Tableau de Variation

R_c	0		R_{out}		∞
$P'(R_c)$		$+$	0	$-$	
$P(R_c)$	0	$\nearrow$	$P(R_{out})$	$\searrow$	0

car Pour $R_c < R_{out}$

$-R_c > -R_{out}$

$R_{out} - R_c > 0$

Pour $R_c > R_{out}$

$-R_c < -R_{out}$

$R_{out} - R_c < 0$

D'où pour $R_C = R_{outa}$, La puissance s'annule en changeant de signe. Donc la valeur de la résistance de charge pour laquelle la puissance est maximale est de $\mathbf{R_C = R_{outa}}$

Donc $R_C = 300$ ohms

C.Signaux de transmission

1. Equations analytiques des signaux

- Le signal V_1 est un signal sinusoïdal. Son expression analytique est de la forme :

$$V_{1(t)} = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

<u>Sin</u> car la courbe commence à 0 (origine)

Pour $t=0 \rightarrow V_1(0)=0$

$A_1 \sin\varphi = 0$

$\sin\varphi = 0$

D'où $\underline{\varphi = 0}$

Donc l'expression analytique de V_1 est $\underline{V_1(t) = A_1 \sin(\omega t)}$

ou encore $\boxed{V_1(t) = A_1 \sin(2\pi f t)}$

Donc l'expression analytique de V_1 est $\boldsymbol{V_{1(t)} = A_1 \sin(\frac{2\pi}{T}\, t)}$

- Le signal V_2 est un signal de forme triangulaire. Pour avoir son expression analytique, nous allons étudier ce signal sur des intervalles afin de ressortir les équations de segments de droites de ce dernier qui s'y trouve.

Les intervalles concernés sont :

- $[0, \frac{T}{4}[$
- $[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}[$
- $[\frac{3T}{4}, T]$

• Sur l'intervalle $[0 ; \frac{T}{4}]$

Pour $x=0 ; y=0$

$x=\frac{T}{4} ; y=A_2 \Rightarrow \begin{cases} a(0)+b=0 \\ a(\frac{T}{4})+b=A_2 \end{cases}$

$a(\frac{T}{4}) = A_2 \Rightarrow a=\frac{4A_2}{T}$ et $b=0$

D'où $\boxed{V_2^1(t)=\frac{4A_2}{T}t}$

• Sur l'intervalle $[\frac{T}{4} ; \frac{3T}{4}]$

Pour $x=\frac{T}{2} ; y=0$

$x=\frac{3T}{4} ; y=-A_2 \Rightarrow \begin{cases} a(\frac{T}{2})+b=0 \\ - \; a(\frac{3T}{4})+b=-A_2 \end{cases}$

$a(\frac{T}{2}-\frac{3T}{4}) = +A_2$

3

$-\frac{1}{4}Ta = +A_2 \Rightarrow a=-\frac{4A_2}{T}$ et $b=-\frac{aT}{2}=-\frac{4A_2T}{2T}$

$= +2A_2$

D'où $\boxed{V_2^2(t) = -\frac{4A_2}{T}t + 2A_2}$

• Sur l'intervalle $[\frac{3T}{4} ; T]$;

Pour $x=T ; y=0$

$x=\frac{3T}{4} ; y=-A_2 \Rightarrow \begin{cases} a(T)+b=0 \\ - \; a(\frac{3T}{4})+b=-A_2 \end{cases}$ 4

$\frac{1}{4}aT = A_2 \Rightarrow a=\frac{4A_2}{T}$ et $b=-aT=-4A_2$

D'où son expression analytique est

Ainsi

$$V_2(t) = \begin{cases} \dfrac{4A_2}{T}t & : t \in \left[0; \dfrac{T}{4}\right] \\ -\dfrac{4A_2}{T}t + 2A_2 & ; t \in \left[\dfrac{T}{4}; \dfrac{3}{4}T\right] \\ \dfrac{4A_2}{T}t - 4A_2 & ; t \in \left[\dfrac{3}{4}T; T\right] \end{cases}$$

- Le signal V_3 est constitué de 02 paraboles sur une alternance. Pour son expression analytique, on étudiera ces alternances sur les intervalles de temps suivant :

- $\left[\mathbf{0}, \frac{T}{2}\right[$
- $\left[\frac{T}{2}, \boldsymbol{T}\right]$

Ainsi on aura,

• Sur l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right]$

Les points de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} T/4 \\ A_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} T/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 & (1) \\ a\left(\frac{T}{4}\right)^2 + b\left(\frac{T}{4}\right) + c = A_3 & (2) \\ a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = 0 & (3) \end{cases}$$

D'après (1) $\underline{c = 0}$

$$-2\begin{cases} a\left(\frac{T}{4}\right)^2 + b\left(\frac{T}{4}\right) = A_3 \\ a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a\left(\frac{T}{4}\right)^2 - b\left(\frac{T}{2}\right) = -2A_3 \\ a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$a\left[\left(\frac{T}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{T}{4}\right)^2\right] = -2A_3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{2A_3}{\frac{1}{8}T^2} = -\frac{16}{T^2}A_3$$

D'où $\boxed{a = -\frac{16}{T^2}A_3}$ (5)

$$(2)/b = -a\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$= \frac{16}{T^2}A_3 \times \frac{T^2}{4}$$

$$= 4A_3$$

$$\Rightarrow b = 4A_3 \times \frac{2}{T}$$

$$b = \frac{8A_3}{T}$$

Donc $\boxed{V_3^1(t) = \left(-\frac{16}{T^2}A_3\right)t^2 + \left(\frac{8}{T}A_3\right)t}$

• Sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2}; T\right]$

Les points $\left(\frac{T}{2}; 0\right)$; $\left(\frac{3T}{4}; -A_3\right)$; $(T; 0)$

$$\begin{cases} a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = 0 & (1) \\ a\left(\frac{3T}{4}\right)^2 + b\left(\frac{3T}{4}\right) + c = -A_3 & (2) \\ a(T)^2 + b(T) + c = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = 0 \\ -\frac{2}{3} \,\Big|\, a\left(\frac{3}{4}T\right)^2 + b\left(\frac{3T}{4}\right) + c = -A_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\left[\left(\frac{T}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{3T}{4}\right)^2\right] + c\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}A_3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}aT^2 + \frac{1}{3}c = \frac{2}{3}A_3 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 \,\Big|\, a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = 0 \\ a(T)^2 + b(T) + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\left[(T)^2 - 2\left(\frac{T}{2}\right)^2\right] + c(1-2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}aT^2 - c = 0 \quad (**)$$

D'où le système triangulaire

$$\begin{cases} a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = 0 & (1) \\ -\frac{1}{8}T^2 a + \frac{1}{3} c = \frac{2}{3} A_3 & (2') \\ \frac{1}{2} a T^2 - c = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) dans (2')

$$-\frac{1}{8} aT^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} aT^2\right) = \frac{2}{3} A_3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8} aT^2 + \frac{1}{6} aT^2 = \frac{2}{3} A_3$$

$$\Rightarrow aT^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3} A_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} aT^2 = \frac{2}{3} A_3$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3} A_3 \times \frac{24}{T^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{16 A_3}{T^2}}$$

$$(3) \Rightarrow c = \frac{1}{2} aT^2 = \frac{1}{2} \times \frac{16 A_3}{\cancel{T^2}} \times \cancel{T^2}$$

$$\boxed{C = 8 A_3}$$

$$\text{Dans } (1) \quad \frac{T}{2} b = -a\left(\frac{T}{2}\right)^2 - c = -\frac{16}{\cancel{T^2}} A_3 \times \frac{\cancel{T^2}}{4} - 8A_3 = -4A_3 - 8A_3$$

L’expression analytique du signal 3 est :

D'où :

$$V_3(t) = \begin{cases} \left(-\frac{16}{T^2} A_3\right) t^2 + \left(\frac{8}{T} A_3\right) t, & x \in \left[0 ; \frac{T}{2}\right] \\ \left(\frac{16}{T^2} A_3\right) t^2 + \left(-\frac{24}{T} A_3\right) t + 8A_3, & x \in \left[\frac{T}{2} ; T\right] \end{cases}$$

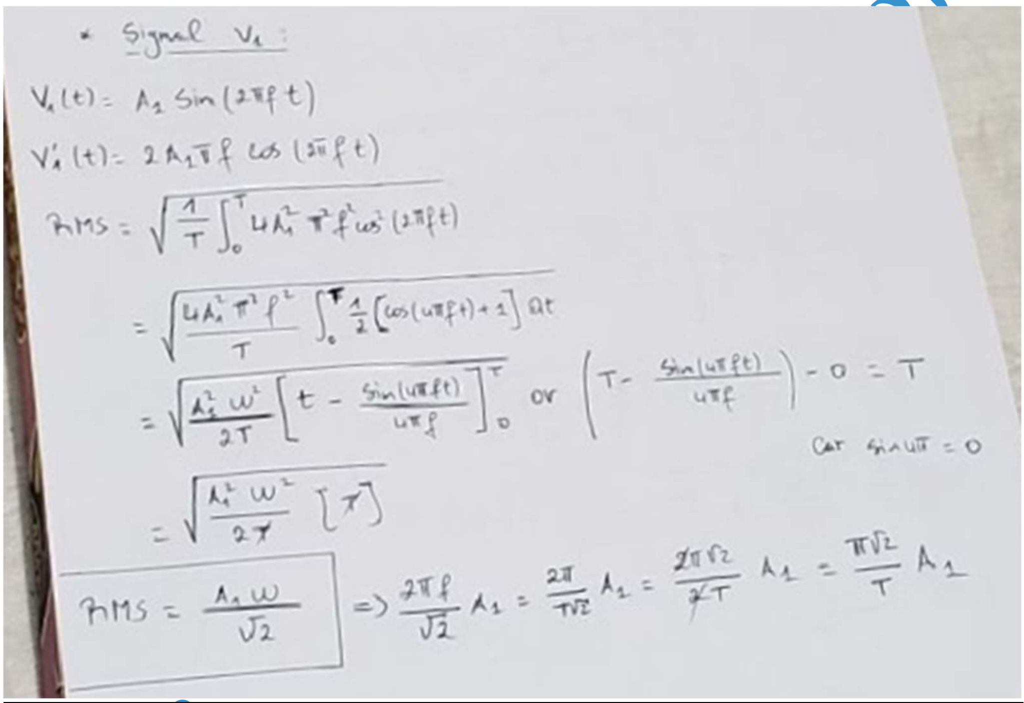
2. Les valeurs RMS des dérivées des signaux

Afin de trouver la valeur RMS des dérivées des signaux,

Nous devons tout d'abord dériver les expressions analytiques de chaque signal puis appliquer la formule :

$$\boldsymbol{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [V'_{(t)}]^2 dt}$$

- RMS du Signal V_1



* Signal V_1 :

$V_1(t) = A_1 \sin(2\pi f t)$

$V_1'(t) = 2A_1\pi f \cos(2\pi f t)$

$RMS = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T 4A_1^2\pi^2 f^2 \cos^2(2\pi f t)}$

$= \sqrt{\frac{4A_1^2\pi^2 f^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}[\cos(4\pi f t)+1]\,dt}$

$= \sqrt{\frac{A_1^2 w^2}{2T}\left[t - \frac{\sin(4\pi f t)}{4\pi f}\right]_0^T}$ or $\left(T - \frac{\sin(4\pi f t)}{4\pi f}\right) - 0 = T$

car $\sin 4\pi T = 0$

$= \sqrt{\frac{A_1^2 w^2}{2\cancel{T}}[\cancel{T}]}$

$\boxed{RMS = \frac{A_1 w}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} A_1 = \frac{2\pi}{T\sqrt{2}} A_1 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\cancel{2}T} A_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1$

- RMS du signal V_2

$$V_2'(t) = \begin{cases} \dfrac{4A_2}{T}, & t \in \left[0, \dfrac{T}{4}\right] \\ -\dfrac{4A_2}{T}, & t \in \left[\dfrac{T}{4}, \dfrac{3}{4}T\right] \\ \dfrac{4A_2}{T}, & t \in \left[\dfrac{3}{4}T, T\right] \end{cases}$$

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/4} \left(\frac{4A_2}{T}\right)^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} \left(-\frac{4A_2}{T}\right)^2 dt + \int_{3T/4}^{T/4} \left(\frac{4A_2}{T}\right)^2 dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \times \left(\frac{4A_2}{T}\right)^2 \left[\int_0^{T/4} 1\, dt + \int_{T/4}^{3T/4} 1\, dt + \int_{3T/4}^{T/4} 1\, dt\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4A_2}{T}\right)^2 \times \frac{1}{T} \left[[T]_0^{T/4} + [T]_{T/4}^{3T/4} + [T]_{3T/4}^{T/4} \right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4A_2}{T}\right)^2 \times \frac{1}{T} \left[\left(\frac{T}{4}\right) + \left(\frac{3T}{4} - \frac{T}{4}\right) + \left(T - \frac{3}{4}T\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \times \frac{(4A_2)^2}{T^2} \times T}$$

$$RMS = \frac{4A_2}{T}$$

- <u>RMS du signal V_3</u>

$$V'_3(t) = \begin{cases} \left(-\frac{32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A_3 \quad , x \in [0; \frac{T}{2}] \\ \left(\frac{32}{T^2}A_3\right)t - \frac{24}{T}A_3 \quad , x \in [\frac{T}{2}; T] \end{cases}$$

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\left[\left(\frac{32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A_3\right]^2 dt + \int_{T/2}^{T}\left[\left(\frac{32}{T}A_3\right)t - \frac{24}{T}A_3\right]^2 dt}$$

$$\int_0^{T/2}\left[\left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A\right]\left[\left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A_3\right]$$

Posons $U = \left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t^1 + \frac{8}{T}A_3$ $\qquad V' = \left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A_3$

$U' = \frac{-32}{T^2}A$ $\qquad V = \frac{1}{2}\left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t^2 + \left(\frac{8}{T}A_3\right)t$

$$= \left(\frac{-16}{T^2}\right)A_3 t^2 + \left(\frac{8}{T}A_3\right)t$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A \times \left(\frac{-16}{T^2}A_3\right)t^2 + \left(\frac{8}{T}A_3\right)t\right] -$$

$$\int_0^{T/2} \frac{-32}{T^2}A_3 \times \left[\left(\frac{-16}{T^2}A_3\right)t^2 + \left(\frac{8}{T}A_3\right)t\right]$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{-32}{T^2}A_3\right)t + \frac{8}{T}A_3 \times \left(\frac{-16}{T^2}A_3\right)t^2 + \left(\frac{8}{T}A_3\right)t\right] + \frac{32}{T^2}A \left[\frac{1}{3}\left(\frac{-16}{T^2}A_3\right)t^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{T}A\right)t^2\right]$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{-32}{T^2}A\right)t + \frac{8}{T}A \times \left(\frac{-16}{T^2}A\right)t^2 + \left(\frac{8}{T}A\right)t\right] + \frac{32}{T^2}A\left[\left(\frac{-16}{3T^2}A\right)t^3 + \left(\frac{4}{T}A\right)t^2\right]$$

11

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{512}{T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{256}{T^3}A_3^2\right)t^2-\left(\frac{128}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{64}{T^2}A^2\right)t\right]+$$

$$\left[\left(-\frac{512}{3T^4}A_3^2\right)t^3+\left(\frac{128}{T^3}A_3^2\right)t^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{512}{T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{512}{3T^4}A_3^2\right)t^2-\left(\frac{384}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{128}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{64}{T^2}A_3^2\right)t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1024}{3T^4}A_3^2\right)\left(\frac{T}{2}\right)^3-\left(\frac{256}{T^3}A_3^2\right)\left(\frac{T}{2}\right)^2+\left(\frac{64}{T^2}A_3^2\right)\frac{T}{2}$$

$$\frac{1024}{3T^4}A_3^2\times\frac{T^3}{8}-\frac{256}{T^3}A_3^2\times\frac{T^2}{4}+\frac{64}{T^2}A_3^2\times\frac{T}{2}$$

$$\frac{128}{3T}A_3^2-\frac{64}{T}A_3^2+\frac{32}{T}A_3^2=\frac{A_3^2}{T}\left(\frac{128}{3}-64+32\right)$$

$$=\frac{32}{3T}A_3^2$$

$$\times\int_{T/2}^{T}\left[\left(\frac{32}{T^2}A_3\right)t-\frac{24}{T}A_3\right]^2 dt$$

Posons $u=\left(\frac{32}{T^2}A_3\right)t-\frac{24}{T}A_3$ $\qquad v'=\left(\frac{32}{T^2}A_3\right)t-\frac{24}{T}A_3$

$$u'=\frac{32}{T^2}A_3 \qquad v=\left(\frac{32}{T^2}A_3\right)\times\frac{1}{2}t^2-\left(\frac{24}{T}\right)A_3t=\left(\frac{16}{T^2}A_3\right)t^2-\left(\frac{24}{T}A_3\right)t$$

$$\Rightarrow\left[\left(\frac{32}{T^2}A_3\right)t-\frac{24}{T}A_3\times\left(\frac{16}{T^2}A_3\right)t^2-\left(\frac{24}{T}A_3\right)t\right]-\frac{32}{T^2}A$$

$$\int\left(\frac{16}{T^2}A\right)t^2-\left(\frac{24}{T}A\right)t$$

(12)

$$\Rightarrow \left(\frac{512}{T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{768}{T^3}A_3^2\right)t^2-\left(\frac{384}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{576}{T^2}A_3^2\right)t-$$

$$\frac{32}{T^2}A\left[\left(\frac{16}{T^2}A_3\right)\times\frac{1}{3}t^3-\left(\frac{24}{T}A_3\right)\times\frac{1}{2}\times t^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{512}{T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{1152}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{576}{T^2}A_3^2\right)t-\left[\left(\frac{512}{3T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{384}{T^3}\right)t^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{512}{T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{1152}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{576}{T^2}A_3^2\right)t-\left(\frac{512}{3T^4}A_3^2\right)t^3+\left(\frac{384}{T^3}A_3^2\right)t^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1024}{3T^4}A_3^2\right)t^3-\left(\frac{768}{T^3}A_3^2\right)t^2+\left(\frac{576}{T^2}A_3^2\right)t$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1024}{3T^4}A_3^2(T)^3-\frac{768}{T^3}A_3^2(T)^2+\frac{576}{T^2}A_3^2(T)\right]-\left[\frac{1024}{3T^4}A_3^2\left(\frac{T}{2}\right)^3-\frac{768}{T^3}A_3^2\left(\frac{T}{2}\right)^2+\left(\frac{576}{T^2}A_3^2\right)\left(\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1024}{3T}A_3^2-\frac{768}{T}A_3^2+\frac{576}{T}A_3^2-\left[\frac{1024}{24T}A_3^2-\frac{768}{4T}A_3^2+\frac{576}{2T}A_3^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{A_3^2}{T}\left[\frac{1024}{3}-768+576-\frac{1024}{24}+\frac{768}{4}-\frac{576}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{A_3^2}{T}\times\frac{32}{3}$$

13

Le résultat de RMS_3 :

$$RMS_3=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{32}{3T}A_3^2+\frac{32}{3T}A_3^2\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\times\frac{64}{3T}A_3^2}$$

$$=\sqrt{\frac{64}{3T^2}A_3^2}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{3T}A_3$$

3. Conditions sur les amplitudes des signaux pour obtenir un bit en 1 ou 0

Apres calcul des RMS, on obtient :

A_1 $RMS(V_1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1$

$RMS(V_2) = \frac{4}{T} A_2$

$RMS(V_3) = \frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3$

D’où le mode de cryptage entre

- **A_1 et A_2**

A_1 et A_2

$RMS(V_1) > RMS(V_2)$

$\frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1 > \frac{4}{T} A_2$

$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} A_1 > A_2$

Pour qu'on ait 0 entre A_1 et A_2

$A_2 < \frac{\pi\sqrt{2}}{4} A_1$

Pour qu'on ait 1 entre A_1 et A_2

$A_1 > \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A_2$

- **A_1 et A_3**

A1 et A3

$RMS(V_1) > RMS(V_3)$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1 > \frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3.$$

$$A_1 > \frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3 \times \frac{T}{\pi\sqrt{2}}$$

Pour qu'on ait 1 entre A_1 et A_3

$$A_1 > \frac{4\sqrt{6}}{3\pi} A_3$$

Pour qu'on ait 0 entre A_1 et A_3

$$A_3 < \frac{\pi\sqrt{6}}{8} A_1.$$

- **<u>A2 et A3</u>**

A2 et A3

$RMS(V_2) > RMS(V_3)$

$$\frac{4}{T} A_2 > \frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3$$

$$A_2 > \frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3 \times \frac{T}{4}$$

Pour qu'on ait 1 entre A_2 et A_3.

$$A_2 > \frac{2\sqrt{3}}{3} A_3.$$

Pour qu'on ait 0 entre A_2 et A_3.

$$A_3 > \frac{\sqrt{3}}{2} A_2.$$

- **<u>A2 et A1</u>**

A2 et A1

$RMS(V_2) > RMS(V_1)$

$$\frac{4}{T} A_2 > \frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1$$

$$A_2 > \frac{\pi\sqrt{2}}{T} \times \frac{T}{4} A_1$$

Pour qu'on ait 1 entre A_2 et A_1.

$$A_2 > \frac{\pi\sqrt{2}}{4} A_1.$$

Pour qu'on ait 0 entre A_2 et A_1.

$$A_1 < \frac{2\sqrt{2}}{\pi} A_2.$$

- **<u>A3 et A1</u>**

A3 et A1

RMS(V3) > RMS(V1)

$\frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3 > \frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1.$

$A_3 > \frac{\pi\sqrt{2}}{T} A_1 \times \frac{3T}{8\sqrt{3}} A$

Pour qu'on ait 1 entre A_3 et A_1.

$A_3 > \frac{\pi\sqrt{6}}{8} A_1$

Pour qu'on ait 0 entre A_3 et A_1.

$A_1 < \frac{4\sqrt{6}}{3\pi} A_3.$

- **A_3 et A_2**

A_3 et A_2.

RMS(V3) > RMS(V2)

$\frac{8\sqrt{3}}{3T} A_3 > \frac{4}{T} A_2$

$A_3 > \frac{4}{T} A_2 \times \frac{3T}{8\sqrt{3}}$

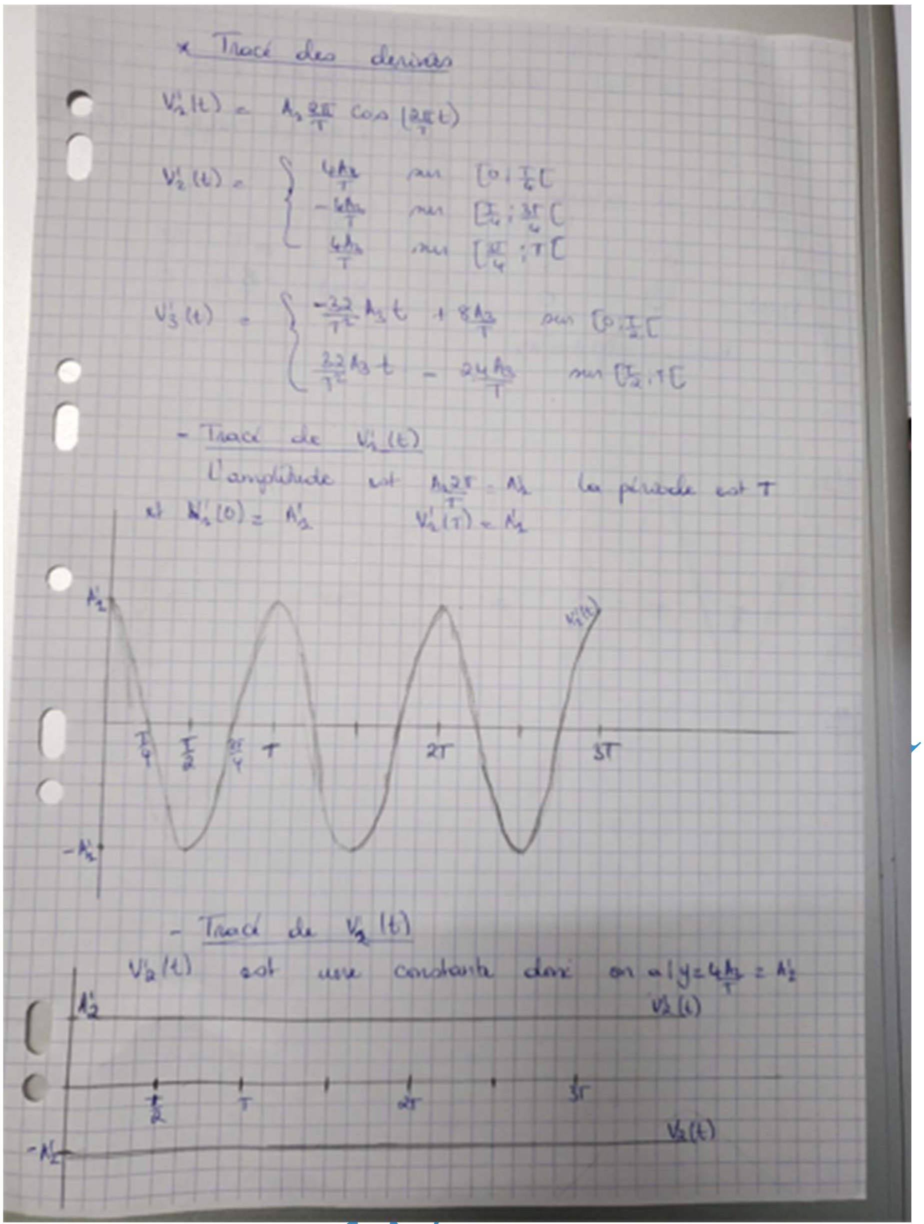
Pour qu'on ait 1 entre A_3 et A_2.

$A_3 > \frac{\sqrt{3}}{2} A_2$

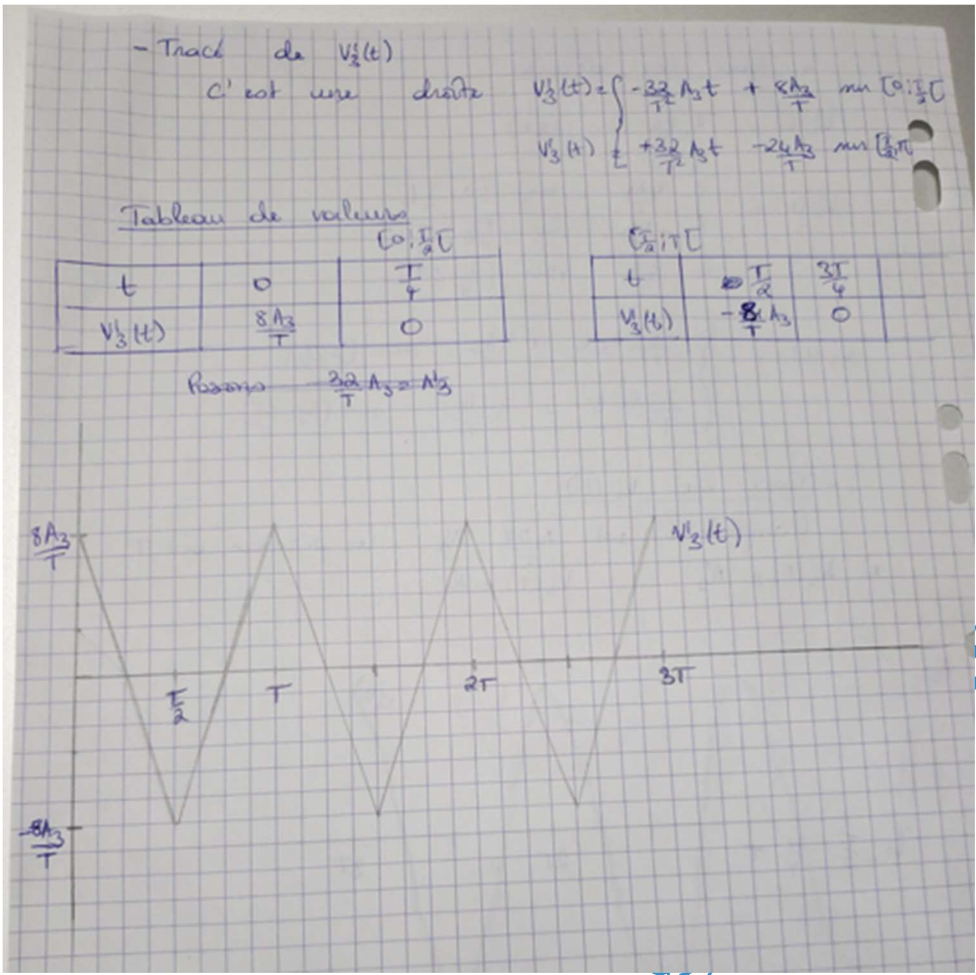
Pour qu'on ait 0 entre A_3 et A_2.

$A_2 < \frac{2\sqrt{3}}{3} A_3$

4. Trace des dérivées des signaux



* Tracé des dérivées
$V_1'(t) = A_1 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$
$V_2'(t) = \begin{cases} \frac{4A_2}{T} & \text{sur } [0; \frac{T}{4}[\\ -\frac{4A_2}{T} & \text{sur } [\frac{T}{4}; \frac{3T}{4}[\\ \frac{4A_2}{T} & \text{sur } [\frac{3T}{4}; T[\end{cases}$
$V_3'(t) = \begin{cases} -\frac{32}{T^2}A_3 t + \frac{8A_3}{T} & \text{sur } [0; \frac{T}{2}[\\ \frac{32}{T^2}A_3 t - \frac{24A_3}{T} & \text{sur } [\frac{T}{2}; T[\end{cases}$
- Tracé de $V_1'(t)$
L'amplitude est $\frac{A_1 2\pi}{T} = A_1'$ la période est T
et $V_1'(0) = A_1'$ $V_1'(T) = A_1'$
- Tracé de $V_2'(t)$
$V_2'(t)$ est une constante donc on a $|y = \frac{4A_2}{T} = A_2'$



D. Décryptage de l’image

1. Equations sous forme des produits de matrices

Les équations utilisées pour le cryptage et le décryptage des points de l’image sont :

- **CRYPTAGE**
  Soit Q_1' la matrice des points A à G associes à leurs coordonnes réelles et Q_2' la matrice des points H à M associes à leurs coordonnées réelles
  On a :

$$E_1 * Q_1^{'} = Q_1$$

$$E_2 * Q_2' = Q_2$$

Avec E_1 la matrice de cryptage des points A à G
E_2 la matrice de cryptage des points H à M
Q_1 la matrice des points cryptes de A à G
Q_2 la matrice des points cryptes de H à M

- **DECRYPTAGE**

$$E_1^{-1} * Q_1 = Q_1'$$

$$E_2^{-1} * Q_2 = Q_2'$$

Avec $\boldsymbol{E_1^{-1}}$ la matrice inverse de E_1

$\boldsymbol{E_2^{-1}}$ La matrice inverse de E_2

2. Calcul des éléments de la matrice de cryptage E₁

D'après le système d'équations dont on dispose, on peut trouver les éléments de la matrice de cryptage E_1 par 02 méthodes :

- Substitution
- La méthode de CRAMER

1ere méthode :

2) Méthode par substitution :

$$(S) : \begin{cases} -\gamma+\alpha-2\delta+5\beta = -2 & (1) \\ \beta-\gamma+\alpha = 0 & (2) \\ \delta-2\alpha+\beta = 5 & (3) \\ 2\alpha-2\beta-\delta = -3 & (4) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \alpha = \gamma-\beta \quad (2)'$

$(2)'$ dans (1) (3) et (4)

$$\begin{cases} -\gamma+(\gamma-\beta)-2\delta+5\beta = -2 \\ \delta-2(\gamma-\beta)+\beta = 5 \\ 2\gamma-2\beta-\delta = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\delta+4\beta = 2 & (1) \\ -2\gamma+\delta+3\beta = 5 & (3) \\ 2\gamma-\delta-2\beta = -3 & (4) \end{cases}$$

$(3)+(4) \Leftrightarrow \begin{matrix} -2\gamma+\delta+3\beta = 5 \\ 2\gamma-\delta-2\beta = -3 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$

$(1)\ -2\delta+4(2) = -2$

$-2\delta+8 = -2$

$-2\delta = -10 \Rightarrow \boxed{\delta = 5}$

$(4)\ 2\delta-(5)-2(2) = -3$

$2\gamma-9 = -3$

$2\gamma = 6 \Rightarrow \boxed{\gamma = 3}$

$-(3)+\alpha-2(5)+5(2) = -2$

$\alpha-3-10+10 = -2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

2e méthode :

Calcul des éléments de la matrice de cryptage E_1 :

1) Méthode de cramer :

$$
(S):\begin{cases} -\gamma+\alpha-2\delta+5\beta=-2 \\ \beta-\gamma+\alpha=0 \\ \delta-2\alpha+\beta=5 \\ 2\gamma-2\beta-\delta=-3 \end{cases}
$$

$$
\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}
\quad
\begin{matrix} \alpha & \beta & \delta & \gamma \end{matrix}
$$

$$
= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix} - \left|\begin{matrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{matrix} - 2\left|\begin{matrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & - \\ 1 & \\ -2 & - \end{matrix}
$$

$$
= [(2+0+1)-(2+0+0)] - [(10+0+1)-(2+0-4)] - 2[(0-4+1)-(0+5
$$

$$
= [3-2] - [11+2] - 2[-3-1]
$$

$$
= 1 - 13 - 2(4) = -13 + 9 = \boxed{-4} = \det(S)
$$

$$\det(\alpha)=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$= -2\left|\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & -1\end{matrix} + 5\left|\begin{matrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}5 & -2\\ 1 & 0\\ -2 & 1\end{matrix} + 3\left|\begin{matrix}5 & -2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}5 & -2\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}$$

$$= -2\left[(2+0+1)-(0+0+2)\right] + 5\left[(0-4+1)-(0+5-4)\right] + 3\left[(0+2-1)-(0-5+0)\right]$$

$$= -2\left[3-2\right] + 5\left[-3-1\right] + 3\left[1+5\right]$$

$$= -2(1) + 5(-4) + 3(6)$$

$$= -2 - 20 + 18 \Rightarrow \boxed{\det(\alpha) = -4}$$

$$\det(\beta)=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -2 & 5 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}-2 & -2 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ -3 & -1 & -2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}-2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{matrix}0 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}0 & 0\\ 5 & 1\\ -3 & -1\end{matrix} - \left|\begin{matrix}-2 & -2 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}-2 & -2\\ 5 & 1\\ -3 & -1\end{matrix} - 2\left|\begin{matrix}-2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -3 & -1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}-2 & -2\\ 0 & 0\\ -3 & -1\end{matrix}$$

$$= \left[(0+0+5)-(3+0+0)\right] - \left[(-4+0+5)-(3+0-20)\right] - 2\left[(0-6+0)-(0-2+0)\right]$$

$$= (5-3) - (1+17) - 2(-6+2)$$

$$= 2 - 18 + 8 \Rightarrow \boxed{\det(\beta) = -8}$$

$$\det(\delta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ & & & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -3 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -2 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right| - 2\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -2 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right|$$

$$= \left[(10+0+3)-(10+0+0)\right] - \left[(50+0+3)-(10+0-4)\right] - 2\left[(0-4+3)-(0+15-4)\right]$$

$$= (13-10) - (53-6) - 2(-1-11)$$

$$= 3 - 47 + 24 \Rightarrow \boxed{\det(\delta) = -20}$$

$$\det(\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -2 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & +1 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right| - 2\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & -2 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{array}\right|$$

$$= \left[(-3+0+0)-(0-5+0)\right] - \left[(-15+20+2)-(4-25+6)\right] - 2\left[(0+0+2)-(0+0+6)\right]$$

$$= (-3+5) - (7+15) - 2(2-6)$$

$$= 2 - 22 + 8 \Rightarrow \boxed{\det(\gamma) = -12}$$

$$\gamma = \frac{\det(\gamma)}{\det(S)} = \frac{-12}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 3}} \; ; \; \alpha = \frac{\det(\alpha)}{\det(S)} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

$$\beta = \frac{\det(\beta)}{\det(S)} = \frac{-8}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}} \; ; \; \delta = \frac{\det(\delta)}{\det(S)} = \frac{-20}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 5}}$$

Donc $E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Identification de la matrice E_2

La matrice E_2 est supposée être une matrice de cryptage pour le message Q'_2 donc cette matrice doit etre inversible. Vérifions et déterminons E_2

Identification de la matrice E_2 utilisée pour le décryptage des points H à M :

$$Det(E_{21}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ +1 & +5 \end{vmatrix}$$

$= 7 - 2 - 5 = 0$ donc (E_{21}) n'est pas inversible

$$Det(E_{22}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(-2+5)] - (2+5) = 6 - 7 = -1 \neq 0$$

Donc (E_{22}) est inversible d'où E_{22} est la matrice E_2 à utiliser pour le décryptage des points H à M.

4. <u>Décryptage des points A à G</u>

Pour le décryptage de ces points, comme convenu sur les équations donnes plus haut, nous allons ressortir les matrices inverses des matrices de décryptages, puis effectuer un produit de matrices entre les matrices inverses et les matrices des points interceptes

Décryptage des points A à G :

* L'inverse de E_1 par la méthode de cramer :

$$E_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

· Déterminant de (E_1)

$$\mathrm{Det}(E_1) = -3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2+2) - 5(-1-2) + 6(1-2)$$

$$= -12 + 15 - 6 = \underline{\underline{-3}}$$

* Transposé

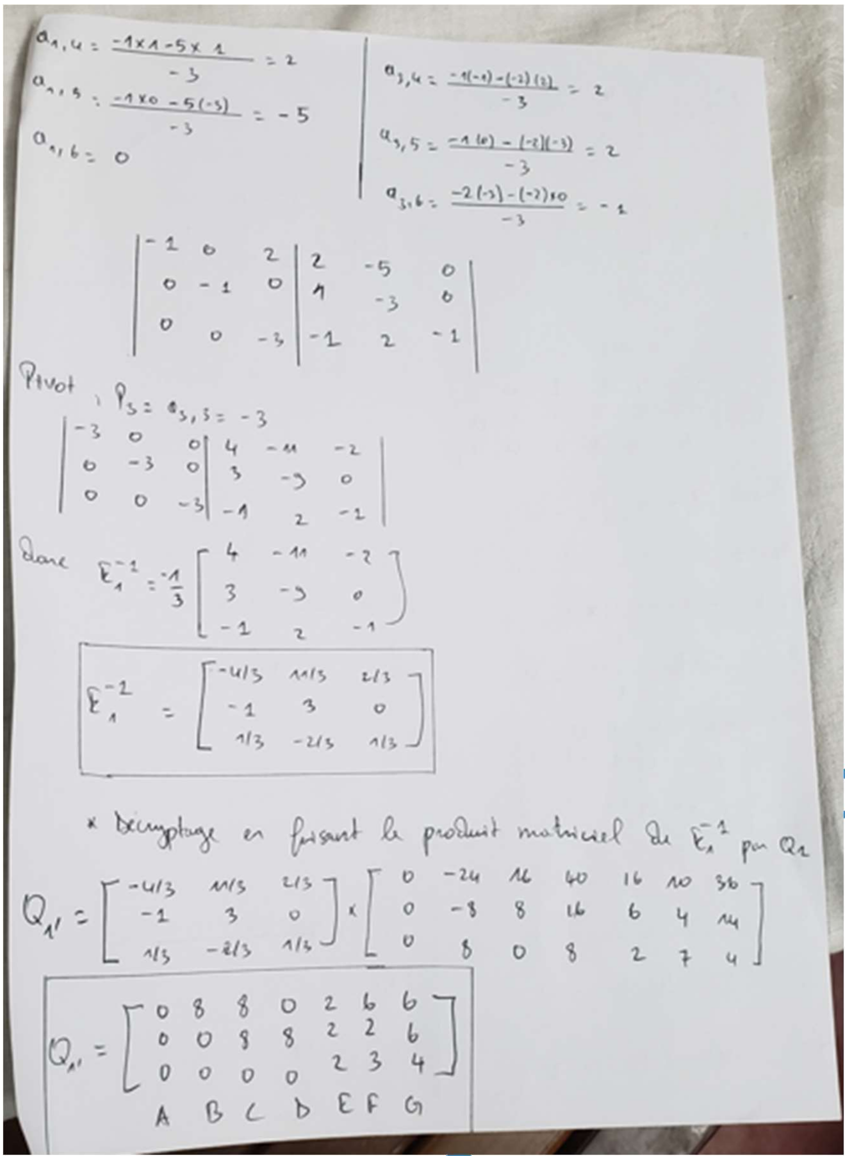
$$E_1^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \; ; \; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \; ; \; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 11 \; ; \; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -9 \; ; \; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \; ; \; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{Adj}\, E_1 = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -2 \\ -3 & -9 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$



$a_{1,4} = \frac{-1\times1-5\times1}{-3} = 2$

$a_{1,5} = \frac{-1\times0-5(-3)}{-3} = -5$

$a_{1,6} = 0$

$a_{3,4} = \frac{-1(-1)-(-2)(1)}{-3} = 2$

$a_{3,5} = \frac{-1(0)-(-2)(-3)}{-3} = 2$

$a_{3,6} = \frac{-2(-3)-(-2)\times0}{-3} = -1$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

Pivot : $P_3 = a_{3,3} = -3$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 4 & -11 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

Donc $E_1^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -11 & -2 \\ 3 & -9 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{E_1^{-1} = \begin{bmatrix} -4/3 & 11/3 & 2/3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}}$$

* Décryptage en faisant le produit matriciel de E_1^{-1} par Q_1

$$Q_{1'} = \begin{bmatrix} -4/3 & 11/3 & 2/3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -24 & 16 & 40 & 16 & 10 & 36 \\ 0 & -8 & 8 & 16 & 6 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_{1'} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \end{array}$$

5. Décryptage des points H à M

Decryptage des points H à M par l'inversion matriciel de E_2 :

* Déterminons l'inverse de E_2

On a : $\det(E_2) = -1$

* La Transposé de E_2

$$E_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$Adj_{E_2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 10 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$Adj_{E_2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -7 & 4 & -10 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Donc $\boxed{E_2^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 7 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}}$

Décryptage des points H à M par le produit matriciel E_2^{-1} par Q_2 :

$$Q_2' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 7 & -4 & 10 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 9 & 13 & 15 & 11 & 12 \\ 11 & 30 & 37 & 30 & 23 & 60 \\ -2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Q_2' = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 6 & 5 & 12 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} H & I & J & K & L & M \end{array} \end{array}}$$

E. Géométrie du bâtiment

1. Equations de droites des arêtes

Comme arêtes ici, il s'agit des arêtes relies au sommet M et les arêtes constituant la base du 2e plancher venant du bas

Procédure et résultats :

* (MK)

on a : $M\begin{pmatrix}4\\4\\12\end{pmatrix}$ $K\begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix}$

$$\vec{MK}\begin{pmatrix}5-4\\5-4\\6-12\end{pmatrix} = \vec{MK}\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}$$

det $(\vec{KP} \wedge \vec{MK})$

$$\begin{vmatrix} x-5 & \gamma & 1 \\ y-5 & \gamma & 1 \\ z-6 & \gamma & 1 \\ x-5 & & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -6(y-5)-(z-6)=0 \\ z-6+6(x-5)=0 \\ x-5-(y-5)=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -6y+30-z+6=0 \\ z-6+6x-30=0 \\ x-y=0 \end{cases} = \begin{cases} -6y-z+36=0 \\ 6x+z-36=0 \\ x-y=0 \quad (3) \end{cases}$$

Dans (3) $\Rightarrow x=y$

Donc (MK) : $\begin{cases} x-y=0 \\ 6x+z-36=0 \end{cases}$

* MJ

on a $M\begin{pmatrix}4\\4\\12\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix} = \vec{MJ}\begin{pmatrix}5-4\\3-4\\7-12\end{pmatrix} = \vec{MJ}\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ y-3 & -1 \\ z-7 & -5 \\ x-5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -5(y-3)+(z-7)=0 \\ z-7+5(x-5)=0 \\ -(x-5)-(y-3)=0 \end{cases} = \begin{cases} -5y+15+z-7=0 \\ z-7+5x-25=0 \\ -x+5-y+3=0 \end{cases}$$

$$MJ : \begin{cases} -5y+z+8=0 & (1) \\ 5x+z-32=0 & (2) \\ x+y-8=0 & (3) \end{cases}$$

(3) dans (2)

$$5(8-y)+z-32=0$$
$$= 40-5y+z-32=0$$
$$= -5y+z+8=0 \quad -- (1)$$

D'où

$$(MJ) : \begin{cases} x+y-8=0 \\ 5x+z-32=0 \end{cases}$$

* (ML)

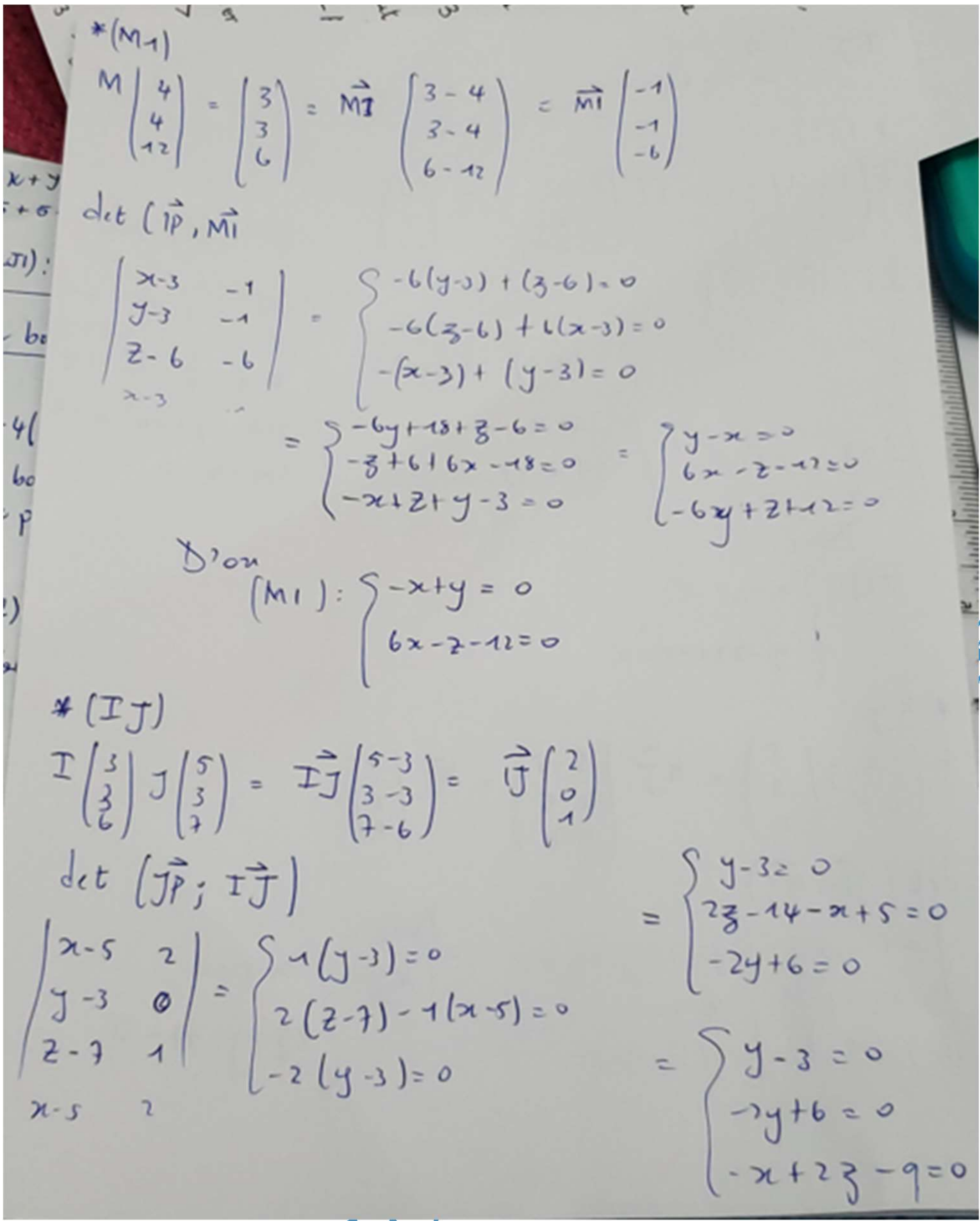
$$M\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} L\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{ML}\begin{pmatrix} 3-4 \\ 5-4 \\ 5-12 \end{pmatrix} = \vec{ML}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

et $(\vec{LP} \wedge \vec{ML})$

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ x-5 & -1 \\ z-5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{cases} -7(y-5)-(z-5)=0 \\ -(z-5)+7(x-3)=0 \\ (x-3)+(y+5)=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -7y+35-z+5=0 \\ -z+5+7x-21=0 \\ x+y-8=0 \end{cases} = \begin{cases} -7y-z+40=0 \\ 7x-z-16=0 \\ x+y-8=0 \end{cases}$$

Donc $(ML) : \begin{cases} x+y-8=0 \\ 7x-z-16=0 \end{cases}$



*(M_1)

$$M\begin{pmatrix}4\\4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} = \vec{MI}\begin{pmatrix}3-4\\3-4\\6-12\end{pmatrix} = \vec{MI}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-6\end{pmatrix}$$

$\det(\vec{IP}, \vec{MI})$

$$\begin{vmatrix}x-3 & -1\\ y-3 & -1\\ z-6 & -6\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}x-3 & \end{matrix} = \begin{cases}-6(y-3)+(z-6)=0\\ -6(z-6)+6(x-3)=0\\ -(x-3)+(y-3)=0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}-6y+18+z-6=0\\ -z+6+6x-18=0\\ -x+z+y-3=0\end{cases} = \begin{cases}y-x=0\\ 6x-z-12=0\\ -6y+z+12=0\end{cases}$$

D'où

$$(M_1): \begin{cases}-x+y=0\\ 6x-z-12=0\end{cases}$$

*(IJ)

$$I\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} J\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix} = \vec{IJ}\begin{pmatrix}5-3\\3-3\\7-6\end{pmatrix} = \vec{IJ}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\det(\vec{JP}; \vec{IJ})$

$$\begin{vmatrix}x-5 & 2\\ y-3 & 0\\ z-7 & 1\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}x-5 & 2\end{matrix} = \begin{cases}1(y-3)=0\\ 2(z-7)-1(x-5)=0\\ -2(y-3)=0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}y-3=0\\ 2z-14-x+5=0\\ -2y+6=0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}y-3=0\\ -2y+6=0\\ -x+2z-9=0\end{cases}$$

$$IJ : \begin{cases} y-3=0 \\ x-2z+9=0 \end{cases}$$

* (IL)

$$I\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} = \vec{IL}\begin{pmatrix}3-3\\5-3\\5-6\end{pmatrix} = \vec{IL}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$\det(\vec{LP} ; \vec{IL})$

$$\begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ y-5 & 2 \\ z-5 & -1 \\ x-3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -(y-5)-2(z-5)=0 \\ -3+x=0 \\ 2(x-3)=0 \end{cases} = \begin{cases} x-3=0 \\ -y+5-2z+10=0 \\ 2x-6=0 \end{cases}$$

Donc

$$(IL) : \begin{cases} x-3=0 \\ -y-2z+15=0 \end{cases}$$

* KJ

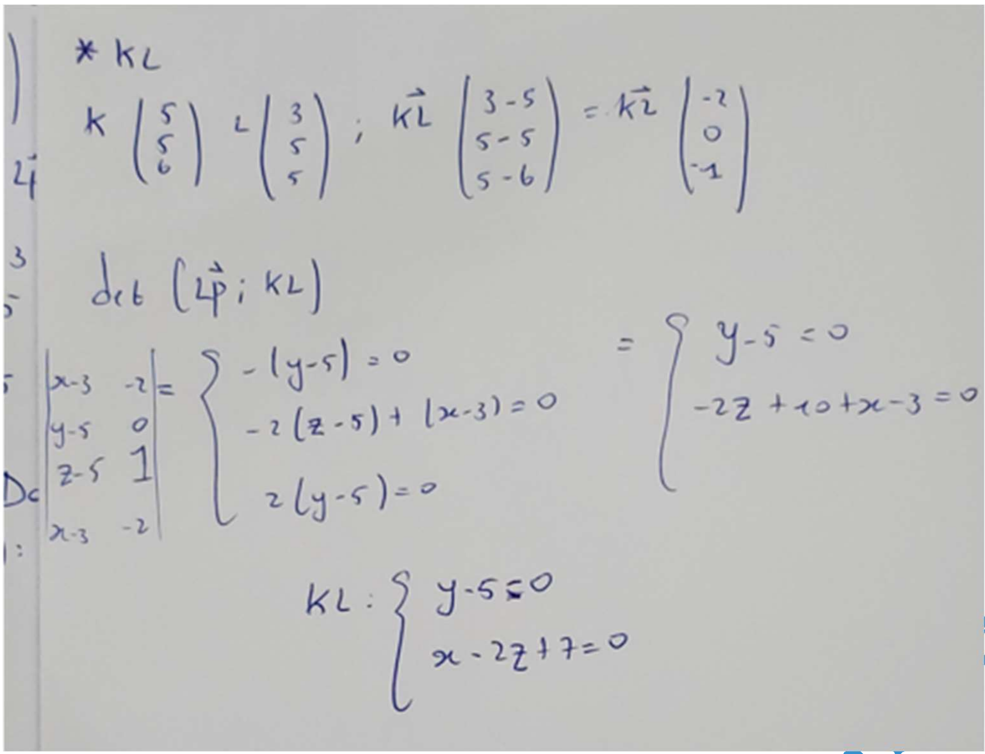
$$K\begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix} \quad J\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix} = \vec{KJ}\begin{pmatrix}5-5\\3-5\\7-6\end{pmatrix} = \vec{KJ}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$\det(\vec{JP} , \vec{KJ})$

$$\begin{vmatrix} x-5 & 0 \\ y-3 & -2 \\ z-7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} y-3+2(z-7)=0 \\ x-5=0 \\ -2(x-5)=0 \end{cases}$$

Donc

$$(KJ) : \begin{cases} x-5=0 \\ 2z+y-17=0 \end{cases}$$



$*$ KL

$K\begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}$; $\vec{KL}\begin{pmatrix}3-5\\5-5\\5-6\end{pmatrix} = \vec{KL}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\det(\vec{LP} ; KL)$

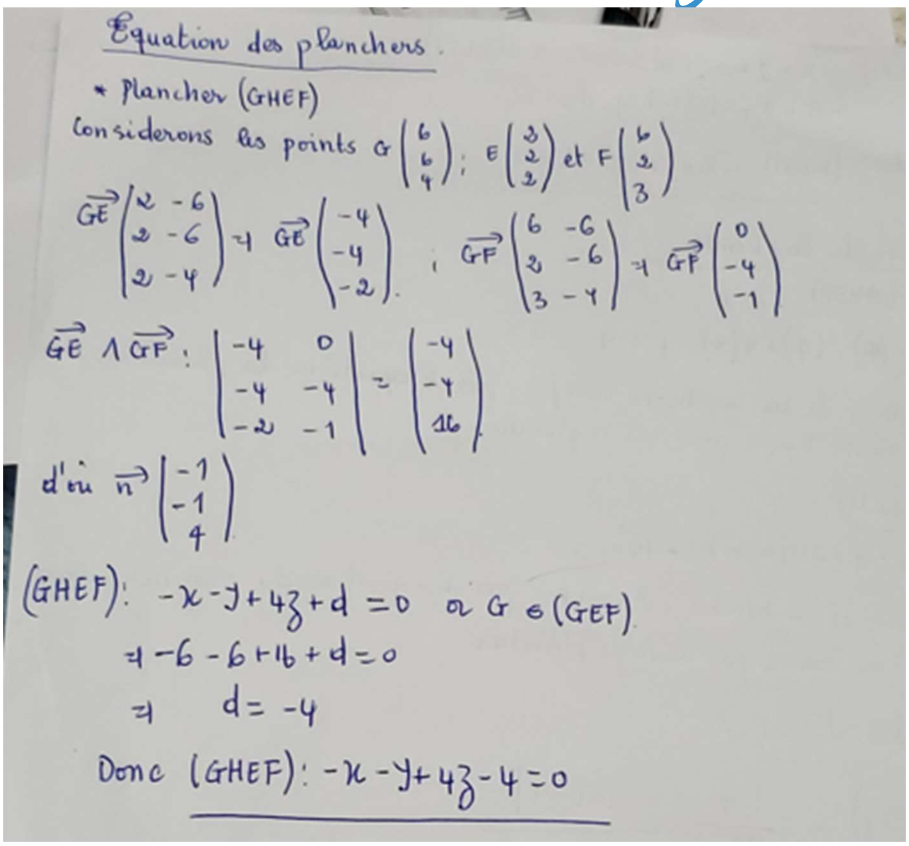
$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ y-5 & 0 \\ z-5 & 1 \\ x-3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{cases} -(y-5)=0 \\ -2(z-5)+(x-3)=0 \\ 2(y-5)=0 \end{cases} = \begin{cases} y-5=0 \\ -2z+10+x-3=0 \end{cases}$$

$$KL : \begin{cases} y-5=0 \\ x-2z+7=0 \end{cases}$$

2. Equations de plans des planchers

On distingue ici, 02 planchers représenter par les plans (GHEF) et (KLIJ)

Procédure et résultats :



Equation des planchers.

$*$ Plancher (GHEF)

Considerons les points $G\begin{pmatrix}6\\6\\4\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{GE}\begin{pmatrix}2-6\\2-6\\2-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GE}\begin{pmatrix}-4\\-4\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{GF}\begin{pmatrix}6-6\\2-6\\3-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{GF}\begin{pmatrix}0\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{GE} \wedge \vec{GF} : \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\16\end{pmatrix}$$

d'où $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$

(GHEF): $-x-y+4z+d=0$ or $G \in (GEF)$

$\Rightarrow -6-6+16+d=0$

$\Rightarrow d=-4$

Donc (GHEF): $-x-y+4z-4=0$

* plancher (KLIJ)

onsidérons les points $K\begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix}$; $L\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}$ et $J\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix}$

$\vec{KL}\begin{pmatrix}3-5\\5-5\\5-6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{KL}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{KJ}\begin{pmatrix}5-5\\3-5\\7-6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{KJ}\begin{pmatrix}0\\-2\\+1\end{pmatrix}$

$\vec{KL} \wedge \vec{KJ} = \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\ \cdot\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

D'où (KLJI) : $-x+y+2z+d=0$ or $K \in (KLJI)$

$-5+5+2(6)+d=0 \Rightarrow d=-12.$

donc (KLJI) : $-x+y+2z-12=0$

3. Positions de la bombe

Pour déterminer si l'engin se trouve sur un des planchers, on vérifiera si les coordonnées de la bombe vérifient les équations de chacun des planchers :

* Position de la bombe

Plancher (GHEF) :

$-(4)-(4)+4(4)-4=4$

Les coordonnés de la bombe ne vérifie pas l'équation du plancher donc la bombe ne se trouve pas sur ce plancher.

Plancher (KLJI) :

$-4+4+2(4)-12) = -4$

Les coordonnées de la bombe ne vérifie pas l'équation du plancher donc la bombe ne se trouve pas sur ce plancher.

- Etant donne que la bombe n'est sur aucun des 02 planchers, nous devons déterminer à quelle distance des planchers cette bombe se trouve :

$$d(W;(GHEF)) = \frac{|-4-4+4(4)-4|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(4)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$d(W;(KLJI)) = \frac{|-4+4+2(4)-12|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(2)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

a bombe est situé entre les planchers à une distance $d = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

plancher (GHEF)

4. Explication du mot « Edifice mal au cœur »

Compte tenu de la structure peu rassurante de ce monument, toute personne pourrait avoir peur ou pourrait sentir très mal à l'aise a l'intérieur de ce bâtiment, exprimant ainsi un malaise, une anxiété, de la peur aussi, d'où l'expression « édifice mal au cœur »

5. Dessin 3D