

Equacions de la calor i de la corda vibrant

Claudi Lleyda Moltó

1 L'equació de la calor

Considerem una barra 1-dimensional col·locada sobre l'interval $(0, 1/2)$ i prenem una distribució de calor inicial sobre la barra donada per una funció $f(x)$ de classe \mathcal{C}^1 . Volem trobar una funció $u(x, t)$ prou derivable que modelitzi la temperatura del punt x de la barra en l'instant t .

Considerem també que la funció u satisfà, per a cert $K > 0$, l'anomenada equació de la calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

i afegim la condició sobre els extrems de la barra

$$u(0, t) = u(1/2, t) = 0. \quad (2)$$

Per tant el model que volem estudiar ve donat per

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(0, t) = u(1/2, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Degut a que, per hipòtesi, la funció u és prou diferenciable i per (2) tenim que la sèrie de Fourier de l'extensió senar de la funció convergeix puntualment, i per tant tenim per a tot x en $(0, 1/2)$ que

$$u(x, t) = Su(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(2\pi nx),$$

on

$$b_n(t) = 2 \int_0^{1/2} u(x, t) \sin(2\pi nx) dx,$$

i trobem que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi nx)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin(2\pi nx).$$

Podem imposar ara la condició (1) per obtenir

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi nx) = 2K \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin(2\pi nx),$$

o equivalentment

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi nx) + K b'_n(t) \sin(2\pi nx)) = 0,$$

i trobem que

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi^2 n^2 b_n(t) + K b'_n(t)) \sin(2\pi nx) = 0.$$

d'on deduïm que s'ha de complir

$$K b'_n(t) = -4\pi^2 n^2 b_n(t).$$

Podem resoldre aquesta equació diferencial fent

$$K \int \frac{b'_n(t)}{b_n(t)} dt = - \int 4\pi n x dt$$

i per tant

$$b_n(t) = C_n e^{-4\pi^2 n^2 K^{-1} t}$$

per a una certa constant C_n , i ens queda

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4\pi^2 n^2 K^{-1} t} \sin(2\pi nx).$$

Ens queda trobar la constant C_n . Tenim que

$$u(x, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(2\pi nx).$$

Tenim per hipòtesi que la distribució inicial de calor en la barra és $f(x)$, i per tant

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(2\pi nx).$$

Ara bé, això és la sèrie Fourier de l'extensió senar de f , i per tant trobem que els C_n són els coeficients de Fourier de f , és a dir,

$$C_n = \hat{f}(n) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi nt) dt,$$

i tot plegat els queda que

$$u(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{f}(n) e^{-4\pi^2 n^2 K^{-1} t} \sin(2\pi nx) \right).$$

2 L'equació de la corda vibrant

Considerem que tenim una corda tensada amb els extrems fixats als punts $(0, 0)$ i $(0, 1/2)$ i la desplaçem fins a una posició donada per una funció $f(x)$. Volem estudiar el comportament en el temps d'aquesta corda quan la deixem anar, és a dir: volem trobar una funció $u(x, t)$ prou derivable que modelitzi la posició de la corda en el punt x en l'instant t . Tindrem que

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

i com que els extrems estan fixats tenim que

$$u(0, t) = u(1/2, t) = 0. \quad (4)$$

Considerarem també que la corda té una velocitat inicial, donada per una funció $g(x)$. Això és que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (5)$$

Per últim suposarem que la corda satisfà, per a cert $K > 0$, l'equació

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Per tant el model que volem estudiar ve donat per

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0, t) = u(1/2, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Degut a que, per hipòtesi, la funció u és prou diferenciable i per (4) tenim que la sèrie de Fourier de l'extensió senar de la funció convergeix puntualment, i per tant tenim per a tot x en $(0, 1/2)$ que

$$u(x, t) = Su(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(2\pi nx),$$

on

$$b_n(t) = 2 \int_0^{1/2} u(x, t) \sin(2\pi nx) dx,$$

i trobem que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi nx)$$

i

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin(2\pi nx).$$

Podem imposar ara la condició (6) per trobar que

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi n x) = 2K \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin(2\pi n x),$$

o equivalentment

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi n x) - K b_n''(t) \sin(2\pi n x)) = 0$$

i trobem que

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (4\pi^2 n^2 b_n(t) - K b_n''(t)) \sin(2\pi n x) = 0$$

d'on deduïm que s'ha de complir

$$\frac{4\pi^2 n^2}{K} b_n(t) = b_n''(t).$$

La solució a aquesta equació diferencial és, per a certes constants A_n i B_n , de la forma

$$b_n(t) = A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} t\right).$$

Determinem la constant A_n . Considerem

$$u(x, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(2\pi n x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n x),$$

i si imposen la condició (3) trobem que

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n x),$$

i per tant tenim que les constants A_n són els coeficients de Fourier de l'extensió senar de f , i per tant

$$A_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi n t) dt.$$

Calculem ara la constant B_n . Tenim que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(0) \sin(2\pi n x) = \frac{4\pi}{\sqrt{K}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \sin(2\pi n x),$$

i imposant la condició (5) trobem que

$$g(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{K}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \sin(2\pi n x),$$

i per tant tenim que les constants B_n són els coeficients de l'extensió senar de la funció g per una constant, i tenim que

$$\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} B_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \sin(2\pi n t) dt,$$

i per tant trobem que

$$B_n = \frac{\sqrt{K}}{\pi n} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \sin(2\pi n t) dt.$$

Tot junt ens queda que

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\hat{f}(n) \cos \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} t \right) + \hat{g}(n) \frac{\sqrt{K}}{2\pi n} \sin \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} t \right) \sin(2\pi n x) \right).$$