

CLAUDI LLEYDA MOLTÓ

Apunts de matemàtiques

Les matemàtiques són un joc de definicions



NOTES DE CLASSE

PROMOCIÓ 2016-17

Índex

Índex	3
I Fonaments de les matemàtiques	9
1 Lògica matemàtica	11
1.1 Els fonaments	11
1.1.1 Processos fonamentals de les matemàtiques	11
1.1.2 Operacions lògiques elementals	11
1.1.3 Relacions vertaderes	12
1.1.4 Tautologies	12
2 Teoria de conjunts	17
2.1 Conjunts	17
2.1.1 Elements i subconjunts	17
2.1.2 Unió i intersecció de conjunts	18
2.2 Aplicacions entre conjunts	19
2.2.1 Aplicacions	19
2.2.2 Tipus d'aplicacions	19
2.2.3 Conjugació d'aplicacions	20
2.2.4 Aplicacions invertibles	21
2.3 Relacions d'equivalència	22
2.3.1 Relacions d'equivalència	22
2.3.2 Classes d'equivalència i conjunt quocient	23
3 Conjunts amb operacions i els nombres	25
3.1 Els nombres naturals	25
3.1.1 Axiomes de Peano	25
3.1.2 Operacions sobre els nombres naturals	27
3.2 Els nombres enters	31
3.2.1 Construcció dels nombres enters	31
3.2.2 Operacions sobre els nombres enters	32
3.2.3 Divisibilitat dels nombres enters	36
3.2.4 Màxim comú divisor	37
3.2.5 La divisió euclidiana i l'identitat de Bézout	38
3.2.6 Mínim comú múltiple	41
3.2.7 Teorema Fonamental de l'Aritmètica	41
3.3 Els nombres modulars	43
3.3.1 Construcció dels nombres modulars	43

3.3.2	Operacions sobre nombres modulars	44
3.3.3	Congruències i aritmètica modular	46
3.3.4	El Teorema xinès de les restes	47
3.4	Les permutacions	48
3.4.1	El grup simètric	48
3.4.2	Permutacions disjunctes	49
3.4.3	Cicles	51
3.4.4	Descomposició en transposicions i signe	52
3.5	Els nombres racionals	53
3.5.1	Construcció dels nombres racionals	53
3.5.2	Operacions entre nombres racionals	55
Bibliografia		59
 II Àlgebra Lineal		 61
4	Matrius	63
4.1	Matrius i operacions	63
4.1.1	Cossos	63
4.1.2	Les matrius	63
4.1.3	Propietats de les operacions amb matrius	64
4.1.4	Matrius inverses i matrius transposades	67
4.1.5	Producte de matrius en blocs	69
4.2	Rang d'una matriu	71
4.2.1	Transformacions elementals	71
4.2.2	Matrius esglaonades i mètode de Gauss	72
4.2.3	Teorema de la <i>PAQ</i> -reducció	74
4.3	Determinant d'una matriu	77
4.3.1	Propietats dels determinants	77
 III Coses per fer		 79
5	Aviat	81
5.1	Àlgebra lineal	81
5.1.1	Definicions	81
5.1.2	Proposicions	81
5.1.3	Teoremes	81
5.2	Funcions de variable real	81
5.2.1	Definicions	81
5.2.2	Proposicions	82
5.2.3	Teoremes	82
5.3	Trobar lloc per tot això	83
 IV Càlcul en diverses variables i optimització		 85
6	Càlcul diferencial	87
6.1	Arcs i conjunts connexos	87
6.1.1	Arcs en múltiples variables	87

6.1.2	Oberts connexos	88
6.2	Funcions diferenciables	90
6.2.1	Diferencial d'una funció en múltiples variables	90
6.2.2	La Matriu Jacobiana i la regla de la cadena	93
6.2.3	Gradient, punts crítics i extrems relatius	96
6.2.4	Canvis de coordenades diferenciables	97
6.3	Teoremes de la funció implícita i inversa	98
6.3.1	Dependència i independència funcional	98
6.3.2	Varietats	99
6.3.3	Teorema de la funció inversa	101
6.3.4	Teorema de la funció implícita	104
6.4	Extrems relatius	105
6.4.1	El mètode de multiplicadors de Lagrange	105
6.4.2	Teorema del rang constant	106
6.4.3	Derivades d'ordre superior	108
6.4.4	Fórmula de Taylor en múltiples variables	109
6.4.5	Extrems lliures	110
7	Càlcul integral	113
7.1	La integral Riemann	113
7.1.1	Funcions integrables Riemann	113
7.1.2	La integral com a límit de sumes	117
7.1.3	Propietats de la integral Riemann definida	117
7.2	Les funcions integrables Riemann	120
7.2.1	Caracterització de les funcions integrables Riemann	120
7.2.2	Integració sobre conjunts generals	122
8	Càlcul vectorial	123
	Bibliografia	124
V	Anàlisi matemàtica	127
9	Sèries	129
9.1	Sèries numèriques	129
9.1.1	Convergència d'una sèrie numèrica	129
9.1.2	Sèries de termes positius	132
9.1.3	Criteris de convergència	134
9.1.4	Sèries alternades	142
9.1.5	Convergència absoluta d'una sèrie	144
9.1.6	Sèries del producte de successions	146
9.1.7	Reordenació de sèries	150
9.2	Successions funcions	154
9.2.1	Convergència d'una successió de funcions	154
9.2.2	Convergència uniforme	154
9.2.3	Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat	155
9.3	Sèries de funcions	156
9.3.1	Convergència d'una sèrie de funcions	156
9.3.2	Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat	156

VI Estructures algebraiques	159
10 Teoria de grups	161
10.1 Grups	161
10.1.1 Propietats bàsiques dels grups	161
10.1.2 Subgrups i subgrups normals	165
10.1.3 Grups cíclics i grups abelians	168
10.1.4 Grup quocient	169
10.2 Tres Teoremes d'isomorfisme entre grups	171
10.2.1 Morfismes entre grups	171
10.2.2 Teoremes d'isomorfisme entre grups	175
10.3 Tres Teoremes de Sylow	179
10.3.1 Accions sobre grups	179
10.3.2 Teoremes de Sylow	181
11 Teoria d'anells	187
11.1 Anells	187
11.1.1 Propietats bàsiques dels anells i subanells	187
11.1.2 Ideals i ideals principals	190
11.1.3 Cossos i l'anell quocient	191
11.2 Tres Teoremes d'isomorfisme entre anells	193
11.2.1 Morfismes entre anells	193
11.2.2 Teoremes d'isomorfisme entre anells	196
11.2.3 Característica d'un anell	196
11.3 Dominis	197
11.3.1 Dominis d'integritat, ideals primers i maximals	197
11.3.2 Lema de Zorn	199
11.3.3 Divisibilitat	200
11.3.4 Dominis de factorització única	204
11.3.5 Anells Noetherians	206
11.3.6 Dominis d'ideals principals	207
11.3.7 Dominis Euclidians	208
11.4 Anells de polinomis	209
11.4.1 Cos de fraccions d'un domini d'integritat	209
11.4.2 El Teorema de Gauss	210
11.4.3 Criteris d'irreductibilitat	212
12 Teoria de cossos finits	213
12.1 Cossos finits	213
12.1.1 Propietats bàsiques dels cossos finits	213
12.1.2 Arrels d'un polinomi	214
12.2 Caracterització dels cossos finits i els seus subcossos	215
12.2.1 Teoremes d'existència i unicitat dels cossos finits	215
12.2.2 El morfisme de Frobenius	216
Bibliografia	217

VII	Mètodes numèrics	219
13	Interpolació numèrica	221
13.1	El problema d'interpolació	221
13.1.1	Problemes d'interpolació	221
13.2	Polinomis interpoladors de Lagrange	222
13.2.1	Interpolació de Lagrange	222
13.2.2	Mètode de les diferències dividides de Newton	224
13.2.3	Error en la interpolació de Lagrange	226
13.2.4	Interpolació en nodes equiespaiats	227
13.3	Polinomis interpoladors per splines	228
13.3.1	Interpolació per splines	228
	Bibliografia	230
VIII	Topologia	233
14	L'espai topològic	235
14.1	Espais mètrics	235
14.1.1	Boles i oberts	235
14.2	L'espai topològic	236
14.2.1	Una topologia d'un conjunt i els oberts	236
14.2.2	Tancats	238
14.2.3	Base d'una topologia	239
14.2.4	Entorns, interior i adherència	241
14.3	Aplicacions contínues	245
14.3.1	Aplicacions obertes, tancades i contínues	245
14.3.2	Homeomorfismes entre topologies	246
15	Altres topologies	247
15.1	Topologies induïdes	247
15.1.1	La topologia induïda per un subconjunt	247
15.1.2	La topologia producte	249
15.1.3	La topologia quocient	253
15.2	Espai d'Alexandroff	253
15.2.1	Propietats bàsiques	253
IX	Equacions diferencials ordinàries I	255
16	Equacions diferencials de primer ordre en una variable	257
16.1	Espai de funcions contínues i acotades	257
16.1.1	L'espai de funcions contínues i acotades és complet	257
16.1.2	Aplicacions contractives i punts fixes	259
16.2	Teoremes d'existència i unicitat	261
16.2.1	El Teorema de Picard	261
16.2.2	El Teorema de Peano	264
16.2.3	Solucions improrrogables	267
16.3	Dependència de les solucions d'un problema de Cauchy	268

Part I

Fonaments de les matemàtiques

Capítol 1

Lògica matemàtica

1.1 Els fonaments

1.1.1 Processos fonamentals de les matemàtiques

Definirem de manera informal els conceptes d'*objecte matemàtic*, de *relació* entre objectes i de *demostració* d'una relació. Aquests són els tres processos fonamentals de les matemàtiques.

Els *objectes matemàtics* són abstraccions de conceptes. Anomenem a les possibles propietats d'aquests objectes *relacions*. Aquestes poden ser o bé vertaderes o bé falses.

Anomenem a algunes d'aquestes relacions *axiomes*, que són relacions que prenem com a vertaderes des d'un principi. Per determinar la veracitat d'altres relacions empararem les *demostracions*. Direm que una relació és vertadera quan es pot deduir a partir dels axiomes amb una demostració, que és una successió d'arguments rigorosos per convèncer-nos que una relació és vertadera.

1.1.2 Operacions lògiques elementals

Definició 1.1.1 (Disjunció). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada disjunció. L'escriurem $R \vee S$, i ho llegirem “ R o S ”.

Definició 1.1.2 (Negació). Sigui R una relació. Aleshores definim una relació anomenada negació. L'escriurem $\neg R$ i ho llegirem “no R ”.

Definició 1.1.3 (Conjunció). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada conjunció definida com

$$R \wedge S = \neg((\neg R) \vee (\neg S)).$$

Ho llegirem “ R i S ”.

Definició 1.1.4 (Disjunció excloent). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada disjunció excloent definida com

$$R \veebar S = (R \wedge (\neg S)) \vee ((\neg R) \wedge S).$$

Ho llegirem “o bé R o bé S ”.

Definició 1.1.5 (Implicació). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada implicació definida com

$$R \implies S = S \vee (\neg R).$$

Ho llegirem “ R implica S ” o “si R aleshores S ”.

Definició 1.1.6 (Doble implicació). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada doble implicació definida com

$$R \iff S = (R \implies S) \wedge (S \implies R).$$

Ho llegirem com “ R si i només si S ” o “ R és equivalent a S ”.

1.1.3 Relacions vertaderes

Axioma 1.1.7. *Sigui R una relació. Aleshores la relació*

$$(R \vee R) \implies R$$

és vertadera.

Axioma 1.1.8. *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$R \implies (R \vee S)$$

és vertadera.

Axioma 1.1.9. *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$(R \vee S) \implies (S \vee R)$$

és vertadera.

Axioma 1.1.10. *Siguin R , S i T tres relacions. Aleshores la relació*

$$(R \implies S) \implies ((R \vee T) \implies (S \vee T))$$

és vertadera.

Axioma 1.1.11. *Siguin R i S dues relacions tals que R i $R \implies S$ siguin vertaderes. Aleshores S és vertadera.*

Definició 1.1.12 (Relació falsa). Sigui R una relació tal que $\neg R$ sigui vertadera. Aleshores direm que R és falsa.

1.1.4 Tautologies

Tautologia 1.1.13. *Siguin R , S i T tres relacions tals que $R \implies S$ i $S \implies T$ siguin vertaderes. Aleshores la relació $R \implies T$ és vertadera.*

Demostració. Per l'axioma 1.1.10 la relació

$$(S \implies T) \implies (S \vee (\neg R) \implies (T \vee (\neg R)))$$

és vertadera. Ara bé, per la definició d'implicació (1.1.5) això ho podem escriure com

$$(S \implies T) \implies ((R \implies S) \implies (R \implies T))$$

i com que, per hipòtesi, la relació $S \implies T$ és vertadera per l'axioma 1.1.11 tenim que la relació $(R \implies S) \implies (R \implies T)$ és vertadera, i com que, de nou per hipòtesi, tenim que la relació $R \implies S$ és vertadera tenim per l'axioma 1.1.11 que la relació $R \implies T$ és vertadera, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.14 (Tercer exclòs). *Sigui R una relació. Aleshores la relació $R \vee (\neg R)$ és vertadera.*

Demostració. La relació $R \vee (\neg R)$ és equivalent, per la definició d'implicació (1.1.5), a $R \implies R$. Per l'axioma 1.1.7 tenim que la relació $(R \vee R) \implies R$ és vertadera, i per l'axioma 1.1.8 tenim que la relació $R \implies (R \vee R)$ és vertadera. Per tant, per la tautologia 1.1.13, veiem que $R \implies R$. \square

Tautologia 1.1.15. *Siguin R i S dues relacions tals que R sigui vertadera. Aleshores les relacions $R \vee S$ i $S \vee R$ són vertaderes.*

Demostració. Per l'axioma 1.1.8 tenim que $R \implies (R \vee S)$ és vertadera, i per l'axioma 1.1.9 tenim que $(R \vee S) \implies (S \vee R)$ és vertadera.

Ara bé, per hipòtesi tenim que R és vertadera, i per l'axioma 1.1.11 veiem que les relacions $R \vee S$ i $S \vee R$ són vertaderes. \square

Tautologia 1.1.16. *Sigui R una relació. Aleshores la relació $R \iff \neg(\neg R)$ és vertadera.*

Demostració. Per la definició de doble implicació (1.1.6) hem de veure que la relació

$$(\neg(\neg R) \vee (\neg R)) \wedge (R \vee (\neg(\neg(\neg R))))$$

és vertadera. Ara bé, si R és vertadera trobem per la definició de negació (1.1.2) que $\neg R$ és falsa, i aleshores per la tautologia del tercer exclòs (1.1.14) les relacions $\neg(\neg R) \vee (\neg R)$ i $R \vee (\neg(\neg(\neg R)))$ són vertaderes

Si R és falsa trobem per la definició de negació (1.1.2) que $\neg R$ és vertadera, aleshores, de nou per la tautologia del tercer exclòs (1.1.14), les relacions $\neg(\neg R) \vee (\neg R)$ i $R \vee (\neg(\neg(\neg R)))$ són vertaderes, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.17 (Primera llei de De Morgan). *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$\neg(R \vee S) \iff ((\neg R) \wedge (\neg S))$$

és vertadera.

Demostració. Per la definició de conjunció (1.1.3) volem veure que la relació

$$\neg(R \vee S) \iff \neg((\neg(\neg R)) \vee (\neg(\neg S)))$$

és vertadera. Aleshores, per la tautologia del **tercer exclòs** (1.1.14) això és equivalent a veure que la relació

$$\neg(R \vee S) \iff \neg(R \vee S)$$

és vertadera, i per l'axioma 1.1.9 hem acabat. \square

Tautologia 1.1.18 (Segona llei de De Morgan). *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$\neg(R \wedge S) \iff ((\neg R) \vee (\neg S))$$

és vertadera.

Demostració. Per la definició de **conjunció** (1.1.3) hem de veure que la relació

$$((\neg R) \vee (\neg S)) \iff \neg((\neg(\neg R)) \wedge (\neg(\neg S))),$$

i per la tautologia 1.1.16 això és equivalent a veure que la relació

$$((\neg R) \vee (\neg S)) \iff \neg(R \wedge S),$$

que és conseqüència de la **llei de De Morgan** (1.1.17). \square

Tautologia 1.1.19 (Llei de les contrarecíproques). *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$(R \implies S) \iff ((\neg S) \implies (\neg R))$$

és vertadera.

Demostració. Per la definició d'**implicació** (1.1.5) hem de veure que la relació

$$(S \vee (\neg R)) \iff ((\neg R) \vee (\neg(\neg S)))$$

és vertadera. Ara bé, per la tautologia 1.1.16 tenim que això és equivalent a veure que la relació

$$(S \vee (\neg R)) \iff ((\neg R) \vee S)$$

és vertadera, i pels axiomes 1.1.9 i 1.1.10 i la definició de **dobla implicació** (1.1.6) tenim que aquesta relació és vertadera, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.20. *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació $R \wedge S$ és vertadera si i només si R és vertadera i S és vertadera.*

Demostració. Veiem primer l'implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que R i S són vertaderes. Per l'axioma 1.1.8 la relació $S \vee (\neg R)$ és vertadera i, per la definició de **implicació** (1.1.5) tenim que $R \implies S$ és vertadera. Ara bé, per la tautologia de **la llei de les contrarecíproques** (1.1.19) tenim que la relació $(\neg S) \implies (\neg R)$ és vertadera, i pels axiomes 1.1.10 i 1.1.7 tenim que la relació

$$((\neg S) \vee (\neg R)) \implies (\neg R)$$

és vertadera, i de nou per la tautologia de **la llei de les contrarecíproques** (1.1.19) trobem que la relació

$$(\neg(\neg R)) \implies (\neg(\neg S) \vee (\neg R))$$

és vertadera, i per la tautologia 1.1.16 trobem que la relació

$$R \implies (\neg((\neg S) \vee (\neg R)))$$

és vertadera, i per la definició de **conjunció** (1.1.3) això és equivalent a que la relació

$$R \implies (R \wedge S)$$

és vertadera, i per tant per l'axioma 1.1.11 trobem que $R \wedge S$ és vertadera, com volíem veure.

Veiem ara l'implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem doncs que la relació $R \wedge S$ és vertadera. Per la tautologia de **la llei de les contrarecíproques** (1.1.19) tenim que la relació $(R \wedge S) \implies S$ és vertadera si i només si la relació

$$(\neg R) \implies (\neg(\neg((\neg R) \vee (\neg S))))$$

és vertadera. Ara bé, per la tautologia 1.1.16 tenim que això és equivalent a veure que la relació

$$(\neg R) \implies ((\neg R) \vee (\neg S))$$

és vertadera, que és conseqüència de l'axioma 1.1.8, i per tant la relació $(R \wedge S) \implies R$ és vertadera. La demostració del cas $(R \wedge S) \implies S$ és anàloga. \square

Tautologia 1.1.21. *Siguin R i S dues relacions tals que R sigui falsa i $R \vee S$ sigui vertadera. Aleshores la relació S és vertadera.*

Demostració. Per la tautologia 1.1.16 tenim que la relació $R \implies (\neg(\neg R))$ és vertadera, i per l'axioma 1.1.10 això és que la relació

$$(R \vee S) \iff (\neg(\neg R) \vee S)$$

és vertadera. Ara bé, per la definició d'**implicació** (1.1.5) tenim que això és equivalent a la relació

$$(R \vee S) \iff ((\neg R) \implies S).$$

I com que, per hipòtesi, $R \vee S$ i $\neg R$ són vertaderes, tenim que S és vertadera, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.22. *Siguin R i S dues relacions tals que S sigui falsa i $R \vee S$ sigui vertadera. Aleshores R és vertadera.*

Demostració. Tenim, per la definició de **disjunció excloent** (1.1.4), que la relació

$$(R \wedge (\neg S)) \vee ((\neg R) \wedge S)$$

és vertadera. Ara bé, com per hipòtesi S és falsa per la tautologia 1.1.21 tenim que la relació $(\vee R) \wedge S$ és falsa. Per tant per la tautologia 1.1.20 tenim que la relació $R \wedge (\neg S)$ és vertadera, i per la tautologia 1.1.20 tenim que R és vertadera. \square

Tautologia 1.1.23. *Siguin R i S dues relacions tals que R i $R \vee S$ siguin vertaderes. Aleshores S és falsa.*

Demostració. Tenim, per la definició de **disjunció excloent** (1.1.4), que la relació

$$(R \wedge (\neg S)) \vee ((\neg R) \wedge S)$$

és vertadera. Com per hipòtesi la relació R és vertadera, per la definició de **negació** (1.1.2) tenim que $\neg R$ és falsa. I per la tautologia 1.1.20 tenim que la relació $(\neg R) \wedge S$ és falsa, i per la tautologia 1.1.21 tenim que la relació $R \wedge (\neg S)$ és vertadera.

Ara bé, de nou per la tautologia 1.1.20, tenim que la relació $\neg S$ ha de ser vertadera, i per la definició de **negació** (1.1.2) trobem que S és falsa. \square

Capítol 2

Teoria de conjunts

2.1 Conjunts

2.1.1 Elements i subconjunts

Igual que en la secció anterior, només farem una introducció informal a la teoria de conjunts.

Definirem *conjunt* com un objecte matemàtic, i entre conjunts la relació \in de pertinència. Interpretem la relació $x \in A$ com que x és un *element* de A o que x pertany a A . Si la relació $x \in A$ és falsa aleshores ho denotarem com $x \notin A$ i direm que x no pertany a A .

Axioma 2.1.1 (Axioma d'Extensionalitat). *Siguin A i B dos conjunts tals que per a tot x tenim $x \in A$ si i només si $x \in B$. Aleshores $A = B$.*

Definició 2.1.2 (Subconjunt). *Siguin A i B dos conjunts tals que per a tot $x \in B$ tenim $x \in A$. Aleshores direm que B és un subconjunt de A i ho denotarem $B \subseteq A$.*

Teorema 2.1.3 (Doble inclusió). *Siguin A i B dos conjunts. Aleshores $A = B$ si i només si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\Leftarrow). Suposem doncs que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) tenim que si $x \in A$ aleshores $x \in B$, ja que per hipòtesi $A \subseteq B$. De mateixa manera tenim que si $x \in B$ aleshores $x \in A$, ja que per hipòtesi $B \subseteq A$. Per tant, per l'[axioma d'extensionalitat \(2.1.1\)](#) tenim que $A = B$.

Veiem ara que la condició és necessària (\Rightarrow). Suposem doncs que $A = B$. Tenim que si $x \in A$, aleshores $x \in B$, i per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) això és que $A \subseteq B$. De mateixa manera, si $x \in B$ tenim $x \in A$, i de nou per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) tenim que $B \subseteq A$, com volíem veure. \square

Axioma 2.1.4 (Axioma del Conjunt Potència). *Sigui A un conjunt. Aleshores existeix un conjunt $\mathcal{P}(A)$ tal que $B \subseteq A$ si i només si $B \in \mathcal{P}(A)$.*

Notació 2.1.5. Denotarem els conjunts com claus separant els seus elements amb comes. Per exemple, si tinguéssim un conjunt X que conté únicament els elements a , b i c el podríem denotar com

$$X = \{a, b, c\}.$$

Si tots els elements de X satisfan una relació R denotarem

$$X = \{x \mid x \text{ satisfà } R\}.$$

Axioma 2.1.6 (Axioma de Separació). *Siguin A un conjunt i R una relació. Aleshores el conjunt $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \text{ satisfà } R)\}$ existeix.*

Proposició 2.1.7. *Existeix un únic conjunt sense elements.*

Demostració. Considerem un conjunt A . Aleshores, per l'axioma de separació (2.1.6) tenim que existeix un conjunt

$$X = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin A)\},$$

i per la tautologia 1.1.20 tenim que la relació $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ és falsa. Per tant el conjunt X no té elements.

La unicitat la tenim per l'axioma axioma d'extensionalitat (2.1.1). \square

Definició 2.1.8 (Conjunt buit). Direm que el conjunt que no té elements és el conjunt buit, i el denotarem com \emptyset .

Aquesta definició té sentit per la proposició 2.1.7.

Axioma 2.1.9 (Axioma de Regularitat). *Sigui A un conjunt. Aleshores tenim que $\emptyset \subseteq A$.*

2.1.2 Unió i intersecció de conjunts

Axioma 2.1.10 (Axioma d'Infinitud). *Existeix un conjunt infinit.*

Axioma 2.1.11 (Axioma de la Unió). *Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ és una família de conjunts. Aleshores el conjunt $\{x \mid x \in A_i \text{ per a cert } i \in I\}$ existeix.*

Definició 2.1.12 (Unió de conjunts). Sigui A i B dos conjunts. Aleshores direm que el conjunt

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

és la unió de A i B .

Aquesta definició té sentit per l'axioma de la unió (2.1.11).

Definició 2.1.13 (Intersecció de conjunts). Sigui A i B dos conjunts. Aleshores direm que el conjunt

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

és la intersecció de A i B .

Aquesta definició té sentit per l'axioma de separació (2.1.6).

Notació 2.1.14. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ és una família de conjunts, denotarem la unió de tots aquests com

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ per a cert } i \in I\}.$$

Denotem la intersecció de tots aquests com

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ per a tot } i \in I\}.$$

2.2 Aplicacions entre conjunts

2.2.1 Aplicacions

Axioma 2.2.1 (Axioma del Parell). *Per a qualsevol parella d'elements a, b existeix un conjunt $\{a, b\}$ que conté únicament a i b .*

Definició 2.2.2 (Parelles ordenades). Sigui a i b dos elements. Aleshores direm que $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ és una parella ordenada.

Aquesta definició té sentit per l'axioma del parell (2.2.1).

Proposició 2.2.3. *Sigui (a, b) i (c, d) dues parelles ordenades. Aleshores $(a, b) = (c, d)$ si i només si $a = c$ i $b = d$.*

Demostració. Suposem que $a = c$ i $b = d$. Aleshores tenim que $a \in \{c, \{c, d\}\}$, $\{a, b\} \in \{c, \{c, d\}\}$, $c \in \{a, \{a, b\}\}$ i $\{c, d\} \in \{a, \{a, b\}\}$, i per tant, per la definició de subconjunt (2.1.2) tenim que $\{c, \{c, d\}\} \subseteq \{a, \{a, b\}\}$ i $\{a, \{a, b\}\} \subseteq \{c, \{c, d\}\}$, i pel Teorema de la doble inclusió (2.1.3) tenim que això és si i només si $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$, i per la definició de parelles ordenades (2.2.2) trobem que $(a, b) = (c, d)$. \square

Definició 2.2.4 (Producte cartesià de conjunts). Sigui A i B dos conjunts. Aleshores definim el conjunt

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

com el producte cartesià de A i B .

Definició 2.2.5 (Aplicació). Sigui A i B dos conjunts i f un subconjunt de $A \times B$ tal que si (a, b) i (a, b') són elements de f , aleshores $b = b'$. Aleshores direm que f és una aplicació de A sobre B i escriurem $b = f(a)$. També denotarem $f: A \rightarrow B$ i

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto b \end{aligned}$$

Axioma 2.2.6 (Axioma de Reemplaçament). *Sigui A i B dos conjunts i f una aplicació de A sobre B . Aleshores el conjunt $\{f(x) \in B \mid x \in A\}$ existeix.*

2.2.2 Tipus d'aplicacions

Definició 2.2.7 (Aplicació injectiva). Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot a, a' elements de X satisfent $f(a) = f(a')$ tenim $a = a'$. Aleshores direm que f és injectiva.

Definició 2.2.8 (Aplicació exhaustiva). Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot $b \in Y$ existeix $a \in X$ satisfent $f(a) = b$. Aleshores direm que f és exhaustiva.

Definició 2.2.9 (Aplicació bijectiva). Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació injectiva i exhaustiva. Aleshores direm que f és bijectiva.

2.2.3 Conjugació d'aplicacions

Proposició 2.2.10. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions. Aleshores $h(a) = g(f(a))$ per a tot $a \in A$ és una aplicació de A en C .*

Demostració. Per la definició d'[aplicació \(2.2.5\)](#) hem de veure que h està ben definida. És a dir, que si prenem dos elements a i a' de A tals que $a = a'$, aleshores $h(a) = h(a')$.

Siguin doncs a i a' dos elements de A tals que $a = a'$. Com que, per hipòtesi, f és una aplicació tenim per la definició d'[aplicació \(2.2.5\)](#) que $f(a) = f(a') = b$, per a cert $b \in B$, i per tant, com que per hipòtesi g és una aplicació, trobem $g(f(a)) = g(b) = c$ i $g(f(a')) = g(b) = c$ per a cert $c \in C$, i per tant $h(a) = h(a')$, com volíem veure.

També tenim que $f \subseteq A \times C$, ja que si $c = h(a)$ tenim $c = g(f(a))$, i per la definició d'[aplicació \(2.2.5\)](#) tenim que $a \in A$ i $c \in C$. Per tant, per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) tenim que h és una aplicació. \square

Definició 2.2.11 (Conjugació d'aplicacions). *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions. Aleshores direm que l'aplicació $g(f)$ és la composició de g amb f i ho denotarem com*

$$\begin{aligned} g \circ f: A &\longrightarrow C \\ a &\longmapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

Aquesta definició té sentit per la proposició [2.2.10](#).

Proposició 2.2.12. *Siguin $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ i $h: C \rightarrow D$ aplicacions. Aleshores*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Demostració. Hem de veure que per a tot $a \in A$ tenim $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$. Ara bé, tenim que

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

i

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))).$$

Per tant, per la definició d'[aplicació \(2.2.5\)](#) tenim que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. \square

Teorema 2.2.13. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions injectives. Aleshores l'aplicació $g \circ f$ és injectiva.*

Demostració. Prenem a i a' dos elements de A tals que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Aleshores tenim $g(f(a)) = g(f(a'))$, i per la definició d'[aplicació injectiva \(2.2.7\)](#) com que, per hipòtesi g és injectiva tenim que $f(a) = f(a')$, i com que, per hipòtesi, f és injectiva, tenim que $a = a'$, i de nou per la definició d'[aplicació injectiva \(2.2.7\)](#) tenim que $g \circ f$ és injectiva. \square

Teorema 2.2.14. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions exhaustives. Aleshores l'aplicació $g \circ f$ és exhaustiva.*

Demostració. Prenem un element $c \in C$. Aleshores per la definició de **aplicació exhaustiva** (2.2.8) tenim que existeixen $a \in A$ i $b \in B$ tals que $b = f(a)$ i $c = g(b)$. Per tant per la definició de **aplicació exhaustiva** (2.2.8) tenim que $g \circ f$ és una aplicació exhaustiva, ja que per a tot $c \in C$ existeix $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. \square

Teorema 2.2.15. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions bijectiva. Aleshores l'aplicació $g \circ f$ és bijectiva.*

Demostració. Per la definició d'**aplicació bijectiva** (2.2.9) hem de veure que $g \circ f$ és injectiva i exhaustiva. Ara bé, per hipòtesi tenim que f i g són bijectives, i de nou per la definició d'**aplicació bijectiva** (2.2.9) tenim que f i g són ambdues injectives i exhaustives. Per tant, pel Teorema 2.2.13 tenim que $g \circ f$ és injectiva, i pel Teorema 2.2.14 tenim que $g \circ f$ és exhaustiva, com volíem veure. \square

2.2.4 Aplicacions invertibles

Definició 2.2.16 (Aplicació invertible). *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow A$ dues aplicacions tals que per a tot $a \in A$ i $b \in B$ es compleix*

$$(f \circ g)(a) = a \quad \text{i} \quad (g \circ f)(b) = b.$$

Aleshores direm que f és la inversa de g i que f és una aplicació invertible o que f té inversa.

Teorema 2.2.17. *Siguin $f: A \rightarrow B$ una aplicació invertible i $g_1: B \rightarrow A$ i $g_2: B \rightarrow A$ dues inverses de f . Aleshores $g_1 = g_2$.*

Demostració. Per la definició de **aplicació invertible** (2.2.16) tenim que per a tot $a \in A$, $b \in B$

$$(g_1 \circ f)(a) = a \quad \text{i} \quad (f \circ g_2)(b) = b.$$

Ara bé, tenim

$$((g_1 \circ f) \circ g_2)(b) = g_2(b) \quad \text{i} \quad (g_1 \circ (f \circ g_2))(b) = g_1(b)$$

i per la proposició 2.2.12 trobem que $g_1 = g_2$, com volíem veure. \square

Notació 2.2.18. Aprofitant el Teorema 2.2.17 denotarem l'inversa d'una aplicació $f: A \rightarrow B$ amb f^{-1} , i per tant definim l'aplicació

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A.$$

Aleshores tenim que $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ és l'aplicació bijectiva i satisfà $\text{Id}_A(a) = a$ per a tot $a \in A$.

També denotarem la conjugació d'una aplicació $g: A \rightarrow A$ amb sí mateixa k de vegades com

$$g^k = g \circ \cdots \circ g.$$

Teorema 2.2.19. *Sigui $f: A \rightarrow B$ una funció. Aleshores f és bijectiva si i només si f és invertible.*

Demostració. Comencem veient que la condició és necessària (\implies). Suposem doncs que f és una aplicació bijectiva. Per la definició d'[aplicació bijectiva](#) (2.2.9) tenim que f és injectiva i exhaustiva. Per tant per la definició d'[aplicació injectiva](#) (2.2.7) i la definició d'[aplicació exhaustiva](#) (2.2.8) tenim que per a tot $b \in B$ existeix un únic $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

Per tant definim l'aplicació $g: B \rightarrow A$ tal que $g(b) = a$. Ara bé, tenim que per a tot $a \in A$ i $b \in B$

$$(g \circ f)(a) = a \quad \text{i} \quad (f \circ g)(b) = b,$$

i per la definició de [aplicació invertible](#) (2.2.16) tenim que f és invertible, com volíem veure.

Comprovem ara que la condició és suficient (\impliedby). Suposem doncs que f té inversa. Prenem dos elements a i a' de A tals que $f(a) = f(a')$. Ara bé, per la definició de [aplicació invertible](#) (2.2.16) tenim que $(f^{-1} \circ f)(a) = a$ i $(f^{-1} \circ f)(a') = a'$ amb $(f^{-1} \circ f)(a) = (f^{-1} \circ f)(a')$, i per tant $a = a'$ i per la definició d'[aplicació injectiva](#) (2.2.7) tenim que f és injectiva.

Segui b un element de B i prenem a de A tal que $f^{-1}(b) = a$. Aleshores trobem

$$b = Id_B(b) = f \circ f^{-1}(b) = f(a),$$

i per la definició d'[aplicació exhaustiva](#) (2.2.8) tenim que f és un aplicació exhaustiva, i per la definició d'[aplicació bijectiva](#) (2.2.9) trobem que f és bijectiva. \square

Corol·lari 2.2.20. Si f és invertible aleshores f^{-1} és invertible i $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.3 Relacions d'equivalència

2.3.1 Relacions d'equivalència

Definició 2.3.1 (Relació binària). Sigui X un conjunt no buit, \sim un subconjunt de $X \times X$ i (x, y) un element del subconjunt \sim . Aleshores direm que els elements x i y estan relacionats i escriurem $x \sim y$. També direm que \sim és una relació binària.

Si (x', y') no és un element de \sim escriurem $x' \not\sim y'$.

Definició 2.3.2 (Relació d'equivalència). Sigui X un conjunt no buit i \sim una relació que satisfà les propietats

1. Reflexiva: Si x és un element de X , aleshores $x \sim x$.
2. Simètrica: Si x, y són elements de X tals que $x \sim y$, aleshores $y \sim x$.
3. Transitiva: Si x, y, z són elements de X tals que $x \sim y$ i $y \sim z$, aleshores $x \sim z$.

Aleshores direm que \sim és una relació d'equivalència en X .

2.3.2 Classes d'equivalència i conjunt quocient

Definició 2.3.3 (Classe d'equivalència). Sigui X un conjunt no buit, \sim una classe d'equivalència en X i

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

un subconjunt de X . Aleshores direm que $[x]$ és la classe d'equivalència de x .

També denotarem $[x] = \bar{x}$.

Proposició 2.3.4. *Sigui X un conjunt no buit i x, y elements de X . Aleshores o bé $[x] = [y]$ o bé $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Demostració. Denotarem la relació d'equivalència amb \sim .

Suposem que $x \sim y$. Tenim que $[x] \subseteq [y]$, ja que si prenem $z \in X$ tal que $z \in [x]$. Aleshores per la definició de [classe d'equivalència \(2.3.3\)](#) tenim que $x \sim z$. Per hipòtesi tenim que $x \sim y$, i per tant, per la definició de [relació d'equivalència \(2.3.2\)](#) tenim que $y \sim z$, i per la definició de [classe d'equivalència \(2.3.3\)](#) trobem $z \in [y]$. Per tant, per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) tenim que $[x] \subseteq [y]$.

Ara bé, també tenim que $[y] \subseteq [x]$, ja que si prenem $z \in X$ tal que $z \in [y]$. Aleshores per la definició de [classe d'equivalència \(2.3.3\)](#) tenim que $y \sim z$. Per hipòtesi tenim que $x \sim y$, i per tant, per la definició de [relació d'equivalència \(2.3.2\)](#) tenim que $z \sim x$, i per la definició de [classe d'equivalència \(2.3.3\)](#) trobem $z \in [x]$. Per tant, per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) tenim que $[y] \subseteq [x]$. Per tant, pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que $[x] = [y]$.

Suposem ara que $x \not\sim y$ i prenem un element $z \in [x] \cap [y]$. Aleshores, per la definició de [classe d'equivalència \(2.3.3\)](#) tenim que $z \sim x$ i $y \sim z$, i per la definició de [relació d'equivalència \(2.3.2\)](#) tenim que $x \sim y$. Ara bé, havíem suposat que $x \not\sim y$. Per tant z no pot existir i trobem $[x] \cap [y] = \emptyset$. \square

Definició 2.3.5 (Conjunt quocient). Sigui X un conjunt no buit i \sim una relació d'equivalència en X . Aleshores definim el conjunt

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

com el conjunt quocient de X per \sim .

Capítol 3

Conjunts amb operacions i els nombres

3.1 Els nombres naturals

3.1.1 Axiomes de Peano

Definició 3.1.1 (Nombres naturals). Siguin \mathbb{N} un conjunt i S una aplicació que satisfan

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $S(n) \in \mathbb{N}$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $S(n) \neq 1$.
4. Si $n, m \in \mathbb{N}$ amb $S(n) = S(m)$, aleshores $n = m$.
5. Si \mathbb{M} és un conjunt tal que $1 \in \mathbb{M}$ i tal que $S(m) \in \mathbb{M}$ per a tot $m \in \mathbb{M}$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$.

Aleshores direm que \mathbb{N} és el conjunt dels nombres naturals, i anomenarem els elements de \mathbb{N} nombres naturals.

Lema 3.1.2. $\mathbb{N} = \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\}$.

Demostració. Ho farem pel principi de doble inclusió. Per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#) tenim que si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $S(n) \in \mathbb{N}$. Per tant trobem que

$$\mathbb{N} \supseteq \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\}.$$

Tenim també, per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#), que si \mathbb{M} és un conjunt tal que $1 \in \mathbb{M}$ i tal que $S(m) \in \mathbb{M}$ per a tot $m \in \mathbb{M}$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$, i per tant

$$\mathbb{N} \subseteq \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\},$$

i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que

$$\mathbb{N} = \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\},$$

com volíem veure. □

Notació 3.1.3. Denotarem $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 4$, etc. Per tant

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Això té sentit pel lema 3.1.2.

Notació 3.1.4. Denotarem l'acció d'aplicar l'aplicació S al nombre natural n un nombre natural k de vegades com $S^k(n)$.

Teorema 3.1.5 (Teorema del primer element). *Sigui A un subconjunt no buit de \mathbb{N} . Aleshores existeix $a \in A$ tal que no existeixi cap $b \in A$ satisfent $S(b) = a$.*

Demostració. Sigui a un element de A . Aleshores pel lema 3.1.2 tenim que $a = S^k(1)$ per a cert $k \in \mathbb{N}$. Si $1 \in A$ hem acabat per la definició de **nombres naturals** (3.1.1). Suposem doncs que $1 \notin A$. Si $S(1) \in A$ també hem vist el que volíem. Podem iterar aquest procés un màxim de k vegades, ja que $S^k(1)$ és, per hipòtesi, un nombre natural, i per tant seria a un element de A tal que no existeix b satisfent $S(b) = a$. \square

Definició 3.1.6 (Primer element). Sigui A un subconjunt no buit de \mathbb{N} i a un element de A tal que no existeix cap $b \in A$ satisfent $S(b) = a$. Aleshores direm que a és el primer element de A .

Aquesta definició té sentit per la definició de **nombres naturals** (3.1.1) i el Teorema **Teorema del primer element** (3.1.5).

Teorema 3.1.7 (Principi d'inducció). *Sigui $R(n)$ una relació dependent d'un paràmetre $n \in \mathbb{N}$ tal que*

1. $R(1)$ és vertadera.
2. Si $R(n)$ és vertadera aleshores $R(S(n))$ és vertadera.

Aleshores $R(n)$ és vertadera per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid R(n) \text{ és falsa}\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) tenim que $A \subseteq \mathbb{N}$. Suposem que A és un conjunt no buit. Aleshores pel **Teorema del primer element** (3.1.5) tenim que existeix un primer element a de A . Ara bé, pel punt **principi d'inducció** (1) tenim que $a \neq 1$. Per tant, pel lema 3.1.2 tenim que $a = S(b)$ per a cert $b \in \mathbb{N}$. Ara bé, com que a és el primer element de A , per la definició de **primer element** (3.1.6) tenim que $b \notin A$, i per tant $P(b)$ és vertadera. Ara bé, pel punt **principi d'inducció** (2) tenim que $P(S(b)) = P(a)$ és vertadera, i per tant $a \notin A$, arribant a contradicció. Per tant trobem que A és el conjunt buit, i trobem que $R(n)$ és vertadera per a tot $n \in \mathbb{N}$, com volíem veure. \square

3.1.2 Operacions sobre els nombres naturals

Definició 3.1.8 (Suma de nombres naturals). Definim la suma de nombres naturals com una operació $+$ que satisfà per a tot $n, k \in \mathbb{N}$

$$n + 1 = S(n) \quad \text{i} \quad n + S(k) = S(n + k).$$

Definició 3.1.9 (Producte de nombres naturals). Definim el producte de nombres naturals com una operació \cdot que satisfà per a tot $n, k \in \mathbb{N}$

$$n \cdot 1 = n \quad \text{i} \quad n \cdot S(k) = n \cdot k + n.$$

Denotarem $n \cdot k = nk$ per a tot $n, k \in \mathbb{N}$.

Proposició 3.1.10. *Siguin x, y, z tres nombres naturals. Aleshores*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid (x + y) + z = x + (y + z) \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tenim

$$\begin{aligned} x + (y + 1) &= x + S(y) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(x + y) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= (x + y) + 1. && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \end{aligned}$$

També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, tenim per a tot $x, y \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x + (y + S(z)) &= x + S(y + z) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(x + (y + z)) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S((x + y) + z) && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= (x + y) + S(z). && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de **nombres naturals** (3.1.1), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel **Teorema de la doble inclusió** (2.1.3) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.11. *Siguin x, y dos nombres naturals. Aleshores*

$$x + S(y) = S(x) + y.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid x + S(y) = S(x) + y \text{ per a tot } x \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x + S(1) &= S(x + 1) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(S(x)) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(x) + 1. && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \end{aligned}$$

També tenim que si $y \in A$, aleshores $S(y) \in A$. Efectivament, tenim que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x + S(S(y)) &= S(x + S(y)) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(S(x) + y) && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= S(x) + S(y). && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de **nombres naturals** (3.1.1), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(y) \in A$ per a tot $y \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel **Teorema de la doble inclusió** (2.1.3) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.12. *Siguin x, y dos nombres naturals. Aleshores*

$$x + y = y + x.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 + y = y + 1\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) trobem que $B \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in B$, ja que $1 + 1 = 1 + 1$. També tenim que si $y \in B$, aleshores $S(y) \in B$. Efectivament,

$$\begin{aligned} S(y) + 1 &= y + S(1) && \text{(Proposició 3.1.11)} \\ &= S(y + 1) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(1 + y) && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= 1 + S(y). && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de **nombres naturals** (3.1.1), tenim que si B és un conjunt tal que $1 \in B$ i tal que $S(y) \in B$ per a tot $y \in B$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq B$, i pel **Teorema de la doble inclusió** (2.1.3) tenim que $\mathbb{N} = B$.

Definim ara el conjunt

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid x + y = y + x \text{ per a tot } x \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) trobem que $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que $1 \in B \subseteq A$. També tenim que si $y \in A$, aleshores $S(y) \in A$. Efectivament, tenim que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x + S(y) &= S(x + y) && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(y + x) && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= y + S(x). && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= S(y) + x. && \text{(Proposició 3.1.11)} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de **nombres naturals** (3.1.1), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(y) \in A$ per a tot $y \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel **Teorema de la doble inclusió** (2.1.3) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.13. *Siguin x, y, z tres nombres naturals. Aleshores*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tenim

$$\begin{aligned} x \cdot (y + 1) &= x \cdot S(y) && (\text{suma de nombres naturals (3.1.8)}) \\ &= x \cdot y + x && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \\ &= x \cdot y + x \cdot 1. && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \end{aligned}$$

També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, tenim per a tot $x, y \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x \cdot (y + S(z)) &= x \cdot S(y + z) && (\text{suma de nombres naturals (3.1.8)}) \\ &= x \cdot (y + z) + x && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \\ &= (x \cdot y + x \cdot z) + x && (\text{Per hipòtesi}) \\ &= x \cdot y + (x \cdot z + x) && (\text{Proposició 3.1.10}) \\ &= x \cdot y + x \cdot S(z). && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de **nombres naturals** (3.1.1), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel **Teorema de la doble inclusió** (2.1.3) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.14. *Siguin x, y, z tres nombres naturals. Aleshores*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de **subconjunt** (2.1.2) trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tenim

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot 1) &= x \cdot y && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \\ &= (x \cdot 1) \cdot y. && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \end{aligned}$$

També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, tenim per a tot $x, y \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot S(z)) &= x \cdot (y \cdot z + y) && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \\ &= x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y && (\text{Proposició 3.1.13}) \\ &= (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y && (\text{Per hipòtesi}) \\ &= (x \cdot y) \cdot S(z). && (\text{producte de nombres naturals (3.1.9)}) \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de **nombres naturals** (3.1.1), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel **Teorema de la doble inclusió** (2.1.3) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.15. *Siguin x, y dos nombres naturals. Aleshores*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot y = y \cdot 1\}.$$

Per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) trobem que $B \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in B$, ja que $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$. També tenim que si $x \in B$, aleshores $S(x) \in B$. Efectivament,

$$\begin{aligned} S(x) \cdot 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{(suma de nombres naturals (3.1.8))} \\ &= x \cdot 1 + 1 \cdot 1 && \text{(producte de nombres naturals (3.1.9))} \\ &= x \cdot 1 + 1 && \text{(producte de nombres naturals (3.1.9))} \\ &= 1 \cdot x + 1 && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= 1 \cdot S(x). && \text{(producte de nombres naturals (3.1.9))} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#), tenim que si B és un conjunt tal que $1 \in B$ i tal que $S(y) \in B$ per a tot $y \in B$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq B$, i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que $\mathbb{N} = B$.

Definim ara el conjunt

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid x + y = y + x \text{ per a tot } x \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) trobem que $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que $1 \in B \subseteq A$. També tenim que si $y \in A$, aleshores $S(y) \in A$. Efectivament, tenim que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x \cdot S(y) &= x \cdot y + x && \text{(producte de nombres naturals (3.1.9))} \\ &= y \cdot x + x && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= y \cdot x + x \cdot 1 && \text{(producte de nombres naturals (3.1.9))} \\ &= y \cdot x + 1 \cdot x && (1 \in A) \\ &= (y + 1) \cdot x && \text{(Proposició 3.1.13)} \\ &= S(y) \cdot x. && \text{(producte de nombres naturals (3.1.9))} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(y) \in A$ per a tot $y \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Teorema 3.1.16. *Siguin x, y i z tres nombres naturals tals que $x + z = x + y$. Aleshores $x = y$.*

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid x + z = y + z \implies x = y \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que si $x + 1 = y + 1$ per la definició de [suma de nombres naturals \(3.1.8\)](#) trobem que $S(x) = S(y)$, i per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#) trobem que $x = y$. També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$.

Efectivament, per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tals que $x + S(z) = y + S(z)$ tenim per la definició de [suma de nombres naturals \(3.1.8\)](#) que

$$x + z + 1 = y + z + 1,$$

i per la proposició [3.1.12](#) tenim que

$$x + 1 + z = y + 1 + z.$$

Per tant, per la definició de [suma de nombres naturals \(3.1.8\)](#), trobem

$$S(x) + z = S(y) + z,$$

i per hipòtesi, $S(x) = S(y)$, i per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#) tenim que $x = y$.

Ara bé. Per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Teorema 3.1.17. *Siguin x, y i z tres nombres naturals tals que $xz = yz$. Aleshores $x = y$.*

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid xz = yz \implies x = y \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que si $x \cdot 1 = y \cdot 1$ per la definició de [producte de nombres naturals \(3.1.9\)](#) trobem que $x = y$. També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tals que $x \cdot S(z) = y \cdot S(z)$ tenim per la definició de [producte de nombres naturals \(3.1.9\)](#) que

$$x \cdot z + x \cdot 1 = y \cdot z + y \cdot 1.$$

Ara bé, per hipòtesi tenim que $x \cdot z = y \cdot z$, i pel [Teorema 3.1.16](#) trobem $x = y$.

Ara bé. Per la definició de [nombres naturals \(3.1.1\)](#), tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

3.2 Els nombres enters

3.2.1 Construcció dels nombres enters

Proposició 3.2.1. *Sigui \sim una relació binària sobre $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, amb $n + 0 = 0 + n = n$ i $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$, tal que per a tot (a, b) i (c, d) elements de $A \times A$*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Sigui (a, b) un element de $A \times A$. Aleshores per la proposició 3.1.12 tenim que $a + b = b + a$, i per tant $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Simètrica: Siguin (a, b) i (c, d) elements de $A \times A$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$. Aleshores significa que $a + d = b + c$, i per la la proposició 3.1.12 tenim que $c + b = d + a$ i per tant $(c, d) \sim (a, b)$.
3. Transitiva: Siguin (a, b) , (c, d) i (e, f) elements de $A \times A$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$. Això és que

$$a + d = b + c \quad \text{i} \quad c + f = d + e.$$

Ara bé, tenim

$$a + d + f = b + c + f$$

i per tant

$$a + d + f = b + d + e$$

d'on trobem $a + f = b + e$, i per tant $(a, b) \sim (e, f)$.

I per la definició de relació d'equivalència (2.3.2) hem acabat. \square

Definició 3.2.2 (Nombres enters). Sigui \sim una relació d'equivalència sobre $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, amb $n + 0 = 0 + n = n$ i $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$, i \sim una relació d'equivalència tal que per a tot (a, b) i (c, d) elements de $A \times A$

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Aleshores direm que el conjunt quocient $\mathbb{Z} = A \times A / \sim$ és el conjunt dels nombres enters. També direm que els elements de \mathbb{Z} són nombres enters.

Definició 3.2.3 (Resta de nombres naturals). Siguin a, b i c nombres naturals tals que $a \geq b$ i $a = b + c$. Aleshores escriurem $a - b = c$.

3.2.2 Operacions sobre els nombres enters

Definició 3.2.4 (Suma de nombres enters). Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ dos nombres enters. Definim la suma de nombres enters com una operació $+$ que satisfà

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}.$$

Definició 3.2.5 (Producte de nombres enters). Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ dos nombres enters. Definim el producte de nombres enters com una operació \cdot que satisfà

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

Proposició 3.2.6. Sigui $\overline{(a, b)}$ un nombre enter. Aleshores

1. $\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a, b)}$.
2. $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a, b)}$.
3. $\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(0, 0)}$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la definició de [producte de nombres enters](#) (3.2.5) tenim que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a + 0, 0 + b)},$$

i per la proposició 3.1.12 i definició de [nombres enters](#) (3.2.2) trobem

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a, b)}.$$

Veiem ara el punt (2). Per la definició de [producte de nombres enters](#) (3.2.5) tenim que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1)},$$

i per la definició de [producte de nombres naturals](#) (3.1.9) i la definició de [nombres enters](#) (3.2.2) trobem

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a, b)}.$$

Veiem el punt (3). Per la definició de [suma de nombres enters](#) (3.2.4) tenim que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)}.$$

Ara bé, per la proposició 3.1.12 i la definició de [nombres enters](#) (3.2.2) tenim que

$$a + b + 0 = b + a + 0$$

i, de nou per la definició de [nombres enters](#) (3.2.2), trobem $(a + b, b + a) \sim (0, 0)$, i per la definició de [classe d'equivalència](#) (2.3.3) tenim que $\overline{(a + b, b + a)} = \overline{(0, 0)}$. \square

Proposició 3.2.7. *Sigui $\overline{(a, b)}$ un nombre enter. Aleshores*

1. Si $a \geq b$, $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$.
2. Si $a \leq b$, $\overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Tenim que

$$a + 0 = a + b - b,$$

ja que $b + 0 = b$, i per tant, per la definició de [resta de nombres naturals](#) (3.2.3) tenim que $b - b = 0$. Per tant, per la definició de [nombres enters](#) (3.2.2) tenim $\overline{(a, b)} \sim \overline{(a - b, 0)}$, i per la definició de [classe d'equivalència](#) (2.3.3) trobem que $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$.

La demostració del punt (2) és anàloga. \square

Notació 3.2.8. Denotarem $\overline{(a, 0)} = a$ i $\overline{(0, a)} = -a$. Per tant

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Observació 3.2.9. $a - b = 0 \iff a = b$.

Teorema 3.2.10. *Sigui $\overline{(a, b)}$ un nombre enter. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)} \iff a = b.$$

Demostració. Suposem que $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$. Per la definició de [classe d'equivalència \(2.3.3\)](#) això és

$$(a, b) \sim (0, 0),$$

i per la definició de [nombres enters \(3.2.2\)](#) tenim que això és

$$a + 0 = b + 0$$

i de nou per la definició de [nombres enters \(3.2.2\)](#) això és

$$a = b. \quad \square$$

Proposició 3.2.11. *Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)}.$$

Demostració. Per la definició de [suma de nombres enters \(3.2.4\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} &= \overline{(a + d, b + c)} \\ &= \overline{(d + a, c + b)} & (3.1.12) \\ &= \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)}, & (\text{suma de nombres enters (3.2.4)}) \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.12. *Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)}.$$

Demostració. Per la definició de [producte de nombres enters \(3.2.5\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} \\ &= \overline{(ca + db, da + cb)} & (3.1.15) \\ &= \overline{(ca + db, cb + da)} & (3.1.12) \\ &= \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)}, & (\text{producte de nombres enters (3.2.5)}) \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.13. *Siguin $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}$ i $\overline{(e, f)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} + \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) = \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \right) + \overline{(e, f)}.$$

Demostració. Per la definició de [suma de nombres enters \(3.2.4\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} + \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) &= \overline{(a, b)} + \overline{(c + f, d + e)} \\ &= \overline{(a + (c + f), b + (d + e))} \\ &= \overline{((a + c) + f, (b + d) + f)} & (3.1.10) \\ &= \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e, f)} \\ &= \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \right) + \overline{(e, f)}, \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.14. *Siguin $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}$ i $\overline{(e, f)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)} \right) = \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)}.$$

Demostració. Per la definició de **producte de nombres enters** (3.2.5) tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)} \right) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} \\ &= \overline{(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(cf + de))} \end{aligned}$$

Per la proposició 3.1.13

$$= \overline{(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bcf + bde)}$$

i per la proposició 3.1.15

$$= \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)}$$

i de nou per la proposició 3.1.13

$$\begin{aligned} &= \overline{((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e)} \\ &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} \\ &= \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)}, \end{aligned}$$

com volíem veure. □

Proposició 3.2.15. *Siguin $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}$ i $\overline{(e, f)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \cdot \overline{(e, f)}$$

i

$$\left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)} = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(e, f)} + \overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)}.$$

Demostració. Per la definició de **suma de nombres enters** (3.2.4) tenim que

$$\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c + e, d + f)}$$

per la definició de **producte de nombres enters** (3.2.5)

$$= \overline{(a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e))}$$

per la proposició 3.1.13

$$= \overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)}$$

per la proposició 3.1.12

$$= \overline{(ac + bd + ae + bd, ad + bc + af + be)}$$

per la definició de **suma de nombres naturals** (3.1.8)

$$= \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bd, af + be)}$$

i per la definició de **producte de nombres naturals** (3.1.9)

$$= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \cdot \overline{(e, f)} \quad \square$$

Teorema 3.2.16. *Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ dos nombres enters tals que $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(0, 0)}$. Aleshores $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$ ó $\overline{(c, d)} = \overline{(0, 0)}$.*

Demostració. Per la definició de **producte de nombres enters** (3.2.5) tenim que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

Com que per hipòtesi $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(0, 0)}$, tenim que per la definició de **nombres enters** (3.2.2) tenim que

$$ac + bd + 0 = ad + bc + 0,$$

i de nou per la definició de **nombres enters** (3.2.2) això és

$$ac + bd = ad + bc.$$

Suposem que $\overline{(c, d)} \neq \overline{(0, 0)}$. Pel Teorema 3.2.10 trobem que $c \neq d$.

Suposem també que $c > d$. Això és que existeix un natural k satisfent $c + k = d$. Per tant

$$a(d + k) + db = ad + b(d + k)$$

i per la proposició 3.2.15 i la proposició 3.2.11 tenim que

$$ad + db + ak = ad + bd + bk.$$

Ara bé, pel Teorema 3.1.16 i el Teorema 3.1.17 tenim que

$$a = b$$

i per la proposició 3.2.10 trobem que $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$.

Les demostracions dels altres casos són anàlogues. □

Corol·lari 3.2.17. *Siguin a, b i c nombres enters amb $c \neq 0$ tals que*

$$ac = bc.$$

Aleshores $a = b$.

Demostració. Per la proposició 3.2.15 trobem

$$(a - b)c = 0,$$

aleshores pel Teorema 3.2.16 trobem que ha de ser $a - b = 0$, i per l'observació 3.2.9 tenim $a = b$, com volíem veure. □

3.2.3 Divisibilitat dels nombres enters

Definició 3.2.18 (Divisors i múltiples). *Siguin a i b dos nombres enters tal que existeix un nombre enter c satisfent $a = bc$. Aleshores direm que b divideix a a o que a és múltiple de b .*

Notació 3.2.19. *Siguin a i b enters tals que b divideix a a . Denotarem $b \mid a$.*

Proposició 3.2.20. *Siguin a i b enters. Aleshores*

1. $b \mid a$ si i només si $b \mid -a$.
2. $b \mid a$ si i només si $-b \mid a$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Si $b \mid a$ per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeix un enter c tal que $a = bc$, i per tant $-a = b(-c)$, i equivalentment $b \mid -a$.

Veiem ara el punt (2). Si $b \mid a$ per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeix un enter c tal que $a = bc$, i per tant $a = (-c)(-b)$, i equivalentment $-b \mid a$. \square

Proposició 3.2.21. *Siguin c, b i a enters tals que $c \mid a$. Aleshores $c \mid ab$.*

Demostració. Si $c \mid a$ per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeix un k tal que $a = kc$. Ara bé, també tenim $ab = kbc$, i per tant $c \mid ab$. \square

Proposició 3.2.22. *Siguin a, b i c enters tals que $c \mid a$ i $c \mid b$. Aleshores $c \mid a + b$ i $c \mid a - b$.*

Demostració. Per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeixen enters k i k' tals que $a = kc$ i $c = k'b$. Per tant per la proposició [3.2.15](#) trobem

$$a + b = (k + k')c \quad \text{i} \quad a - b = (k - k')c. \quad \square$$

Proposició 3.2.23. *Siguin a, b i c enters tal que $a \mid b$ i $b \mid c$. Aleshores $a \mid c$.*

Demostració. Per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeixen enters k i k' tals que $a = kb$ i $b = k'c$. Per tant $a = kk'c$. \square

Proposició 3.2.24. *Siguin a i b enters tals que $a \mid b$ i $b \mid a$. Aleshores $a = b$ ó $a = -b$.*

Demostració. Per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeixen enters k i k' tals que $a = kb$ i $b = k'a$. Per tant trobem

$$b = kk'b$$

i tenim

$$0 = kk'b - b$$

i per la proposició [3.2.15](#) trobem

$$0 = (kk' - 1)b.$$

Ara bé, si $b = 0$ tenim que $a = k0$ i $a = 0$, i per tant $a = b$. Si $b \neq 0$ pel Teorema [3.2.16](#) trobem que ha de ser $kk' = 1$ i per tant ha de ser $k = 1$ i $k' = 1$ ó $k = -1$ i $k' = -1$ i trobem que $a = b$ ó $a = -b$. \square

3.2.4 Màxim comú divisor

Definició 3.2.25 (Màxim comú divisor). *Siguin a i b enters. Aleshores definim*

$$\text{mcd}(a, b) = \max_{c \in \mathbb{Z}} \{c \mid a \text{ i } c \mid b\}$$

com el màxim comú divisor de a i b .

Proposició 3.2.26. *Siguin a i b enters. Aleshores $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a)$.*

Demostració. Per la definició de **màxim comú divisor** (3.2.25) tenim que

$$\text{mcd}(a, b) = \max_{c \in \mathbb{Z}} \{c \mid a \text{ i } c \mid b\} \quad \text{i} \quad \text{mcd}(b, a) = \max_{c \in \mathbb{N}} \{c \mid b \text{ i } c \mid a\},$$

i per tant, per la Tautologia 1.1.20 trobem que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a)$. \square

Proposició 3.2.27. *Siguin a i b enters. Aleshores per a tot λ enter*

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - \lambda b, b) = \text{mcd}(a, b - \lambda a).$$

Demostració. Prenem un enter c tal que $c \mid a$ i $c \mid b$. Aleshores per la proposició 3.2.21 tenim que c divideix $-\lambda b$, i per la proposició 3.2.22 trobem que $c \mid a - \lambda b$, i per la definició de **màxim comú divisor** (3.2.25) tenim que, efectivament, $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - \lambda b, b)$. \square

3.2.5 La divisió euclidiana i l'identitat de Bézout

Lema 3.2.28. *Siguin D i d nombres enters amb $D, d > 0$. Aleshores existeixen dos únics q, r enters tals que*

$$D = dq + r$$

amb $0 \leq r < d$.

Demostració. Definim el conjunt

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \text{ i existeix } z \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = D - dz\}.$$

Observem que $D \in S$, i per tant $S \neq \emptyset$. Sigui doncs $r = \min\{x \in S\}$. Per tant existeix un enter q tal que

$$r = D - dq.$$

Ara bé, tenim que $r < d$, ja que si $r \geq d$ tindríem

$$\begin{aligned} 0 &\geq r - d \\ &= D - dq - d \\ &= D - d(q + 1) \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

i per tant $r - d$ seria un element de S , amb $r - d < r$, però això entraria amb contradicció amb que $r = \min\{x \in S\}$. Per tant $0 \leq r < d$ i hem acabat. \square

Teorema 3.2.29 (Criteri de divisibilitat d'Euclides). *Siguin D i d nombres enters amb $d \neq 0$. Aleshores existeixen dos únics q, r enters tals que*

$$D = dq + r$$

amb $0 \leq r < |d|$.

Demostració. Veiem primer que si q i r existeixen aquests són únics. Suposem doncs que existeixen q_1, q_2, r_1, r_2 tals que

$$D = dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2$$

amb $0 \leq r_1 < |d|$ i $0 \leq r_2 < |d|$. Aleshores tenim

$$D - D = d(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

i per tant

$$r_2 - r_1 = d(q_1 - q_2).$$

Ara bé, tenim que $r_2 - r_1 < |d|$, ja que per hipòtesi $r_1, r_2 < |d|$, i per tant ha de ser $r_2 - r_1 = 0$, i per l'observació 3.2.9 tenim $r_1 = r_2$. Ara bé, aleshores tenim

$$0 = d(q_1 - q_2)$$

i com que, per hipòtesi, $d \neq 0$, pel Teorema 3.2.16 ha de ser $q_1 - q_2 = 0$, i de nou per l'observació 3.2.9 tenim $q_1 = q_2$. Per tant la unicitat queda demostrada.

Veiem ara que existeixen. Efectivament, si $D, d > 0$ l'enunciat és cert pel lema 3.2.28.

Si $D < 0$ i $d > 0$ definim $D' = -D$. Aleshores $D' > 0$, i pel lema 3.2.28 tenim que existeixen q' i r' enters tals que

$$D' = dq' + r'$$

amb $0 \leq r' < d$. I per tant

$$\begin{aligned} D &= -(dq' + r') \\ &= d(-q') - r' \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$$\begin{aligned} &= d(-q') - d + d - r' \\ &= d(-q' - 1) + (d - r') \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

i si prenem $q = -q' - 1$ i $r = d - r'$ tenim

$$D = dq + r$$

amb $0 \leq d - r' < d$.

Si $d < 0$ prenem $d' = -d$, i aleshores $d' > 0$ i pels casos anteriors hem acabat. \square

Teorema 3.2.30 (Identitat de Bézout). *Siguin a i b dos enters. Aleshores existeixen enters α i β tals que*

$$\alpha a + \beta b = \text{mcd}(a, b).$$

Demostració. Considerem el conjunt

$$S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\}.$$

Observem que si $x = 1$ i $y = 0$, l'enter a pertany a S . Per tant S és un conjunt no buit i tenim que existeixen enters s i t tals que $as + bt = \min\{d \in S\}$. Posem $d = as + bt$. Pel criteri de divisibilitat d'Euclides (3.2.29) tenim que existeixen dos enters q i r amb $0 \leq r < d$ tals que

$$a = dq + r.$$

Tenim que r és un element de $S \cup \{0\}$, ja que

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(as + bt) \\ &= a(1 - qs) - b(qt). \end{aligned}$$

Ara bé, tenim que $0 \leq r < d$ i $as + bt = \min\{d \in S\}$. Per tant ha de ser $r = 0$ i per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) trobem $d \mid a$. Amb un argument anàleg podem veure que $d \mid b$. Suposem ara que existeix c tal que $c \mid a$ i $c \mid b$. Per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeixen k i k' satisfent

$$a = kc \quad \text{i} \quad b = k'c$$

i per tant

$$\begin{aligned} d &= as + bt \\ &= cks + ck't \\ &= c(ks + k't), \end{aligned}$$

i per tant $c < d$, i per la definició de [màxim comú divisor \(3.2.25\)](#) trobem que $\text{mcd}(a, b) = as + bt$. \square

Definició 3.2.31 (Coprims). Siguin a i b dos enters tals que $\text{mcd}(a, b) = 1$. Aleshores direm que a i b són coprims.

Teorema 3.2.32. *Siguin a i b dos enters. Aleshores a i b són coprims si i només si existeixen dos enters α i β tals que*

$$\alpha a + \beta b = 1.$$

Demostració. Veiem que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que a i b són coprims. Per [la identitat de Bézout \(3.2.30\)](#) hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que existeixen dos enters α i β tals que $\alpha a + \beta b = 1$. Tenim que si existeix un enter c tal que $c \mid a$ i $c \mid b$, aleshores $c \mid 1$, i per la definició de [màxim comú divisor \(3.2.25\)](#) trobem que $\text{mcd}(a, b) = 1$. \square

Proposició 3.2.33. *Sigui c un enter i a i b dos enters coprims tals que $a \mid bc$. Aleshores $a \mid c$.*

Demostració. Pel Teorema [3.2.32](#) tenim que existeixen dos enters α i β tals que

$$1 = \alpha a + \beta b.$$

Per tant

$$c = c\alpha a + c\beta b,$$

i per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que existeix un enter k tal que $ak = bc$. Per tant

$$c = c\alpha a + ak\beta$$

i per la proposició [3.2.15](#) tenim que $c = (c\alpha + k\beta)a$ i per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) tenim que $a \mid c$. \square

3.2.6 Mínim comú múltiple

Definició 3.2.34 (Mínim comú múltiple). Siguin a i b dos enters. Aleshores definim

$$\text{mcm}(a, b) = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m > 0, a \mid m \text{ i } b \mid m\}$$

com el mínim comú múltiple de a i b .

Teorema 3.2.35. Siguin a i b dos enters. Aleshores

$$\text{mcd}(a, b) \text{mcm}(a, b) = |ab|.$$

Demostració. Sigui $d = \text{mcd}(a, b)$. Per la definició de [màxim comú divisor](#) (3.2.25) existeixen a' i b' tals que $a = da'$ i $b = db'$. Per tant, per la proposició 3.2.21 trobem que $d \mid ab$, i per la definició de [divisor](#) (3.2.18) trobem que existeix un enter l tal que $dl = |ab|$. Per tant $dl = da'b$ i $dl = adb'$, i pel corol·lari 3.2.17 tenim que $l = a'b$ i $l = ab'$, i per la definició de [divisor](#) (3.2.18) tenim que $a \mid l$ i $b \mid l$.

Sigui m un enter tal que $a \mid m$ i $b \mid m$. Per la definició de [divisor](#) (3.2.18) tenim que existeixen dos enters k_1 i k_2 tals que $m = ak_1$ i $m = bk_2$. Ara bé, per la [identitat de Bézout](#) (3.2.30) tenim que existeixen dos enters α i β tals que $\alpha a + \beta b = d$. Per tant

$$md = m\alpha a + m\beta b \quad (3.2.15)$$

$$= bk_2\alpha a + ak_1\beta b$$

$$= ab(bk_2 + ak_1) \quad (3.2.15)$$

$$= dl(bk_2 + ak_1)$$

i de nou pel corol·lari 3.2.17 trobem que $m = l(bk_2 + ak_1)$, i per tant $l \leq m$. Per tant, per la definició de [mínim comú múltiple](#) (3.2.34) tenim que $l = \text{mcm}(a, b)$, i per tant

$$|ab| = \text{mcd}(a, b) \text{mcm}(a, b). \quad \square$$

3.2.7 Teorema Fonamental de l'Aritmètica

Definició 3.2.36 (Enter primer). Siguin $p > 1$ un enter amb i d un enter tal que si $d \mid p$ aleshores d és igual a 1 ó p . Aleshores direm que p és primer.

Proposició 3.2.37. Siguin a i b dos enters i p un primer tals que $p \mid ab$. Aleshores $p \mid a$ ó $p \mid b$.

Demostració. Suposem que $p \nmid a$. Aleshores per la definició de [coprimers](#) (3.2.31) tenim que p i a són coprimers. Per tant per la proposició 3.2.33 tenim que $p \mid b$. El cas $p \nmid b$ és anàleg. \square

Lema 3.2.38. Sigui a un enter amb $a > 1$. Aleshores existeixen p_1, \dots, p_n primers tals que

$$a = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}.$$

Demostració. Observem primer que si a és primer tenim $a = a$ i aquest cas particular de l'enunciat és cert.

Ho farem per inducció. Si $a = 2$ tenim que a és primer i hem acabat.

Suposem ara que $a > 2$ i que l'enunciat és cert per a a fix. Volem veure que també és cert per a $a + 1$. Si $a + 1$ és primer, per la definició d'enter primer (3.2.36) hem acabat. Suposem doncs que $a + 1$ no és primer. Aleshores existeixen enters α i β tals que $a + 1 = \alpha\beta$. Bé, tenim que es compleix $2 \leq \alpha \leq a$ i $2 \leq \beta \leq a$. Ara bé, per l'hipòtesi d'inducció tenim que existeixen $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ primers tals que

$$\alpha = p_1 \cdots p_r \quad \text{i} \quad \beta = q_1 \cdots q_s,$$

i per tant

$$a + 1 = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s,$$

i pel principi d'inducció (3.1.7) tenim que l'enunciat és cert. \square

Lema 3.2.39. *Siguin $a > 1$ un enter i p_1, \dots, p_n i q_1, \dots, q_r primers satisfent $p_1 \leq \dots \leq p_n$, $q_1 \leq \dots \leq q_r$ tals que*

$$a = p_1 \cdots p_n \quad \text{i} \quad a = q_1 \cdots q_r.$$

Aleshores $n = r$ i $p_i = q_i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostració. Tenim que

$$p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_r,$$

i per la definició de divisor (3.2.18) trobem que $p_1 \mid q_1 \cdots q_r$, i per la proposició 3.2.37 trobem que $p_1 \mid q_{j_1}$ per a cert $j_1 \in \{1, \dots, r\}$ i per la definició d'enter primer (3.2.36) trobem que existeix un $\{j_1 \in \{1, \dots, r\}$ tal que $p_1 = q_{j_1}$. Aleshores pel corol·lari 3.2.17 trobem que

$$p_2 \cdots p_n = q_1 \cdots q_{j_1-1} q_{j_1+1} \cdots q_r.$$

Podem iterar aquest procés $k = \min(n, r)$ vegades. Ara bé, si $n > r$ tenim

$$p_{k+1} \cdots p_n = 1,$$

que, per la definició d'enter primer (3.2.36), no és possible, i si $n < r$ trobem

$$1 = q_{j_{k+1}} \cdots q_{j_r}$$

on $j_{k+1}, \dots, j_r \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$, i de nou per la definició d'enter primer (3.2.36), no és possible. Per tant ha de ser $n = r$ i hem acabat. \square

Teorema 3.2.40 (Teorema Fonamental de l'Aritmètica). *Sigui $a > 1$ un enter. Aleshores existeixen p_1, \dots, p_n primers amb $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ únics tals que $a = p_1 \cdots p_n$.*

Demostració. És conseqüència del lema 3.2.38 i el lema 3.2.39. \square

Teorema 3.2.41 (Teorema d'Euclides). *Sigui m un natural. Aleshores existeix un nombre natural $n > m$ tal que p_1, \dots, p_n siguin nombres primers diferents dos a dos.*

Demostració. Siguin p_1, \dots, p_m primers diferents. Definim

$$p = \left(\prod_{i=1}^m p_i \right) + 1.$$

Per la definició de **divisor** (3.2.18) tenim que $p_j \mid \prod_{i=1}^m p_i$ per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$. Fixem aquest $j \in \{1, \dots, m\}$, i de nou per la definició de **divisor** (3.2.18) tenim que existeix un enter q tal que

$$qp_j = \prod_{i=1}^m p_i$$

i tenim que

$$p = qp_j + 1,$$

o equivalentment,

$$p - qp_j = 1.$$

Per tant pel Teorema 3.2.32 i la definició de **coprimers** (3.2.31) trobem que p i p_j són coprimers per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$.

Si p és primer hem acabat, ja que p és més gran que p_1, \dots, p_m , i per tant diferent. Ara bé, si p no és primer pel lema 3.2.38 tenim que existeix un primer p' tal que $p' \mid p$, però hem vist que $p_1, \dots, p_m \nmid p$, per tant p' és diferent de p_1, \dots, p_m i hem acabat. \square

3.3 Els nombres modulars

3.3.1 Construcció dels nombres modulars

Proposició 3.3.1. *Siguin m un nombre enter. Aleshores la relació*

$$x \sim y \iff x - y = mk \quad \text{per a cert } k \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{Z}$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Sigui x un nombre enter. Aleshores per l'observació 3.2.9 tenim que $x - x = 0$ i per la definició de **nombres enters** (3.2.2) trobem que $0 = m \cdot 0$, i per tant $x \sim x$.
2. Simètrica: Siguin x i y dos enters tals que $x \sim y$. Per hipòtesi tenim que $x - y = km$ per a cert k enter, i per tant $y - x = -km$ i tenim $y \sim x$.
3. Transitiva: Siguin x, y i z nombres enters tals que $x \sim y$ i $y \sim z$. Per hipòtesi això és que $x - y = mk$ i $y - z = mk'$ per a cert k, k' enters. Per tant trobem

$$\begin{aligned} x - z &= x - y + y - z \\ &= mk + mk' \\ &= m(k + k') \end{aligned}$$

i per tant $x \sim z$.

I per la definició de [relació d'equivalència \(2.3.2\)](#) hem acabat. \square

Definició 3.3.2 (Nombres modulars). Sigui m un enter i

$$x \sim y \iff x - y = mk \quad \text{per a cert } k \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{Z}$$

una relació d'equivalència. Aleshores denotem el conjunt quocient \mathbb{Z}/\sim com $\mathbb{Z}/(m)$, i si $x \sim y$ escriurem $x \equiv y \pmod{m}$. Direm que $\mathbb{Z}/(m)$ són nombres modulars i si $x \sim y$ direm que x i y són congruents mòdul m .

Aquesta definició té sentit per la proposició [3.3.1](#)

3.3.2 Operacions sobre nombres modulars

Definició 3.3.3 (Suma de nombres modulars). Sigui \bar{x} i \bar{y} dos elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores definim la seva suma com l'operació

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}.$$

Definició 3.3.4 (Producte de nombres modulars). Sigui \bar{x} i \bar{y} dos elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores definim el seu producte com l'operació

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}.$$

Proposició 3.3.5. Sigui \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
2. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.
3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.
4. $\bar{a} + \overline{-a} = \bar{0}$.

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a + b} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \overline{b + a} && \text{(3.2.11)} \\ &= \bar{b} + \bar{a}. && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \end{aligned}$$

Per veure el punt (2) fem

$$\begin{aligned} \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) &= \overline{a + \overline{b + c}} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \overline{a + (b + c)} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \overline{(a + b) + c} && \text{(3.2.13)} \\ &= \overline{a + b} + \bar{c} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}. && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \end{aligned}$$

Per veure el punt (3) fem

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{0} &= \overline{a + 0} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \bar{a}. && \text{(3.2.6)} \end{aligned}$$

Per veure el punt (4) fem

$$\begin{aligned}\bar{a} + \overline{-a} &= \overline{a - a} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \bar{0}. && \text{(3.2.9)}\end{aligned}$$

I hem acabat. \square

Proposició 3.3.6. *Siguin \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores*

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.
2. $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}$.
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$.
4. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= \overline{a \cdot b} && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))} \\ &= \overline{b \cdot a} && \text{(3.2.12)} \\ &= \bar{b} \cdot \bar{a}. && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))}\end{aligned}$$

Per veure el punt (2) fem, per la definició de [producte de nombres modulars \(3.3.4\)](#)

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \overline{a \cdot 1},$$

i per la proposició [3.2.6](#) trobem

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}.$$

Per veure el punt (3) fem

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) &= \overline{a \cdot \overline{b \cdot c}} && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))} \\ &= \overline{a \cdot (b \cdot c)} && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))} \\ &= \overline{(a \cdot b) \cdot c} && \text{(3.2.14)} \\ &= \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c} && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))} \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}. && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))}\end{aligned}$$

Per veure el punt (4) fem

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) &= \overline{a \cdot \overline{b + c}} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \overline{a \cdot (b + c)} && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))} \\ &= \overline{ab + ac} && \text{(3.2.15)} \\ &= \overline{ab} + \overline{ac} && \text{(suma de nombres modulars (3.3.3))} \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}. && \text{(producte de nombres modulars (3.3.4))}\end{aligned}$$

I hem acabat. \square

3.3.3 Congruències i aritmètica modular**Proposició 3.3.7.** *Siguin a, a', b, b' i $m > 1$ enters tals que*

$$a \equiv a' \pmod{m} \quad i \quad b \equiv b' \pmod{m}.$$

Aleshores

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{m} \quad i \quad ab \equiv a'b' \pmod{m}.$$

Demostració. Per la definició d'**nombres moduls congruents** (3.3.2) tenim que existeixen enters λ i μ tals que $a - a' = \lambda m$ i $b - b' = \mu m$. Per tant

$$\begin{aligned} (a + b) - (a' + b') &= (a - a') + (b - b') \\ &= \lambda m + \mu m \\ &= (\lambda + \mu)m, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

i per la definició de **nombres moduls congruents** (3.3.2) trobem que $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$. També veiem que

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= (a' + \lambda m)(b' - \mu m) - a'b' \\ &= a'b' + (a'\mu + b'\lambda + \lambda\mu m)m - a'b' \\ &= (a'\mu + b'\lambda + \lambda\mu m)m, \end{aligned}$$

i per tant $ab \equiv a'b' \pmod{m}$. □

Definició 3.3.8 (Nombre modular invertible). Sigui \bar{a} un element de $\mathbb{Z}/(m)$ tal que existeix un element \bar{a}' de $\mathbb{Z}/(m)$ satisfent $\bar{a}\bar{a}' = \bar{1}$. Aleshores direm que \bar{a} és invertible pel producte i que \bar{a}' és la inversa de \bar{a} .

Denotarem \bar{a}^{-1} com la inversa de \bar{a}

Proposició 3.3.9. *Sigui \bar{a} un element de $\mathbb{Z}/(m)$ Aleshores \bar{a} és invertible si i només si a i m són coprimers.*

Demostració. Per la definició de **nombre modular invertible** (3.3.8) tenim que \bar{a} és invertible si existeix un element a' tal que $aa' \equiv 1 \pmod{m}$, i per la definició de **nombres moduls congruents** (3.3.2) tenim que això és si existeix un enter λ tal que $aa' - 1 = \lambda m$.

Això és equivalent a que $aa' - \lambda m = 1$, i per la **identitat de Bézout** (3.2.30) tenim que això és si i només si $\text{mcd}(a, m) = 1$, i per la definició de **coprimers** (3.2.31) tenim que a i m són coprimers. □

Corol·lari 3.3.10. *Sigui $p > 1$ un enter. Aleshores p és primer si i només si \bar{a} és invertible per a tot $\bar{a} \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{\bar{0}\}$.*

Teorema 3.3.11 (El Petit Teorema de Fermat). *Siguin p un primer i a un enter tal que $p \nmid a$. Aleshores*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Demostració. Observem que per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) i la definició de [coprimers \(3.2.31\)](#) tenim que a i p són coprimers. Per tant per la proposició [3.3.9](#) tenim que a és invertible.

Considerem el conjunt

$$X = \{\bar{a}, \bar{2a}, \bar{3a}, \dots, \overline{(p-1)a}\}.$$

Veiem que tots els elements de X són diferents. Efectivament, si $na \equiv ma \pmod{p}$ per a certs enters n i m per la definició de [nombre modular invertible \(3.3.8\)](#) trobem que $n \equiv m \pmod{p}$.

També tenim que

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod{p},$$

i per tant

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p},$$

i de nou per la definició de [divisor \(3.2.18\)](#) i la definició de [coprimers \(3.2.31\)](#) tenim que $(p-1)!$ i p són coprimers, per tant per la proposició [3.3.9](#) tenim que $(p-1)!$ és invertible i trobem

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad \square$$

3.3.4 El Teorema xinès de les restes

Lema 3.3.12. *Siguin m_1, \dots, m_n naturals més grans que 1, a_1, \dots, a_n enters i x_0 un enter tal que*

$$\begin{cases} x_0 \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x_0 \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Aleshores, si $x = x_0 + \lambda M$ amb $M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n)$ i per a tot λ enter es satisfà

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Demostració. Tenim que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, és satisfà $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ si i només si es satisfà $x \equiv x_0 \pmod{m_i}$. Per tant hem de veure que es satisfà

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv x_0 \pmod{m_n} \end{cases}$$

Ara bé, per la definició de [nombres modulars congruents \(3.3.2\)](#) i la definició de [3.2.25](#) tenim que ha de ser

$$x - x_0 = \lambda M$$

per a cert λ enter. \square

Teorema 3.3.13 (Teorema xinès de les restes). *Siguin m_1, \dots, m_n enters més grans que 1 coprimers dos a dos i a_1, \dots, a_n enters. Aleshores el sistema*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

té una única solució, que és $|m_1 \cdots m_n|$.

Demostració. Prenem $M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n)$. Per la definició de [mínim comú múltiple](#) (3.2.34) i la definició de [coprimers](#) (3.2.31) tenim que

$$M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n) = \left| \prod_{i=1}^n m_i \right|.$$

Per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ definim

$$M_i = m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_n$$

i tenim, per la definició de [coprimers](#) (3.2.31), que M_i i m_i són coprimers.

Per tant la congruència

$$M_i x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

té solució, ja que per la proposició 3.3.9 tenim que M_i és invertible i per tant $x \equiv a_i M_i^{-1} \pmod{m_i}$. Denotem $b_i = a_i M_i^{-1}$ i considerem

$$x_0 = M_1 b_1 + \cdots + M_n b_n.$$

Aleshores tenim per la definició de [nombres modulars](#) (3.3.2) tenim que

$$x_0 \equiv M_i b_i \pmod{m_i}.$$

Per tant, pel lema 3.3.12 tenim que

$$x = x_0 + \lambda M$$

amb $M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n)$ són les solucions del sistema, i per la definició de [nombres modulars](#) (3.3.2) trobem que $x = x_0$ i per tant és única. \square

3.4 Les permutacions

3.4.1 El grup simètric

Definició 3.4.1 (Permutació). Sigui X un conjunt i $\sigma: X \rightarrow X$ una aplicació bijectiva. Aleshores direm que σ és una permutació.

Definició 3.4.2 (Grup simètric). Siguin X un conjunt no buit i

$$S_X = \{\sigma: X \rightarrow X \mid \sigma \text{ és una permutació}\}$$

un conjunt. Aleshores direm que S_X és el grup simètric de X .

Si $X = \{1, \dots, n\}$ aleshores denotarem el grup simètric de X com S_n .

Definició 3.4.3 (Elements moguts per una permutació). Siguin X un conjunt no buit, $\sigma \in S_X$ una permutació i

$$M(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$$

un conjunt. Aleshores direm que $M(\sigma)$ és el conjunt d'elements de X moguts per σ .

Proposició 3.4.4. Siguin X un conjunt no buit i σ una permutació de S_X . Aleshores

$$M(\sigma) = \emptyset \iff \sigma = \text{Id}_X.$$

Demostració. Comencem veient l'implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que $M(\sigma) = \emptyset$. Aleshores per la definició de [conjunt d'elements moguts per una permutació \(3.4.3\)](#) trobem que $\{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\} = \emptyset$, i per tant ha de ser $\sigma(x) = x$ per a tot $x \in X$, i per tant $\sigma = \text{Id}_X$.

Veiem ara l'implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Prenem Id_X . Aleshores ha de ser $M(\text{Id}_X) = \emptyset$, ja que per la definició de [conjunt d'elements moguts per una permutació \(3.4.3\)](#) tenim que $M(\text{Id}_X) = \{x \in X \mid \text{Id}_X(x) \neq x\}$. \square

Proposició 3.4.5. Siguin X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions de S_X . Aleshores

$$M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau).$$

Demostració. Prenem $a \in X$ tal que $a \in M(\sigma \circ \tau)$. Això és, per la definició de [conjunt d'elements moguts per una permutació \(3.4.3\)](#), que $a \in \{x \in X \mid \sigma \circ \tau(x) \neq x\}$. Volem veure que $a \in M(\sigma) \cup M(\tau)$, i per la definició d'[unió de conjunts \(2.1.12\)](#) hem de veure que $a \in M(\sigma)$ ó $a \in M(\tau)$.

Si $a \notin M(\tau)$ tenim que $\tau(a) = a$, i tenim $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a)$. Ara bé, ha de ser $\sigma(a) \neq a$, ja que si no tindríem $a \notin M(\sigma \circ \tau)$. Per tant ha de ser $a \in M(\sigma)$.

Si $a \notin M(\sigma)$ tenim que $\sigma(a) = a$, i per tant tenim que $\tau(a) \neq a$, ja que si $\tau(a) = a$ tindríem $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a) = a$, i seria $a \notin M(\sigma \circ \tau)$. Per tant ha de ser $a \in M(\tau)$.

Per tant tenim que si $a \in M(\sigma \circ \tau)$ aleshores $a \in M(\sigma) \cup M(\tau)$, i per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) trobem que $M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau)$, com volíem veure. \square

3.4.2 Permutacions disjunes

Definició 3.4.6 (Permutacions disjunes). Siguin X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions de S_X tals que $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$. Aleshores direm que σ i τ són disjunes.

Proposició 3.4.7. Siguin X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions disjunes de S_X . Aleshores

$$M(\sigma \circ \tau) = M(\sigma) \cup M(\tau).$$

Demostració. Per la proposició 3.4.5 tenim que $M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau)$. Veiem doncs que $M(\sigma \circ \tau) \supseteq M(\sigma) \cup M(\tau)$.

Prenem un element $a \in M(\sigma) \cup M(\tau)$. Com que, per hipòtesi, σ i τ són dues permutacions disjunes, per la definició de [permutacions disjunes \(3.4.6\)](#) tenim

que $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$ i per la definició d'intersecció de conjunts (2.1.13) tenim que o bé $a \in M(\sigma)$ o bé $a \in M(\tau)$.

Suposem que $a \in M(\sigma)$. Per la definició de conjunt d'elements moguts per una permutació (3.4.3) tenim que $\sigma(a) \neq a$ i $\tau(a) = a$, ja que $a \notin M(\tau)$. Per tant $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a) \neq a$, i per tant $a \in M(\sigma \circ \tau)$.

Suposem ara que $a \in M(\tau)$. Per la definició de conjunt d'elements moguts per una permutació (3.4.3) tenim que $\tau(a) \neq a$ i $\sigma(a) = a$, ja que $a \notin M(\sigma)$. Per tant $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(b)$ per a cert $b \neq a$, $b = \tau(a)$. Ara bé, com que per la definició de permutació (3.4.1) σ és una aplicació bijectiva, i per la definició d'aplicació bijectiva (2.2.9) trobem que σ és una aplicació injectiva, i per la definició d'aplicació injectiva (2.2.7) tenim que $\sigma(b) \neq a$, ja que $\sigma(a) = a$ i $b \neq a$. Per hem vist que

$$M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau) \quad \text{i} \quad M(\sigma \circ \tau) \supseteq M(\sigma) \cup M(\tau),$$

i pel Teorema de la doble inclusió (2.1.3) tenim que

$$M(\sigma \circ \tau) = M(\sigma) \cup M(\tau). \quad \square$$

Lema 3.4.8. *Siguin X un conjunt no buit i τ una permutació de S_X . Aleshores*

$$x \in M(\sigma) \iff \sigma(x) \in M(\sigma).$$

Demostració. Per la definició de permutació (3.4.1) tenim que σ és bijectiva, i per tant $\sigma(x) = x$ si i només si $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Prenent la negació d'això trobem que $\sigma(x) \neq x$ si i només si $\sigma(\sigma(x)) \neq \sigma(x)$, que per la definició de conjunt d'elements moguts per una permutació (3.4.3) és equivalent a $x \in M(\sigma) \iff \sigma(x) \in M(\sigma)$. \square

Teorema 3.4.9. *Siguin X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions disjunts de S_X . Aleshores*

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

Demostració. Per la definició de permutacions disjunts (3.4.6) i la definició de conjunt d'elements moguts per una permutació (3.4.3) tenim que, per hipòtesi, $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$. Per tant, per a tot $x \in X$ tenim o bé $x \in M(\sigma)$, o bé $x \in M(\tau)$ o bé $x \notin M(\sigma) \cup M(\tau)$. Estudiem els cassos.

Suposem que $x \in M(\sigma)$, i per tant $x \notin M(\tau)$. Per la definició de conjunt d'elements moguts per una permutació (3.4.3) tenim que $\tau(x) = x$ i per tant $\sigma(\tau(x)) = \sigma(x)$. Ara bé, pel lema 3.4.8 tenim que $\sigma(x) \in M(\sigma)$, d'on trobem que $\sigma(x) \notin M(\tau)$, ja que, per hipòtesi, $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$, i per tant $\tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$.

Suposem que $x \in M(\tau)$, i per tant $x \notin M(\sigma)$. Per la definició de conjunt d'elements moguts per una permutació (3.4.3) tenim que $\sigma(x) = x$ i per tant $\tau(\sigma(x)) = \tau(x)$. Ara bé, pel lema 3.4.8 tenim que $\tau(x) \in M(\tau)$, d'on trobem que $\tau(x) \notin M(\sigma)$, ja que, per hipòtesi, $M(\tau) \cap M(\sigma) = \emptyset$, i per tant $\sigma(\tau(x)) = \tau(x)$.

Suposem per acabar que $x \notin M(\sigma) \cup M(\tau)$. Aleshores tenim que $\sigma(x) = x$ i $\tau(x) = x$, i per tant $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, com volíem veure. \square

3.4.3 Cicles

Definició 3.4.10 (*r*-cicle). Sigui X un conjunt no buit i σ una permutació de S_X tals que $M(\sigma) = \{a_1, \dots, a_r\}$ amb $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r-1\}$ i $\sigma(a_r) = a_1$. Aleshores direm que σ és un *r*-cicle, o un cicle, i denotarem

$$\sigma = (a_1, \dots, a_r).$$

Proposició 3.4.11. Sigui X un conjunt no buit, a un element de $M(\sigma)$ i σ un *r*-cicle de S_X . Aleshores

$$\sigma = (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)).$$

Demostració. Per la definició d'*r*-cicle (3.4.10) tenim que $M(\sigma) = \{a_1, \dots, a_r\}$, i com que $a \in M(\sigma)$ tenim que $a = a_k$ per a cert $k \in \{1, \dots, r\}$. Tenim doncs que

$$\sigma = (a, a_{k+1}, \dots, a_{r-k}).$$

Ara bé, per la definició d'*r*-cicle (3.4.10) tenim que

$$a_{i+1} = \sigma(a_i) \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, r-1\}$$

i $a_1 = \sigma(a_r)$. Per tant trobem

$$\sigma^i(a) = a_{k+i} \quad \text{per a tot } i \in \{-k+1, \dots, r-k-1\},$$

i per tant trobem

$$\sigma = (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)). \quad \square$$

Lema 3.4.12. Sigui X un conjunt no buit i σ un *r*-cicle de S_X . Aleshores $r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = \text{Id}_X\}$.

Demostració. Per la definició d'*r*-cicle (3.4.10) tenim que existeixen a_1, \dots, a_r tals que $M(\sigma) = \{a_1, \dots, a_r\}$ amb $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r-1\}$ i $\sigma(a_r) = a_1$, i per tant $\sigma^r = \text{Id}_X$ ja que tenim $\sigma^r(x) = x$ per a tot $x \in X$. Ara bé, per la proposició 3.4.11 tenim que, amb $a \in M(\sigma)$,

$$\sigma = (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a))$$

i per la definició d'*r*-cicle (3.4.10) tenim que $\sigma^i(a) \neq a$ per a tot $i \in \{0, \dots, r-1\}$, i per tant $r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = \text{Id}_X\}$, com volíem veure. \square

Teorema 3.4.13. Sigui X un conjunt no buit i σ un *r*-cicle de S_X . Aleshores

$$\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}.$$

Demostració. Pel lema 3.4.12 tenim que $\sigma^r = \text{Id}_X$. Aleshores tenim $\sigma \circ \sigma^{r-1} = \text{Id}_X$ i $\sigma^{r-1} \circ \sigma = \text{Id}_X$. Per tant per la definició d'inversa d'una aplicació (2.2.16) trobem que $\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}$. \square

Teorema 3.4.14 (Descomposició de permutacions en cicles disjunts). Sigui X un conjunt finit no buit i σ una permutació de S_X . Aleshores existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ cicles disjunts dos a dos de S_X tals que

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s,$$

i aquests $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ són únics llevat de l'ordre en que es conjuguen.

Demostració. Prenem $a_1 \in M(\sigma)$ i el conjunt $\{a_1, \sigma(a_1), \sigma^2(a_1), \dots\}$. Com que, per hipòtesi, X és finit tenim que existeixen i i j tals que $\sigma^i(a_1) = \sigma^j(a_1)$, i per tant $\sigma^{i-j}(a_1) = a_1$.

Segui doncs $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k(a) = a\}$. Per la definició d'*r-cicle* (3.4.10) tenim que

$$\alpha_1 = (a_1, \sigma(a_1), \dots, \sigma^{k_1-1}(a_1)) \quad (3.1)$$

és un k_1 -cicle.

Si existeix un $a_2 \in X$ que no pertanyi a $\{a_1, \sigma(a_1), \dots, \sigma^{k_1-1}(a_1)\}$. Amb el mateix procés podem generar un nou k_2 -cicle α_2 disjunt amb α_1 , i així obtenim $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ cicles disjunts dos a dos. Aleshores trobem

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s,$$

ja que $\sigma(x) = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s(x)$ per a tot $x \in X$.

Tenim doncs que

$$\alpha_i = (a_i, \sigma(a_i), \dots, \sigma^{k_i-1}(a_i)). \quad (3.2)$$

Suposem ara que existeixen β_1, \dots, β_r cicles disjunts dos a dos de S_X tals que

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_r. \quad (3.3)$$

Per la proposició 3.4.7 tenim que $a_i \in M(\beta_{j_i})$ per a cert $j_i \in \{1, \dots, r\}$, i per la definició de *permutacions disjunts* (3.4.6) i la definició d'*intersecció de conjunts* (2.1.13) tenim que aquest j_i és únic.

Ara bé, com que per hipòtesi β_{j_i} és un cicle, per la proposició 3.4.11 tenim que

$$\beta_{j_i} = (a_i, \beta_{j_i}(a_i), \dots, \beta_{j_i}^{k'_{j_i}-1}(a_i))$$

per a cert k'_{j_i} . Ara bé, tenim per (3.3) que $\beta_{j_i}^k(a_i) = \sigma^k(a_i)$ per a tot k . Per tant

$$\beta_{j_i} = (a_i, \sigma(a_i), \dots, \sigma^{k'_{j_i}-1}(a_i)).$$

Ara bé, havíem definit $k_i = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k(a_i) = a_i\}$. Per tant $k'_{j_i} = k_i$ i, com que per hipòtesi $a_i \in M(\alpha_{j_i})$ és un cicle, per la proposició 3.4.11, per (3.1) i per (3.2) tenim que $\alpha_i = \beta_{j_i}$. Per tant podem reescriure (3.1) com

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s \circ \beta_{j_{s+1}} \circ \dots \circ \beta_{j_r},$$

i per tant ha de ser $\beta_{j_{s+1}} \circ \dots \circ \beta_{j_r} = \text{Id}_X$. □

3.4.4 Descomposició en transposicions i signe

Definició 3.4.15 (Transposició). Sigui X un conjunt no buit i τ un 2-cicle de S_X . Aleshores direm que τ és una transposició.

Observació 3.4.16. $\tau = \tau^{-1}$.

Proposició 3.4.17. Sigui X un conjunt finit no buit i σ una permutació de S_X . Aleshores existeixen transposicions τ_1, \dots, τ_s de S_X tals que

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s.$$

Demostració. Observem que per a tot r -cicle α de S_X existeixen transposicions τ_1, \dots, τ_r de S_X tals que $\alpha = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$. Efectivament, per la definició d' r -cicle (3.4.10) tenim que si $\alpha = (a_1, \dots, a_r)$ aleshores

$$\alpha = (a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \dots \circ (a_{r-1}, a_r),$$

i per la definició de transposició (3.4.15) tenim que (a_i, a_{i+1}) és una transposició de S_X per a tot $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

Per tant, pel Teorema de descomposició de permutacions en cicles disjunts (3.4.14) hem acabat. \square

Teorema 3.4.18. *Siguin X un conjunt finit no buit, σ una permutació de S_X i $\tau_1, \dots, \tau_r, \tau'_1, \dots, \tau'_{r'}$ transposicions de S_X tals que*

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_{r'}.$$

Aleshores $r - r'$ és parell.

Demostració. :(\square

Definició 3.4.19 (Signe d'una permutació). *Siguin X un conjunt finit no buit, σ una permutació de S_X i τ_1, \dots, τ_r transposicions de S_X tals que*

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r.$$

Aleshores definim

$$\text{sig}(\sigma) = (-1)^r$$

com el signe de σ .

Aquesta definició té sentit pel Teorema 3.4.18.

3.5 Els nombres racionals

3.5.1 Construcció dels nombres racionals

Proposició 3.5.1. *Sigui \sim una relació tal que per a tot $(a, b), (c, d)$ elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tenim*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Per la proposició 3.2.12 tenim $ab = ba$, i per tant $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Simètrica: Sigui (a, b) i (c, d) dos elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$. Per hipòtesi tenim que $ad = bc$, i per la proposició 3.2.12 tenim que $cb = da$ i trobem $(c, d) \sim (a, b)$.

3. Transitiva: Siguin (a, b) , (c, d) i (e, f) elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$. Per hipòtesi això és $ad = bc$ i $cf = de$. Ara bé, tenim

$$bcf = bde$$

i per tant

$$adf = bde$$

i pel corol·lari 3.2.17 trobem que $af = be$ i tenim que $(a, b) \sim (e, f)$.

I per la definició de relació d'equivalència (2.3.2) hem acabat. \square

Definició 3.5.2 (Conjunt dels nombres racionals). Sigui \sim una relació d'equivalència tal que

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

per a tot (a, b) , (c, d) elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aleshores direm que el conjunt quocient $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \sim$ és el conjunt dels nombres racionals. Direm que els elements de \mathbb{Q} són nombres racionals.

Aquesta definició té sentit per la proposició 3.5.1.

Notació 3.5.3. Sigui $\overline{(a, b)}$ un element de \mathbb{Q} . Aleshores denotarem

$$\overline{(a, b)} = \frac{a}{b}.$$

Proposició 3.5.4. Sigui $\frac{a}{b}$ un nombre racional. Aleshores

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1} \iff a = b.$$

Demostració. Per la definició de classe d'equivalència (2.3.3) tenim que

$$(a, b) \sim (1, 1),$$

i per la definició de nombres enters (3.2.2) això és

$$a \cdot 1 = b \cdot 1.$$

I per tant, per la proposició 3.2.6 trobem que ha de ser $a = b$. \square

Proposició 3.5.5. Siguin $\frac{0}{a}$ i $\frac{0}{b}$ racionals. Aleshores

$$\frac{0}{a} = \frac{0}{b}.$$

Demostració. Tenim que $0 \cdot b = 0 \cdot a$, i per tant per la definició de nombres racionals (3.5.2) trobem $\overline{(0, a)} \sim \overline{(0, b)}$ i per la definició de classe d'equivalència (2.3.3) trobem

$$\frac{0}{a} = \frac{0}{b}. \quad \square$$

3.5.2 Operacions entre nombres racionals

Definició 3.5.6 (Suma de nombres racionals). Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ nombres racionals. Aleshores definim la suma de $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ com una operació $+$ que satisfà

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

Definició 3.5.7 (Producte de nombres racionals). Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ nombres racionals. Aleshores definim el producte de $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ com una operació \cdot que satisfà

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Escriurem

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \frac{c}{d}.$$

Proposició 3.5.8. Siguin $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$ nombres racionals. Aleshores es satisfà

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.
2. $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.
3. $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$.
4. $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{1}$.

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + cb}{bd} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\ &= \frac{cb + ad}{bd} && (3.2.11) \\ &= \frac{cb + ad}{db} && (3.2.12) \\ &= \frac{c}{d} + \frac{a}{b}. && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \end{aligned}$$

Per veure el punt (2) fem

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \frac{a}{b} + \frac{cf + ed}{df} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\ &= \frac{adf + (cf + ed)b}{bdf} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\ &= \frac{adf + cfb + edb}{bdf} && (3.2.15) \\ &= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf} && (3.2.12) \\ &= \frac{(ad + cb)f + ebd}{bdf} && (3.2.15) \\ &= \frac{ad + cb}{bd} + \frac{e}{f} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}. && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \end{aligned}$$

Per veure el punt (3) fem

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{0}{1} &= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\ &= \frac{a}{b}. && (3.2.6)\end{aligned}$$

Per veure el punt (4) fem

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} &= \frac{ab - ab}{bb} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\ &= \frac{0}{bb} && (3.2.6) \\ &= \frac{0}{1}. && (3.5.5)\end{aligned}$$

i hem acabat. □

Proposició 3.5.9. *Siguin $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$ nombres racionals. Aleshores es satisfà*

1. $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \frac{a}{b}$.
2. $\frac{a}{b} \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$.
3. $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \frac{c}{d} \right) \frac{e}{f}$.
4. $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \frac{e}{f}$.

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\ &= \frac{ca}{db} && (3.2.12) \\ &= \frac{c}{d} \frac{a}{b}. && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))}\end{aligned}$$

Per veure el punt (2) fem

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \frac{1}{1} &= \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\ &= \frac{a}{b}. && (3.2.6)\end{aligned}$$

Per veure el punt (3) fem

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \frac{e}{f} \right) &= \frac{a}{b} \frac{ce}{df} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\ &= \frac{a(ce)}{b(df)} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\ &= \frac{(ac)e}{(bd)f} && (3.2.14) \\ &= \frac{ac}{bd} \frac{e}{f} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\ &= \left(\frac{a}{b} \frac{c}{d} \right) \frac{e}{f}. && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))}\end{aligned}$$

Per veure el punt (4) fem

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) &= \frac{a}{b} \frac{cf + de}{df} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\
 &= \frac{a(cf + de)}{bdf} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\
 &= \frac{acf + ade}{bdf} && (3.2.15) \\
 &= \frac{acf + ade}{bdf} \frac{1}{1} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\
 &= \frac{acf + ade}{bdf} \frac{b}{b} && (3.5.4) \\
 &= \frac{(acf + aeb)b}{bdfb} && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))} \\
 &= \frac{acfb + aedb}{bdfb} && \text{(producte de nombres enters (3.2.5))} \\
 &= \frac{acbf + aebd}{bdbf} && (3.2.12) \\
 &= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} && \text{(suma de nombres racionals (3.5.6))} \\
 &= \frac{a}{b} \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \frac{e}{f}. && \text{(producte de nombres racionals (3.5.7))}
 \end{aligned}$$

I hem acabat. □

Teorema 3.5.10. *Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dos racionals tals que*

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{0}{1}.$$

Aleshores $a = 0$ ó $c = 0$.

Demostració. Per la definició de [producte de nombres racionals \(3.5.7\)](#) trobem que

$$\frac{ac}{bd} = \frac{0}{1},$$

i per la definició de [nombres racionals \(3.5.2\)](#) tenim que es satisfà

$$ac \cdot 1 = bd \cdot 0.$$

Per tant

$$ac = 0,$$

i pel Teorema [3.2.16](#) tenim que ha de ser $a = 0$ ó $b = 0$. □

Teorema 3.5.11. *Sigui $\frac{a}{b}$ un racional amb $a \neq 0$. Aleshores*

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{1}{1}.$$

Demostració. Per la definició de [producte de nombres racionals \(3.5.7\)](#) i la proposició [3.2.12](#) tenim que

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}$$

i per la proposició [3.5.4](#) tenim que

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{1}{1}.$$

□

Bibliografia

- [1] *Construction of number systems*. 1 de jul. de 2018. URL: <https://www.math.wustl.edu/~kumar/courses/310-2011/Peano.pdf>.
- [2] Ramon Antoine, Rosa Camps i Jaume Moncasi. *Introducció a l'àlgebra abstracta. Amb elements de matemàtica discreta*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2007. ISBN: 978-84-490-2515-0.
- [3] Agustí Reventós Tarrida. «Temes diversos de fonaments de les matemàtiques». 2014.
- [4] Manuel Castellet i Irene Llerena. *Àlgebra lineal i geometria*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2009. ISBN: 84-7488-943-X.
- [5] Roger Godement. *Algebra*. Anglès. Kershaw Publishing Co Ltd, 1969. ISBN: 978-0901665003.
- [6] Antonella Cupillari. *The Nuts and Bolts of Proofs. An Introduction to Mathematical Proofs*. Anglès. 4a ed. Academic Press, 2012. ISBN: 978-0123822178.
- [7] Emilio Bujalance García et al. *Problemas de Matemática Discreta*. Castellà. Sanz y Torres, 1933. ISBN: 9788488667038.
- [8] Peter Eccles. *An Introduction to Mathematical Reasoning*. Anglès. University of Manchester, 1997. ISBN: 9780521597180.
- [9] Carol Schumacher. *Chapter Zero. Fundamental Notions of Abstract Mathematics*. Anglès. Addison Wesley, 2001. ISBN: 9780201826531.

La secció sobre els axiomes de Peano està fortament inspirada en [1]. La resta de la teoria és una combinació de [2] i [3], uns apunts de l'assignatura que sospito que només són accessibles des del campus virtual.

La bibliografia del curs inclou els textos [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Part II

Àlgebra Lineal

Capítol 4

Matrius

4.1 Matrius i operacions

4.1.1 Cossos

Definició 4.1.1 (Cos). Aclarir on va aquest apartat.

4.1.2 Les matrius

Definició 4.1.2 (Matriu). Siguin m i n dos enters i $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ elements d'un cos \mathbb{K} . Aleshores direm que

$$[a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

és una matriu de mida $m \times n$ sobre \mathbb{K} .

Direm que $a_{i,j}$ és el component (i, j) de la matriu $[a_{i,j}]$. Si $A = [a_{i,j}]$ també denotarem $[A]_{i,j} = a_{i,j}$.

Si $n = m$ direm que $(a_{i,j})$ és una matriu quadrada d'ordre n .

Notació 4.1.3 (Conjunt de matrius). Siguin m i n dos enters, \mathbb{K} un cos i

$$X = \{A \mid A \text{ és una matriu de mida } m \times n \text{ sobre } \mathbb{K}\}$$

un conjunt. Aleshores denotarem $X = M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Si $n = m$ denotarem $X = M_n(\mathbb{K})$.

Definició 4.1.4 (Suma de matrius). Siguin A i B dues matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores definim la seva suma com una operació $+$ que satisfà

$$[A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}.$$

Definició 4.1.5 (Producte de matrius). Siguin A una matriu de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} i B una matriu de mida $l \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores definim el seu producte com una operació \cdot que satisfà

$$[A \cdot B]_{i,j} = \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j}.$$

Escriurem $A \cdot B = AB$.

4.1.3 Propietats de les operacions amb matrius

Proposició 4.1.6. *Siguin A , B i C tres matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Demostració. Per la definició de [suma de matrius \(4.1.4\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [(A + B) + C]_{i,j} &= [A + B]_{i,j} + [C]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} + [C]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + ([B]_{i,j} + [C]_{i,j}) && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= [A]_{i,j} + [B + C]_{i,j} \\ &= [A + (B + C)]_{i,j}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 4.1.7. *Siguin A i B dues matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$A + B = B + A.$$

Demostració. Per la definició de [suma de matrius \(4.1.4\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [A + B]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \\ &= [B]_{i,j} + [A]_{i,j} && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= [B + A]_{i,j}. \end{aligned} \quad \square$$

Notació 4.1.8 (Matriu nul·la). Denotarem la matriu de mida $m \times n$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

com $0_{m \times n}$, ó 0 si és clar pel context.

Proposició 4.1.9. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$A + 0 = A.$$

Demostració. Per la definició de [suma de matrius \(4.1.4\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [A + 0]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [0]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + 0 \\ &= [A]_{i,j}, \end{aligned} \quad (\text{cos (4.1.1)})$$

com volíem veure. \square

Definició 4.1.10 (Producte d'una matriu per escalars). Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} i α un escalar de \mathbb{K} . Aleshores definim

$$[\alpha A]_{i,j} = \alpha [A]_{i,j}.$$

Denotarem $(-1)A$ com $-A$.

Proposició 4.1.11. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$A - A = 0.$$

Demostració. Per la definició de [suma de matrius \(4.1.4\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [A - A]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [-A]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} - [A]_{i,j} \quad (\text{producte d'una matriu per escalars (4.1.10)}) \\ &= 0 \quad (\text{cos (4.1.1)}) \end{aligned}$$

i trobem $A - A = 0$. \square

Proposició 4.1.12. *Siguin A una matriu de mida $m \times n$ i α i β dos escalars de \mathbb{K} . Aleshores*

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Demostració. Per la definició de [producte d'una matriu per escalars \(4.1.10\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [(\alpha\beta)A]_{i,j} &= \alpha\beta[A]_{i,j} \\ &= \alpha(\beta[A]_{i,j}) \quad (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= \alpha[\beta A]_{i,j}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposició 4.1.13. *Siguin A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} i α i β dos escalars de \mathbb{K} . Aleshores*

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Demostració. Per la definició de [producte d'una matriu per escalars \(4.1.10\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta)A]_{i,j} &= (\alpha + \beta)[A]_{i,j} \\ &= \alpha[A]_{i,j} + \beta[A]_{i,j}, \quad (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= [\alpha A]_{i,j} + [\beta A]_{i,j} \end{aligned}$$

i hem acabat. \square

Proposició 4.1.14. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$1A = A.$$

Demostració. Per la definició de [producte d'una matriu per escalars \(4.1.10\)](#) tenim que

$$[1A]_{i,j} = 1[A]_{i,j}$$

i per la definició de [cos \(4.1.1\)](#) trobem que

$$1[A]_{i,j} = [A]_{i,j},$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.15. *Siguin \mathbb{K} un cos i A una matriu de mida $m \times l$ sobre \mathbb{K} , B una matriu de mida $l \times s$ sobre \mathbb{K} i C una matriu de mida $s \times m$ sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$(AB)C = A(BC).$$

Demostració. Per la definició de [producte de matrius \(4.1.5\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{i,j} &= \sum_{r=1}^s [AB]_{i,r} [C]_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^s \left(\sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,r} \right) [C]_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^s \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,r} [C]_{r,j} && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^s [A]_{i,k} [B]_{k,r} [C]_{r,j} && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} \sum_{r=1}^s ([B]_{k,r} [C]_{r,j}) && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [BC]_{k,j} \\ &= [A(BC)]_{i,j}, \end{aligned}$$

com volíem veure. □

Proposició 4.1.16. *Siguin A i A' dues matrius de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} i B, B' dues matrius de mida $l \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A + A')B = AB + A'B \quad i \quad A(B + B') = AB + AB'.$$

Demostració. Per la definició de [producte de matrius \(4.1.5\)](#) tenim que

$$\begin{aligned} [(A + A')B]_{i,j} &= \sum_{k=1}^l [A + A']_{i,k} [B]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^l ([A]_{i,k} + [A']_{i,k}) [B]_{k,j} && (\text{suma de matrius (4.1.4)}) \\ &= \sum_{k=1}^l ([A]_{i,k} [B]_{k,j} + [A']_{i,k} [B]_{k,j}) && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j} + \sum_{k=1}^l [A']_{i,k} [B]_{k,j} && (\text{cos (4.1.1)}) \\ &= [AB]_{i,j} + [A'B]_{i,j} \\ &= [AB + A'B]_{i,j}. && (\text{suma de matrius (4.1.4)}) \end{aligned}$$

L'altre demostració és anàloga. □

4.1.4 Matrius inverses i matrius transposades

Notació 4.1.17 (Matriu identitat). Denotarem la matriu d'ordre n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

com I_n i direm que I_n és la matriu identitat d'ordre n .

Proposició 4.1.18. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$I_m A = A = A I_n.$$

Demostració. Per la definició de [producte de matrius \(4.1.5\)](#) tenim que

$$[I_m A]_{i,j} = \sum_{k=1}^m [I_m]_{i,k} [A]_{k,j}.$$

Ara bé, tenim que

$$[I_m]_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

i per la definició de [cos \(4.1.1\)](#) tenim que

$$\sum_{k=1}^m [I_m]_{i,k} [A]_{k,j} = [A]_{i,j}$$

i per tant $I_m A = A$.

La demostració de l'altre igualtat és anàloga. \square

Proposició 4.1.19. *Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixin dues matrius A_1 i A_2 d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que*

$$A A_1 = A_1 A = I_n \quad i \quad A A_2 = A_2 A = I_n.$$

Aleshores $A_1 = A_2$.

Demostració. Per la proposició [4.1.15](#) tenim que

$$A_1 (A A_2) = (A_1 A) A_2$$

i per hipòtesi trobem que $A_1 I_n = I_n A_2$, i per la proposició [4.1.18](#) trobem que $A_1 = A_2$, com volíem veure. \square

Definició 4.1.20 (Matriu invertible). Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixi una matriu A' d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que

$$A A' = A' A = I_n.$$

Aleshores direm que A és una matriu invertible i que A' és la inversa de A . També denotarem $A' = A^{-1}$.

Observem que aquesta definició té sentit per la proposició [4.1.19](#).

Observació 4.1.21. *Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} tal que existeix un $i \in \{1, \dots, m\}$ satisfent*

$$a_{i,j} = 0 \text{ ó } a_{j,i} = 0 \quad \text{per a tot } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Aleshores A no és invertible.

Proposició 4.1.22. *Siguin A i B dues matrius invertibles d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores la matriu AB és invertible.*

Demostració. Per la proposició 4.1.15 i la definició de [matriu invertible](#) (4.1.20) tenim que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \text{Id} \quad \text{i} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = \text{Id},$$

i de nou per la definició tenim que AB és invertible. □

Proposició 4.1.23. *Siguin A i B dues matrius invertibles d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Aquest enunciat té sentit per la proposició 4.1.22.

Demostració. Per la definició de [matriu invertible](#) (4.1.20) tenim que

$$(AB)^{-1}AB = I_n,$$

i com que, per hipòtesi, les matrius A i B són invertibles trobem

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1} &= (AB)^{-1}ABB^{-1}A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}AA^{-1} \\ &= (AB)^{-1}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 4.1.24. *Sigui A una matriu invertible d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Demostració. Per la proposició 4.1.23 tenim que

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A$$

i com que, per hipòtesi, la matriu A és invertible trobem

$$AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = AA^{-1}A$$

i tenim

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad \square$$

Definició 4.1.25 (Matriu transposada). *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Definim la transposada de A com una matriu A^t de mida $n \times m$ sobre \mathbb{K} que satisfà*

$$[A^t]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Proposició 4.1.26. *Siguin A i B dues matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A + B)^t = A^t + B^t.$$

Demostració. Per la definició de **matriu transposada** (4.1.25) tenim que

$$\begin{aligned}
 [(A+B)^t]_{i,j} &= [A+B]_{j,i} \\
 &= [A]_{j,i} + [B]_{j,i} && \text{(suma de matrius (4.1.4))} \\
 &= [A^t]_{i,j} + [B^t]_{i,j} \\
 &= [A^t + B^t]_{i,j}, && \text{(suma de matrius (4.1.4))}
 \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.27. *Siguin A una matriu de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} i B una matriu de mida $l \times n$ sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Demostració. Per la definició de **matriu transposada** (4.1.25) tenim que

$$\begin{aligned}
 [(AB)^t]_{i,j} &= [AB]_{j,i} \\
 &= \sum_{k=1}^l [A]_{j,k} [B]_{k,i} && \text{(producte de matrius (4.1.5))} \\
 &= \sum_{k=1}^l [A^t]_{k,j} [B]_{i,k} \\
 &= \sum_{k=1}^l [B^t]_{i,k} [A^t]_{k,j} && \text{(cos (4.1.1))} \\
 &= [B^t A^t]_{i,j}, && \text{(cos (4.1.1))}
 \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.28. *Sigui A una matriu invertible d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Demostració. Per la proposició 4.1.27 tenim que

$$A^t (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t \quad \text{i} \quad [(A^{-1})^t A^t = (A A^{-1})^t,$$

i per la definició de **matriu invertible** (4.1.20) tenim que A^t és invertible i que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, com volíem veure. \square

Definició 4.1.29 (Matriu simètrica). *Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que $A^t = A$. Aleshores direm que A és una matriu simètrica.*

4.1.5 Producte de matrius en blocs

Definició 4.1.30 (Files i columnes). *Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores definim*

$$F_i = [a_{i,1} \quad \cdots \quad a_{i,n}]$$

com la i -èsima fila de A i

$$C_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$$

com la i -èsima columna de A .

Observació 4.1.31. Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tenim $F_i \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$ i $C_i \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$.

Notació 4.1.32. Si A és una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , F_1, \dots, F_m les files de A i C_1, \dots, C_n les columnes de A . Aleshores denotem

$$A = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = [C_1 \quad \cdots \quad C_n].$$

Notació 4.1.33. Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , m_1, \dots, m_p i n_1, \dots, n_q nombres naturals tals que $m_1 + \dots + m_p = m$ i $n_1 + \dots + n_q = n$, $m_0 = n_0 = 1$ i

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{m_{i-1}, n_{j-1}} & \cdots & a_{m_{i-1}, n_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_i, n_{j-1}} & \cdots & a_{m_i, n_j} \end{bmatrix}$$

matrius sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores denotem

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix}.$$

Proposició 4.1.34. Sigui A una matriu de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} , B una matriu de mida $l \times n$ sobre \mathbb{K} , m_1, \dots, m_p , l_1, \dots, l_q i n_1, \dots, n_r nombres naturals satisfent $m_1 + \dots + m_p = m$, $l_1 + \dots + l_q = l$ i $n_1 + \dots + n_r = n$, i per a tot $i \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ i $j \in \{1, \dots, r\}$ tals que $A_{i,k}$ és una matriu de mida $m_i \times l_k$ sobre \mathbb{K} i $B_{k,j}$ és una matriu de mida $l_k \times n_j$ sobre \mathbb{K} tals que

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \end{bmatrix}.$$

Aleshores

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^q A_{1,k} B_{k,1} & \sum_{k=1}^q A_{1,k} B_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^q A_{1,k} B_{k,r} \\ \sum_{k=1}^q A_{2,k} B_{k,1} & \sum_{k=1}^q A_{2,k} B_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^q A_{2,k} B_{k,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^q A_{p,k} B_{k,1} & \sum_{k=1}^q A_{p,k} B_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^q A_{p,k} B_{k,r} \end{bmatrix}.$$

Demostració. Per la definició de [producte de matrius \(4.1.5\)](#) tenim que

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j}.$$

També tenim que $i = m_1 + \dots + m_{k_i} + i'$ i $j = n_1 + \dots + n_{k_j} + j'$ per a certs $k_i \in \{1, \dots, p-1\}$, $k_j \in \{1, \dots, r-1\}$, $i' \leq m_{k_i+1} - m_{k_i}$ i $j' \leq n_{k_j+1} - n_{k_j}$. Per tant hem de veure que

$$\sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j} = \left[\sum_{k=1}^q A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}} \right]_{i',j'}.$$

Per la definició de **suma de matrius** (4.1.4) tenim que

$$\left[\sum_{k=1}^q A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}} \right]_{i',j'} = \sum_{k=1}^q [A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}}]_{i',j'},$$

i per la definició de **producte de matrius** (4.1.5) trobem

$$\sum_{k=1}^q [A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}}]_{i',j'} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{h=1}^{l_k} [A_{m_{k_i},k}]_{i',h} [B_{k,n_{k_j}}]_{h,j'} \right).$$

Ara bé, com que per hipòtesi tenim que

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \end{bmatrix}.$$

i que $i = m_1 + \dots + m_{k_i} + i'$ i $j = n_1 + \dots + n_{k_j} + j'$, trobem

$$\sum_{k=1}^q \left(\sum_{h=1}^{l_k} [A_{m_{k_i},k}]_{i',h} [B_{k,n_{k_j}}]_{h,j'} \right) = \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j}. \quad \square$$

4.2 Rang d'una matriu

4.2.1 Transformacions elementals

Definició 4.2.1 (Transformacions elementals). Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} i i i j dos naturals amb $i, j \leq m$. Aleshores definim les funcions

$$P_{i,j}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad D_{i,\lambda}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \lambda a_{i,1} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$i \quad E_{i,j,\lambda}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} - \lambda a_{j,1} & \cdots & a_{i,n} - \lambda a_{j,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

com les transformacions elementals per files de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposició 4.2.2. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores per a tota successió de transformacions elementals per files f existeix una matriu P d'ordre m sobre \mathbb{K} tal que $f(A) = PA$ i per a tota successió de transformacions elementals per columnes g existeix una matriu Q d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que $g(A) = AQ$.*

Demostració. En tenim prou amb veure que $P_{i,j}(A) = P_{i,j}(I_m)A$, $D_{i,\lambda}(A) = D_{i,\lambda}(I_m)A$ i $E_{i,j,\lambda}(A) = E_{i,j,\lambda}(I_m)A$ i que $P_{i,j}(A^t)^t = AP_{i,j}(I_n)$, $D_{i,\lambda}(A^t)^t = AD_{i,\lambda}(I_n)$ i $E_{i,j,\lambda}(A^t)^t = AE_{i,j,\lambda}(I_n)$, i això és conseqüència de la definició de [producte de matrius](#) (4.1.5). \square

Definició 4.2.3 (Matriu elemental). Sigui P una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixi una sèrie de transformacions elementals tals que per a tota matriu A de mida $m \times n$ sobre \mathbb{K} tenim $f(A) = PA$. Aleshores direm que P és una matriu elemental.

Aquesta definició té sentit per la proposició 4.2.2.

Observació 4.2.4. *Siguin P i Q dues matrius elementals d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores PQ és una matriu elemental.*

Notació 4.2.5. Denotarem les transformacions elementals per files $P_{i,j}$ com $F_i \leftrightarrow F_j$, $D_{i,\lambda}$ com $F_i \rightarrow \lambda F_i$ i $E_{i,j,\lambda}$ com $F_i \rightarrow F_i + \lambda F_j$.

Aprofitant la proposició 4.2.2 també denotarem una successió de transformacions elementals com una matriu quadrada.

Si apliquem una transformació elemental per files a una matriu transposada i transposem el resultat denotarem $P_{i,j}$ com $C_i \leftrightarrow C_j$, $D_{i,\lambda}$ com $C_i \rightarrow \lambda C_i$ i $E_{i,j,\lambda}$ com $C_i \rightarrow C_i + \lambda C_j$ i direm que són transformacions elementals per columnes.

Proposició 4.2.6. *Sigui P una matriu elemental d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores P és una matriu invertible.*

Demostració. En tenim prou amb veure que $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$, $D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,\lambda^{-1}}$ i $E_{i,j,\lambda}^{-1} = E_{i,j,-\lambda}$. Per tant, per la definició de [matriu elemental](#) (4.2.3) i la definició de [matriu invertible](#) (4.1.20) tenim que P és una matriu invertible. \square

4.2.2 Matrius esglaonades i mètode de Gauss

Definició 4.2.7 (Matriu esglaonada). Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixen $j_1 < \cdots < j_r$ nombres naturals tals que per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$ i per a tot $j < j_i$ tenim $a_{i,j} = 0$ i $a_{i,j_i} = 1$, i $a_{i,j} = 0$ per a tot $i > j_r$ i $j \in \{1, \dots, n\}$.

Aleshores direm que A està esglaonada per files i que A^t està esglaonada per columnes.

Direm que una matriu A es pot esglaonar per files si existeix una successió P de transformacions elementals per files tals que PA està esglaonada per files.

Proposició 4.2.8. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A es pot esglaonar per files.*

Demostració. Denotem $A = (a_{i,j})$. Ho farem per inducció sobre n .

Suposem que $n = 1$. Si $a_{i,1} = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$ per la definició de [matriu esglaonada](#) (4.2.7) hem acabat. Suposem doncs que existeix un $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a_{i,1} \neq 0$. Aleshores podem fer les transformacions elementals

$$A \xrightarrow{F_i \leftrightarrow F_1} \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i-1,1} \\ a_{1,1} \\ a_{i+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow a_{1,1}^{-1} F_1} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_i \rightarrow F_i - a_{i,1} F_1 \\ \text{per a tot } i \in \{2, \dots, m\}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

i per la definició de [matriu esglaonada](#) (4.2.7) hem acabat.

Suposem doncs que la hipòtesi és certa per a n . Veiem que també ho és per $n + 1$. Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times (n + 1)$ sobre \mathbb{K} . Considerem la matriu

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,n+1} \end{bmatrix}.$$

Per la definició de [matriu](#) (4.1.2) tenim que A' és una matriu de mida $m \times n$ sobre \mathbb{K} , i per l'hipòtesi d'inducció tenim que podem esglaonar-la. Sigui doncs B la matriu A' esglaonada. Considerem la matriu

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,m} \end{bmatrix},$$

que correspon a la primera columna de la matriu A . Hem vist que podem esglaonar-la, i per tant per la definició de [matriu esglaonada](#) (4.2.7) tenim que podem esglaonar la matriu A , ja que

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,m} \end{bmatrix} & A' \end{array} \right],$$

i pel [principi d'inducció](#) (3.1.7) hem acabat. \square

Corol·lari 4.2.9. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A es pot esglaonar per columnes.*

4.2.3 Teorema de la PAQ-reducció

Teorema 4.2.10 (Teorema de la PAQ-reducció). *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores existeixen un únic nombre natural r satisfent $r \leq \min(m, n)$, una matriu elemental P d'ordre m sobre \mathbb{K} i una matriu elemental Q d'ordre n sobre \mathbb{K} tals que*

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Demostració. Denotem $A = (a_{i,j})$. Si $a_{i,j} = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ aleshores tenim $r = 0$ i hem acabat. Suposem doncs que existeixen $i \in \{1, \dots, m\}$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ tals que $a_{i,j} \neq 0$.

Per la proposició 4.2.8 tenim que existeix una matriu elemental P d'ordre m sobre \mathbb{K} tal que PA està esglaonada per files. Per la definició de [matriu esglaonada](#) (4.2.7) tenim que existeixen j_i per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$ amb $j_1 < \dots < j_r$ tals que per a tot $j < j_i$ tenim $a_{i,j} = 0$ i $a_{i,j_i} = 1$. Fent les transformacions elementals

$$C_1 \leftrightarrow C_{j_1}, \quad C_2 \leftrightarrow C_{j_2}, \dots, C_r \leftrightarrow C_{j_r}$$

a la matriu PA obtenim la matriu

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{r-1,r} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right],$$

i fent a la matriu A_1 les transformacions elementals

$$\begin{aligned} C_{k_1} &\rightarrow C_{k_1} - b_{1,k_1} C_1, & \text{per a } k_1 \in \{2, \dots, n\} \\ C_{k_2} &\rightarrow C_{k_2} - b_{2,k_2} C_2, & \text{per a } k_2 \in \{3, \dots, n\} \\ &\vdots \\ C_{k_r} &\rightarrow C_{k_r} - b_{r,k_r} C_r, & \text{per a } k_r \in \{r+1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

i per la proposició 4.2.2 tenim que existeix una matriu P d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

i per la definició de 4.2.2 tenim que les matrius P i Q són matrius elementals.

Veiem ara que r és únic. Suposem que existeixen un nombre natural $s \leq \min(m, n)$, una matriu elemental P_1 d'ordre m sobre \mathbb{K} i una matriu elemental Q_1 d'ordre n sobre \mathbb{K} tals que

$$P_1 A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Hem de veure que $r = s$. Suposem que $r \leq s$.

Tenim que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

i

$$P_1AQ_1 = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Com que, per la proposició 4.2.6, les matrius P , Q , P_1 i Q_1 són invertibles tenim que

$$A = P^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] Q^{-1} = P_1^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] Q_1^{-1},$$

i per tant

$$P_1P^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] Q_1^{-1}Q.$$

Denotem $P_2 = P_1P^{-1}$, $Q_2 = Q_1^{-1}Q$, $P_2 = (p_{i,j})$ i $Q_2 = (q_{i,j})$ i tenim

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} p_{1,1} & \cdots & p_{1,r} & p_{1,r+1} & \cdots & p_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s,1} & \cdots & p_{s,r} & p_{s,r+1} & \cdots & p_{s,m} \\ \hline p_{s+1,1} & \cdots & p_{s+1,r} & p_{s+1,r+1} & \cdots & p_{s+1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,r} & p_{m,r+1} & \cdots & p_{m,m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \\ & = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} q_{1,1} & \cdots & q_{1,r} & q_{1,r+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s,1} & \cdots & q_{s,r} & q_{s,r+1} & \cdots & q_{s,n} \\ \hline q_{s+1,1} & \cdots & q_{s+1,r} & q_{s+1,r+1} & \cdots & q_{s+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n,1} & \cdots & q_{n,r} & q_{n,r+1} & \cdots & q_{n,n} \end{array} \right], \end{aligned}$$

i per la proposició 4.1.34 tenim que

$$\left[\begin{array}{cccccc} p_{1,1} & \cdots & p_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s,1} & \cdots & p_{s,r} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{s+1,1} & \cdots & p_{s+1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,r} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc} q_{1,1} & \cdots & q_{1,r} & q_{1,r+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s,1} & \cdots & q_{s,r} & q_{s,r+1} & \cdots & q_{s,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Per tant

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} q_{1,r+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{s,r+1} & \cdots & q_{s,n} \end{array} \right]$$

i trobem que

$$Q_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} q_{1,1} & \cdots & q_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s,1} & \cdots & q_{s,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline q_{s+1,1} & \cdots & q_{s+1,r} & q_{s+1,r+1} & \cdots & q_{s+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n,1} & \cdots & q_{n,r} & q_{n,r+1} & \cdots & q_{n,n} \end{array} \right].$$

Denotem per tant

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} Q'_2 & 0_{s \times (n-r)} \\ \hline Q''_2 & Q'''_2 \end{array} \right].$$

Ara bé, pel que hem vist abans, existeixen un nombre natural $t \leq \min(r, s)$, una matriu invertible P_3 d'ordre s sobre \mathbb{K} i una matriu invertible Q_3 d'ordre r sobre \mathbb{K} tals que

$$P_3 Q''_2 Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} I_t & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

i com que, per hipòtesi, $r \leq s$ tenim $t \leq r \leq s$.

Per tant per la proposició 4.1.34 tenim que

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} P_3 & 0_{s \times (n-s)} \\ \hline 0_{(n-s) \times s} & I_{n-s} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} Q'_2 & 0_{s \times (n-r)} \\ \hline Q''_2 & Q'''_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} Q_3 & 0_{r \times (n-r)} \\ \hline 0_{(n-r) \times r} & I_{n-r} \end{array} \right] = \\ = \left[\begin{array}{c|c|c} I_t & 0_{t \times (r-t)} & 0_{s \times (n-r)} \\ \hline 0_{(r-t) \times t} & 0_{(s-t) \times (r-t)} & Q'''_2 \end{array} \right] = B. \end{aligned}$$

Per la proposició 4.1.22 trobem que la matriu B és invertible. Ara bé, per l'observació 4.1.21 trobem que ha de ser $r - t = s - t = 0$, i per tant $r = s$, com volíem veure. La demostració del cas $s \leq r$ és anàloga. \square

Definició 4.2.11 (Rang). Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , P una matriu invertible d'ordre n sobre \mathbb{K} i Q una matriu invertible d'ordre m sobre \mathbb{K} tals que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Aleshores direm que r és el rang de A i denotarem $\text{rang}(A) = r$.

Observem que aquesta definició té sentit pel [Teorema de la PAQ-reducció](#) (4.2.10).

Proposició 4.2.12. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$.*

Demostració. Per la definició de [rang d'una matriu](#) (4.2.11) tenim que existeixen una matriu P invertible d'ordre n sobre \mathbb{K} i una matriu Q invertible d'ordre m sobre \mathbb{K} tals que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ara bé, per la proposició 4.1.27 tenim que

$$Q^t A^t P^t = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Per la proposició 4.1.28 tenim que les matrius Q^t i P^t són invertibles, i per tant, per la definició de rang d'una matriu (4.2.11) tenim que $\text{rang } A^t = r$. \square

Proposició 4.2.13. *Sigui A una matriu invertible d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A és una matriu elemental.*

Demostració. Pel Teorema de la PAQ-reducció (4.2.10) tenim que existeixen dues matrius invertibles P i Q d'ordre n sobre \mathbb{K} tals que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ara bé, per la proposició 4.1.22 tenim que la matriu

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

ha de ser invertible, i per l'observació 4.1.21 trobem que ha de ser $r = n$. Per tant tenim $PAQ = I_n$ i tenim que $A = P^{-1}Q^{-1}$, i per l'observació 4.2.4 tenim que A és una matriu elemental. \square

Corol·lari 4.2.14. *Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A és invertible si i només si $\text{rang}(A) = n$.*

Observació 4.2.15. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , P una matriu invertible d'ordre m sobre \mathbb{K} i Q una matriu invertible d'ordre n sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(PAQ).$$

4.3 Determinant d'una matriu

4.3.1 Propietats dels determinants

Definició 4.3.1 (Determinant). Sigui \mathbb{K} un cos i $\det: M_n(\mathbb{K})$ una aplicació que satisfà per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ i $j \in \{i+1, \dots, n\}$ i per a tot $C_i \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$

1. Per a tot $C'_j \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ es satisfà

$$\begin{aligned} \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i + C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n) &= \\ &= \det(C_1, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n). \end{aligned}$$

2. Per a tot $\alpha \in \mathbb{K}$ es satisfà

$$\det(C_1, \dots, C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_n)$$

3. Si $C_i = C_j$ es satisfà

$$\det(C_1, \dots, C_n) = 0.$$

4. $\det(I_n) = 1$.

Aleshores direm que \det és un determinant.

Proposició 4.3.2.

Part III

Coses per fer

Capítol 5

Aviat

Podeu trobar la versió actualitzada d'aquest pdf seguint aquest [link](#).

5.1 Àlgebra lineal

5.1.1 Definicions

Definició 5.1.1 (Forma bilineal definida estrictament positiva o negativa).
Sigui M una forma bilineal simètrica. Preguntar a en Cedò.

Definició 5.1.2 (Norma d'una aplicació lineal).

5.1.2 Proposicions

Proposició 5.1.3. *Vectors linealment independents \iff determinant no nul.*

5.1.3 Teoremes

Teorema 5.1.4. *Sigui $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu simètrica. Aleshores A és definida positiva si i només si*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{vmatrix} > 0$$

per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostració. Per inducció sobre n . □

5.2 Funcions de variable real

5.2.1 Definicions

Definició 5.2.1 (Límit).

Definició 5.2.2 (Funció contínua). Sigui f una funció. Direm que f és contínua en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definició 5.2.3 (Partició, poligonal i longitud d'una poligonal). Sigui (a, b) un interval de \mathbb{R} . Direm que una partició de (a, b) és un conjunt de escalars $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ que compleixen $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Direm que t_0, \dots, t_n són els nodes de la partició.

Sigui $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció. Definirem la poligonal P_n d'una partició en una funció f com

$$P_n = f(t_0), \dots, f(t_n).$$

Definim la longitud de la poligonal P_n com

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$

Definició 5.2.4 (Classe de diferenciabilitat d'una funció). Sigui f una funció n -vegades diferenciable amb $f^{(n)}$ contínua. Direm que f és de classe \mathcal{C}^n o que $f \in \mathcal{C}^n$.

Definició 5.2.5 (Funció monòtona). Sigui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Direm que f és monòtona si, per a qualsevol $x, y \in [a, b]$, $x > y$ implica $f(x) \geq f(y)$.

Definició 5.2.6 (Notació de Landau). $A(h) = o(B(h)) \dots$

5.2.2 Proposicions

Proposició 5.2.7. *Siguin $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval i $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, si f és derivable en un punt $a \in I$, f és contínua en a .*

Proposició 5.2.8. *Sigui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i monòtona. Aleshores f és integrable Riemann.*

5.2.3 Teoremes

Teorema 5.2.9 (Equivalència entre normes). *Si $q(x)$ és una norma existeixen $m, M \in \mathbb{R}^+$ tals que $m\|x\| \leq q(x) \leq M\|x\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}^m$.*

Teorema 5.2.10 (Teorema del Valor Mig). *hmm trivial*

Teorema 5.2.11 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz).

Teorema 5.2.12 (Teorema de Taylor). *Siguin (a, b) un interval obert de \mathbb{R} i $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe \mathcal{C}^n . Aleshores, per a dos punts $x, c \in (a, b)$, amb $x < c$, existeix un punt $x_1 \in (x, c)$ tal que*

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - c)^n.$$

Teorema 5.2.13 (Teorema de Weierstrass). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, donat un compacte $S \subset U$, si f és contínua en S , f té un màxim i un mínim absoluts en S .*

Teorema 5.2.14 (Teorema del sandvitx).

Teorema 5.2.15 (Teorema de Rolle). *Sigui $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Aleshores existeix un cert $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 5.2.16 (Teorema Fonamental del Càlcul). *Siguin $[a, b]$ un interval de \mathbb{R} , $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

una funció. Aleshores $F(x)$ és derivable en $[a, b]$ i $F'(x) = f(x)$ per a tot x de $[a, b]$.

Teorema 5.2.17 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Successió acotada té parcial convergent*

5.3 Trobar lloc per tot això

Definició 5.3.1 (Conjunt obert, tancat...).

Definició 5.3.2 (Continuïtat uniforme). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^m$ dos oberts i $f: U \rightarrow V$ una funció. Aleshores direm que f és uniformement contínua en un conjunt $S \subseteq U$ si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tals que*

$$d_U(x, y) < \varepsilon \text{ i } d_V(f(x) - f(y)) < \delta$$

per a tot punt $x, y \in U$.

Teorema 5.3.3 (Teorema de Heine). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts, $S \subset U$ un compacte i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció contínua. Aleshores f és uniformement contínua en S .*

Definició 5.3.4 (Funció indicatriu). *Siguin X un conjunt i $A \subseteq X$ un subconjunt de X . Definim la funció indicatriu de A com una funció*

$$1_A: X \rightarrow \{0, 1\}$$

tal que

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Part IV

Càlcul en diverses variables i optimització

Capítol 6

Càlcul diferencial

6.1 Arcs i conjunts connexos

6.1.1 Arcs en múltiples variables

Definició 6.1.1 (Arcs a l'espai). Siguin $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció i Γ el conjunt definit per

$$\Gamma = \{f(t) \in \mathbb{R}^m \mid t \in (a, b)\},$$

aleshores direm que Γ és un arc a \mathbb{R}^m . També direm que f defineix o recorre aquest arc. Així mateix donem les següents definicions:

1. Direm que Γ és un arc continu si f és contínua en (a, b) .
2. Direm que Γ és un arc simple si f és injectiva en (a, b) .
3. Si f està definida en $[a, b]$ direm que f va de $f(a)$ a $f(b)$ o que $f(a)$ n'és el punt inicial i $f(b)$ el punt final. Si $f(a) = f(b)$ direm que Γ és un arc tancat.
4. Direm que Γ és un arc regular si f és derivable en (a, b) .
5. Direm que Γ és un arc de classe \mathcal{C}^n si $f^{(n)}$ existeix i és contínua en (a, b) .

Definició 6.1.2 (Longitud d'un arc continu). Sigui Γ un arc continu i f una manera de recórrer Γ donada per

$$f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Amb $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Considerem la partició $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Observem que els punts donats per $f(t_i)$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$ determinen una poligonal, P_n , la longitud de la qual és, per la definició de [longitud d'una poligonal \(5.2.3\)](#)

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$

Aleshores definim la longitud de f com

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n).$$

Direm que els arcs amb recorreguts de longitud finita són arcs rectificables.

Proposició 6.1.3. *Sigui Γ un arc de classe \mathcal{C}^1 . Aleshores Γ és rectificable.*

Demostració. Sigui f una funció que recorre Γ tal que

$$\begin{aligned} f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto (x_1(t), \dots, x_m(t)). \end{aligned}$$

Donada una partició de (a, b) , $a = t_0 < \dots < t_n = b$ que defineix una poligonal $P_n = f(t_0), \dots, f(t_n)$. Aleshores la longitud de la poligonal és, per la definició de [partició \(5.2.3\)](#),

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i))^2}.$$

Per la proposició [5.2.7](#) f és contínua en (a, b) , i per tant pel [Teorema del Valor Mig \(5.2.10\)](#) tenim

$$x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i) = x'_j(\xi_{i,j})(t_{i+1} - t_i),$$

amb $t_i < \xi_{i,j} < t_{i+1}$, per a tot $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Per tant

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\sum_{j=1}^m (x'_j(\xi_{i,j}))^2}. \quad (6.1)$$

Ara volem veure que $\xi_{i,j} = t_i$ quan n tendeix a infinit. Observem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{i+1}.$$

I com que $t_i < \xi_{i,j} < t_{i+1}$ tenim que $\xi_{i,j} = t_i$ per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$. Així veiem que si $n \rightarrow \infty$ podem reescriure [\(6.1\)](#) com

$$L(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

I ja hem acabat. Com que $f \in \mathcal{C}^1$ tenim f' contínua, i $a, b \in \mathbb{R}$, aquesta integral és finita i Γ és rectificable, com volíem veure. \square

6.1.2 Oberts connexos

Definició 6.1.4 (Conjunt arc-connex o connex). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert. Direm que U és arc-connex si donats dos punts $P, Q \in U$ existeix una funció f que defineix un arc continu tal que $f: [a, b] \longrightarrow U$ amb $P = f(a)$, $Q = f(b)$. Direm que U és connex si el segment que els uneix està tot dins U .

Proposició 6.1.5. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i U_1, U_2 dos subconjunts de U arc-connexos amb $U_1 \cup U_2 = U$ tals que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Aleshores U és arc-connex.*

Demostració. Siguin P, Q dos punts en U tals que $P \in U_2^{\circ}$ i $Q \in U_1^{\circ}$, i $R \in U_1 \cap U_2$ un altre punt. Com que U_1 i U_2 són arc-connexos, per la definició de [conjunt arc-connex \(6.1.4\)](#) existeixen dos arcs continus f, g tals que

$$f: [a, b] \longrightarrow U_1, \quad g: [b, c] \longrightarrow U_2,$$

on $f(a) = P$, $f(b) = g(b) = R$ i $g(c) = Q$. Aleshores definim la funció

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ g(t) & \text{si } b < t \leq c. \end{cases}$$

Tenim que h defineix un arc continu en U , i per la definició de [longitud d'un arc continu \(6.1.2\)](#), U és arc-connex. \square

Definició 6.1.6 (Distància en un arc-connex). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un arc-connex, siguin $P, Q \in U$ i F el conjunt de totes les funcions f que defineixen un arc continu en U amb $f(a) = P$, $f(b) = Q$. Definim la distància entre P i Q en U com

$$d_U(P, Q) = \inf_{f \in F} L(f).$$

Observació 6.1.7. Notem que si U és connex $d_U(P, Q) = \|P - Q\|$.

Proposició 6.1.8. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un arc-connex i $P, Q, R \in U$ tres punts. Aleshores

1. $d_U(P, Q) = d_U(Q, P) \geq 0$
2. $d_U(P, Q) = 0 \iff P = Q$
3. $d_U(P, Q) \leq d_U(P, R) + d_U(R, Q)$ (desigualtat triangular)

Demostració. Sigui $f: [a, b] \rightarrow U$ una funció contínua amb $f(a) = P$ i $f(b) = Q$, i amb $L(f) = \inf_{f \in F} L(f)$, on F és el conjunt de funcions contínues de $[a, b]$ en U que van de P a Q .

Per veure el punt (1) fem

$$\begin{aligned} d_U(P, Q) &= \inf_{f \in F} L(f) \\ &= \inf_{f \in F} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\sum_{j=1}^d (x'_j(\xi_{i,j}))^2} \right) \\ &= \inf_{f \in F} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)(t_{n-(i+1)} - t_{n-i}) \sqrt{\sum_{j=1}^d (x'_j(\xi_{i,j}))^2} \right) \\ &= \inf_{f \in F} (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{n-(i+1)} - t_{n-i}) \sqrt{\sum_{j=1}^d (x'_j(\xi_{i,j}))^2} \right) \\ &= \inf_{f \in F} (-1) \int_a^b \|f'(t)\| dt \\ &= \inf_{f \in F} \int_b^a \|f'(t)\| dt = \inf_{f \in F} L(f) = d_U(Q, P) \geq 0. \end{aligned}$$

Continuem veient el punt (2). Suposem $P = Q$ i considerem, amb $\varepsilon > 0$, la bola oberta $B(\varepsilon, P) \subset U$. Aquesta bola és connexa i, pel corollari 6.1.7, $d_U(P, Q) = \|P - Q\| = 0 \iff P = Q$.

Acabem veient el punt (3). Sigui F_1 el conjunt de funcions contínues en U que van de P a R i F_2 el conjunt de funcions contínues en U que van de R a Q . Aleshores

$$d_U(P, Q) = \inf_{f \in F} L(f) \leq \inf \left(\inf_{F_1} L(g) + \inf_{F_2} L(h) \right) = d_U(P, R) + d_U(R, Q).$$

Observem que aquestes són les mateixes propietats de una distància. \square

6.2 Funcions diferenciables

6.2.1 Diferencial d'una funció en múltiples variables

Definició 6.2.1 (Derivada direccional). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $t \in \mathbb{R}$ un escalar, $a \in U$ un punt, \vec{u} un vector de \mathbb{R}^d i f una funció definida per

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto (f_1(a), \dots, f_m(a)), \end{aligned}$$

i considerem, per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$, els límits

$$D_{\vec{u}}f_i(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + t\vec{u}) - f_i(a)}{t}.$$

Si tots aquests límits existeixen, direm que la derivada de f en direcció \vec{u} és

$$D_{\vec{u}}f(a) = (D_{\vec{u}}f_1(a), \dots, D_{\vec{u}}f_m(a)).$$

Si \vec{u} és l' i -èsim vector de la base canònica utilitzarem la notació $D_i f(a)$.

Proposició 6.2.2. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció, $D_{\vec{u}}f(a)$ la seva derivada direccional respecte el vector \vec{u} de \mathbb{R}^d i $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar.* Aleshores

$$D_{\lambda\vec{u}}f(a) = \lambda D_{\vec{u}}f(a).$$

Demostració. Tenim que, per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} D_{\lambda\vec{u}}f_i(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + \lambda t\vec{u}) - f_i(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lambda \frac{f_i(a + \lambda t\vec{u}) - f_i(a)}{\lambda t} \\ &= \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + \lambda t\vec{u}) - f_i(a)}{\lambda t} = \lambda D_{\vec{u}}f_i(a). \end{aligned} \quad \square$$

Definició 6.2.3 (Diferencial d'una funció). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció i $a \in U$ un punt. Direm que el diferencial de f en a és una aplicació lineal $df(a): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, donat un vector \vec{h} de \mathbb{R}^d

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

Direm que f és diferenciable en a si existeix aquest $df(a)$.

Observació 6.2.4. *Observem que en aquesta definició, si $d = 1$, f és diferenciable en $a \iff f$ és derivable en a , i $df(a)(\vec{h}) = \vec{h}f'(a)$ (Si $d = 1$, multiplicar per un vector de \mathbb{R} és com multiplicar per un escalar).*

Proposició 6.2.5. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores f és contínua en a .*

Demostració. Sigui $df(a)$ el diferencial de f en a . Per la definició de [diferencial d'una funció](#) (6.2.3) tenim que, per a qualsevol vector \vec{h} de \mathbb{R}^d

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

Com que $df(a)$ és lineal, $df(a)(\vec{h}) \rightarrow (0, \dots, 0) \iff \|\vec{h}\| \rightarrow 0$. Així veiem que

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} f(a + \vec{h}) - f(a) - df(a)(\vec{h}) = o(\vec{h}).$$

I això compleix la definició de [funció contínua](#) (5.2.2), per tant f és contínua en el punt a . \square

Proposició 6.2.6. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a \in U$ un punt i f una funció tal que*

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto (f_1(a), \dots, f_m(a)). \end{aligned}$$

Aleshores

f és diferenciable en $a \iff f_i$ és diferenciable en a per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostració. Per la definició de [diferencial d'una funció](#) (6.2.3) tenim que, per a qualsevol vector \vec{h} de \mathbb{R}^d

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

El que és equivalent a

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(a + \vec{h}) - f(a) - df(a)(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Sabent que $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$ podem entendre aquest límit com el següent, amb un vector al numerador, que descomponem com

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{(f_1(a + \vec{h}) - f_1(a) - df_1(a)(\vec{h}), \dots, f_m(a + \vec{h}) - f_m(a) - df_m(a)(\vec{h}))}{\|\vec{h}\|} = 0$$

si i només si

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f_i(a + \vec{h}) - f_i(a) - df_i(a)(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$.

Tenint en compte la definició de [diferencial d'una funció](#) (6.2.3), és equivalent a dir que, per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i és diferenciable en el punt a . \square

Proposició 6.2.7. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores tenim que*

1. *Donat un vector \vec{u} de \mathbb{R}^d , $D_{\vec{u}}f(a)$ existeix i $df(a)(\vec{u}) = D_{\vec{u}}f(a)$.*

2. El diferencial de f en a , $df(a)$, és únic.

Demostració. Sigui \vec{u} un vector de \mathbb{R}^d . Tenim que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

$$f(a + \lambda \vec{u}) = f(a) + df(a)(\lambda \vec{u}) + o(\lambda \vec{u})$$

$$f(a + \lambda \vec{u}) - f(a) = \lambda df(a)(\vec{u}) + o(\lambda \vec{u})$$

$$\frac{f(a + \lambda \vec{u}) - f(a)}{\lambda} = df(a)(\vec{u}) + \frac{o(\lambda \vec{u})}{\lambda}$$

Per tant, amb $\lambda \rightarrow 0$, per la definició de [derivada direccional](#) (6.2.1) tenim

$$D_{\vec{u}}f(a) = df(a)(\vec{u}).$$

Amb aquesta demostració també es veu la unicitat del diferencial d'una funció en un punt. \square

Observació 6.2.8. Com a conseqüència del primer apartat veiem que si f és diferenciable en a existeixen totes les seves derivades direccional i que aquestes compleixen que, donats dos vectors \vec{u}, \vec{v} i dos escalars λ, μ , $D_{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}f(a) = \lambda D_{\vec{u}}f(a) + \mu D_{\vec{v}}f(a)$.

Teorema 6.2.9 (Condicó suficient per a la diferenciabilitat). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció, $a \in U$ un punt i $B(a, \varepsilon)$, una bola centrada en a de radi $\varepsilon > 0$. Si les derivades direccional de f , $D_i f(x)$, existeixen per a tot punt $x \in B(a, \varepsilon)$, per a tot $i \in \{1, \dots, d\}$ i són contínues en a , aleshores f és diferenciable en a .*

Demostració. Donat un vector \vec{h} de \mathbb{R}^d , considerem la diferencia

$$f(a + \vec{h}) - f(a),$$

amb $a = (a_1, \dots, a_d)$ i $\vec{h} = (h_1, \dots, h_d) = \sum_{i=1}^d h_i \vec{e}_i$, on \vec{e}_i és l' i -èsim vector de la base canònica, i denotarem $\vec{h}_n = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$ per a $1 \leq n \leq d$ i $\vec{h}_0 = (0, \dots, 0)$. Escrivim la suma telescòpica

$$f(a + \vec{h}) - f(a) = \sum_{i=1}^d \left(f(a + \vec{h}_i) - f(a + \vec{h}_{i-1}) \right). \quad (6.2)$$

El primer terme d'aquesta suma telescòpica és $f(a + h_1 \vec{e}_1) - f(a)$, i per la definició de [derivada direccional](#) (6.2.1) això és

$$f(a + h_1 \vec{e}_1) - f(a) = h_1 D_1 f(a) + h_1 o(\vec{h}),$$

i la resta de termes de (6.2) són

$$f(a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k) - f(a + \vec{h}_{k-1}).$$

Veiem que aquestes expressions varien només en $h_k \vec{e}_k$, que correspon a la k -èsima component, i com que les derivades parcials de f existeixen, això vol dir que aquestes expressions són contínues, per tant podem aplicar el [Teorema del](#)

Valor Mig (5.2.10) per a funcions d'una variable i tenim que, per a tot $2 \leq k \leq d$ existeix un escalar ξ_k tal que

$$f(a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k) - f(a + \vec{h}_{k-1}) = h_k D_k f(\xi_k)$$

on ξ_k està al segment que uneix $a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k$ i $a + \vec{h}_{k-1}$.

Ara notem que quan $\vec{h} \rightarrow 0$ tindrem $a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k \rightarrow a$ i com que, per hipòtesi, les derivades direccionals són contínues

$$h_k D_k f(\xi_k) = h_k D_k f(a) + h_k o(\vec{h})$$

i obtenim

$$\begin{aligned} f(a + \vec{h}) - f(a) &= \sum_{i=1}^d h_i D_i f(a) + \sum_{i=1}^d h_i o(\vec{h}) \\ &= \sum_{i=1}^d D_{h_i \vec{e}_i} f(a) + \sum_{i=1}^d h_i o(\vec{h}) \end{aligned}$$

i mentre $a + \vec{h} \in B(a, \varepsilon)$, el que tenim satisfà la definició de **diferencial d'una funció** (6.2.3) per la proposició 6.2.7, i per tant f és diferenciable en a . \square

Nota 6.2.10. Notem que en aquesta demostració només hem hagut d'utilitzar la continuïtat de $d - 1$ de les derivades parcials de f en a . per tant en veritat tenim prou amb veure que totes les derivades parcials de f existeixen en a i que almenys totes menys una d'aquestes són contínues en a per poder dir que f és diferenciable en a , però a aquest curs només es dona l'enunciat reduït.

Proposició 6.2.11. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dues funcions diferenciables en un punt $a \in U$ amb diferencials $df(a), dg(a)$, respectivament. Aleshores $f + g$ és diferenciable en a i té per diferencial $df(a) + dg(a)$.

Demostració. Siguin \vec{u} un vector de \mathbb{R}^d i $D_{\vec{u}}f(a)$, $D_{\vec{u}}g(a)$ les derivades parcials de f i g , respectivament, en el punt a amb direcció \vec{u} . La derivada parcial de $f + g$ en a amb direcció \vec{u} és $D_{\vec{u}}(f + g)(a)$. Com que les derivades direccionals es comporten, per definició, com les derivades d'una variable, tenim

$$D_{\vec{u}}f(a) + D_{\vec{u}}g(a) = D_{\vec{u}}(f + g)(a),$$

i per la proposició 6.2.7, com que l'argument no depèn de \vec{u} , ja hem acabat. \square

6.2.2 La Matriu Jacobiana i la regla de la cadena

Definició 6.2.12 (Matriu Jacobiana). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores definim la matriu Jacobiana de f en a com

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_d f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Proposició 6.2.13. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$, $df(a)$ el diferencial de f en el punt a i $\vec{h} = (h_1, \dots, h_d)$ un vector de \mathbb{R}^d . Aleshores*

$$df(a)(\vec{h}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix},$$

és a dir, la matriu Jacobiana de f en a és la matriu associada del diferencial de f en el punt a .

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la definició de [diferencial d'una funció \(6.2.3\)](#) i la definició de [matriu Jacobiana \(6.2.12\)](#).

Donada la base canònica de \mathbb{R}^d , $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$, tenim

$$df(a)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^d h_i df(a)(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^d h_i D_i f(a),$$

i si $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$,

$$D_i f(a) = \begin{bmatrix} D_i f_1(a) \\ \vdots \\ D_i f_m(a) \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Per tant, podem reescriure aquestes dues igualtats com

$$df(a)(\vec{h}) = [D_1 f(a) \cdots D_d f(a)] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix}.$$

On, recordant (6.3),

$$[D_1 f(a) \cdots D_d f(a)] = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_d f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Així que

$$df(a)(\vec{h}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_d f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix}.$$

Així veiem que la matriu Jacobiana de f en a està ben definida com a matriu associada del diferencial de f en a . \square

Observació 6.2.14. *Suposem $m = 1$. Recordant la definició de [diferencial d'una funció \(6.2.3\)](#) i denotant $x = a + \vec{h}$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $x = (x_1, \dots, x_d)$*

$$f(x) - f(a) - o(\|x - a\|) = df(a)(x - a)$$

i per la definició de *matriu Jacobiana* (6.2.12) tenim

$$f(x) - f(a) - o(\|x - a\|) = [D_1f(a) \ \cdots \ D_df(a)] \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_d - a_d \end{bmatrix}.$$

El que, quan $\vec{h} \rightarrow 0$, ens diu que és una aproximació a

$$(x_1 - a_1)D_1f(a) + \cdots + (x_d - a_d)D_df(a) = f(x) - f(a),$$

el que és un espai afí de dimensió $d + 1$ tangent a f en el punt a .

Teorema 6.2.15 (Regla de la cadena). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$ i siguin $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un obert i $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ una funció diferenciable en un punt $f(a) = b \in V$. Aleshores $g(f(x))$ és diferenciable en a amb diferencial $dg(b)(df(a)(\vec{h}))$, on $df(a)$ i $dg(b)$ són els diferencials de f i g en a i b , respectivament, i \vec{h} és un vector de \mathbb{R} .*

Demostració. Per la definició de *diferencial d'una funció* (6.2.3), tenim

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

Reescrivim amb $x = a + \vec{h}$ i $y = b + \vec{h}$

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + o(x - a),$$

$$g(y) = g(b) + dg(b)(y - b) + o(y - b).$$

Si fem $y = f(x)$ i substituïm en la segona equació obtenim

$$g(f(x)) = g(b) + dg(b)(f(a) + df(a)(x - a) + o(x - a) - b) + o(f(x) - b)$$

Si simplifiquem i utilitzem la linealitat del diferencial obtenim

$$g(f(x)) = g(b) + dg(b)(df(a)(x - a)) + dg(b)(o(x - a)) + o(f(x) - b)$$

Ara només hem de veure que $dg(b)(o(x - a))$ i $o(f(x) - b)$ són $o(x - a)$. El primer el podem veure amb que

$$\|dg(b)(o(x - a))\| \leq \|dg(b)\| o(\|x - a\|).$$

I com que quan $x \rightarrow a$, $f(a) \rightarrow b$ (donat per $\vec{h} \rightarrow 0$), ja que f és contínua. Aleshores podem escriure

$$f(x) - b = df(a)(x - a) + o(x - a),$$

i observant el cas $x \rightarrow a$ trobem que $\|f(x) - b\| \leq C\|x - a\|$, on $C \in \mathbb{R}$ és la norma de l'aplicació lineal $dg(b)$. \square

6.2.3 Gradient, punts crítics i extrems relatius

Definició 6.2.16 (Funció escalar). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Direm que f és una funció escalar de d variables si f és diferenciable per a tot $x \in U$.

Definició 6.2.17 (Conjunts de nivell). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores direm que, per a tot $C \in \mathbb{R}$,

$$L_C = \{x \in U \mid f(x) = C\}$$

és el conjunt de nivell C de la funció f .

Definició 6.2.18 (Gradient d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar. Definim el gradient de f en un punt $a \in U$ com el vector

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_d f(a)).$$

Proposició 6.2.19. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar i $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$ un vector de \mathbb{R}^d . Aleshores

$$\langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle = D_{\vec{u}} f(a).$$

Demostració. Ho veiem per la definició de [gradient d'una funció](#) (6.2.18), la definició de [derivada direccional](#) (6.2.1) i l'observació 6.2.8. Tenim

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle &= u_1 D_1 f(a) + \dots + u_d D_d f(a) && \text{(gradient d'una funció (6.2.18))} \\ &= D_{u_1 \vec{e}_1} f(a) + \dots + D_{u_d \vec{e}_d} f(a) && \text{(derivada direccional (6.2.1))} \\ &= D_{u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_d \vec{e}_d} f(a) && \text{(Observació 6.2.8)} \\ &= D_{\vec{u}} f(a), \end{aligned}$$

com volíem demostrar. □

Observació 6.2.20. El gradient d'una funció en un punt és perpendicular al conjunt de nivell que conté el punt.

Proposició 6.2.21. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar i $D_{\vec{u}} f(a)$ la derivada direccional de f en la direcció \vec{u} , on \vec{u} és un vector de \mathbb{R}^d . Aleshores $D_{\vec{u}} f(a)$ és màxim si i només si $\vec{u} = \lambda \nabla f(a)$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostració. Pel [Teorema de la Desigualtat de Cauchy-Schwarz](#) (5.2.11) tenim, amb $\|\vec{u}\| = 1$

$$\begin{aligned} -\|\nabla f(a)\| &\leq \|\langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle\| \leq \|\nabla f(a)\| \\ -\|\nabla f(a)\| &\leq \|D_{\vec{u}} f(a)\| \leq \|\nabla f(a)\|, \end{aligned}$$

però si prenem $\vec{u} = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ tenim $D_{\vec{u}} f(a) = \|\nabla f(a)\|$. Amb això es veu que el gradient d'una funció en un punt ens dona la direcció de màxim creixement de la funció en el punt. □

Observació 6.2.22. Veiem que, donat que $\nabla f(a)$ ens diu la direcció de màxim creixement de f en el punt a , $-\nabla f(a)$ ens dirà la direcció de màxim decreixement de f en a .

Definició 6.2.23 (Extrems relatius i punts crítics). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a \in U$ un punt i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar. Direm que el punt a és un extrem relatiu de f si hi ha una bola de radi $r > 0$ centrada en el punt a , $B(a, r)$, tal que, per a tot $x \in B(a, r)$, $f(a) \geq f(x)$ (direm que a és un màxim relatiu) o tal que $f(a) \leq f(x)$ (direm que a és un mínim relatiu).

Si $f(a) \geq f(x)$ o $f(a) \leq f(x)$, per a tot $x \in U$, direm que a és un màxim o un mínim absolut de f en U , respectivament.

També direm que a és un punt crític si $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Proposició 6.2.24. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar diferenciable en a . Aleshores

$$a \text{ és un màxim o un mínim relatiu de } f \implies \nabla f(a) = \vec{0}.$$

Demostració. Si \vec{u} és un vector qualsevol de \mathbb{R}^d , la funció $f(a + t\vec{u})$, amb $t \in \mathbb{R}$ té un extrem relatiu en $t = 0$, i per tant la seva derivada ha de ser 0; $D_{\vec{u}}f(a) = 0$, i com això no depèn de \vec{u} , per la definició de [gradient d'una funció](#) (6.2.18), $D_{\vec{u}} = \langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle = 0$, el que és equivalent a $\nabla f(a) = \vec{0}$. \square

Observació 6.2.25. Amb la definició de [extrem relatiu](#) (6.2.23) i la proposició 6.2.24 tenim que el punt a és un màxim o mínim relatiu de f si a és un punt crític de f .

Definició 6.2.26 (Punt de sella d'una funció). Sigui f una funció i a un punt del seu domini. Si a és un punt crític però no és ni màxim ni mínim local direm que a és un punt de sella de f .

Aquesta definició té sentit per l'observació 6.2.25.

6.2.4 Canvis de coordenades diferenciables

Definició 6.2.27 (Homeomorfisme i difeomorfisme). Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $\Phi: U \longleftrightarrow V$ una aplicació bijectiva tal que Φ, Φ^{-1} siguin contínues. Aleshores direm que Φ és un homeomorfisme. Si pensem Φ com

$$\begin{aligned} \Phi: U &\longleftrightarrow V \\ a &\longmapsto (v_1(a), \dots, v_d(a)) \end{aligned}$$

aleshores donat un punt $a \in U$, interpretem $v_1(a), \dots, v_d(a)$ com les noves coordenades del punt a . Amb aquest nou sistema els punts que fan d'eixos de coordenades, que són les famílies de punts definits per

$$\{x \in U \mid v_i(x) = v_j(a) \iff i \neq j, \text{ per a tot } i, j \in \{1, \dots, d\}\},$$

que són tots els punts amb totes les coordenades iguals, excepte la j -èsima.

Si Φ, Φ^{-1} són diferenciables direm que és un canvi de coordenades diferenciable o que és un difeomorfisme.

Proposició 6.2.28. Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $\Phi: U \longleftrightarrow V$ un difeomorfisme. Aleshores

$$d(\Phi^{-1}) = (d\Phi)^{-1}.$$

Demostració. Suposem que Φ és diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores per la definició de [difeomorfisme \(6.2.27\)](#) tenim que Φ^{-1} existeix i és diferenciable en el punt $\Phi(a) \in V$. Volem veure que $d(\Phi^{-1}) = (d\Phi)^{-1}$.

Considerem la funció $\Phi^{-1}(\Phi)$ i un vector \vec{h} de \mathbb{R}^d . Aleshores el diferencial de $\Phi^{-1}(\Phi)$ en a aplicat a \vec{h} és, per [la regla de la cadena \(6.2.15\)](#),

$$\text{Id}_U(\vec{h}) = d(\Phi^{-1}(\Phi))(a)(\vec{h}) = d(\Phi^{-1})(\Phi(a))(d\Phi(a)(\vec{h})).$$

Anàlogament, el diferencial de $\Phi(\Phi^{-1})$ en $\Phi(a)$ aplicat a \vec{h} és

$$\text{Id}_V(\vec{h}) = d(\Phi(\Phi^{-1}))(\Phi(a))(\vec{h}) = d(\Phi)(a)(d\Phi^{-1}(\Phi(a))(\vec{h})),$$

i amb això tenim que $d(\Phi^{-1})$ és la inversa de $d\Phi$ pels dos costats, i per tant $d(\Phi^{-1}) = (d\Phi)^{-1}$, com volíem demostrar. \square

Corol·lari 6.2.29. *Sigui Φ un difeomorfisme diferenciable en un punt a . Aleshores*

$$\det(df(a)) \neq 0.$$

Definició 6.2.30 (Derivades parcials d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a = (a_1, \dots, a_d)$ un punt de U i f una funció definida per

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto (f_1(a), \dots, f_m(a)). \end{aligned}$$

Aleshores, donat un $t \in \mathbb{R}$, direm que la derivada parcial de f respecte la seva i -èsima coordenada és

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_d) - f(a)}{t}.$$

Notem que això és equivalent a derivar respecte la i -èsima variable prenent les altres variables com a constants.

Proposició 6.2.31. *Sigui $U, V \subset \mathbb{R}^d$ dos oberts i $\Phi: U \rightarrow V$ un difeomorfisme tal que donat un punt $a \in U$, $\Phi(a) = (\Phi_1(a), \dots, \Phi_d(a)) = (v_1, \dots, v_d)$. Aleshores, donada una funció $f: U \rightarrow V$,*

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v_i}.$$

Demostració. \square

6.3 Teoremes de la funció implícita i inversa

6.3.1 Dependència i independència funcional

Definició 6.3.1 (Dependència funcional). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció. Donades $v_1, \dots, v_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ k funcions, direm que f depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k si existeix una funció $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(x) = h(v_1(x), \dots, v_k(x)), \quad \text{per a tot } x \in U.$$

Proposició 6.3.2. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció i v_1, \dots, v_d d funcions escalars sobre U que defineixen un sistema de coordenades que anomenarem $\Phi(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$. Aleshores, donat un $k < d$ els següents enuncisats són equivalents:*

1. f depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k per a tot $x \in U$.
2. $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ per a tot $x \in U$.
3. La matriu que té per files $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ i $\nabla f(x)$ té rang k per a tot $x \in U$.
4. $\frac{\partial f}{\partial v_{k+1}} = \dots = \frac{\partial f}{\partial v_d} = 0$

Teorema 6.3.3. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ $k < d$ funcions escalars definides en U . Aleshores, donat un punt $a \in U$ i un real $\varepsilon > 0$, les funcions v_1, \dots, v_k formen un sistema de coordenades en $B(\varepsilon, a) \subset U$ si i només si els seus gradients en a , $\nabla v_1(a), \dots, \nabla v_k(a)$, són linealment independents.*

Demostració. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ k funcions escalars definides en U que formen un sistema de coordenades en $B(\varepsilon, a) \subset U$. Considerem les $d - k$ funcions escalars definides en U v_{k+1}, \dots, v_d tal que v_1, \dots, v_d formen un sistema de coordenades de U . Per la proposició 6.3.2 tenim que aquestes d funcions són funcionalment independents, el que ens diu que el determinant de la matriu composta per els seus gradients en un punt x , $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_d(x)$ té determinant no nul per a tot $x \in U$. Per tant, tenim que $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_d(x)$ són linealment independents per a tot $x \in U$ i, en particular, que $\nabla v_1(a), \dots, \nabla v_k(a)$ són linealment independents. \square

6.3.2 Varietats

Definició 6.3.4 (Varietat). Siguin, amb $m < d$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts, $M \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunt i $r > 0$ un radi. Aleshores, si per a tot punt $p \in M$, existeix un homeomorfisme $H: U \rightarrow S \cap B(p, r)$ direm que M és una varietat de dimensió m de \mathbb{R}^d .

Definició 6.3.5 (Varietat regular). Siguin, amb $m < d$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts amb $(0, \dots, 0) = 0 \in U$. Aleshores, donat un conjunt $M \subseteq \mathbb{R}^d$, direm que M és una varietat regular de dimensió m o una varietat diferenciable de classe \mathcal{C}^1 i de dimensió m si per a tot punt $p \in M$ existeix un homeomorfisme $H: U \rightarrow B(p, r) \cap S$ tal que $H(0) = p$ i el diferencial de H en $t \in U$, $dH(t)$, tingui rang m per a tot $t \in U$.

Si $m = 1$ tindrem un arc regular, i si $m = 2$ parlarem de superfície regular.

Observació 6.3.6. *Un cas particular d'aquesta definició és el dels gràfics. En aquest cas tenim que si*

$$\begin{aligned} H: U &\longleftrightarrow B(p, r) \cap S \\ t &\longmapsto (h_1(t), \dots, h_d(t)) \end{aligned}$$

aleshores m de les components de H fan de paràmetres; suposem que són els m primers, així H seria de la forma

$$H(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_m, h_{m+1}(t_1, \dots, t_m), \dots, h_d(t_1, \dots, t_m)).$$

Definició 6.3.7 (Espai tangent en un punt). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietat regular de dimensió m . Això vol dir que per a tot punt $t \in M$ existeix un homeomorfisme $H: U \rightarrow S \cap B(p, r)$ amb $H(0) = p$. Aleshores definim l'espai tangent a M en p com

$$T_p(M) = \{\vec{h} \text{ un vector de } \mathbb{R}^d : dH(0)(x) = \vec{h}, \text{ per a algun } x \in \mathbb{R}^d\},$$

això és l'imatge de $dH(0)$.

Proposició 6.3.8. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un obert, M una varietat regular de dimensió m d'un obert $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in M$ un punt i

$$\begin{aligned} H: U &\longleftrightarrow B(p, r) \cap S \\ t &\longmapsto (h_1(t), \dots, h_d(t)) \end{aligned}$$

un homeomorfisme tal que $H(0) = p$. Aleshores l'espai tangent a M en un punt $p \in M$, $T_p(M)$, té dimensió m i la seva base és

$$\left(\left(\frac{\partial h_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial h_1}{\partial t_d}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_d} \right) \right).$$

Demostració. Considerem la matriu Jacobiana (6.2.12) de H en 0. Per hipòtesi, aquesta té rang m . Aleshores, per la definició d'espai tangent en p tenim

$$T_p(M) = \{\vec{h} \text{ un vector de } \mathbb{R}^d \mid dH(0)(x) = \vec{h}, \text{ per a algun } x \in \mathbb{R}^d\},$$

per tant, els elements de $T_p(M)$ venen donades pel sistema lineal

$$\begin{bmatrix} D_1 h_1(0) & D_2 h_1(0) & \cdots & D_m h_1(0) \\ D_1 h_2(0) & D_2 h_2(0) & \cdots & D_m h_2(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 h_d(0) & D_2 h_d(0) & \cdots & D_m h_d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix}.$$

Per tant, $T_p(M)$ està generat per les columnes de $dH(0)$, i la seva base és

$$(D_1 H(0), \dots, D_d H(0)),$$

que és equivalent a

$$\left(\left(\frac{\partial h_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial h_1}{\partial t_d}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_d} \right) \right).$$

Amb això també veiem que $T_p(M)$ té dimensió m . □

Proposició 6.3.9. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ $k < d$ funcions escalars definides en U funcionalment independents en cada punt de U de forma que els conjunts de nivell arc-connexos

$$M = \{x \in U \mid v_1(x) = c_1, \dots, v_k(x) = c_k\}$$

siguin varietats regulars de dimensió $m = d - k$. Aleshores, donada una funció $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k si i només si $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ per a tot $x \in U$.

Demostració. La implicació cap a la dreta (\implies) està vista a la proposició 6.3.2. Fem l'altre implicació (\impliedby). Per l'observació 6.2.20, el subespai generat pels gradients $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ és ortogonal a l'espai tangent $T_x(M)$. Per tant, per a tot vector \vec{u} de $T_x(M)$ tindrem $D_{\vec{u}}f(x) = 0$, el que significa que $f(x)$ serà constant en M , és a dir, $f(x) = (k_1, \dots, k_m)$ per a tot $x \in U$ tal que $f(x) \in M$. Aleshores existeix una funció $H: U \rightarrow M$ tal que

$$f(x) = H(v_1(x), \dots, v_k(x)). \quad \square$$

6.3.3 Teorema de la funció inversa

Proposició 6.3.10. *Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $f: U \leftrightarrow V$ un homeomorfisme diferenciable en un punt $a \in U$, amb inversa $g = f^{-1}$. Aleshores, g és diferenciable en $f(a)$ si i només si la Jacobiana de f en a té determinant diferent de zero.*

Demostració. Demostrem la implicació cap a la dreta (\implies). En un entorn de a , f es comporta com un difeomorfisme per la definició de difeomorfisme (6.2.27). Per tant, amb el corollari 6.2.29 queda demostrat.

Demostrem ara l'altre implicació (\impliedby). Denotem $x = a + \vec{h}$, on \vec{h} és un vector de \mathbb{R}^d . Per tant tenim, que amb un cert vector \vec{k} de \mathbb{R}^d ,

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + \vec{k},$$

i com que per la definició de homeomorfisme (6.2.27) f és un homeomorfisme tenim que $\vec{h} \rightarrow 0$ si i només si $\vec{k} \rightarrow 0$. Per tant

$$\vec{k} = f(a + \vec{h}) - f(a)$$

i per la definició de diferencial d'una funció (6.2.3) quan $\vec{k} \rightarrow 0$

$$\vec{k} = f(a + \vec{h}) - f(a) = df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}).$$

Aplicant $df(a)^{-1}$ als costats de la igualtat tenim

$$df(a)^{-1}(\vec{k}) = df(a)^{-1}(df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h})),$$

i com que $df(a)^{-1}$ és lineal per la definició de diferencial d'una funció (6.2.3) tenim que

$$df(a)^{-1}(\vec{k}) = df(a)^{-1}(df(a)(\vec{h})) + df(a)^{-1}(o(\vec{h})),$$

i aleshores

$$\vec{h} = df(a)^{-1}(\vec{k}) - df(a)^{-1}(o(\vec{h})),$$

que és equivalent a, amb $b = f(a)$,

$$g(b + \vec{k}) - g(b) = df(a)^{-1}(\vec{k}) - df(a)^{-1}(o(\vec{h})).$$

Ara en veure que $df(a)^{-1}(o(\vec{h}))$ és com $o(\vec{k})$ haurem acabat.

Això ho podem veure fent

$$\|df(a)^{-1}(\vec{k})\| + \|df(a)^{-1}(o(\vec{h}))\| \leq \|df(a)^{-1}\| \|\vec{k}\| + \|df(a)^{-1}\| \|o(\vec{h})\|.$$

I per tant, quan $\vec{h} \rightarrow 0$ tenim $o(\vec{h}) \rightarrow 0$ i $\vec{k} \rightarrow 0$, i veiem que $df(a)^{-1}(o(\vec{h}))$ ha de ser com $o(\vec{k})$. \square

Lema 6.3.11. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció de classe \mathcal{C}^1 amb diferencial de f en un punt $a \in U$ de norma m , $df(a)$, invertible amb inversa $df(a)^{-1}$. Aleshores existeix una bola tancada centrada en a de radi $r > 0$, $\overline{B}(a, r)$, que, per a tot $x, y \in \overline{B}(a, r)$ compleix*

1. $\det(df(x)) \neq 0$
2. $\|df(x) - df(a)\| \leq \frac{m}{2}$
3. $\frac{m}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3m}{2}\|x - y\|$

Demostració. Observem que el punt (1) és cert ja que si r és prou petita, per la proposició 6.2.5, f és contínua.

Per veure el punt (2) tenim que pel [Teorema de l'equivalència entre normes \(5.2.9\)](#) existeix $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|df(x) - df(a)\| \leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right|,$$

i de nou, per a r prou petita, com que f és contínua, això és arbitràriament petit, i tenim $\|df(x) - df(a)\| \leq \frac{m}{2}$.

Per tant, de moment tenim que, amb r prou petit, existeix una bola tancada $\overline{B}(a, r)$ que compleix els punts (1) i (2); en veure que $2 \implies 3$ haurem acabat aquesta part.

Considerem l'aplicació $\hat{f}(x) = f(x) - df(a)(x)$ amb diferencial $d\hat{f} = df(x) - df(a)$. Per el punt (2) i el [Teorema del Valor Mig \(5.2.10\)](#) tenim, per a $x, y \in \overline{B}(a, r)$,

$$\|f(x) - f(y) - df(a)(x - y)\| = \|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)\| \leq \frac{m}{2}\|x - y\|.$$

Notem que, per a una funció T amb inversa T^{-1} per la definició de [norma d'una aplicació lineal \(5.1.2\)](#) tenim que existeix $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T(u)\| \leq K\|u\|,$$

per tant

$$\|T^{-1}(u)\| \leq K\|u\|.$$

Amb això veiem que existeix una m tal que $\|df(a)(x - y)\| \leq m\|x - y\|$, i aleshores

$$\begin{aligned} \left| \|f(x) - f(y)\| - \|df(a)(x - y)\| \right| &\leq \|f(x) - f(y) - df(a)(x - y)\| \leq \\ &\leq \frac{m}{2}\|x - y\| \leq \frac{1}{2}\|df(a)(x - y)\|. \end{aligned}$$

amb el que obtenim

$$\frac{1}{2}\|df(a)(x - y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3}{2}\|df(a)(x - y)\|,$$

i per tant

$$\frac{m}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3m}{2}\|x - y\|. \quad \square$$

Teorema 6.3.12 (Teorema de la funció inversa). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció de classe C^1 amb diferencial de f en un punt $a \in U$, $df(a)$, invertible. Aleshores existeix un obert $W \subset U$ que conté a tal que, la restricció de f en W sigui un difeomorfisme.*

Demostració. Sigui $df(a)^{-1}$ la inversa del diferencial de f en a , $df(a)$, i $M = \frac{1}{m} = \|df(a)^{-1}\|$ la seva norma. Per la definició de [norma d'una aplicació lineal \(5.1.2\)](#) tenim que per a qualsevol vector \vec{u} de \mathbb{R}^d ,

$$\|df(a)(\vec{u})\| \leq m\|\vec{u}\|.$$

Pel lema [6.3.11](#) tenim que existeix una bola tancada centrada en a de radi $r > 0$, $\bar{B}(a, r)$, que, per a tot $x, y \in \bar{B}(a, r)$ compleix

1. $\det(df(x)) \neq 0$
2. $\|df(x) - df(a)\| \leq \frac{m}{2}$
3. $\frac{m}{2}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{3m}{2}\|x - y\|$

Considerem S , la frontera de $\bar{B}(a, r)$, que és compacte. Per tant, el conjunt

$$S' = \{f(x) \mid \text{per a tot } x \in S\},$$

que és la imatge de S respecte f també és compacte i no conté $f(a)$, ja que $r > 0$. Aleshores considerem

$$d = \inf_{x \in S'} \|f(a) - x\| > 0$$

com la distància mínima de la imatge de a respecte f al conjunt S' , i definim la bola oberta centrada en $f(a)$ de radi $\frac{d}{2}$, $B(f(a), \frac{d}{2})$, i així $\|y - f(a)\| < \|y - f(x)\|$ per a tot $x \in S$. Ara considerem l'obert

$$W = \{x \in \bar{B}(a, r) \mid f(x) \in B(f(a), \frac{d}{2})\}.$$

Pel punt (3) veiem que la restricció de f en $\bar{B}(a, r)$ és injectiva i, per tant, la restricció de f en W també és injectiva. Ara només ens queda veure que la restricció de f en W és exhaustiva i ja haurem acabat. Per a això hem de veure que per a tot $p \in B(f(a), \frac{d}{2})$ existeix un $q \in \bar{B}(a, r)$ tal que $f(q) = p$.

Si entenem f com $f(a) = (f_1(a), \dots, f_d(a))$ i un punt $p \in B(f(a), \frac{d}{2})$ com $p = (p_1, \dots, p_d)$, podem considerar la funció h tal que

$$h(x) = \|p - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^d (p_i - f_i(x))^2.$$

Aleshores h té un mínim absolut en el compacte $\bar{B}(a, r)$, que s'assoleix quan $x = q \in \bar{B}(a, r)$. Per tant, per la proposició [6.2.24](#), $D_j h(q) = 0$, per a tot $j \in \{1, \dots, d\}$, que és equivalent a dir

$$\sum_{i=1}^d D_j f_i(p)(p_i - f_i(q)) = 0, \quad \text{per a tot } j \in \{1, \dots, d\}.$$

Així hem vist que la restricció de f en W és exhaustiva, i per tant bijectiva, i ja teníem que era contínua. Podem veure de nou pel punt (3) del lema 6.3.11 que la seva inversa també és contínua. Amb tot això en tenim prou per dir que la restricció de f en W és un homeomorfisme diferenciable en un punt a però, com que, per hipòtesi, tenim $\det(df(a)) \neq 0$, amb la proposició 6.3.10 queda demostrat el teorema. \square

Corol·lari 6.3.13. *Una aplicació $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 és un difeomorfisme si i només si f és injectiva i $\det(df(a)) \neq 0$ per a tot $x \in U$.*

Proposició 6.3.14. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ un sistema de k funcions escalars definides en U . Aleshores, els seus gradients són linealment independents en un punt $a \in U$ si i només si aquest sistema de k funcions escalars formen part d'un sistema de coordenades local en a .*

Demostració. La matriu formada pels gradients de v_1, \dots, v_k en a té un menor d'ordre k no nul. Per tant, podem expandir aquest sistema de k funcions amb $d - k$ funcions escalars definides en U de classe \mathcal{C}^1 , v_{k+1}, \dots, v_d amb gradients linealment independents en a , i aquestes d funcions, v_1, \dots, v_d , formen un sistema de coordenades local en a . \square

Corol·lari 6.3.15. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ un sistema de k funcions escalars definides en U . Aleshores una funció f definida en un entorn d'un punt a depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k en un entorn del punt a si i només si $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ per a tot x en un entorn del punt a .*

6.3.4 Teorema de la funció implícita

Notació 6.3.16. Podem interpretar \mathbb{R}^d com $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, on $d = k + m$. Per tant, denotarem un punt $a = (a_1, \dots, a_d)$ de \mathbb{R}^d com $a = (a'; a'')$, on a' correspon a (a_1, \dots, a_k) i a'' a (a_{k+1}, \dots, a_d) .

També entenem que $a' \in \mathbb{R}^k$ i $a'' \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 6.3.17 (Teorema de la funció implícita). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a = (a'; a'') \in U$ un punt, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ un sistema de $k = d - m$ funcions escalars definides en U tals que $v_1(a) = \dots = v_k(a) = 0$ i els seus gradients en a , $\nabla v_1(a), \dots, \nabla v_k(a)$ són linealment independents i M un conjunt definit per $M = \{x \in U \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}$. Aleshores hi ha un obert $W \subset \mathbb{R}^d$ que conté a , un obert $U'' \subset \mathbb{R}^m$ que conté a'' i una única funció $h: U'' \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\begin{aligned} M &= \{x \in U \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\} = \\ &= \{x = (x'; x'') \in W \mid x' = h(x''), x'' \in U''\}. \end{aligned}$$

Demostració. Per començar definirem un obert $W \subseteq \mathbb{R}^d$, un obert $V \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $(0, \dots, 0) \in V$ i un difeomorfisme Φ tals que

$$\begin{aligned} \Phi: W &\longleftrightarrow V \\ x &= (x_1, \dots, x_d) \longmapsto (v_1(x), \dots, v_k(x), x_{k+1}, \dots, x_d), \end{aligned}$$

així $(v_1(x), \dots, v_k(x), x_{k+1}, \dots, x_d)$ forma un sistema de coordenades en W .

Observem que podem considerar $a = (0, \dots, 0)$ ja que si $(v_1(a), \dots, v_k(a)) = (c_1, \dots, c_k)$ podem treballar amb les funcions $v'_1(x) = v_1(x) - c_1, \dots, v'_k(x) = v_k(x) - c_k$ que compleixen $v'_1(a) = \dots = v'_k(a) = 0$.

Com que Φ és un difeomorfisme, per la definició de [difeomorfisme \(6.2.27\)](#) és bijectiva, prenem la seva inversa

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}: V &\longleftrightarrow W \\ y = (y_1, \dots, y_d) &\longmapsto (u_1(y), \dots, u_k(y), y_{k+1}, \dots, y_d),\end{aligned}$$

i, de nou, com que Φ és un difeomorfisme per la definició de [difeomorfisme \(6.2.27\)](#) tenim que $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{C}^1$.

Aleshores, per a tot $x \in M$ tenim $\Phi(x) = (0'; x'')$. Definim un conjunt

$$U'' = \{y'' \in \mathbb{R}^m \mid (0; y'') \in V\},$$

i com que Φ és una bijectió, ja que és un difeomorfisme, tenim

$$U'' = \{x'' \in \mathbb{R}^m \mid \text{Existeix } x' \in \mathbb{R}^k \text{ tal que } (x'; x'') \in M \cap W\}.$$

Aleshores U'' és un obert de \mathbb{R}^d i

$$M = \{(x'; x'') \in W \mid (u_1(0; x''), \dots, u_k(0; x''); y'') \text{ amb } y'' \in U''\},$$

i la funció que volíem demostrar que existeix és

$$h(x'') = (u_1(0; x''), \dots, u_k(0; x'')). \quad \square$$

6.4 Extrems relatius

6.4.1 El mètode de multiplicadors de Lagrange

Teorema 6.4.1 (Multiplicadors de Lagrange). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, S un conjunt definit per*

$$S = \{x \in U \mid g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x)) = 0\},$$

on g_1, \dots, g_k són $k < d$ funcions escalars definides en U de classe \mathcal{C}^1 .

Considerem la funció escalar $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \in S$ sigui un màxim o un mínim relatiu de f en S i les funcions g_1, \dots, g_k siguin funcionalment independents en a . Aleshores existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ reals tals que

$$D_i f(a) + \sum_{j=1}^k \lambda_j D_i g_j(a) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Demostració. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, aleshores considerem el següent sistema d'equacions lineals

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j D_i g_j(a) = -D_i f(a) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (6.4)$$

Com que g_1, \dots, g_k són funcionalment independents en a , la matriu formada pels gradients de g_1, \dots, g_k en a té rang k (proposició 6.3.2) el sistema d'equacions

lineals (6.4) té una única solució. Ara només ens cal veure que aquests mateixos reals $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ també són solució de les $m = d - k$ equacions restants.

Per fer això ens caldrà el **Teorema de la funció implícita** (6.3.17). Com que $k < d$, amb la notació introduïda a 6.3.16, denotem el punt a amb $a = (a'; a'')$, on $a' = (a_1, \dots, a_k)$ i $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_d)$ i entenem $a' \in \mathbb{R}^k$, $a'' \in \mathbb{R}^m$. Aleshores definim una funció $g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$, que compleix $g(a', a'') = 0$ i $g \in \mathcal{C}^1$. Això, junt amb que per hipòtesi les funcions v_1, \dots, v_k són funcionalment independents en a i, per la proposició 6.3.2, la matriu

$$\begin{bmatrix} D_1 g_1(a) & \cdots & D_k g_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_k(a) & \cdots & D_k g_k(a) \end{bmatrix}$$

té determinant diferent de zero, complim les condicions del **Teorema de la funció implícita** (6.3.17) i l'apliquem. Per tant, existeix un obert $U'' \subset \mathbb{R}^m$ que conté a'' i una única funció $h: U'' \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h \in \mathcal{C}^1$ amb $h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$, tal que $h(a'') = a'$ i que per a tot $y'' \in U''$ compleix $g(h(y''); y'') = 0$. Això significa que el sistema d'equacions

$$g_i(x_1, \dots, x_d) = 0, \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, d\},$$

té una única solució de la forma $a' = h(a'')$, per tant definim les funcions, definides en U'' ,

$$F(y'') = f(h(y''); y'')$$

i, per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$

$$G_i(y'') = g_i(h(y''); y'').$$

Degut a que $G_1 = \dots = G_k = 0$, les seves derivades també són 0. \square

6.4.2 Teorema del rang constant

No fer molt cas d'aquesta part. La farà bé quan sàpiga geometria diferencial. La part important d'aquí és l'últim corollari que ens diu que els difeomorfismes “conserven” els punts crítics.

Definició 6.4.2 (Subvarietat regular). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $M \subseteq U$ un conjunt. Direm que M és una subvarietat regular de dimensió m si per a tot punt $p \in M$ existeix una bola centrada en p de radi $r > 0$, $B(p, r) \subseteq U$, i $k = d - m$ funcions escalars, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$, definides en U amb gradients linealment independents tals que

$$M \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}.$$

Proposició 6.4.3. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $M \subseteq U$ una subvarietat regular de dimensió m de \mathbb{R}^d . Aleshores, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *Per a tot punt $p \in M$ existeix una bola centrada en p de radi $r > 0$, $B(p, r) \subseteq U$, i $k = d - m$ funcions escalars, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$, definides en U amb gradients linealment independents tals que*

$$M \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}.$$

2. Per a tot punt $p \in M$ existeix un obert $V \subseteq U$ que conté p i un sistema de coordenades u_1, \dots, u_d definit en V tal que

$$M \cap V = \{x \in V \mid u_{k+1}(x) = \dots = u_d(x) = 0\}.$$

3. Per a tot punt $p \in M$ existeixen un obert $B \subseteq U$ que conté p , un obert $W \subseteq \mathbb{R}^m$ i un homeomorfisme $\Phi: W \rightarrow M \cap B$.

Demostració. no □

Teorema 6.4.4 (Teorema del rang constant). *Si $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un obert i $H: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció de classe \mathcal{C}^1 , amb $\text{rang}(dH(t)) = n$ per a tot $t \in U$. Aleshores el conjunt*

$$\{y \in \mathbb{R}^d \mid y = H(x) \text{ per algun } x \in U\}$$

és una subvarietat de dimensió n .

Demostració. Considerem $H(x) = (h_1(x), \dots, h_d(x))$ i fixem un punt $a \in U$ on es compleixin les condicions de la hipòtesi. Per la proposició 6.3.2, hi haurà n components de H tals que els seus gradients siguin linealment independents en a . Existeix una permutació $\sigma \in S_d$ tal que aquestes n components de H siguin $h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)}$.

Per continuïtat, els gradients $\nabla h_{\sigma(1)}(x), \dots, \nabla h_{\sigma(n)}(x)$ són linealment independents per a tot x en un entorn obert de a , que denotarem per $V \subset U$. Per tant, podem expandir-les a un sistema de coordenades de V , v_1, \dots, v_m , on $v_i = h_{\sigma(i)}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Com que $\text{rang}(dH(t)) = n$ per a tot $t \in V$, per la proposició 6.3.2, els gradients $\nabla h_{\sigma(n+1)}, \dots, \nabla h_{\sigma(d)}$ depenen linealment dels gradients $\nabla v_1, \dots, \nabla v_n$ en V , per tant, pel corol·lari 6.3.15, per a cada $i \in \{n+1, \dots, d\}$, existeix una funció φ_i que compleix $h_{\sigma(i)}(x) = \varphi_i(v_1(x), \dots, v_n(x))$ i per tant, si denotem $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$,

$$\begin{aligned} H(x) &= G(v_1(x), \dots, v_n(x)) \\ &= (v_1(x), \dots, v_n(x), \varphi_{n+1}(v(x)), \dots, \varphi_d(v(x))) \end{aligned}$$

i es compleix la definició de **subvarietat regular** (6.4.2) per la proposició 6.4.3, ja que, per la definició de **homeomorfisme** (6.2.27), G és un homeomorfisme definit en V . □

Proposició 6.4.5. *Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts, $\Phi: U \longleftrightarrow V$ un difeomorfisme de classe \mathcal{C}^1 i $M \subseteq U$ una varietat regular de dimensió m de U . Aleshores la imatge de M per Φ és una subvarietat regular de dimensió m de V .*

Demostració. No fer-ne molt cas. Per la definició de **varietat regular** (6.3.5), per a cada punt $p \in M$ existeixen $k = d - m$ equacions escalars, v_1, \dots, v_k definides en U amb gradients linealment independents i una bola de radi $r > 0$ centrada en p , $B(p, r)$, tals que

$$M \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}.$$

Aleshores definim, per a tot $j \in \{1, \dots, k\}$, $u_j(x) = \Phi^{-1}(v_j(x))$. Aleshores tenim que si la imatge de M per Φ és $N \subset V$, per a tot punt $q \in N$ hi ha una bola de radi $r > 0$, $B(q, r)$, tal que

$$N \cap B(q, r) = \{y \in B(q, r) \mid u_1(x) = \dots = u_k(x) = 0\},$$

i tenim que u_1, \dots, u_d tenen gradients linealment independents, ja que, per la regla de la cadena (6.2.15), $\nabla v_j(x) = (d\Phi(x))^t(\nabla u_j(\Phi(x)))$, i com que Φ defineix un sistema de coordenades, per la proposició 6.3.2 els gradients de u_1, \dots, u_d són linealment independents, i això compleix la definició de subvarietat regular (6.4.2). \square

Corol·lari 6.4.6. $d\Phi(a)(T_a(M)) = T_{\Phi(a)}(\Phi(M))$.

6.4.3 Derivades d'ordre superior

Fixem-nos en que en derivar una funció f obtenim una altra funció, i que aquesta, sota certes condicions, és derivable. En aquest capítol estudiarem algunes de les propietats d'aquest fet.

Definició 6.4.7 (n -èsima derivada d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n vectors de \mathbb{R}^d (no necessàriament diferents) i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Si $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1}$ és diferenciable en a i prenem la seva derivada respecte \vec{v}_2 diem que

$$d^2 f(a)(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1} \right) (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}_2 \partial \vec{v}_1} (a) = D_{\vec{v}_2, \vec{v}_1} f = D_{\vec{v}_2} (D_{\vec{v}_1} f)(a)$$

és la derivada de segon ordre de f o la segona derivada de f .

Si la segona derivada de f també és derivable podem parlar de la tercera derivada de f , que és la segona derivada de $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1}$. Si iterem la suposició podem definir la n -èsima derivada de f o una derivada d'ordre n de f . També direm que f és n -vegades diferenciable en a . Ho denotarem amb

$$d^n f(a)(\vec{v}_n \dots \vec{v}_1) = \frac{\partial^n f}{\partial \vec{v}_n \dots \partial \vec{v}_1} = D_{\vec{v}_n, \dots, \vec{v}_1} f(a).$$

Teorema 6.4.8. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció 2-vegades diferenciable en $a \in U$, aleshores

$$D_{\vec{v}, \vec{u}} f(a) = D_{\vec{u}, \vec{v}} f(a).$$

Demostració. Notem que podem dir $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, on f_1, \dots, f_m són funcions escalars definides en U , i per la proposició 6.2.6 només cal que fem la demostració pel cas $m = 1$, ja que implicarà el general. També observem que podem donar un canvi de variables on els vectors \vec{v}, \vec{u} siguin els nous eixos de coordenades, \vec{e}_1, \vec{e}_2 respectivament. En aquesta base tindríem que volem demostrar $D_{1,2} f(a) = D_{2,1} f(a)$, i com que això només afecta a una component del punt, podem considerar $d = 2$, i la demostració serà suficient per veure cas general. Per tant, ho demostrem per $m = 1, d = 2$. Aprofitant el canvi de coordenades també suposarem $a = (0, 0)$. Per tant, només hem de demostrar que $D_{2,1} f(0, 0) = D_{1,2} f(0, 0)$.

Considerem, amb un escalar $h > 0$, la següent diferència:

$$Q(h) = f(h, h) - f(h, 0) - (f(0, h) - f(0, 0)) \quad (6.5)$$

Si fem $A(t) = f(t, h) - f(t, 0)$ tenim $Q(h) = A(h) - A(0)$, i pel Teorema del Valor Mig (5.2.10) existeix un escalar $0 < \xi < h$ tal que

$$A(h) - A(0) = hA'(\xi) = h(D_1 f(\xi, h) - D_1 f(\xi, 0)) \quad (6.6)$$

i com que, per hipòtesi, $D_1 f$ és diferenciable en $(0, 0)$, per l'observació 6.2.14 podem escriure,

$$D_1 f(x, y) = D_1 f(0, 0) + x D_{1,1} f(0, 0) + y D_{2,1} f(0, 0) + o(\|x, y\|).$$

Ho apliquem a (6.6) i obtenim

$$\begin{aligned} hA'(c) &= h(D_1 f(0, 0) + \xi D_{1,1} f(0, 0) + \\ &\quad + h D_{2,1} f(0, 0) - D_1 f(0, 0) - \xi D_{1,1} f(0, 0) + o(h)) \end{aligned}$$

simplifiquem, i per la definició de $Q(h)$, (6.5),

$$hA'(c) = h^2 D_{2,1} f(0, 0) + o(h^2) = Q(h).$$

i tenim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h)}{h^2} = D_{2,1} f(0, 0).$$

Repetint el mateix argument amb

$$Q(h) = f(h, h) - f(0, h) - (f(h, 0) - f(0, 0))$$

obtenim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h)}{h^2} = D_{1,2} f(0, 0),$$

i per tant

$$D_{2,1} f(0, 0) = D_{1,2} f(0, 0). \quad \square$$

Nota 6.4.9. *Sospito que una demostració “més general” seria similar a la del Teorema d'una condició suficient per a la diferenciabilitat (6.2.9), per si algun valent no ha quedat satisfet.*

Corol·lari 6.4.10. *$d^2 f(a)$ és una aplicació bilineal simètrica. De fet, si generalitzem la proposició iterant-la, tenim que $d^n f(a)$ és una aplicació n -lineal simètrica.*

6.4.4 Fórmula de Taylor en múltiples variables

Aquesta secció la farem considerant només funcions escalars (amb $m = 1$ en la notació que hem estat utilitzant). En el cas de voler fer el desenvolupament de Taylor d'una funció f amb $m > 1$ només pensar f com un vector de m funcions escalars, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, i per tant el problema queda reduït a calcular m desenvolupaments de Taylor (donat que es satisfacin certes condicions que estudiarem més endavant) i posar-los en forma de vector.

Notació 6.4.11. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció n -vegades diferenciable en un punt $a \in U$ i un altre punt de U , $t = (t_1, \dots, t_d)$. Introduïm la següent notació:

$$f^{(k)}[a, t] = \sum_{i_k=1}^d \cdots \sum_{i_1=1}^d D_{i_k, \dots, i_1} f(a) t_{i_1} \cdots t_{i_k}.$$

Teorema 6.4.12 (Fórmula de Taylor en múltiples variables). *Siuguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció n -vegades diferenciable en un punt $a \in U$ i $b \in U$ un altre punt. Aleshores existeix un punt $z \in U$ tal que, per a algun $0 < \xi < 1$, $z = a + (b - \xi a)$ (això és que el punt z es troba en el segment que uneix els punts a i b) tal que*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}[a, b - a] + \frac{1}{n} f^{(n)}[z, b - a].$$

Demostració. Com que, per hipòtesi, U és obert, per la definició de [conjunt obert](#) (5.3.1) sabem que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que, per a tot $-\varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, tenim que $a + t(b - a) \in U$. Per tant, definim una funció g com

$$\begin{aligned} g: (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + t(b - a)) \end{aligned}$$

Aleshores $f(b) - f(a) = g(1) - g(0)$. Aleshores, amb $\xi \in (0, 1)$, pel [Teorema de Taylor](#) (5.2.12) tenim

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{n!} g^{(n)}(\xi). \quad (6.7)$$

Si pensem, amb $h(\xi) = a + \xi(b - a)$, que $g(\xi) = f(h(\xi))$, ha de ser $p(\xi) = (p_1(\xi), \dots, p_d(\xi))$, i si denotem $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$, tenim, amb $i \in \{1, \dots, d\}$, que $\frac{\partial p}{\partial x_i}(\xi) = b_i - a_i$. Aplicant er [la regla de la cadena](#) (6.2.15) veiem que g' està definida en $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ i

$$g'(\xi) = \sum_{i=1}^d D_i f(p(\xi))(b_i - a_i) = f^{(1)}[p(\xi), b - a],$$

i aplicant la regla de la cadena una segona vegada,

$$g''(\xi) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d D_{j,i} f(p(\xi))(b_i - a_i)(b_j - a_j) = f^{(2)}[p(\xi), b - a].$$

Si ho iterem n vegades obtindrem que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}[p(\xi), b - a],$$

i per tant, recordant (6.7), tenim

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}[a, b - a] + \frac{1}{n} f^{(n)}[z, b - a]$$

amb $z = p(\xi)$. □

6.4.5 Extrems lliures

En aquest apartat utilitzarem el que vam veure a l'observació 6.4.10 per classificar els extrems lliures d'una funció.

Això ens servirà per a classificar els punts crítics d'una funció escalar en un conjunt del seu domini, excloent-ne la frontera. Per exemple, en el cas d'utilitzar el [Teorema dels multiplicadors de Lagrange \(6.4.1\)](#) per obtenir un conjunt de punts crítics en el domini restringit de la funció. Més tard veurem com classificar els que es troben a la frontera.

Proposició 6.4.13. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció 2-vegades diferenciable en un punt $a \in U$ amb segones derivades contínues, i a és un punt crític de f . Aleshores*

1. $d^2 f(a)$ és definida estrictament positiva $\implies a$ és un mínim relatiu.
2. $d^2 f(a)$ és definida estrictament negativa $\implies a$ és un màxim relatiu.
3. $d^2 f(a)$ és definida positiva $\Leftarrow a$ és un mínim relatiu.
4. $d^2 f(a)$ és definida negativa $\Leftarrow a$ és un màxim relatiu.

Demostració. Comencem demostrant dels punts (1) i (2), que són demostracions anàlogues. Suposem que $d^2 f(a)$ és definida positiva, i considerem el punt $t \in U$, $t = (t_1, \dots, t_d)$ i la funció

$$Q(t) = \frac{1}{2} f^{(2)}[a, t] = \sum_{j=0}^d \sum_{i=0}^d D_{j,i} f(a) t_i t_j.$$

Per hipòtesi, Q és contínua per a tot punt $t \in U$. També tenim, per la definició de n -èsima derivada d'una funció (6.4.7), que $Q(t)$ és definida positiva per a tot $t \neq (0, \dots, 0)$.

Definim ara la bola tancada de radi 1 centrada en a , $\overline{B}(a, 1) \subset U$ i la seva frontera, $S = \text{Fr}(\overline{B}(a, 1))$. Com que S és compacte, pel [Teorema de Weierstrass \(5.2.13\)](#) Q té un mínim relatiu en S , suposem que en aquest punt Q val m . Com que Q és definida estrictament positiva per a tot punt de S , $m > 0$.

Sabent que Q és una forma bilineal simètrica, tenim que, per a tot $c \in \mathbb{R}$, $Q(ct) = c^2 Q(t)$. Si considerem $c = \frac{1}{\|t\|}$, per a $t \neq (0, \dots, 0)$, tenim que $ct \in S$, i per tant $Q(ct) \geq m$, el que significa $Q(t) \geq m \|t\|^2$.

Pel [Teorema de la fórmula de Taylor en múltiples variables \(6.4.12\)](#) i la definició de [gradient d'una funció \(6.2.18\)](#) tenim

$$f(a+t) - f(a) = \langle \nabla f(a), t \rangle + \frac{1}{2} f^{(2)}[z, t],$$

per a algun $z = a + t + (a - \xi(a+t))$, amb $0 < \xi < 1$. Però com que a és un punt crític de f (observació 6.2.25), tenim $\nabla f(a) = 0$, i per tant

$$f(a+t) - f(a) = \frac{1}{2} f^{(2)}[z, t],$$

i si escrivim $\|t^2\| o(t) = \frac{1}{2} f^{(2)}[z, t] - \frac{1}{2} f^{(2)}[a, t]$ tenim

$$f(a+t) - f(a) = \frac{1}{2} f^{(2)}[a, t] + \|t^2\| o(t).$$

Per tant

$$f(a+t) - f(a) = Q(t) + \|t\|^2 o(t) \geq m \|t\|^2 + \|t\|^2 o(t). \quad (6.8)$$

Com que $o(t) \rightarrow 0$ és si i només si $t \rightarrow 0$, existeix un $\varepsilon > 0$ tal que, amb $0 < \|t\| < \varepsilon$ tenim $o(t) < \frac{m}{2}$, i $0 \leq \|t\|^2 o(t) < \frac{m}{2} \|t\|^2$, i així

$$f(a+t) - f(a) > m\|t\|^2 - \frac{m}{2}\|t\|^2 = \frac{m}{2}\|t\|^2 > 0,$$

i, com que això no depèn de t , per la definició de [extrem relatiu \(6.2.23\)](#) tenim que a és un mínim relatiu. Ara només ens queda demostrar (3) i (4), de nou, només ens caldrà demostrar-ne una, ja que l'altre demostració serà anàloga. Suposem doncs que a és un mínim relatiu.

Seguint l'argument sobre la fórmula de Taylor per a múltiples variables que hem fet a la primera meitat d'aquesta demostració arribem a la desigualtat (6.8) i tenim

$$f(a+t) - f(a) \leq m\|t\|^2 + \|t\|^2 o(t).$$

Aleshores

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{\|t\|^2} \leq m + o(t).$$

Per la definició de [extrem relatiu \(6.2.23\)](#) tenim $f(a+t) - f(a) \geq 0$, i per tant, quan $t \rightarrow 0$, aleshores $o(t) \rightarrow 0$ i

$$0 \leq \frac{f(a+t) - f(a)}{\|t\|^2} \leq m,$$

i ja hem acabat. □

Capítol 7

Càlcul integral

7.1 La integral Riemann

7.1.1 Funcions integrables Riemann

Definició 7.1.1 (Rectangle). Siguin $[a_1, b_1], \dots, [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}$ d intervals tancats. Direm que $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ és un rectangle de \mathbb{R}^d .

Definició 7.1.2 (Partició d'un rectangle i finor d'una partició). Siguin $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ un rectangle de \mathbb{R}^d i P_i una partició de $[a_i, b_i]$ per a tot $i \in \{1, \dots, d\}$. Aleshores $P = P_1 \times \dots \times P_d$ és una partició de \mathfrak{R} .

Si $P_i = \{t_{i,0}, \dots, t_{i,n}\}$, amb $a_i = t_{i,0} < \dots < t_{i,n} = b_i$, direm que els rectangles definits per $[t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1}] \times \dots \times [t_{d,i_d}, t_{d,i_d+1}] \subset \mathfrak{R}$, amb $0 \leq i_j \leq d-1$ per a tot $j \in \{1, \dots, d\}$, són subrectangles de \mathfrak{R} .

Sigui Q una altre partició de \mathfrak{R} . Direm que Q és més fina que P si $P \subset Q$.

Definició 7.1.3 (Suma superior i inferior). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, P una partició i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Per a cada subrectangle de \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_i , amb $i \in I$, on I és el conjunt d'índexs que denoten els subrectangles de \mathfrak{R} definits per P , definim la suma superior de f per P com

$$S(f, P) = \sum_{i \in I} \sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|,$$

i la suma inferior de f per P com

$$s(f, P) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|.$$

Proposició 7.1.4. Siguin P i Q dues particions d'un rectangle $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores, si Q és més fina que P

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \quad i \quad S(f, Q) \leq S(f, P).$$

Demostració. Demostrarem només la primera desigualtat, ja que la segona té una demostració anàloga. Comencem notant que podem fer la demostració suposant $P = P_1 \times \dots \times P_d$, on $P_i = t_{i,0} < \dots < t_{i,n}$ és una partició de $[a_i, b_i]$ i $Q = Q_1 \times \dots \times Q_d$, on, per a tot $j \in \{1, \dots, d\} \setminus k$, $P_j = Q_j$, i $Q_k = t_{k,0} < \dots < t_{k,l} < q < t_{k,l+1} < \dots < t_{k,n}$, per algun $l \in \{0, \dots, n-1\}$.

Suposarem $l = 0, k = 1$ per simplificar la notació. Aleshores, per la definició de [suma superior i inferior](#) (7.1.3) tenim

$$s(f, P) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|,$$

on I és el conjunt d'índexs dels subrectangles de \mathfrak{R} definits per P .

Observem que tots els subrectangles de \mathfrak{R} són els mateixos respecte les particions P i Q , excepte els que s'obtenen fent $\{t_{1,0}, q, t_{1,1}\} \times Q_2 \times \cdots \times Q_d$. Per tant, els únics termes del sumatori que canvien són, amb un nou conjunt d'índexs J , per a tot $j \in J$,

$$\inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) |\mathfrak{R}_j|.$$

Ara considerem el conjunt d'índex dels rectangles definits per $\{t_{1,0}, t_{1,1}\} \times Q_2 \times \cdots \times Q_d$, $I' \subset I$, i tenim

$$\sum_{i' \in I'} \inf_{x \in \mathfrak{R}_{i'}} f(x) |\mathfrak{R}_{i'}| \leq \sum_{j \in J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) |\mathfrak{R}_j|.$$

I per tant

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| &= \sum_{i \in I \setminus I'} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| + \sum_{i' \in I'} \inf_{x \in \mathfrak{R}_{i'}} f(x) |\mathfrak{R}_{i'}| \leq \\ &\leq \sum_{j \in J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) |\mathfrak{R}_j| + \sum_{i \in I \setminus J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = \sum_{i \in I \cup J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|. \end{aligned}$$

però, per la definició de [suma superior i inferior](#) (7.1.3),

$$\sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = s(f, P) \quad \text{i} \quad \sum_{i \in I \cup J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = s(f, Q),$$

i per tant trobem

$$s(f, P) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| \leq \sum_{i \in I \cup J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = s(f, Q). \quad \square$$

Proposició 7.1.5. *Siguin P, Q dues particions arbitràries d'un rectangle $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció acotada. Aleshores*

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Demostració. Considerem la partició definida per $P \cup Q$. Com que $Q \subseteq P \cup Q$ i $Q \subseteq P \cup Q$, $P \cup Q$ és més fina que P i Q . Per tant, per la proposició 7.1.4, tenim

$$s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q). \quad \square$$

Definició 7.1.6 (Integral superior i inferior). *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores definim la integral superior de f en \mathfrak{R} com*

$$\int_{\mathfrak{R}^+} f = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P)$$

i la integral inferior de f en \mathfrak{R} com

$$\int_{\mathfrak{R}^-} f = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P),$$

on \mathcal{P} és el conjunt de particions de \mathfrak{R} .

Proposició 7.1.7. *Siguin R un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores*

$$\int_{\mathfrak{R}^-} f \leq \int_{\mathfrak{R}^+} f.$$

Demostració. Sigui \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} . Com que, per la proposició 7.1.5, tenim $s(f, P) \leq S(f, Q)$ per a $P, Q \in \mathcal{P}$ arbitraris, ha de ser

$$\int_{\mathfrak{R}^-} f = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) = \int_{\mathfrak{R}^+} f. \quad \square$$

Definició 7.1.8 (Funció integrable Riemann). *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Direm que f és integrable Riemann si $\int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}^+} f$.*

També direm que $\int_{\mathfrak{R}} f = \int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}^+} f$ és la integral Riemann de f en \mathfrak{R} .

Teorema 7.1.9 (Criteri d'integrabilitat Riemann). *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d , $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ la família de subrectangles de \mathfrak{R} definits per P i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P tal que*

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i| < \varepsilon.$$

Demostració. Comencem demostrant que la condició és necessària (\implies). Sigui \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} . Per la definició de **funció integrable Riemann** (7.1.8) i la definició de **integral superior i inferior** (7.1.6) tenim

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P) = \int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}} f = \int_{\mathfrak{R}^+} f = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P),$$

per tant, existeixen un $\varepsilon > 0$ i unes particions $P, Q \in \mathcal{P}$ tals que

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathfrak{R}} f < s(f, P),$$

i

$$S(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathfrak{R}} f.$$

Per la proposició 7.1.4 tenim $s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$, per tant ha de ser $S(f, P \cup Q) - s(f, P \cup Q) < \varepsilon$, com calia veure.

Per demostrar que la condició és suficient (\impliedby) veiem que, per hipòtesi,

$$0 \leq \int_{\mathfrak{R}^+} f - \int_{\mathfrak{R}^-} f \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

i quan $\varepsilon \rightarrow 0$ ha de ser, per la definició de **funció integrable Riemann** (7.1.8),

$$\int^{\mathfrak{R}^+} f = \int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}} f. \quad \square$$

Notació 7.1.10 (Límit d'una partició). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} . Quan vulguem parlar d'una partició de \mathfrak{R} que es fa fina ho denotarem amb

$$\lim_{P \in \mathcal{P}},$$

que es refereix a definir una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$\max_{i \in I} \max_{x, y \in \mathfrak{R}_i} \|x - y\| \rightarrow 0$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per P .

Corol·lari 7.1.11. Si \mathcal{P} és el conjunt de particions de \mathfrak{R} , aleshores f és integrable Riemann si i només si

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) - s(f, P) = 0.$$

Teorema 7.1.12. Sigui \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i contínua. Aleshores f és integrable Riemann en \mathfrak{R} .

Demostració. Pel **Teorema de Heine** (5.3.3), f és uniformement contínua en \mathfrak{R} , per tant, per la definició de **continuitat uniforme** (5.3.2), donat un $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|\mathfrak{R}|} \text{ si } \|x - y\| < \delta.$$

Sigui $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$\max_{i \in I} \max_{x, y \in \mathfrak{R}_i} \|x - y\| < \delta,$$

això és que els diàmetres dels subrectangles definits per la partició P estiguin fitats per δ .

Considerem

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i|. \quad (7.1)$$

Com que, per hipòtesi, f és contínua en cada \mathfrak{R}_i , pel **Teorema de Weierstrass** (5.2.13) tenim que els màxims i mínims de f en cada \mathfrak{R}_i són accessibles. Denotem doncs amb M_i, m_i els punts de \mathfrak{R}_i tals que $f(M_i) = \max_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x)$ i $f(m_i) = \min_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x)$. Per (7.1) tindrem $\|M_i - m_i\| < \delta$, i com que f és contínuament uniforme en cada \mathfrak{R}_i , $f(M_i) - f(m_i) < \frac{\varepsilon}{|\mathfrak{R}|}$, i per tant tenim

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i| \leq \frac{\varepsilon}{|\mathfrak{R}|} \sum_{i \in I} |\mathfrak{R}_i| = \varepsilon,$$

i això completa la prova. \square

7.1.2 La integral com a límit de sumes

Definició 7.1.13 (Suma de Riemann). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i P una partició de \mathfrak{R} . Aleshores definim la suma de Riemann de f associada a P com

$$\Sigma(f, P) = \sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i|,$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per P i ξ_i és un punt qualsevol de \mathfrak{R}_i , per a tot $i \in I$.

Observació 7.1.14.

$$s(f, P) \leq \Sigma(f, P) \leq S(f, P).$$

Proposició 7.1.15. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann si i només si existeix un $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} \Sigma(f, P) = L.$$

Demostració. Pel corollari 7.1.11 tenim

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) = \lim_{P \in \mathcal{P}} s(f, P),$$

i per l'observació 7.1.14 i el Teorema del sandvitx (5.2.14) ha de ser

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) = \lim_{P \in \mathcal{P}} \Sigma(f, P) = \lim_{P \in \mathcal{P}} s(f, P),$$

i amb això es veu que ha de existir un real L tal que $\lim_{P \in \mathcal{P}} \Sigma(f, P) = L$. \square

Notació 7.1.16. Seguint el resultat de la proposició 7.1.15 denotarem

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x) dx = \Sigma(f, P_n) = \sum_{i \in I} f(x) |\mathfrak{R}_i| = L.$$

on \int es refereix al sumatori infinit, $f(\xi_i)$ es transforma en $f(x)$ i $|\mathfrak{R}_i|$ s'escriu dx , tot quan fem la partició “infinitament més fina”, amb el límit $\lim_{P \in \mathcal{P}} P$.

7.1.3 Propietats de la integral Riemann definida

Proposició 7.1.17. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f, g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions integrables Riemann. Aleshores són certs els següents enunciats:

1. Sigui λ, μ dos escalars. Aleshores

$$\int_{\mathfrak{R}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\mathfrak{R}} f + \mu \int_{\mathfrak{R}} g.$$

2. La funció producte fg també és integrable Riemann.

3. Sigui C un escalar. Si $f(x) \leq Cg(x)$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, aleshores

$$\int_{\mathfrak{R}} f \leq C \int_{\mathfrak{R}} g.$$

Demostració. Sigui \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} .

Comencem demostrant el punt (1). Per la proposició 7.1.15 i la definició de *suma de Riemann* (7.1.13) tenim

$$\sum_{i \in I} (\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)) |\mathfrak{R}_i|,$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició $P \in \mathcal{P}$ i ξ_i és un punt qualsevol de \mathfrak{R}_i per a tot $i \in I$. Això ho podem reescriure com

$$\lambda \sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i| + \mu \sum_{i \in I} g(\xi_i) |\mathfrak{R}_i|$$

i per tant

$$\int_{\mathfrak{R}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\mathfrak{R}} f + \mu \int_{\mathfrak{R}} g,$$

com volíem demostrar.

Demostrem ara el punt (2) (En veritat la demostraré quan em doni la gana, i resulta que això no és ara).

Podem veure el punt (3) a partir del punt (1), ja que si $f(x) \leq Cg(x)$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, amb ξ_i qualsevol punt de \mathfrak{R}_i per tot $i \in I$, on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} , tenim

$$\sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i| \leq C \sum_{i \in I} g(\xi_i) |\mathfrak{R}_i|,$$

i ja hem acabat. □

Teorema 7.1.18. *Siguin $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, \mathcal{S} un conjunt de rectangles disjunts de \mathfrak{R} tals que $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = \mathfrak{R}$ i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann en \mathfrak{R} si i només si f és integrable Riemann en cada $S \in \mathcal{S}$, i*

$$\int_{\mathfrak{R}} f = \sum_{S \in \mathcal{S}} \int_S f.$$

Demostració. Comencem demostrant la doble implicació (\iff). Suposem que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} . Com que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} , per la proposició 7.1.15 i la definició de *suma de Riemann* (7.1.13). Tenim que, sent \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} , existeix un real L tal que

$$\sum_{i \in I} f(x) |\mathfrak{R}_i| = L,$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició $P \in \mathcal{P}$. Considerem ara el conjunt de particions de S , per a tot $S \in \mathcal{S}$, que denotarem

com \mathcal{P}_S . Com que $S \subset \mathfrak{R}$ per a tot $S \in \mathcal{S}$, per la definició de [partició d'un rectangle](#) (7.1.2), tenim que

$$\lim_{P_S \in \mathcal{P}_S} P_S \subset \lim_{P \in \mathcal{P}} P,$$

per a tot $S \in \mathcal{S}$; i com que $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = \mathfrak{R}$ tenim que

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} \lim_{P_S \in \mathcal{P}_S} P_S = \lim_{P \in \mathcal{P}} P.$$

Per tant, si I_S és el conjunt d'índexs dels subrectangles $\mathfrak{R}_{S,i}$ de S definits per una partició P_S , per a tot $S \in \mathcal{S}$, com que, per hipòtesi, els rectangles $S \in \mathcal{S}$ són disjunts, tenim

$$\sum_{i \in I} f(x)|\mathfrak{R}_i| = \sum_{S \in \mathcal{S}} \sum_{i \in I_S} f(x)|\mathfrak{R}_{S,i}| = L,$$

i, de nou, per la proposició 7.1.15 tenim que f és integrable en cada $S \in \mathcal{S}$, com volíem veure.

Aquesta demostració també ens serveix per veure que

$$\int_{\mathfrak{R}} f = \sum_{S \in \mathcal{S}} \int_S f,$$

per la definició de [suma de Riemann](#) (7.1.13). □

Teorema 7.1.19. *Siguin $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció integrable Riemann amb $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$. Aleshores la funció $|f|$ és integrable Riemann i*

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} f \right| \leq \int_{\mathfrak{R}} |f| \leq M|\mathfrak{R}|.$$

Demostració. Sigui $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles definits per una partició de \mathfrak{R} . Aleshores

$$\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) = \sup_{x, y \in \mathfrak{R}_i} |f(x) - f(y)|, \quad \text{per a tot } i \in I,$$

i

$$\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} |f(x)| - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} |f(x)| = \sup_{x, y \in \mathfrak{R}_i} ||f(x)| - |f(y)||, \quad \text{per a tot } i \in I.$$

Per tant, per la definició de [suma superior i inferior](#) (7.1.3), si P és una partició de \mathfrak{R} tenim

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P)$$

Com que, per hipòtesi, f és integrable Riemann, pel [Teorema del criteri d'integrabilitat Riemann](#) (7.1.9) tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

el que significa que

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

I pel mateix criteri d'integrabilitat Riemann $|f|$ també és integrable Riemann.

Per veure les desigualtats de l'enunciat, amb \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} i $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles definits per una partició $\lim_{P \in \mathcal{P}}$ de \mathfrak{R} , tenim

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} f \right| = \lim_{P \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \in I} f(x) |\mathfrak{R}_i| \right| \leq \lim_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} |f(x)| |\mathfrak{R}_i| = \int_{\mathfrak{R}} |f|.$$

Com que, per hipòtesi, $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, tenim

$$\int_{\mathfrak{R}} |f| \leq \int_{\mathfrak{R}} M = M |\mathfrak{R}|. \quad \square$$

Corol·lari 7.1.20. Si $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, $\int_{\mathfrak{R}} f \geq 0$.

Proposició 7.1.21. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada tal que $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$ i $\int_{\mathfrak{R}} f = 0$. Aleshores $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$.

Demostració. Observem que la proposició té sentit pel Teorema 7.1.12.

Farem aquesta demostració per reducció a l'absurd. Suposem que existeix un punt $c \in \mathfrak{R}$ tal que $f(c) > 0$. Com que, per hipòtesi, f és contínua en un rectangle \mathfrak{R} , acotat per la definició de rectangle (7.1.1), pel Teorema de Heine (5.3.3) f és uniformement contínua en \mathfrak{R} , per tant, per la definició de continuïtat uniforme (5.3.2), per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tals que

$$\text{si } |x - c| < \delta \text{ aleshores } |f(x) - f(c)| < \varepsilon = \frac{f(c)}{2}.$$

Per tant, si definim un rectangle S inscrit en la bola de radi δ centrada en el punt c , $B(c, \delta)$, tenim

$$\int_{\mathfrak{R}} f \geq \int_S f \geq \frac{f(c)}{2} |S| > 0,$$

però això contradiu la hipòtesi de que $\int_{\mathfrak{R}} f = 0$, per tant la proposició queda demostrada per reducció a l'absurd. \square

7.2 Les funcions integrables Riemann

7.2.1 Caracterització de les funcions integrables Riemann

Definició 7.2.1 (Oscil·lació d'una funció en un punt). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a \in U$ un punt, $B(a, \delta) \subseteq U$ una bola oberta centrada en a de radi $\delta > 0$ i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció. Aleshores definim l'aplicació

$$\omega_f(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x, y \in B(a, \delta)} \|f(x) - f(y)\|$$

com l'oscil·lació de la funció f en el punt a .

Proposició 7.2.2. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció definida en un punt $a \in U$. Aleshores f és contínua en a si i només si $\omega_f(a) = 0$, on $\omega_f(a)$ és la oscil·lació de f en a .

Demostració. Suposem que $\omega_f(a) = 0$. Observem que quan $\delta \rightarrow 0$, per a tot $x, y \in B(a, \delta)$ tenim $x \rightarrow a$ i $y \rightarrow a$, i com que $\omega_f(a) = 0$, podem escriure

$$\begin{aligned}\omega_f(a) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x, y \in B(a, \delta)} \|f(x) - f(y)\| \\ &= \lim_{x, y \rightarrow a} \|f(a) - f(x)\| = 0\end{aligned}$$

i per tant tenim $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow a} f(y)$, i equivalentment

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

que és la definició de **funció contínua** (5.2.2). \square

Definició 7.2.3 (Conjunt de discontinuïtats d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció, τ un escalar positiu i $\omega_f(x)$ l'oscil·lació de f en un punt $x \in U$. Aleshores denotem el conjunt

$$D_\tau = \{x \in U \mid \omega_f(x) \geq \tau\}$$

com el conjunt de desigualtats majors que τ d'una funció.

Observació 7.2.4. D_τ és compacte.

Definició 7.2.5 (Contingut exterior de Jordan). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, $A \subseteq \mathfrak{R}$ un conjunt, 1_A la funció indicatriu de A i $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles definits per una partició de \mathfrak{R} amb la condició de que $\mathfrak{R}_i \cap A \neq \emptyset$ per a tot $i \in I$. Aleshores definim

$$c(A) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} 1_A(x) |\mathfrak{R}_i|$$

com el contingut exterior de Jordan de A .

Nota 7.2.6. La condició sobre \mathfrak{R}_i pot dir-se com que els \mathfrak{R}_i cobreixen A .

Observació 7.2.7. Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunt finit de conjunts amb $c(A_i) = 0$ per a tot $i \in I$ i $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Aleshores $c(A) = 0$.

Teorema 7.2.8. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann en \mathfrak{R} si i només si el contingut exterior de Jordan del conjunt de desigualtats majors que $\tau > 0$ de f en \mathfrak{R} és zero, és a dir, $c(D_\tau) = 0$ per a tot $\tau > 0$.

Demostració. Comencem amb la implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem doncs que $D_\tau = \emptyset$ per a tot $\tau > 0$. Per la definició de **contingut exterior de Jordan** (7.2.5) això és

$$\sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} 1_{D_\tau}(x) |\mathfrak{R}_i| = 0$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició del conjunt \mathcal{P} de particions de \mathfrak{R} . Considerem el conjunt de subrectangles $\{\mathfrak{R}_j\}_{j \in J}$ tals que $\mathfrak{R}_j \cap D_\tau \neq \emptyset$. Ara bé, per la proposició 7.2.2 tenim que f és contínua, i pel Teorema 7.1.12 veiem que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} .

Comprovem ara la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} i fixem $\varepsilon > 0$. Pel [Teorema del criteri d'integrabilitat Riemann](#) (7.1.9) tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$\sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i| < \varepsilon$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles definits per P . Sigui J el conjunt de subrectangles $\{\mathfrak{R}_j\}_{j \in J}$ tals que $\mathfrak{R}_j \cap D_\tau \neq \emptyset$. Tindrem

$$\sup_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) \geq \tau$$

per a tot $j \in J$, i per tant, amb $\mathfrak{R}' = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{R}_j$, per la definició de [contingut exterior de Jordan](#) (7.2.5)

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) \right) |\mathfrak{R}_j| &\geq \sum_{j \in J} \tau |\mathfrak{R}_j| \\ &= \tau \sum_{j \in J} |\mathfrak{R}_j| \\ &\geq \tau \sum_{j \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} 1_{\mathfrak{R}'}(x) |\mathfrak{R}_j| \\ &= \tau c(D_\tau) \end{aligned}$$

Ara bé, com que f és integrable, pel [Teorema del criteri d'integrabilitat Riemann](#) (7.1.9) tenim que

$$\sum_{j \in J} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) \right) |\mathfrak{R}_j| < \varepsilon$$

per a tota $\varepsilon > 0$, i per tant quan $\varepsilon \rightarrow 0$ ha de ser $D_\tau = 0$, com volíem veure. \square

7.2.2 Integració sobre conjunts generals

Nota 7.2.9. *Tota la teoria de l'integració Riemann que hem vist ha estat sobre rectangles. Ara tractem de generalitzar-la desfent-nos d'aquesta limitació.*

Capítol 8

Càlcul vectorial

sona divertit

Bibliografia

- [1] Joaquim Bruna. «Aspectes mètrics, geomètrics i topològics de l'espai euclidià. Funcions de vàries variables, corbes i superfícies». 2017.
- [2] Joaquim Bruna. «Càlcul Diferencial en varies variables». 2017.
- [3] Joaquim Bruna. «Càlcul Integral en vàries variables». 2017.
- [4] Joaquim Bruna. «Anàlisi Vectorial». 2017.
- [5] T. Apostol. *Mathematical analysis*. Anglès. Addison-Wesley, 1974. ISBN: 0201002884.
- [6] J.E. Marsden i A.J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Castellà. 5a ed. Addison-Wesley, 2004. ISBN: 9788478290697.
- [7] Wendell Helms Fleming. *Functions of Several Variables*. Anglès. 1977. ISBN: 978-1-4684-9461-7.
- [8] David M. Bressoud. *Second Year Calculus. From celestial mechanics to special relativity*. Anglès. Springer, 1991. ISBN: 978-1-4612-0959-1.

Els apunts que he seguit per escriure la majoria d'aquesta part són els escrits pel professor de l'assignatura; [1, 2, 3, 4]. De moment no han estat publicats però en té pensat fer-ne un llibre. Es poden trobar al campus virtual.

El llibre [5] és molt útil per tenir una visió més organitzada i pautaada del curs. També tracta temes més avançats als de l'assignatura.

La bibliografia del curs inclou els textos [6, 7, 8].

Part V

Anàlisi matemàtica

Capítol 9

Sèries

9.1 Sèries numèriques

9.1.1 Convergència d'una sèrie numèrica

Definició 9.1.1 (Sèrie numèrica). Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Aleshores direm que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

és una sèrie numèrica o la sèrie de (a_n) .

Definició 9.1.2 (Sèrie convergent). Sigui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica i

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

una successió tals que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$$

on L és un nombre real. Aleshores direm que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie convergent amb valor L .

Si L no és un nombre real direm que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie divergent.

Exemple 9.1.3 (Sèries geomètriques). *Sigui $r \neq 0$ un nombre real. Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n. \tag{9.1}$$

Solució. Observem que si $r = 1$, per la definició de [límit \(5.2.1\)](#), el límit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N 1^n = N$$

és divergent, i per la definició de [sèrie convergent \(9.1.2\)](#) tenim que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

és divergent.

Estudiem ara el cas $r \neq 1$. Tenim que $\sum_{n=0}^N r^n = r^0 + r^1 + r^2 + \dots$, i per tant

$$\begin{aligned}(1-r) \sum_{n=0}^N r^n &= (1-r)(r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^N) \\ &= r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^N - (r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^{N+1}) \\ &= 1 - r^{N+1}\end{aligned}$$

i trobem

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

Ara bé, tenim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } -1 < r < 1 \\ +\infty & \text{si } r \geq 1 \\ \text{no existeix} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

i per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2) trobem que (9.1) és convergent si i només si r pertany a l'interval $(-1, 1)$, i si r pertany a l'interval $(-1, 1)$ aleshores es compleix

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}. \quad \diamond$$

Teorema 9.1.4 (Condicció de Cauchy). *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 natural tal que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim*

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| < \varepsilon.$$

Demostració. Suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2) això és que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = L$$

on L és un nombre real.

Per la definició de [límit](#) (5.2.1) tenim que per a tot $\delta_1 > 0$ real existeix un N tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L \right| < \delta_1$$

i de nou per la definició de [límit](#) (5.2.1) tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un $\delta_2 > 0$ real tal que $\delta_1 - \delta_2 < \varepsilon$ i que existeix un M natural satisfent

$$\left| \sum_{n=1}^M a_n - L \right| < \delta_2.$$

Per tant trobem

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L \right| - \left| \sum_{n=1}^M a_n - L \right| < \delta_1 - \delta_2$$

i per la desigualtat triangular tenim que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^M a_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - \sum_{n=1}^M a_n \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L - \sum_{n=1}^M a_n + L \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L \right| - \left| \sum_{n=1}^M a_n - L \right| \\ &< \delta_1 - \delta_2 < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Corol·lari 9.1.5. *Sigui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent. Aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Demostració. Per la [condició de Cauchy](#) (9.1.4) tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 natural tal que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| < \varepsilon.$$

En particular, si triem $M = N + 1$, tenim $|a_n| < \varepsilon$ per a tot $n > n_0$, i per la definició de [límit](#) (5.2.1) veiem que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.6 (Sèrie harmònica). *Sigui α un nombre real. Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \quad (9.2)$$

Solució. Observem que si $\alpha \leq 0$ tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$$

i pel corol·lari 9.1.5 tenim que la sèrie és divergent.

Suposem que $0 < \alpha \leq 1$. Definim la successió

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

i tenim que

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^{N\alpha}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{N\alpha}} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{2^{(n+1)\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Ara bé, tenim que $1 - \alpha \geq 0$, i per tant trobem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n(1-\alpha)} = \infty,$$

i tenim que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2^N} = \infty$ i per la definició de [sèrie divergent](#) (9.1.2) trobem que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és divergent.

Veiem ara el cas $\alpha > 1$. Definim de nou la successió

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}.$$

Tenim que

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^{N\alpha}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{N\alpha}} \\ &= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{2^{n\alpha}} \\ &= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \sum_{n=0}^{N-1} 2^{(1-\alpha)n} \\ &= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \frac{1 - 2^{(1-\alpha)N}}{1 - 2^{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

i tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{N\alpha}} + \frac{1 - 2^{(1-\alpha)N}}{1 - 2^{1-\alpha}} = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}.$$

Per tant tenim que la successió (S_N) està fitada, i degut a que $S_{N+1} = S_N + \frac{1}{(N+1)^\alpha}$ tenim que és creixen i pel [Teorema de Weierstrass](#) (5.2.13) tenim que és convergent. Per tant per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2) tenim que la sèrie (9.2) és convergent.

Per tant tenim que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

és convergent si i només si $\alpha > 1$. ◇

9.1.2 Sèries de termes positius

Definició 9.1.7 (Sèrie de termes positius). Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica tal que $a_n > 0$ per a tot n natural. Aleshores direm que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és una sèrie de termes positius.

Notació 9.1.8. Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius. Aleshores escriurem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent

Lema 9.1.9. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ una sèrie de termes positius convergent, K un nombre real i n_0 un natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà $a_n \leq Kb_n$. Aleshores tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^N a_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + K \sum_{n=n_0}^N b_n \end{aligned}$$

i per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2) tenim que la sèrie $K \sum_{n=n_0}^N b_n$ és convergent i, de nou per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2), tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent, com volíem veure. \square

Teorema 9.1.10 (Criteri de comparació). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

tals que

1. $L \neq 0$ i $L \neq \infty$. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$
2. $L = 0$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.
3. $L = \infty$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Suposem que $L \neq 0$ ó $L \neq \infty$. Observem que $L > 0$. Per tant prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 0$. Per la definició de [límit](#) (5.2.1) tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon.$$

Per tant tenim que per a tot $n > n_0$

$$l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon.$$

Suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. Aleshores tenim

$$b_n(l - \varepsilon) < a_n < b_n(l + \varepsilon),$$

i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Suposem ara que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Aleshores tenim

$$\frac{a_n}{L - \varepsilon} < b_n < \frac{a_n}{L + \varepsilon},$$

i pe lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L = 0$ i que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. Per la definició de [límit](#) (5.2.1) tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon,$$

i això és equivalent a

$$a_n < \varepsilon b_n$$

i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (3). Suposem doncs que $L = \infty$ i que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0,$$

i per tant pel punt (2) tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. \square

Exemple 9.1.11. *Considerem la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 3^{-n}.$$

Volem estudiar si aquesta sèrie és convergent o divergent.

Solució. Definim

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 3^{-n} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{3^n}$$

Observem que per a tot n natural tenim $a_n > 0$ i $b_n > 0$, i per la definició de [sèrie de termes positius](#) (9.1.7) tenim que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són sèries de termes positius.

Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 3^{-n}}{3^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 1. \end{aligned}$$

Ara bé, per l'exercici 9.1.3 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ és convergent, ja que $-1 < \frac{1}{3} < 1$, i pel [criteri de comparació](#) (9.1.10) trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. \diamond

9.1.3 Criteris de convergència

Proposició 9.1.12 (Criteri de l'arrel). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

tal que

1. $L < 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*
2. $L > 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.*

Demostració. Comencem veient el punt (1). Suposem doncs que $L < 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Per la definició de [límit](#) (5.2.1) tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon,$$

i per tant

$$a_n < (L + \varepsilon)^n.$$

Ara bé, tenim que $L + \varepsilon < 1$, per tant per l'exercici 9.1.3 tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$ és convergent, i per tant pel lema 9.1.9 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Per la definició de límit (5.2.1) tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon,$$

i per tant

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}.$$

Ara bé, tenim que $L - \varepsilon > 1$, per tant per l'exercici 9.1.3 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} (L - \varepsilon)^n$ és divergent, i per tant pel lema 9.1.9 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent. \square

Exemple 9.1.13. *Siguin $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$ dos reals. Considerem la sèrie numèrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \alpha^n.$$

Volem estudiar la convergència d'aquesta sèrie en funció dels valors de α i β .

Solució. Definim

$$a_n = n^{\beta} \alpha^n.$$

Observem primer que $a_n > 0$ per a tot n natural. Per tant per la definició de sèrie de termes positius (9.1.7) tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie de termes positius. Veiem també que si $\alpha = 1$ tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta},$$

i com que $\beta \geq 0$ la sèrie és divergent.

Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\beta} \alpha^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\beta}} \sqrt[n]{\alpha^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\beta}} \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Per tant, pel criteri de l'arrel (9.1.12) tenim que la sèrie és convergent quan $\alpha > 1$ i divergent quan $\alpha \leq 1$. \diamond

Proposició 9.1.14 (Criteri del quocient). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

tal que

1. $L < 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

2. $L > 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Suposem doncs que $L < 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Aleshores per la definició de límit (5.2.1) tenim que existeix un n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon,$$

i per tant

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon)a_n$$

i trobem

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< (L + \varepsilon)a_n \\ &< (L + \varepsilon)^2 a_{n-1} \\ &\vdots \\ &< (L + \varepsilon)^{n-n_0+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Ara bé, com que $L + \varepsilon < 1$ tenim per l'exemple 9.1.3 que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$ és convergent, i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Aleshores per la definició de límit (5.2.1) tenim que existeix un n_0 natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

i per tant

$$(L - \varepsilon)a_n < a_{n+1}$$

i trobem

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> (L - \varepsilon)a_n \\ &> (L - \varepsilon)^2 a_{n-1} \\ &\vdots \\ &> (L - \varepsilon)^{n-n_0+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Ara bé, com que $L - \varepsilon > 1$ tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L - \varepsilon)^n = \infty,$$

i per tant trobem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

i tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent, com volíem veure. \square

Lema 9.1.15. *Siguin x i α dos nombres reals no negatius. Aleshores*

$$1 - \frac{\alpha}{x} \leq \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\alpha}.$$

Demostració. :(\square

Proposició 9.1.16 (Criteri de Raabe). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$$

tal que

1. $L > 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.
2. $L < 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.

Demostració. Comencem veient el cas (1). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Aleshores per la definició de límit (5.2.1) tenim que existeix un n_0 natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$L - \varepsilon < n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

i per tant

$$a_{n+1} < a_n \left(1 - \frac{L - \varepsilon}{n}\right).$$

Aleshores, pel lema 9.1.15 trobem que

$$a_{n+1} < a_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{L-\varepsilon}$$

i tenim

$$a_{n+1} < a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{L-\varepsilon}. \quad (9.3)$$

Podem aplicar la desigualtat (9.3) recursivament per obtenir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{L-\varepsilon} \\ &< a_{n-1} \left(\frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1}\right)^{L-\varepsilon} \\ &\vdots \\ &< a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n_0+1} \frac{n_0+1}{n_0+2} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1}\right)^{L-\varepsilon} \end{aligned}$$

i per tant trobem

$$a_{n+1} < a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n+1} \right)^{L-\varepsilon},$$

i com que $L - \varepsilon > 1$ trobem per l'exemple 9.1.6 que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{L-\varepsilon}$$

és convergent, i pel lema 9.1.9 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L < 1$. □

Exemple 9.1.17. *Sigui $\alpha > 0$ un nombre real. Considerem la sèrie numèrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}. \quad (9.4)$$

Volem estudiar la convergència d'aquesta sèrie en funció del valor de α .

Solució. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\alpha^n n!}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}(n+1)!n^n}{\alpha^n n! (n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n+1)!n^n}{(n+1)!(n+1)^n} \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{\alpha}{e} \end{aligned}$$

Per tant, si $\alpha > e$ tenim que $\frac{\alpha}{e} > 1$, i pel [criteri del quocient](#) (9.1.14) trobem que la sèrie és divergent. Si $\alpha < e$ aleshores $\frac{\alpha}{e} < 1$ i pel [criteri del quocient](#) (9.1.14) trobem que la sèrie és convergent.

Estudiem el cas $\alpha = e$. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n! (n+1)^{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - e \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)!(n+1)^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^2) = -\infty \end{aligned}$$

i pel [criteri de Raabe](#) (9.1.16) trobem que la sèrie (9.4) és divergent quan $\alpha = e$.

Per tant la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}$$

és convergent si i només si $\alpha < e$. ◇

Proposició 9.1.18 (Criteri de condensació). *Si sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius amb $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decreixent. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ és convergent.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent i definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{i} \quad T_N = \sum_{n=0}^N 2^n a_{2^n}.$$

Per la definició de [sèrie convergent \(9.1.2\)](#) tenim que existeix un real C tal que per a tot N natural

$$S_N \leq \frac{C}{2} \tag{9.5}$$

Aleshores tenim que la successió T_N és creixent, ja que $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de termes positius creixent i (a_n) és, per hipòtesi, una successió de termes positius.

Veiem ara que $T(N)$ està fitada. Tenim que

$$\begin{aligned} T_N &= 2a_2 + 4a_4 + 8a_6 + \cdots + 2^N a_{2^N} \\ &= 2(a_2 + 2a_4 + 4a_6 + \cdots + 2^{N-1} a_{2^N}) \\ &\leq 2(a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{N-1}} + \cdots + a_{2^N})) \\ &= 2S_{2^N} \leq C \end{aligned} \tag{9.5}$$

i per tant la successió T_N és creixent i està fitada, i per tant és convergent, i per la definició de [sèrie convergent \(9.1.2\)](#) trobem que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

és convergent.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

és convergent. Definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{i} \quad T_N = \sum_{n=0}^N 2^n a_{2^n},$$

i com que, per hipòtesi, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ és convergent tenim que existeix un real C tal que per a tot N es satisfà

$$T(N) \leq C \tag{9.6}$$

Aleshores, com que per hipòtesi la successió a_n és decreixent, tenim que

$$\begin{aligned} S_N &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + a_N \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 8a_8 + \cdots + 2^N a_N \\ &= a_1 + T(N) \leq a_1 + C. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Per tant tenim que la successió (S_N) és acotada, i com que per hipòtesi la successió (a_n) és una successió de termes positius trobem que la sèrie S_N és creixent, i per tant convergent, i per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2) trobem que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

és convergent, com volíem veure. \square

Proposició 9.1.19 (Criteri logarítmic). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = L$$

tal que

1. $L > 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*
2. $L < 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.*

Demostració. Comencem veient el punt (2). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Aleshores per la definició de [límit](#) (5.2.1) tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$L - \varepsilon < \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)},$$

i per tant

$$(L - \varepsilon) \log(n) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

o, equivalentment,

$$\log(n^{L-\varepsilon}) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

i tenim que

$$n^{L-\varepsilon} < \frac{1}{a_n}.$$

Per tant,

$$a_n > \frac{1}{n^{L-\varepsilon}}$$

Ara bé, com que per hipòtesi $L - \varepsilon > 1$, per l'exercici 9.1.6 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{L-\varepsilon}}$$

és convergent, i pel lemma 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (1). Suposem doncs que $L < 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Per la definició de límit (5.2.1) tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant trobem que

$$\frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} < \varepsilon + L,$$

o equivalentment,

$$\log\left(\frac{1}{a_n}\right) < (\varepsilon + L) \log(n)$$

i tenim que

$$\log\left(\frac{1}{a_n}\right) < \log(n^{\varepsilon+L})$$

i per tant

$$\frac{1}{a_n} < n^{\varepsilon+L}$$

i trobem

$$a_n > \frac{1}{n^{\varepsilon+L}}. \quad (9.7)$$

Ara bé, com que per hipòtesi $L + \varepsilon < 1$, per l'exemple 9.1.6 que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{L+\varepsilon}}$$

és divergent, i pel lema 9.1.9 i (9.7) tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent. \square

Exemple 9.1.20. *Sigui α un real. Volem estudiar per a quins valors de $\alpha > 0$ la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{\log(n)}} \quad (9.8)$$

és convergent.

Solució. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha^{\log(n)})}{\log(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n) \log(\alpha)}{\log(n)} \\ &= \log(\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log(n)} = \log(\alpha). \end{aligned}$$

Per tant, pel criteri logarítmic (9.1.19) trobem que si $\alpha > e$ la sèrie (9.8) és convergent, i si $\alpha < e$ la sèrie (9.8) és divergent. Estudiem el cas $\alpha = e$. Això és la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\log(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

i per l'exercici 9.1.6 trobem que és divergent.

Per tant, la sèrie (9.8) és convergent quan $\alpha > e$ i divergent quan $\alpha \leq e$. \diamond

Proposició 9.1.21 (Criteri de la integral). *Siguin $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ una funció decreixent. Aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és convergent si i només si existeix un real $C > 0$ tal que per a tot N natural es satisfà $\int_1^N f(x)dx \leq C$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és convergent. Com que, per hipòtesi, la sèrie és de termes positius, per la definició de [sèrie convergent \(9.1.2\)](#) tenim que existeix un real C tal que per a tot N natural es satisfà

$$\sum_{n=1}^N f(n) \leq C.$$

Considerem la integral

$$\int_1^N f(x)dx.$$

Com que per hipòtesi la funció f és decreixent trobem que

$$\begin{aligned} \int_1^N f(x)dx &\leq (2-1)f(1) + (3-2)f(2) + \cdots + (N-(N-1))f(N-1) \\ &= f(1) + 1f(2) + \cdots + 1f(N-1) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq C, \end{aligned}$$

i hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que existeix un real $C > 0$ tal que per a tot N natural es satisfà

$$\int_1^N f(x)dx \leq C.$$

Tenim doncs que per a tot N natural

$$\begin{aligned} C &\geq \int_1^N f(x)dx \\ &\geq (1-0)f(1) + (2-1)f(2) + \cdots + (N+1-N)f(N) \\ &= f(1) + 1f(2) + \cdots + 1f(N) \\ &= \sum_{n=1}^N f(n), \end{aligned}$$

i per la definició de [sèrie convergent \(9.1.2\)](#) trobem que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és convergent. \square

9.1.4 Sèries alternades

Definició 9.1.22 (Sèrie alternada). Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sèrie de termes positius. Aleshores direm que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

és la sèrie alternada de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 9.1.23 (Criteri de Leibniz). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sèrie de termes positius decreixent amb*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Aleshores la sèrie alternada de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent.

Demostració. Definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \quad (9.9)$$

i considerem les parcials

$$S_{2N+1} = \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n a_n \quad \text{i} \quad S_{2N} = \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n a_n.$$

Tenim que

$$S_{2(N+1)+1} = S_{2N+1} - a_{2N+2} + a_{2N+3},$$

i com que, per hipòtesi, la successió (a_n) és decreixent trobem que

$$S_{2(N+1)+1} \leq S_{2N+1},$$

i per tant la successió $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ és decreixent. També tenim que

$$S_{2(N+1)} = S_{2N} + a_{2N+1} - a_{2N+2},$$

i de nou, com que la successió (a_n) és decreixent trobem que

$$S_{2(N+1)} \geq S_{2N},$$

i per tant la successió $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ és creixent.

Ara bé, com que per hipòtesi la successió (a_n) és de termes positius tenim que

$$S_{2N+1} - S_{2N} = a_{2N+1} \geq 0,$$

i per tant $S_{2N+1} < S_{2N}$. Així trobem que

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= S_2 \\ &\leq S_{2N} \\ &< S_{2N+1} \\ &\leq S_1 = a_1, \end{aligned} \quad (9.9)$$

i tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_{2N+1} - S_{2N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_{2N+1},$$

i com que per hipòtesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N}. \quad (9.10)$$

Per tant tenim que (S_{2N+1}) és una successió superiorment acotada i creixent, i per tant convergent, i (S_{2N}) és una successió inferiorment acotada i decreixent, i per tant convergent. També tenim per (9.10) que tenen el mateix límit, i per tant la successió (S_N) és convergent, i per la definició de [sèrie convergent](#) (9.1.2) trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ és convergent, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.24 (Sèrie harmònica alternada). *Sigui α un real. Volem estudiar per a quins valors de α la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad (9.11)$$

és convergent.

Solució. Si $\alpha \leq 0$ tenim que el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

és divergent, i pel corollari 9.1.5 trobem que la sèrie és divergent.

Estudiem ara el cas $\alpha > 0$. Si denotem

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

tenim que la successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és decreixent, i pel [criteri de Leibniz per sèries alternades](#) (9.1.23) trobem que la sèrie és convergent.

Per tant tenim que si $\alpha > 0$ la sèrie (9.11) és convergent, i si $\alpha \leq 0$ la sèrie és divergent. \diamond

9.1.5 Convergència absoluta d'una sèrie

Definició 9.1.25 (Convergència absoluta). Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica tal que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

sigui convergent. Aleshores direm que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent.

Proposició 9.1.26. *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*

Demostració. Com que, per hipòtesi, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és convergent tenim per la [condició de Cauchy](#) (9.1.4) que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un n_0 natural tal que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M |a_n| \right| < \varepsilon. \quad (9.12)$$

Ara bé, com que $|a_n|$ és no negatiu per a tot n natural trobem que

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| = \sum_{n=N}^M |a_n|,$$

i per la desigualtat triangular tenim que

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| \leq \sum_{n=N}^M |a_n|$$

i per (9.12) trobem que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| < \varepsilon,$$

i per la [condició de Cauchy](#) (9.1.4) tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. \square

Exemple 9.1.27. *Volem estudiar la convergència de la sèrie numèrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}. \quad (9.13)$$

Solució. Observem que no tots els termes de la sèrie (9.13) són positius. Per tant no podem aplicar els criteris de convergència de sèries de termes positius.

Estudiem la convergència absoluta de la sèrie. Per la definició de [convergència absoluta d'una sèrie](#) (9.1.25) això és estudiar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right|, \quad (9.14)$$

que podem reescriure com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^3}.$$

Observem que $|\sin(n)| \leq 1$. Per tant trobem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Ara bé, tenim per l'exemple 9.1.6 que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

és convergent, i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie (9.14) és convergent.

Per tant, per la definició de [convergència absoluta d'una sèrie](#) (9.1.25) trobem que la sèrie (9.13) és absolutament convergent, i per la proposició 9.1.26 trobem que la sèrie (9.13) és convergent. \diamond

Exemple 9.1.28. *Volem estudiar la convergència i la convergència absoluta de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad (9.15)$$

Solució. Tenim per l'exemple 9.1.24 que la sèrie (9.15) és convergent, i per l'exemple 9.1.6 trobem que la sèrie (9.15) no és absolutament convergent. \diamond

9.1.6 Sèries del producte de successions

Lema 9.1.29 (Fórmula de sumació parcial d'Abel). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dues sèries numèriques i*

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Aleshores per a tot naturals N i M amb $N \leq M$ tenim que

$$\sum_{n=N}^M a_n b_n = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^M a_n b_n &= \sum_{n=N}^M (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=N}^M A_n b_n - \sum_{n=N}^M A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=N}^M A_n b_n - \sum_{n=N-1}^{M-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n b_n - \sum_{n=N-1}^{M-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 9.1.30 (Teorema de Dirichlet). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió numèrica tal que existeix un real C tal que $\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq C$ per a tot N natural i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió numèrica monòtona amb $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Aleshores la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

és convergent.

Demostració. Definim

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Per la fórmula de sumació parcial d'Abel (9.1.29) tenim que per a tot naturals N i M amb $N < M$

$$\sum_{n=N}^M a_n b_n = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}),$$

i per la desigualtat triangular tenim que

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq |A_M b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left| \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right|. \quad (9.16)$$

Ara bé, com que per hipòtesi tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

per la definició de límit (5.2.1) trobem que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ tenim

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Per tant, per a tot $N > n_0$ tenim que

$$\begin{aligned} |A_M b_M| &= |b_M| |A_M| \\ &\leq |b_M| \left| \sum_{n=0}^M a_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4C} C = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

també tenim

$$\begin{aligned} |A_{M-1} b_M| &= |b_M| |A_{M-1}| \\ &\leq |b_M| \left| \sum_{n=0}^{M-1} a_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4C} C = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| &\leq \sum_{n=N}^{M-1} |A_n| |b_n - b_{n+1}| \\ &\leq \sum_{n=N}^{M-1} C |b_n - b_{n+1}| \\ &= C \sum_{n=N}^{M-1} |b_n - b_{n+1}| \\ &= C |b_N - b_M| \\ &\leq C (|b_N| + |b_M|) \\ &\leq C \left(\frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{4C} \right) = \frac{2\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Per (9.16) trobem

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2\varepsilon}{4},$$

i per tant tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un natural n_0 tal que per a tot natural N i M amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq \varepsilon,$$

i per la [condició de Cauchy](#) (9.1.4) tenim que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

és convergent, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.31. *Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}.$$

Solució. Tenim que

$$e^{ni} = \cos(n) + i \sin(n).$$

Per tant tenim que per a tot N natural

$$\sum_{n=0}^N e^{ni} = \sum_{n=0}^N \cos(n) + i \sum_{n=0}^N \sin(n).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \sin(n) \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^N e^{ni} \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^N (e^i)^n \right| \\ &= \left| \frac{1 - (e^i)^{N+1}}{1 - e^i} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^i - e^i e^{Ni}}{e^i - 1} \right| \\ &= |e^i| \left| \frac{1 - e^{Ni}}{e^i - 1} \right| \\ &\leq \left| \frac{1 + e^i}{e^i - 1} \right| \\ &\leq \frac{1 + |e^i|}{|e^i - 1|} < C \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

per a cert C real. També tenim que la successió $(n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ és monòtonament decreixent amb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

i pel [Teorema de Dirichlet per sèries numèriques](#) (9.1.30) trobem que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

és convergent. \diamond

Teorema 9.1.32 (Criteri d'Abel). *Si guin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió numèrica monòtona i convergent. Aleshores la sèrie*

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n$$

és convergent.

Demostració. Definim

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Aleshores tenim que

$$a_n = A_n - A_{n-1} \quad (9.17)$$

i per tant

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n b_n &= A_0 b_0 + \sum_{n=1}^N (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_0 b_0 + (A_1 - A_0) b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + \cdots + (A_N - A_{N-1}) b_N \\ &= A_0 (b_0 - b_1) + A_1 (b_1 - b_2) + \cdots + A_{N-1} (b_{N-1} - b_N) + A_N b_N \\ &= A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Per hipòtesi tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent, i per la definició de [sèrie convergent \(9.1.2\)](#) tenim que existeix un real L tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = L. \quad (9.18)$$

També tenim, per hipòtesi, que la successió (b_n) és convergent, i per tant existeix un real b tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b. \quad (9.19)$$

Estudiem la convergència absoluta de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$. Com que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent tenim que existeix un real $C > 0$ tal que per a tot N natural es satisfà

$$|A_N| \leq C. \quad (9.20)$$

Per tant, com que la successió (b_n) és monòtona, trobem que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |A_n (b_n - b_{n+1})| &\leq \sum_{n=0}^N |C (b_n - b_{n+1})| \\ &\leq C \sum_{n=0}^N |b_n - b_{n+1}| \\ &= C |b_0 - b_{N+1}|, \end{aligned} \quad (9.20)$$

i per (9.19) tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C |b_0 - b_{N+1}| = C |b_0 - b|,$$

i per tant la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ és absolutament convergent, i per la proposició 9.1.26 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ és convergent.

Ara bé, per (9.18) i (9.19) trobem que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N b_N = Lb,$$

i per tant tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(A_N b_N + \sum_{n=0}^N A_n(b_n - b_{n+1}) \right) = Lb + C|b_0 - b|$$

i per tant

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n b_n = Lb + C|b_0 - b|$$

és convergent, i per la definició de **sèrie convergent** (9.1.2) trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ és convergent, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.33. *Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (9.21)$$

Solució. Tenim que la successió

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

és monòtona i convergent, i per l'exercici 9.1.24 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

és convergent. Per tant pel **criteri d'Abel per sèries numèriques** (9.1.32) tenim que la sèrie (9.21) és convergent. \diamond

9.1.7 Reordenació de sèries

Definició 9.1.34 (Reordenada d'una sèrie). Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries tals que existeix una permutació σ de \mathbb{N} tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)}.$$

Aleshores direm que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és una reordenada de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Lema 9.1.35. *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Demostració. Fixem un natural N i considerem

$$M = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$$

i com que, per la definició de 9.1.7, tenim que $a_n \geq 0$ per a tot n natural trobem que

$$\sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^M a_n,$$

i per la definició de **sèrie convergent** (9.1.2) trobem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad \square$$

Corol·lari 9.1.36. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Proposició 9.1.37. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ és absolutament convergent.*

Demostració. Per la definició de **convergència absoluta d'una sèrie** (9.1.25) tenim que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

és convergent, i pel corol·lari 9.1.36 trobem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

i per tant tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ és absolutament convergent. \square

Notació 9.1.38. Definim

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Observació 9.1.39. *Tenim que*

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{i} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Lema 9.1.40. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 9.1.37.

Per la definició de 9.1.25 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent si i només si les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són convergents. Per tant trobem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \quad (9.1.39)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- \end{aligned} \quad (9.1.36)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma(n)}^-) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}, \quad (9.1.39)$$

com volíem veure. \square

Lema 9.1.41. *Si sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent però no absolutament convergent. Aleshores les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són divergents.*

Demostració. Per l'observació 9.1.39 tenim que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-), \quad (9.22)$$

i per tant

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (9.23)$$

Suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ és convergent. Aleshores per (9.23) tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ és convergent.

Ara bé, per la definició de **convergència absoluta d'una sèrie** (9.1.25) tenim que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són absolutament convergents, i per (9.22) tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent, però això contradiu l'hipòtesi que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ no és absolutament convergent. Per tant ha de ser que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ és divergent. El cas en que suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ és convergent és anàleg. \square

Teorema 9.1.42 (Teorema de la reordenació de sèries de Riemann). *Si sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent però no absolutament convergent i L un nombre real. Aleshores existeix una permutació σ de \mathbb{N} tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Demostració. Prenem un α real. Tenim per hipòtesi que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent però no absolutament convergent, i pel lema 9.1.41 trobem que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són divergents.

Definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n^+ \quad \text{i} \quad T_N = \sum_{n=0}^N a_n^-.$$

Tenim que S_N no està fitada superiorment i T_N no està fitada inferiorment. Per tant tenim que existeix un mínim natural n_1 tal que

$$S_{n_1} \geq \alpha,$$

i tenim que

$$\begin{aligned} \alpha &\leq S_{n_1} \\ &= S_{n_1-1} + a_{n_1}^+ \\ &< \alpha + a_{n_1}^+, \end{aligned}$$

i per tant

$$\alpha < \alpha + a_{n_1}^+.$$

També tenim que existeix un mínim natural m_1 tal que

$$S_{n_1} + T_{m_1} \leq \alpha,$$

i tenim que

$$\begin{aligned} \alpha &\geq S_{n_1} - T_{m_1} \\ &= S_{n_1} - T_{m_1-1} - a_{m_1}^- \\ &> \alpha - a_{m_1}^-, \end{aligned}$$

i per tant

$$\alpha > \alpha - a_{m_1}^-.$$

Definim doncs per a tot i natural

$$n_i = \min_{n > n_{i-1}} \{S_n - T_{m_{i-1}} \geq \alpha\} \quad \text{i} \quad m_i = \min_{m > m_{i-1}} \{S_{n_i} - T_m \leq \alpha\},$$

i trobem que

$$\begin{aligned} \alpha &\geq S_{n_i} - T_{m_i} \\ &= S_{n_i} - T_{m_i-1} - a_{m_i}^- \\ &\geq \alpha - a_{m_i}^-. \end{aligned}$$

Ara bé, tenim per hipòtesi que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent, i pel corollari 9.1.5 tenim que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, i per tant $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^- = 0$, i pel Teorema del sandvitx (5.2.14) trobem que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i} - T_{m_i} = \alpha. \quad \square$$

Teorema 9.1.43 (Teorema de Cauchy). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries absolutament convergents i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió tal que per a tot (i, j) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existeix un únic n tal que $c_n = a_i b_j$ i tal que per a tot n de \mathbb{N} existeix un únic (i, j) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $c_n = a_i b_j$. Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Demostració. Com que per hipòtesi les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són absolutament convergents, per la proposició 9.1.26 tenim que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són convergents, i per la definició de *sèrie convergent* (9.1.2) trobem que la successió

$$p_N = \sum_{n=0}^N a_n \sum_{n=0}^N b_n$$

és convergent.

Per la definició de *límit* (5.2.1) trobem que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que per a tot $N \geq n_0$ es satisfà

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n \sum_{n=0}^N b_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.24)$$

Aleshores per a tot natural $m \geq N$ tenim que

$$\left| \sum_{n=1}^m a_{\sigma(n)} b_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \sum_{n=N}^{\infty} b_n \right|,$$

i per (9.24) trobem

$$\left| \sum_{n=1}^m a_{\sigma(n)} b_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.25)$$

□

9.2 Successions funcions

9.2.1 Convergència d'una successió de funcions

Definició 9.2.1 (Successió de funcions). Sigui I un interval de \mathbb{R} i $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció real per a tot i natural. Aleshores direm que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de funcions definides en I .

Definició 9.2.2 (Convergència puntual). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions definides en un interval I tal que existeix una funció f de I a \mathbb{R} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

per a tot x de I . Aleshores direm que la successió f_n convergeix puntualment a f .

Exemple 9.2.3. *Convergència puntual d'alguna sèrie de funcions interessant.*

9.2.2 Convergència uniforme

Definició 9.2.4 (Convergència uniforme). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions definides en I que convergeix puntualment a una funció f tal que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un n_0 natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a f i ho denotarem com $f_n \Rightarrow f$.

Observació 9.2.5. Una successió de funcions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre I convergeix uniformement a una funció f si i només si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Demostració. Per la definició de límit (5.2.1). □

Exemple 9.2.6. Convergència uniforme d'alguna sèrie de funcions interessant.

Teorema 9.2.7 (Condicció de Cauchy). *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre I . Aleshores la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a una funció f de I si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un n_0 natural tal que per a tots enters n i m amb $n_0 < m < n$ es satisfà*

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Demostració. □

9.2.3 Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat

Teorema 9.2.8. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues sobre I tal que $f_n \Rightarrow f$. Aleshores f és contínua.*

Demostració. □

Teorema 9.2.9. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre I tal que $f_n \Rightarrow f$. Aleshores f és integrable Riemann.*

Demostració. □

Teorema 9.2.10. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre I tal que $f_n \Rightarrow f$. Aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Demostració. □

Teorema 9.2.11. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions derivables sobre I que convergeix uniformement a una funció f tal que la successió $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a una funció g . Aleshores tenim que f és derivable i que $f'(x) = g(x)$.*

Demostració. □

9.3 Sèries de funcions

9.3.1 Convergència d'una sèrie de funcions

Definició 9.3.1 (Sèrie de funcions). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre I . Aleshores definim, per a tot x de I ,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

com la sèrie de funcions de la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definició 9.3.2 (Convergència puntual). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre I i

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

tal que la successió de funcions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigui puntualment convergent en I . Aleshores direm que la sèrie de funcions de la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent puntualment en I .

Definició 9.3.3 (Convergència uniforme). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre I i

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

tal que la successió de funcions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigui uniformement convergent en I . Aleshores direm que la sèrie de funcions de la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent uniformement en I .

Teorema 9.3.4 (Condicció de Cauchy). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre I . Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ és convergent si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ real existeixen enters N i M amb $N < M$ tals que

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{n=N}^M f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Demostració.

□

9.3.2 Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat

Teorema 9.3.5. Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues sobre I tals que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeixi uniformement a una funció F en I . Aleshores F és contínua en I .

Demostració.

□

Teorema 9.3.6. Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre I tals que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeixi uniformement a una funció F en I . Aleshores F és integrable Riemann en I .

Demostració.

□

Teorema 9.3.7. *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de funcions integrables Riemann sobre I tal que la sèrie de funcions de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigui uniformement convergent en I . Aleshores*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Demostració.

□

Teorema 9.3.8.

Part VI

Estructures algebriques

Capítol 10

Teoria de grups

10.1 Grups

10.1.1 Propietats bàsiques dels grups

Definició 10.1.1 (Grup). Siguin $G \neq \emptyset$ un conjunt i $*$: $G \times G \rightarrow G$ una operació que satisfà

1. Per a tot $x, y, z \in G$

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

2. Existeix un $e \in G$ tal que per a tot $x \in G$

$$x * e = e * x = x.$$

3. Per a cada $x \in G$ existeix x' tal que

$$x * x' = x' * x = e.$$

Aleshores G és un grup amb la l'operació $*$. També direm $*$ dota al conjunt G d'estructura de grup.

Proposició 10.1.2. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i $e \in G$ tal que $x * e = e * x = x$ per a tot $x \in G$. Aleshores e és únic.*

Demostració. Suposem que existeix un altre element de G amb aquesta propietat, diguem-ne $\hat{e} \in G$. Aleshores hauria de ser

$$e * \hat{e} = e,$$

però per hipòtesi

$$e * \hat{e} = \hat{e}.$$

Per tant, ha de ser $e = \hat{e}$. □

Definició 10.1.3 (Element neutre d'un grup). Siguin G un grup amb l'operació $*$ i e un element de G tal que $x * e = e * x = x$ per a tot $x \in G$. Aleshores direm que e és l'element neutre de G .

Aquesta definició té sentit per la proposició 10.1.2.

Notació 10.1.4. Donat un grup G amb l'operació $*$ escriurem

$$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * x_2 * x_3.$$

També denotarem

$$x^n = x * \overset{n}{\dots} * x.$$

Si denotem la conjugació del grup per $+$ usarem la notació additiva i escriurem

$$x_1 + \dots + x_n$$

per referir-nos a la conjugació de $+$ amb si mateix n vegades.

També denotarem

$$nx = x + \overset{n}{\dots} + x.$$

Proposició 10.1.5. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i a, b, c tres elements de G . Aleshores*

$$1. a * c = b * c \implies a = b.$$

$$2. c * a = c * b \implies a = b.$$

Demostració. Farem només la demostració del punt (1) ja que l'altre és anàloga.

Com que per hipòtesi G és un grup, per la definició de grup (10.1.1) tenim que existeix c' tal que $c * c' = e$, on e és l'element neutre G , i tenim

$$a * c * c' = b * c * c',$$

el que significa que

$$a * e = b * e,$$

i ens queda $a = b$. □

Proposició 10.1.6. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e i a un element de G . Aleshores existeix un únic $a' \in G$ tal que*

$$a * a' = a' * a = e.$$

Demostració. Notem que existeix un $a' \in G$ que satisfà l'equació per la definició de grup (10.1.1), i per tant la proposició té sentit.

Suposem doncs que existeix $a'' \in G$ tal que

$$a * a'' = a'' * a = e.$$

Però aleshores tenim

$$a * a'' = e = a * a',$$

i per la proposició 10.1.5 ha de ser $a' = a''$, com volíem demostrar. □

Definició 10.1.7 (Invers d'un element). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e i a un element de G . Per la definició de grup tenim que existeix un $a' \in G$ tal que*

$$a * a' = a' * a = e.$$

Aleshores direm que a' és l'invers de a en G , i el denotarem per a^{-1} .

Aquesta definició té sentit per la proposició 10.1.6 i la notació introduïda en 10.1.4.

Proposició 10.1.8. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e . Aleshores*

$$e^{-1} = e.$$

Demostració. Per la definició de grup (10.1.1) tenim que

$$e * e^{-1} = e^{-1} * e = e,$$

i per ha de ser $e^{-1} = e$. \square

Proposició 10.1.9. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i a un element de G . Aleshores*

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Com que $(a^{-1})^{-1}$ és l'invers de a^{-1} tenim

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$$

però també tenim que

$$a * a^{-1} = e.$$

Per tant és

$$a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1},$$

i per la proposició 10.1.5 ha de ser

$$a = (a^{-1})^{-1}. \quad \square$$

Proposició 10.1.10. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i a, b dos elements de G . Aleshores*

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Considerem

$$\begin{aligned} (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * a^{-1} * a * b \\ &= b^{-1} * e * b \\ &= b^{-1} * b = e. \end{aligned}$$

i de manera anàloga trobem

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e.$$

Així doncs, per la proposició 10.1.6 tenim que $a * b$ és l'inversa de $b^{-1} * a^{-1}$, és a dir

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}. \quad \square$$

Lema 10.1.11. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i a, b dos elements de G . Aleshores existeixen $x, y \in G$ únics tals que*

$$b * x = a \quad i \quad y * b = a.$$

Demostració. Fem només una de les demostracions, ja que l'altre és anàloga. Com que per hipòtesi G és un grup, per la definició de grup (10.1.1) tenim que existeix $b^{-1} \in G$ tal que $b^{-1} * b = e$, on e és l'element neutre de G . Per tant considerem

$$b^{-1} * (b * x) = b^{-1} * a$$

i per la definició de grup (10.1.1) tenim que això és equivalent a

$$(b^{-1} * b) * x = b^{-1} * a,$$

i de nou per la definició de grup, i per la definició de l'element neutre d'un grup (10.1.3),

$$e * x = x = b^{-1} * a;$$

i la unicitat ve donada per la proposició 10.1.2. \square

Teorema 10.1.12. *Siguin G un conjunt $i *: G \times G \rightarrow G$ una operació binària que satisfà $x * (y * z) = (x * y) * z$ per a tot $x, y, z \in G$. Aleshores els següents enunciat són equivalents:*

1. G és un grup amb l'operació $*$.
2. $G \neq \emptyset$ i per a tot $a, b \in G$ existeix uns únics $x, y \in G$ tals que

$$b * x = a \quad i \quad y * b = a.$$

3. Existeix $e \in G$ tal que per a tot $x \in G$ tenim $x * e = x$ i existeix un $x^{-1} \in G$ tal que $x * x^{-1} = e$.

Demostració. Comencem demostrant (1) \implies (2). Suposem que G és un grup amb l'operació. Veiem que G no és buit per la definició de grup (10.1.1), i la segona part és el lema 10.1.11.

Demostrem ara (2) \implies (3). La primera part es pot veure fixant $x \in G$. Pel punt (2) tenim que per a cada $a \in G$ existeix un únic $b \in G$ tal que

$$a * b = x,$$

i podem fer

$$a * b * e = x * e$$

i substituint ens queda

$$x * e = x.$$

Per veure la segona part notem que pel punt (2) tenim que per a tot $x \in G$ existeix un $a \in G$ tal que

$$x * a = e,$$

i aleshores $a = x^{-1}$.

Ara només ens queda veure (3) \implies (1). Tenim que per a tot $x \in G$ existeix un x^{-1} tal que $x * x^{-1} = e$, i de la mateixa manera, existeix un $y \in G$ tal que $x^{-1} * y = e$. Per tant

$$\begin{aligned} e &= x^{-1} * y \\ &= x^{-1} * e * y \\ &= x^{-1} * x * x^{-1} * y \\ &= x^{-1} * x * e = x^{-1} * x. \end{aligned}$$

Així tenim que per a tot $x \in G$ es compleix $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, d'on podem veure que $e * x = x * e$, i com que, per hipòtesi, l'operació $*$ satisfà $x * (y * z) = (x * y) * z$ per a tot $x, y, z \in G$ es compleix la definició de grup (10.1.1) i tenim que G és un grup amb l'operació $*$.

Així tenim (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1), com volíem veure. \square

10.1.2 Subgrups i subgrups normals

Definició 10.1.13 (Subgrup). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i $H \subseteq G$ un subconjunt de G tal que H sigui un grup amb l'operació $*$. Aleshores diem que H és un subgrup de G .

També ho denotarem com $H \leq G$.

Observació 10.1.14. $e \in H$.

Proposició 10.1.15. Sigui G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e i H un subconjunt de G . Aleshores H és un subgrup de G si i només si per a tot $x, y \in H$ tenim que $x * y^{-1} \in H$.

Demostració. Demostrem primer que la condició és necessària (\implies). Això ho podem veure per la definició de grup (10.1.1), ja que tenim que y^{-1} existeix i pertany a H , i per tant $x * y^{-1}$ també pertany a H .

Demostrem ara que la condició és suficient (\impliedby). Tenim que per a tot $x \in H$ es compleix

$$x * x^{-1} = e,$$

i per tant $e \in H$. També tenim que per a tot $x \in H$ es compleix

$$e * x^{-1} = x^{-1},$$

i per tant $x^{-1} \in H$.

Ara només ens queda veure que $*$ és tancat en H ; és a dir, que per a tot $x, y \in H$ tenim $x * y \in H$. Com que ja hem vist que y^{-1} existeix i pertany a H , per la proposició 10.1.9 tenim

$$x * y^{-1} = x * y$$

i per hipòtesi $x * y \in H$.

Per tant, per la definició de grup (10.1.1) tenim que H és un grup amb l'operació $*$, i com que per hipòtesi $H \subseteq G$ per la definició de subgrup (10.1.13) tenim que H és un subgrup de G . \square

Proposició 10.1.16. Sigui G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e , $\{H_i\}_{i \in I}$ una família de subgrups de G i $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Aleshores H és un subgrup de G .

Demostració. Ho demostrarem amb la proposició 10.1.15. Tenim $H \subseteq G$ i $H \neq \emptyset$, ja que $e \in H$. Comprovem ara que per a tot $x, y \in H$ tenim $x * y^{-1} \in H$. Tenim que si $x, y \in H$, per la definició de H , $x, y \in H_{i \in I}$; i com que $H_{i \in I}$ és un subgrup de G , $x * y^{-1} \in H_{i \in I}$ per la proposició 10.1.15, i per tant $x * y^{-1} \in H$, com volíem veure. \square

Proposició 10.1.17. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e , $S \neq \emptyset$ un subconjunt de G , $\{H_i\}_{i \in I}$ una família de subgrups de G tals que $S \subseteq H_i$ per a tot $i \in I$ i $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Aleshores H és un subgrup de G .*

Demostració. Comprovem que H existeix, és a dir, que $H \neq \emptyset$ tenim prou amb veure que $e \in H$. Veiem que H és un subgrup de G ho podem veure per la proposició 10.1.16. \square

Definició 10.1.18 (Mínim subgrup generat per un conjunt). *Siguin G un grup amb l'operació $*$, S un subconjunt de G , $\{H_i\}_{i \in I}$ una família de subgrups de G tals que $S \subseteq H_i$ per a tot $i \in I$ i $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Aleshores direm que el subgrup $H \leq G$ és el mínim subgrup generat per S i ho denotarem amb $\langle S \rangle$.*

Aquesta definició té sentit per la proposició 10.1.17.

Proposició 10.1.19. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i g un element de G . Aleshores $\langle \{g\} \rangle = \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.*

Demostració. Ho demostrem per doble inclusió.

Comencem veient que $\{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subseteq \langle \{g\} \rangle$. Per la definició de **mínim subgrup generat per un conjunt** (10.1.18) tenim que existeix una família de subconjunts de G que denotarem per $\{H_i\}_{i \in I}$, amb $\{g\} \subseteq H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Com que $\{H_i\}_{i \in I}$ són subgrups de G tenim que, donat que $g \in H_i$, $g^n \in H_i$ per a tot $i \in I$ i tot $n \in \mathbb{Z}$ per la definició de **grup** (10.1.1), i per tant $g^n \in H$, el que és equivalent a dir que $g^n \in \langle g \rangle$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Ara veiem que $\langle \{g\} \rangle \subseteq \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Denotem $H_g = \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Hem de veure que H_g és un grup amb l'operació $*$. Observem que per a tot $g^i, g^j \in H_g$, $g^i * g^{-j} = g^{i-j} \in H_g$, i per tant $H_g \leq G$. Ara bé, com que $\{g\} \subseteq H_g$, tenim que $H_g \in \{H_i\}_{i \in I}$, és a dir, que H_g pertany a la família de subconjunts de G que contenen $\{g\}$; el que significa que $\langle \{g\} \rangle \leq H_g$, i per tant $\langle \{g\} \rangle \subseteq \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. \square

Definició 10.1.20 (Ordre d'un grup). *Sigui G un grup amb l'operació $*$. Direm que $|G|$ és l'ordre del grup. Si $|G|$ és finit direm que G és un grup d'ordre finit, i si $|G|$ no és finit direm que G és un grup d'ordre infinit.*

Proposició 10.1.21. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e i g un element de G . Aleshores*

$$|\langle \{g\} \rangle| = n \iff n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e\}.$$

Demostració. Comencem amb la implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem doncs que $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e\}$. Pel **criteri de divisibilitat d'Euclides** (3.2.29) tenim que per a tot $t \in \mathbb{Z}$ existeixen uns únics $Q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, amb $r < n$ tals que $t = Qn + r$. Per tant

$$\begin{aligned} g^t &= g^{Qn+r} \\ &= g^{Qn} * g^r \\ &= (g^n)^Q * g^r \\ &= e^Q * g^r = g^r. \end{aligned}$$

Per tant, com que $0 \leq r < n$, $|\langle \{g\} \rangle| = n$.

Fem ara la implicació cap a la dreta (\Rightarrow). Suposem doncs que $|\langle \{g\} \rangle| = n$. Com que el grup és finit per a cada $i \in \mathbb{Z}$ existeix $j \in \mathbb{Z}$ tal que $g^i = g^j$ i, com

que $\langle \{g\} \rangle$ és un grup, per la definició de [grup \(10.1.1\)](#) existeix $g^{-j} \in \langle \{g\} \rangle$ tal que $g^{i-j} = e$.

Sigui doncs $t \in \mathbb{N}$ tal que $g^t = e$. Aleshores, pel [criteri de divisibilitat d'Euclides \(3.2.29\)](#) existeixen uns únics $Q, r \in \mathbb{N}$, amb $r < n$ tals que $t = Qn + r$. Per tant

$$\begin{aligned} g^t &= g^{Qn+r} \\ &= g^{Qn} * g^r \\ &= (g^n)^Q * g^r \\ &= e^Q * g^r \\ &= g^r = e. \end{aligned}$$

i per tant $r = 0$, i tenim $t = Qn$, i per tant $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e\}$. \square

Definició 10.1.22 (Conjugació entre conjunts sobre grups). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subconjunt de G . Aleshores definim

$$GH = \{g * h \mid g \in G, h \in H\} \quad \text{i} \quad HG = \{h * g \mid g \in G, h \in H\}.$$

Definició 10.1.23 (Subgrup normal). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores direm que H és un subgrup normal de G si per a tot $x \in G$ tenim

$$\{x\}H = H\{x\}.$$

Ho denotarem com $H \trianglelefteq G$.

Proposició 10.1.24. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores són equivalents*

1. $\{x\}H = H\{x\}$ per a tot $x \in G$.
2. $\{x^{-1}\}H\{x\} = H$ per a tot $x \in G$.
3. $\{x^{-1}\}H\{x\} \subseteq H$ per a tot $x \in G$.

Demostració. Comencem demostrant (1) \implies (2). Suposem que H és un subgrup normal de G , per la definició de [subgrup normal \(10.1.23\)](#) tenim $\{x\}H = H\{x\}$ per a tot $x \in G$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \{x\}H\{x^{-1}\} &= H\{x\}\{x^{-1}\} \\ &= \{h * x * x^{-1} \mid h \in H\} \\ &= \{h \mid h \in H\} = H. \end{aligned}$$

Continuem demostrant (2) \implies (3). Suposem que $\{x\}H\{x^{-1}\} = H$. Tenim que $\{x\}H\{x^{-1}\} = H \subseteq H$.

Demostrem ara (3) \implies (1). Suposem doncs que $\{x^{-1}\}H\{x\} \subseteq H$ per a tot $x \in G$. Això significa que per a tot $h \in H$ existeix un $h' \in H$ tal que $x * h * x^{-1} = h'$, i aleshores, per la definició de [grup \(10.1.1\)](#), $x * h = h' * x \in H$, i per tant $x * h \in H\{x\}$ per a tot $x \in G$. Així hem vist que $\{x\}H \subseteq H\{x\}$. Per veure l'altre inclusió es pot donar un argument anàleg, i per tant $\{x\}H = H\{x\}$.

I així hem vist que (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1) i hem acabat. \square

10.1.3 Grups cíclics i grups abelians

Definició 10.1.25 (Grup abelià). Sigui G un grup amb l'operació $+$ tal que per a tot $x, y \in G$ satisfà

$$x + y = y + x.$$

Aleshores direm que G és un grup abelià.

Proposició 10.1.26. *Sigui G un grup amb l'operació $+$. Aleshores G és un grup abelià si i només si per a tot $a, b \in G$ es compleix*

$$-(a + b) = -a - b.$$

Demostració. Que la condició és necessària (\implies) ho podem veure amb la definició de [grup abelià \(10.1.25\)](#) i la proposició [10.1.10](#).

Demostrem ara que la condició és suficient (\impliedby). Diem que l'element neutre de G és e . Per la definició de [grup \(10.1.1\)](#) tenim que

$$(a + b) - (a + b) = e, \tag{10.1}$$

que és equivalent a

$$(a + b) - (a + b) - (-(a + b)) = -(-(a + b)),$$

i aleshores

$$\begin{aligned} a + b &= -(-(a + b)) \\ &= -(-b - a) && \text{(Proposició 10.1.10)} \\ &= -(-(b + a)) && \text{(Hipòtesi (10.1))} \\ &= b + a, && \text{(Proposició 10.1.9)} \end{aligned}$$

i per la definició de [grup abelià \(10.1.25\)](#), G és un grup abelià. \square

Definició 10.1.27 (Grup cíclic). Siguin G un grup amb l'operació $*$ i g un element de G . Aleshores diem que el grup $\langle \{g\} \rangle$ amb l'operació $*$ és un grup cíclic i que g és un generador del grup.

Proposició 10.1.28. *Sigui G un grup cíclic amb l'operació $*$. Aleshores G és un grup abelià.*

Demostració. Com que G és un grup cíclic, per la definició de [grup cíclic \(10.1.27\)](#) tenim que existeix un g tal que $\langle \{g\} \rangle = G$. Siguin a, b dos elements de G , i com que G és un grup cíclic, ha de ser $a = g^m$ i $b = g^n$ per a certs $m, n \in \mathbb{N}$. Ara bé, tenim que $g^m * g^n = g^m * g^n$, ja que

$$\begin{aligned} g^n * g^m &= g^{n+m} \\ &= g^{m+n} = g^m * g^n \end{aligned}$$

i aleshores $a * b = b * a$, i per la definició de [grup abelià \(10.1.25\)](#) hem acabat. \square

Proposició 10.1.29. *Sigui G un grup cíclic amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores H és un grup cíclic.*

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Per l'observació 10.1.14 tenim que $e \in H$. Si $H = \{e\}$ no hi ha res a demostrar. Suposem que $H \neq \{e\}$, aleshores existeix un $g \in G$ tal que $g^n \in H$ per a cert $n \in \mathbb{N}$. Sigui doncs m l'enter més petit tal que $g^m \in H$; volem demostrar que $H = \langle \{g^m\} \rangle$.

Sigui a un element de H . Aleshores com que $a \in H \subseteq G$, $a = g^t$ per a cert $t \in \mathbb{N}$, i pel criteri de divisibilitat d'Euclides (3.2.29) existeixen $Q, r \in \mathbb{N}$, amb $r < m$ tals que $t = Qm + r$, i per tant $g^t = g^{Qm+r}$. Aleshores tenim

$$g^r = (g^m)^{-Q} * g^t,$$

i ha de ser $g^r \in H$, ja que $g^m \in H$, i per la definició de grup (10.1.1) tenim que $(g^m)^{-1} \in H$. Per tant $g^r \in H$. Però ara bé, m era el mínim enter tal que $g^m \in H$, i $r < m$, per tant ha de ser $g^r = e$, és a dir, $r = 0$ i per tant $t = Qm$; el que significa que $H = \{(g^m)^Q \mid Q \in \mathbb{N}\}$ i per la proposició 10.1.19 $H = \langle \{g^m\} \rangle$ i hem acabat. \square

Proposició 10.1.30. *Siguin G un grup cíclic amb l'operació $*$ d'ordre n finit i $d \in \mathbb{N}$ un divisor de n . Aleshores existeix un únic subgrup de G d'ordre d .*

Demostració. \square

10.1.4 Grup quocient

Proposició 10.1.31. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores la relació*

$$x \sim y \iff x * y^{-1} \in H \text{ per a tot } x, y \in G$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Sigui e l'element neutre del grup G . Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Sigui $x \in G$. Aleshores $x * x^{-1} = e$, i tenim l'observació 10.1.14.
2. Simètrica: Siguin $x, y \in G$ i suposem que $x \sim y$, això significa que $x * y^{-1} \in H$, i per la definició de grup (10.1.1) tenim que $(x * y^{-1})^{-1} \in H$, ja que per hipòtesi H és un grup, i per les proposicions 10.1.10 i 10.1.9 tenim que

$$(x * y^{-1})^{-1} = y * x^{-1},$$

i això és $y \sim x$.

3. Transitiva: Siguin $x, y, z \in G$ i suposem que $x \sim y$ i $y \sim z$. Per tant $x * y^{-1} \in H$, i $y * z^{-1} \in H$. Com que per hipòtesi H és un grup, tenim que

$$(x * y^{-1}) * (y * z^{-1}) \in H,$$

que és equivalent a $x * z^{-1} \in H$, i per tant $x \sim z$.

I per la definició de relació d'equivalència (2.3.2) hem acabat. \square

Proposició 10.1.32. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G i \sim una relació d'equivalència tal que*

$$x \sim y \iff x * y^{-1} \in H \text{ per a tot } x, y \in G.$$

Aleshores el conjunt quocient G/H amb l'operació

$$\begin{aligned} *: G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ [x] * [y] &\longmapsto [x * y] \end{aligned}$$

és un grup si i només si H és un subgrup normal de G .

Demostració. □

Definició 10.1.33 (Grup quocient). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i N un subgrup normal de G . Aleshores direm que el grup G/N amb l'operació*

$$\begin{aligned} *: G/N \times G/N &\longrightarrow G/N \\ [x] * [y] &\longmapsto [x * y] \end{aligned}$$

és el grup quocient G mòdul N .

Aquesta definició té sentit per la proposició 10.1.32.

Lema 10.1.34. *Siguin G un grup amb l'operació $*$, H un subgrup de G , x un element de G i*

$$\begin{aligned} f_x: H &\longrightarrow \{x\}H \\ h &\longmapsto x * h \end{aligned}$$

una aplicació. Aleshores f_x és bijectiva.

Demostració. Veiem que aquesta funció és bijectiva trobant la seva inversa:

$$\begin{aligned} f_x^{-1}: \{x\}H &\longrightarrow H \\ y &\longmapsto x^{-1} * y \end{aligned}$$

i comprovant $f_x(f_x^{-1}(h)) = h$ i $f_x^{-1}(f_x(h)) = h$. Per tant f és bijectiva¹. □

Observació 10.1.35. $\{x\}G = G$.

Teorema 10.1.36 (Teorema de Lagrange). *Siguin G un grup d'ordre finit amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores $|H|$ divideix $|G|$.*

Demostració. Fixem $x \in G$ i considerem la funció

$$\begin{aligned} f_x: H &\longrightarrow \{x\}H \\ h &\longmapsto x * h \end{aligned}$$

Pel lema 10.1.34 trobem $|H| = |\{x\}H|$. Tenim que $|G|$ és el resultat de multiplicar el número de classes d'equivalència pel nombre d'elements d'una de les classes, és a dir

$$|G| = |G/H||H|$$

i per tant $|H|$ divideix $|G|$. □

¹de fet, $f_x^{-1} = f_{x^{-1}}$

Corol·lari 10.1.37. *Si sigui G un grup d'ordre p primer amb l'operació $*$. Aleshores G és un grup cíclic.*

Demostració. Sigui e l'element neutre de G .

Prenem un element $g \in G$ diferent de e i considerem el subgrup de G generat per g . Pel **Teorema de Lagrange** (10.1.36) tenim que l'ordre de $\langle\{g\}\rangle$ divideix l'ordre de G i com que per hipòtesi l'ordre de G és primer i $g^1 \neq e$, ja que g és per hipòtesi diferent de l'element neutre, tenim que $|\langle\{g\}\rangle| = p$, i per tant $\langle\{g\}\rangle = G$ i per la definició de **grup cíclic** (10.1.27) tenim que G és un grup cíclic. \square

Definició 10.1.38 (l'índex d'un subgrup en un grup). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores definim

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

com l'índex de H a G .

10.2 Tres Teoremes d'isomorfisme entre grups

10.2.1 Morfismes entre grups

Definició 10.2.1 (Morfisme entre grups). Sigui G_1 un grup amb l'operació $*$, G_2 un grup amb l'operació \circ i $f: G_1 \rightarrow G_2$ una aplicació que, per a tot $x, y \in G_1$ satisfà

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Aleshores diem que f és un morfisme entre grups. Definim també

1. Si f és injectiva direm que f és un monomorfisme entre grups.
2. Si f és exhaustiva direm que f és un epimorfisme entre grups.
3. Si f és bijectiva direm que f és un isomorfisme entre grups. També escriurem $G_1 \cong G_2$ i direm que G_1 i G_2 són grups isomorfs.
4. Si $G_1 = G_2$ direm que f és un endomorfisme entre grups.
5. Si $G_1 = G_2$ i f és bijectiva direm que f és un automorfisme entre grups.

Proposició 10.2.2. *Sigui G_1 un grup amb l'operació $*$ amb element neutre e , G_2 un grup amb l'operació \circ amb element neutre e' i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores*

1. $f(e) = e'$.
2. $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ per a tot $x \in G_1$.

Demostració. Demostrem primer el punt (1). Per la definició de morfisme tenim que per a tot $x \in G_1$

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(e) &= f(x * e) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(x) && \text{(l'element neutre d'un grup (10.1.3))} \\ &= f(x) \circ e' \end{aligned}$$

i per la proposició 10.1.5 tenim $f(e) = e'$.

Per demostrar el punt (2) en tenim prou en veure que per a tot $x \in G$

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(x^{-1}) &= f(x * x^{-1}) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(e) && \text{(l'invers d'un element d'un grup (10.1.7))} \\ &= f(x^{-1} * x) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(x^{-1}) \circ f(x) \end{aligned}$$

i pel punt (1) d'aquesta proposició $f(x) \circ f(x^{-1}) = f(x^{-1}) \circ f(x) = e'$, i per la proposició 10.1.6 tenim que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, com volíem. \square

Proposició 10.2.3. *Siguin G , H i K tres grups amb les operacions $*$, \circ i $+$, respectivament, i $f: G \rightarrow H$ i $g: H \rightarrow K$ dos morfismes entre grups. Aleshores $g(f): G \rightarrow K$ és un morfisme entre grups.*

Demostració. Per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) tenim que per a tot $g_1, g_2 \in G$ i $h_1, h_2 \in H$ tenim $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$ i $g(h_1 \circ h_2) = g(h_1) + g(h_2)$. Per tant

$$g(f(g_1 * g_2)) = g(f(g_1) \circ f(g_2)) = g(f(g_1)) + g(f(g_2)),$$

i per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) hem acabat. \square

Proposició 10.2.4. *Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$ i G_2 un grup amb l'operació \circ tal que*

$$G_1 \cong G_2.$$

Aleshores

1. G_1 és un grup abelià si i només si G_2 és un grup abelià.
2. G_1 és un grup cíclic si i només si G_2 és un grup cíclic.

Demostració. Sigui $f: G_1 \rightarrow G_2$ un isomorfisme entre grups.

Comencem demostrant el punt (1). Suposem doncs que G_1 és un grup abelià. Per la definició de grup abelià (10.1.25) tenim que per a tot $a, b \in G_1$ es compleix $a * b = b * a$. Aleshores tenim

$$f(a * b) = f(b * a)$$

i per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) tenim que

$$f(a) \circ f(b) = f(b) \circ f(a),$$

i per tant, com que per la definició de isomorfisme entre grups (10.2.1) f és un bijectiu, G_2 satisfà la definició de grup abelià (10.1.25).

Demostrem ara el punt (2). Suposem doncs que G_1 és un grup cíclic. Per la definició de grup cíclic (10.1.27) tenim que $G_1 = \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ per a un cert $g \in G_1$. Per tant, com que f és bijectiva per la definició de isomorfisme entre grups (10.2.1) tenim que per a tot $x \in G_2$ es compleix $x = f(g^i)$ per a un cert $i \in \mathbb{Z}$, i per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) tenim que² $f(g^i) = f(g)^i$, i per la definició de grup cíclic (10.1.27) G_2 és un grup cíclic. \square

²el primer és amb l'operació $*$ i el segon amb l'operació \circ .

Definició 10.2.5 (Nucli i imatge d'un morfisme entre grups). Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$ amb element neutre e , G_2 un grup amb l'operació \circ amb element neutre e' i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores definim el nucli de f com

$$\ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e'\},$$

i la imatge de f com

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\}.$$

Observació 10.2.6. $\ker(f) \subseteq G_1$, $\operatorname{Im}(f) \subseteq G_2$.

Proposició 10.2.7. Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$ amb element neutre e , G_2 un grup amb l'operació \circ amb element neutre e' , i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores

1. $\ker(f)$ és un subgrup normal de G_1 .
2. $\operatorname{Im}(f)$ és un subgrup de G_2 .

Demostració. Aquest enunciat té sentit per l'observació 10.2.6.

Primer comprovem el punt (1). Comencem veient que $\ker(f)$ és un subgrup de G_1 . Per la proposició 10.1.15 tenim que ens cal amb veure que si $a, b \in \ker(f)$, aleshores $a * b^{-1} \in \ker(f)$. Això és cert ja que si $a, b \in \ker(f)$ aleshores $f(a) = e'$ i $f(b^{-1}) = e'$, i per tant $a * b^{-1} = e * e^{-1} = e$, el que significa que $f(a * b^{-1}) = e'$, i tenim $a * b^{-1} \in \ker(f)$.

Comprovem ara que el subgrup és normal. Per la proposició 10.1.24 en tenim prou en veure que per a tot $x \in \ker(f)$ i $g \in G$, $x * g * x^{-1} \in \ker(f)$. Això ho veiem notant que si $g \in \ker(f)$, $f(g) = e'$, i per tant $f(x * g * x^{-1}) = f(x) \circ e' \circ f(x^{-1})$ i això és $f(x * x^{-1}) = e'$, i per tant $x * g * x^{-1} \in \ker(f)$.

Acabem veient el punt (2). De nou per la proposició 10.1.15 tenim que si per a tot $f(a), f(b) \in \operatorname{Im}(f)$ tenim $f(a) \circ f(b)^{-1} \in \operatorname{Im}(f)$ aleshores $\operatorname{Im}(f)$, és un subgrup de G_2 . Això és cert, ja que per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) i la proposició 10.2.2 tenim $f(a) \circ f(b)^{-1} = f(a * b^{-1})$; i per la definició de grup $a * b^{-1} \in G_1$, i per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) tenim que $f(a) \circ f(b)^{-1} \in \operatorname{Im}(f)$, i per tant $\operatorname{Im}(f)$ és un subgrup de G_2 , com volíem veure. \square

Proposició 10.2.8. Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$ amb element neutre e , G_2 un grup amb l'operació \circ amb element neutre e' , i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores

1. f és un monomorfisme si i només si $\ker(f) = \{e\}$.
2. f és un epimorfisme si i només si $\operatorname{Im}(f) = G_2$.

Demostració. Comencem fent la demostració del punt (1) per la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que f és un monomorfisme, i per tant injectiva. Per la definició de nucli d'un morfisme entre grups (10.2.5) tenim que $\ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e'\}$. Suposem $x \in G_1$, és a dir, $f(x) = e'$. Ara bé, com que f és injectiva per la proposició 10.2.2 ha de ser $\ker(f) = \{e\}$.

Demostrem ara la implicació cal a l'esquerra (\impliedby). Suposem doncs que $\ker(f) = \{e\}$. Siguin $x, y \in G_1$ dos elements que satisfacin $f(x) = f(y)$. Com

que, per la proposició 10.2.7 $\ker(f)$ és un subgrup de G_1 , tenim que $x * y^{-1} \in G_1$, i per tant

$$\begin{aligned} f(x * y^{-1}) &= f(x) \circ f(y^{-1}) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(x) \circ f(y)^{-1} && \text{(Proposició 10.2.2)} \\ &= f(y) \circ f(y)^{-1} = e', \end{aligned}$$

i per tant $x * y^{-1} \in \ker(f)$, però per hipòtesi tenim $\ker(f) = \{e\}$, i per tant ha de ser $x * y^{-1} = e$, el que és equivalent a $x = y$, i per tant f és injectiva.

Demostrem ara el punt (2) començant per la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que f és un epimorfisme, i per tant exhaustiva, i per tant per a cada $y \in G_2$ existeix un $x \in G_1$ tal que $f(x) = y$, i per la definició d'imatge d'un morfisme entre grups (10.2.5) tenim que $\text{Im}(f) = G_2$.

Acabem demostrant la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem doncs que $\text{Im}(f) = G_2$ i prenem $y \in G_2$. Aleshores per la definició d'imatge d'un morfisme entre grups (10.2.5) tenim que existeix un $x \in G_1$ tal que $f(x) = y$, i per tant f és exhaustiva. \square

Proposició 10.2.9. *Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$, G_2 un grup amb l'operació \circ , i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores*

1. Si $H_1 \leq G_1 \implies \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\} \leq G_2$.
2. Si $H_2 \leq G_2 \implies \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\} \leq G_1$.
3. Si $H_2 \trianglelefteq G_2 \implies \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\} \trianglelefteq G_1$.

Demostració. Comprovem primer el punt (1). Suposem doncs que H_1 és un subgrup de G_1 . Denotarem $H = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\}$. Siguin $x, y \in H_1$; per la proposició 10.1.15 només ens cal veure que $f(x) \circ f(y)^{-1} \in H$. Això és

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(y)^{-1} &= f(x) \circ f(y^{-1}) && \text{(Proposició 10.2.2)} \\ &= f(x * y^{-1}). && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \end{aligned}$$

Ara bé, com que $x, y \in H_1$ i H_1 és un subgrup de G_1 , per la proposició 10.1.15 tenim que $x * y^{-1} \in H_1$, i per tant $f(x * y^{-1}) \in H$, i per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) i la proposició 10.2.2 tenim que $f(x) \circ f(y)^{-1} \in H$, i per tant H és un subgrup de G_2 , com volíem veure.

Comprovem ara el punt (2). Suposem doncs que H_2 és un subgrup de G_2 i denotem $H = \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\}$. Per la proposició 10.1.15 només ens cal veure que per a tot $x, y \in H$ es satisfà $x * y^{-1} \in H$. Si $x, y \in H$ aleshores tenim que $f(x), f(y) \in H_2$, i com que H_2 és un grup, aleshores per la definició de grup (10.1.1) ha de ser $f(x) \circ f(y)^{-1} \in H_2$. Aleshores, per la definició de morfisme entre grups (10.2.1) tenim $f(x) \circ f(y)^{-1} = f(x * y^{-1})$, i per tant $x * y^{-1} \in H$ i així tenim que H és un subgrup de G_1 .

Veiem el punt (3) per acabar. Suposem doncs que H_2 és un subgrup normal de G_2 i definim $H = \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\}$. Per demostrar-ho prenem $g \in G_1$, $h \in H_1$ tal que $f(h) \in H$ i fem

$$\begin{aligned} f(g) \circ f(h) \circ f(g)^{-1} &= f(g) \circ f(h) \circ f(g^{-1}) && \text{(Proposició 10.2.2)} \\ &= f(g * h * g^{-1}) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \end{aligned}$$

Ara bé, com que H_2 és un subgrup normal de G_2 , tenim que, per a tot $g \in G_1$, $f(g * h * g^{-1}) \in H_2$, i per tant $g * h * g^{-1} \in H$, que satisfà la definició de [subgrup normal](#) (10.1.23) per la proposició 10.1.24. \square

Teorema 10.2.10 (Teorema de representació de Cayley). *Sigui G un grup amb l'operació $*$. Aleshores G és isomorf a un subgrup de S_G amb l'operació \circ , on S_G és el grup simètric dels elements de G .*

Demostració. Definim

$$\varphi: G \longrightarrow S_G \quad (10.2)$$

$$g \longmapsto \sigma_g : G \longrightarrow G \quad (10.3)$$

$$x \longmapsto g * x$$

Tenim que σ_g és bijectiva ja que és una permutació. Comprovarem que φ és un monomorfisme entre grups. Veiem primer que és un morfisme entre grups. Prenem $g, g' \in G$. Per la definició (10.2) tenim que $\varphi(g * g') = \sigma_{g * g'}$. Per veure que $\sigma_{g * g'} = \sigma_g \circ \sigma_{g'}$ observem que per a tot $x \in G$

$$\begin{aligned} \sigma_{g * g'}(x) &= g * g' * x \\ &= g * \sigma_{g'}(x) \\ &= \sigma_g \circ \sigma_{g'}(x), \end{aligned}$$

i per la definició de [morfisme entre grups](#) (10.2.1) tenim que φ és un morfisme entre grups. Veiem ara que φ és un monomorfisme. Per la definició de [nucli d'un morfisme entre grups](#) (10.2.5) tenim que

$$\ker(\varphi) = \{x \in G \mid f(x) = \text{Id}_G\}.$$

Ara bé, $\sigma_g = \text{Id}$ és, per la definició (10.3), equivalent a dir que $g * x = x$ per a tota $x \in G$, i per la definició de [l'element neutre d'un grup](#) (10.1.3) això és si i només si $g = e$, i per tant

$$\ker(\varphi) = \{e\},$$

i per la proposició 10.2.8 tenim que φ és un monomorfisme, com volíem veure.

Per tant, per la proposició 10.2.9 tenim que

$$G \cong \text{Im}(\varphi) \leq S_G. \quad \square$$

Corol·lari 10.2.11. *Si G té ordre $n!$ aleshores $G \cong S_n$.*

10.2.2 Teoremes d'isomorfisme entre grups

Teorema 10.2.12. *Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$, G_2 un grup amb l'operació \circ i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores $G_1/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.*

Demostració. Siguin e l'element neutre de G_1 i e' l'element neutre de G_2 . Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi: G_1/\ker(f) &\longleftrightarrow \text{Im}(f) \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned} \quad (10.4)$$

Comprovem primer que aquesta aplicació està ben definida:

Suposem que $[x] = [x']$. Això és que $x' \in \{x\} \ker(f)$, i equivalentment $x' = x * h$ per a cert $h \in \ker(f)$. Per tant

$$\begin{aligned}\varphi([x']) &= \varphi([x * h]) && \text{(Definició (10.1.33))} \\ &= f(x * h) && \text{(Definició (10.4))} \\ &= f(x) \circ f(h) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(x) \circ e' && \text{(nucli d'un morfisme entre grups (10.2.5))} \\ &= f(x) = \varphi([x]) && \text{(Definició (10.4))}\end{aligned}$$

i per tant φ està ben definida. Veiem ara que φ és un morfisme entre grups. Tenim que

$$\begin{aligned}\varphi([x] * [y]) &= \varphi([x * y]) && \text{(Definició (10.1.33))} \\ &= f(x * y) && \text{(Definició (10.4))} \\ &= f(x) \circ f(y) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= \varphi([x]) \circ \varphi([y]), && \text{(Definició (10.4))}\end{aligned}$$

i per la definició de [morfisme entre grups \(10.2.1\)](#) φ és un morfisme entre grups. Continuem demostrant que φ és injectiva. Per la definició de [nucli d'un morfisme entre grups \(10.2.5\)](#) tenim que $\ker(\varphi) = \{[x] \in G/\ker(f) \mid \varphi([x]) = e\}$, i per tant $\ker(\varphi) = \ker(f)$, ja que $f(x) = e$ si i només si $x \in \ker(f)$, i per tant $\ker(\varphi) = [e]$ i per la proposició [10.2.8](#) φ és injectiva.

Per veure que φ és exhaustiva veiem que si $[x] \in G_1/\ker(f)$, per la definició de [grup quocient \(10.1.33\)](#) tenim que $x = x' * y$ per a uns certs $x' \in G_2$, $h \in \ker(f)$, i per tant

$$\begin{aligned}\varphi([x]) &= \varphi([x' * h]) \\ &= \varphi([x'] * [h]) && \text{(grup quocient (10.1.33))} \\ &= f(x') \circ f(h) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(x') && \text{(grup (10.1.1))} \\ &= f(x * h^{-1}) \\ &= f(x) \circ f(h^{-1}) && \text{(morfisme entre grups (10.2.1))} \\ &= f(x) \circ f(h)^{-1} && \text{(Proposició 10.2.2)} \\ &= f(x) \circ e^{-1} = f(x). && \text{(Proposició 10.1.8)}\end{aligned}$$

Així veiem que $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(f)$. Per tant φ és un isomorfisme, i per la definició d'[isomorfisme entre grups \(10.2.1\)](#) tenim $G_1/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$, com volíem veure. \square

Teorema 10.2.13 (Primer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$, G_2 un grup amb l'operació \circ i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un epimorfisme entre grups. Aleshores*

1. $G_1/\ker(f) \cong G_2$.
2. L'aplicació

$$\begin{aligned}\varphi_1: \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\} &\longleftrightarrow \{K \mid K \leq G_2\} \\ H &\longmapsto \{f(h) \in G_2 \mid h \in H\}\end{aligned} \tag{10.5}$$

és bijectiva.

3. L'aplicació

$$\begin{aligned}\varphi_2: \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\} &\longleftrightarrow \{K \mid K \leq G_2\} \\ H &\longmapsto \{f(h) \in G_2 \mid h \in H\}\end{aligned}\quad (10.6)$$

és bijectiva.

Demostració. Siguin e l'element neutre de G_1 i e' l'element neutre de G_2 .

El punt (1) és conseqüència del Teorema 10.2.12, ja que si f és exhaustiva, $\text{Im}(f) = G_2$, i per tant $G_1/\ker(f) \cong G_2$.

Per veure el punt (2) comencem demostrant que φ_1 està ben definida. Siguin $H_1 = H_2 \in \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\}$. Aleshores, per la hipòtesi (10.5) tenim $\varphi_1(H_1) = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\}$ i $\varphi_1(H_2) = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_2\}$, i com que f és una aplicació, i per tant ben definida, $\varphi_1(H_1) = \varphi_1(H_2)$.

Continuem comprovant que φ_1 és bijectiva. Per veure que és injectiva prenem $H_1, H_2 \in \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\}$ tals que $\varphi_1(H_1) = \varphi_1(H_2)$. Això, per la hipòtesi (10.5) és

$$\{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\} = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_2\}.$$

Per tant siguin $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$ tals que $f(h_1) = f(h_2)$. Equivalentment, per la proposició 10.1.6 i la definició de l'invers d'un element d'un grup (10.1.7) i la proposició 10.1.8 tenim les igualtats $f(h_2^{-1} * h_1) = f(h_1^{-1} * h_2) = e'$, i per la definició de nucli d'un morfisme entre grups (10.2.5) tenim $h_2^{-1} * h_1, h_1^{-1} * h_2 \in \ker(f)$, i per la hipòtesi (10.5) això és $h_2^{-1} * h_1 \in \ker(f) \subseteq H_2$ i $h_1^{-1} * h_2 \in \ker(f) \subseteq H_1$. Observem que això és que $h_1 \in \{h_2\} \ker(f) \subseteq H_2$ i $h_2 \in \{h_1\} \ker(f) \subseteq H_1$. Això vol dir que $H_1 \subseteq H_2$ i $H_2 \subseteq H_1$, i per doble inclusió això és $H_1 = H_2$, com volíem veure.

Per veure que φ_1 és exhaustiva tenim que per la proposició 10.2.9 i per la hipòtesi (10.5) tenim que donat un conjunt K tal que $K \leq G_2$ aleshores el conjunt $H = \{h \in G_1 \mid f(h) \in K\}$ satisfà $H \leq G_1$, i per la definició de nucli d'un morfisme entre grups (10.2.5) tenim que es compleix $\ker(f) \leq H \leq G_1$, i per tant $\varphi_1(H) = K$, i per tant φ_1 és exhaustiva i per tant bijectiva.

Es pot demostrar el punt (3) amb el mateix argument que hem donat per demostrar el punt (2). \square

Proposició 10.2.14. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i H, K subgrups de G . Aleshores*

1. Si $K \leq G$, aleshores $HK \leq G$.
2. Si $H, K \leq G$, aleshores $HK \leq G$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la proposició 10.1.15 només ens cal comprovar que per a tot $x, y \in HK$ es satisfà $x * y^{-1} \in HK$. Siguin doncs $x, y \in HK$, que podem reescriure com $x = h_1 * k_1$ i $y = h_2 * k_2$. Calculem $x * y^{-1}$:

$$\begin{aligned}x * y^{-1} &= h_1 * k_1 * (h_2 * k_2)^{-1} \\ &= h_1 * k_1 * k_2^{-1} * h_2^{-1} && \text{(Proposició 10.1.10)} \\ &= h_1 * k_1 * h_2^{-1} * k_2^{-1}, && \text{(subgrup normal (10.1.23))} \\ &= h_1 * h_2^{-1} * k_1 * k_2^{-1}, && \text{(subgrup normal (10.1.23))}\end{aligned}$$

i com que, per la definició de grup (10.1.1) tenim $h_1 * h_2^{-1} \in H$ i $k_1 * k_2^{-1} \in K$, veiem que $x * y^{-1} \in HK$, com volíem demostrar.

La demostració del punt (2) és anàloga a la del punt (1). \square

Lema 10.2.15. *Siguin G un grup amb l'operació $*$, H un subgrup de G i K un subgrup normal de G . Aleshores $H \cap K \trianglelefteq H$.*

Demostració. Prenem $x \in H$ i $y \in H \cap K$. Per la proposició 10.1.24 només hem de veure que per a tot $x \in H$ i $y \in H \cap K$, es satisfà $x^{-1} * y * x \in H$. Ara bé, com que K és un grup normal, per la mateixa proposició 10.1.24, com que per hipòtesi $y \in H \cap K$, i en particular $y \in K$, tenim que $x^{-1} * y * x \in K$. Per veure que $x^{-1} * y * x \in H$ tenim prou amb veure que $x, y \in H$, i com que H és un subgrup de G , i per tant un grup, per la definició de grup (10.1.1) tenim que $x^{-1} * y * x \in H$, i per tant $x^{-1} * y * x \in H \cap K$, com volíem veure. \square

Teorema 10.2.16 (Segon Teorema de l'isomorfisme). *Siguin G un grup amb l'operació $*$, H un subgrup de G i K un subgrup normal de G . Aleshores*

$$(HK)/K \cong H/(H \cap K).$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit pel lema 10.2.15.

Definim

$$\begin{aligned} f: HK &\longrightarrow H/(H \cap K) \\ h * k &\longmapsto [h]. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Demostrarem que f és un epimorfisme; però primer cal veure que f està ben definida. Prenem doncs $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in HK$ amb $h_1, h_2 \in H$ i $k_1, k_2 \in K$ tals que $h_1 * k_1 = h_2 * k_2$, i per tant $h_2^{-1} * h_1 = k_2 * k_1^{-1}$. Ara bé, com que per hipòtesi i per la definició de l'invers d'un element d'un grup (10.1.7) tenim que $h_1, h_2^{-1} \in H$ i a la vegada $k_2, k_1^{-1} \in K$, per la definició de grup (10.1.1) tenim $h_2^{-1} * h_1 \in H$ i $k_2 * k_1^{-1} \in K$ i com que $h_2^{-1} * h_1 = k_2 * k_1^{-1}$ tenim que $[h_2^{-1} * h_1] = [k_2 * k_1^{-1}] = [e]$, i per la definició de grup quocient (10.1.33) tenim que $[h_1] = [h_2]$ i per tant f està ben definida.

Veiem ara que f és un morfisme entre grups. Prenem $h_1, h_2 \in H$ i $k_1, k_2 \in K$, i per tant $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in HK$, i fem

$$\begin{aligned} f(h_1 * k_1 * h_2 * k_2) &= [h_1 * h_2] && \text{(Definició (10.7))} \\ &= [h_1] * [h_2] && \text{(Definició (10.1.33))} \\ &= f(h_1 * k_1) * f(h_2 * k_2) && \text{(Definició (10.7))} \end{aligned}$$

i per tant f satisfà la definició de morfisme entre grups (10.2.1).

Continuem veient que f és exhaustiva. Prenem $[h] \in H/(H \cap K)$. Per la definició (10.7) tenim que $f(h * k) = [h]$ per a qualsevol $k \in K$, i per tant f és exhaustiva.

Per tant f és un epimorfisme, i per tant, pel Primer Teorema de l'isomorfisme entre grups (10.2.13) tenim

$$HK/\ker(f) \cong H/(H \cap K).$$

Ara bé, per la definició de nucli d'un morfisme entre grups (10.2.5) tenim que $\ker(f) = \{h_1 * k_2 \in HK \mid f(h_1 * k_1) = [e]\}$, i per tant $\ker(f) = K$ i trobem

$$HK/K \cong H/(H \cap K). \quad \square$$

Teorema 10.2.17 (Tercer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i H, K dos subgrups normals de G amb $K \subseteq H$. Aleshores*

$$G/H \cong (G/K)/(H/K).$$

Demostració. Definim les aplicacions

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1: G \longrightarrow G/K & \text{i} & \varphi_2: G/K \longrightarrow (G/K)/(H/K) \\ g \longmapsto [g] & & [g] \longmapsto \overline{[g]}. \end{array}$$

Veiem que φ_1 i φ_2 són morfismes.

Per la proposició 10.2.3 tenim que $\varphi_2(\varphi_1): G \longrightarrow (G/K)/(H/K)$ és un epimorfisme entre grups, i pel Primer Teorema de l'isomorfisme entre grups (10.2.13) trobem

$$G/\ker(\varphi_2(\varphi_1)) \cong (G/K)/(H/K).$$

Veiem ara que $\ker(\varphi_2(\varphi_1)) = H$. Per la definició de grup quocient (10.1.33) tenim que $G/K = \{gK \mid g \in G\}$ i $H/K = \{hK \mid h \in H\}$, i per tant

$$(G/K)/(H/K) = \{gKhK \mid g \in G, h \in H\}, \quad (10.8)$$

però com que, per hipòtesi, H i K són subgrups normals de G , per la definició de subgrup normal (10.1.23) podem reescriure (10.8) com

$$(G/K)/(H/K) = \{ghK \mid g \in G, h \in H\}. \quad (10.9)$$

Ara bé, com que per hipòtesi $K \subseteq H$ podem reescriure (10.9) com

$$(G/K)/(H/K) = \{gH \mid g \in G\},$$

i trobem, per la definició de nucli d'un morfisme entre grups (10.2.5), que $\ker(\varphi_2(\varphi_1)) = H$, i per tant

$$G/H \cong (G/K)/(H/K). \quad \square$$

10.3 Tres Teoremes de Sylow

10.3.1 Accions sobre grups

Definició 10.3.1 (Acció d'un grup sobre un conjunt). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e , X un conjunt no buit i*

$$\begin{array}{l} \cdot: G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{array}$$

una operació que satisfaci

1. $e \cdot x = x$ per a tot $x \in X$.
2. $(g_1 * g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ per a tot $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$.

Aleshores direm que \cdot és una acció de G sobre X . També direm que X és un G -conjunt amb l'acció \cdot .

Proposició 10.3.2. *Siguin G un grup amb l'operació $*$, X un conjunt, \cdot una acció de G sobre X i \sim una relació sobre X tal que per a tot $x_1, x_2 \in X$ diem que $x_1 \sim x_2$ si i només si existeix un $g \in G$ tal que $x_1 = g \cdot x_2$. Aleshores la relació \sim és una relació d'equivalència.*

Demostració. Sigui e l'element neutre del grup G . Comprovem que \sim satisfà la definició de [relació d'equivalència \(2.3.2\)](#):

1. Reflexiva: Sigui $x \in X$. Per la definició de [acció d'un grup sobre un conjunt \(10.3.1\)](#) tenim que $x = x \cdot e$, i per tant $x \sim x$.
2. Simètrica: Sigui $x_1, x_2 \in X$ tals que $x_1 \sim x_2$. Per tant existeix $g \in G$ tal que $x_1 = g \cdot x_2$. Per la definició de [acció d'un grup sobre un conjunt \(10.3.1\)](#) tenim que $g \cdot x_2 \in X$, i per tant podem prendre $g^{-2} \cdot (g \cdot x_2)$, que és equivalent a $g^{-2} \cdot (g \cdot x_2) = g^{-2} \cdot x_1$, i així $x_2 = g^{-1} \cdot x_1$, i per tant $x_2 \sim x_1$.
3. Transitiva: Sigui $x_1, x_2, x_3 \in X$ tals que $x_1 \sim x_2$ i $x_2 \sim x_3$. Per tant existeixen $g_1, g_2 \in G$ tals que $x_1 = g_1 \cdot x_2$ i $x_2 = g_2 \cdot x_3$, i per tant $x_1 = g_1 \cdot (g_2 \cdot x_3)$, i per la definició de [acció d'un grup sobre un conjunt \(10.3.1\)](#) això és $x_1 = (g_1 * g_2) \cdot x_3$, i com que G és un grup, $g_1 * g_2 \in G$, i tenim que $x_1 \sim x_3$.

per tant \sim és una relació d'equivalència. □

Definició 10.3.3 (Òrbita d'un element d'un G -conjunt). Sigui G un grup amb l'operació $*$, \cdot una acció de G sobre un conjunt X i \sim una relació d'equivalència sobre X tal que per a tot $x_1, x_2 \in X$ diem que $x_1 \sim x_2$ si i només si existeix un $g \in G$ tal que $x_1 = g \cdot x_2$. Aleshores direm que $\mathcal{O}(x) = [x]$ és l'òrbita de x .

Aquesta definició té sentit per la proposició [10.3.2](#).

Definició 10.3.4 (Estabilitzador d'un element per una acció). Sigui G un grup amb l'operació $*$, X un conjunt i \cdot una acció de G sobre X . Aleshores direm que el conjunt

$$\text{St}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

és l'estabilitzador de x per l'acció \cdot .

Proposició 10.3.5. *Siguin G un grup amb l'operació $*$, \cdot una acció de G sobre un conjunt X i $\text{St}(x)$ l'estabilitzador d'un element x de X per l'acció \cdot . Aleshores $g \in \text{St}(x)$ si i només si $g^{-1} \in \text{St}(x)$.*

Demostració. Per la definició de [l'estabilitzador d'un element per una acció \(10.3.4\)](#) tenim que $g \in \text{St}(x)$ si i només si $g \cdot x = x$. Ara bé, si prenem $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$, i per la definició de [acció d'un grup sobre un conjunt \(10.3.1\)](#) tenim que $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} * g) \cdot x$, i per la definició de [l'invers d'un element d'un grup \(10.1.7\)](#) tenim que $g^{-1} \cdot x$ i per tant $g^{-1} \in \text{St}(x)$. □

Proposició 10.3.6. *Siguin G un grup amb l'operació $*$, \cdot una acció de G sobre un conjunt X i $\text{St}(x)$ l'estabilitzador de x per l'acció \cdot . Aleshores $\text{St}(x)$ és un subgrup de G .*

Demostració. Per la proposició 10.1.15 només ens cal veure que per a tot $g_1, g_2 \in \text{St}(x)$ es compleix $g_1 * g_2^{-1} \in \text{St}(x)$.

Prenem doncs $g_1, g_2 \in \text{St}(x)$. Per la proposició 10.3.5 tenim que $g_2^{-1} \in \text{St}(x)$, i per tant, per la definició de l'estabilitzador d'un element per una acció (10.3.4) tenim que $(g_1 * g_2^{-1}) \cdot x = x$, i per tant $g_1 * g_2^{-1} \in \text{St}(x)$. \square

Proposició 10.3.7. *Siguin G un grup d'ordre finit amb l'operació $*$, X un G -conjunt finit amb una acció \cdot i $\text{St}(x)$ l'estabilitzador d'un element x de X per l'acció \cdot . Aleshores*

$$|G/\text{St}(x)| = |\mathcal{O}(x)| = [G : \text{St}(x)].$$

Demostració. Considerem

$$\begin{aligned} f: G/\text{St}(x) &\longrightarrow \mathcal{O}(x) \\ [g] &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Volem veure que f és una aplicació bijectiva, per tant mirem si està ben definida:

Siguin $[g_1], [g_2] \in G/\text{St}(x)$ tals que $[g_1] = [g_2]$. Per tant $g_1 = g_2 * g'$ per a cert $g' \in \text{St}(x)$, i per la definició de l'estabilitzador d'un element per una acció (10.3.4) tenim $g_1 \cdot x = x$, $(g_2 * g') \cdot x = x$, i per la definició de acció d'un grup sobre un conjunt (10.3.1) això és $g_2 \cdot (g' \cdot x) = x$, i per la proposició 10.3.5 $g_2 \cdot x = x$, i per tant f està ben definida.

Veiem ara que f és injectiva. Prenem $g \cdot x, g' \cdot x \in \mathcal{O}(x)$ tals que $g \cdot x = g' \cdot x$. Això, per la definició de acció d'un grup sobre un conjunt (10.3.1), és equivalent a dir $x = (g^{-1} * g') \cdot x$, i per la definició de l'estabilitzador d'un element per una acció (10.3.4) tenim que $g^{-1} * g \in \text{St}(x)$. Per tant, per la definició de grup quocient (10.1.33) tenim que $[g] = [g']$, i per tant f és injectiva.

Per veure que f és exhaustiva veiem que per a qualsevol $g \cdot x \in \mathcal{O}(x)$, $f([g]) = g \cdot x$, i per tant f és exhaustiva i tenim que $|\text{St}(x)| = |\mathcal{O}(x)|$, ja que f és una bijecció. \square

10.3.2 Teoremes de Sylow

Definició 10.3.8 (p -subgrup de Sylow). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ tal que $|G| = p^n m$ amb p primer que no divideix m i P un subgrup de G amb $|P| = p^n$. Aleshores direm que P és un p -subgrup de Sylow de G .*

Lema 10.3.9. *Siguin p un primer i m un enter positiu tal que p no divideixi m . Aleshores per a tot n natural tenim que*

$$\binom{p^n m}{p^n} \quad (10.10)$$

no és divisible per p .

Demostració. Tenim que

$$\binom{p^n m}{p^n} = \frac{p^n m (p^n m - 1) \cdots (p^n m - p^n + 1)}{p^n (p^n - 1) \cdots (p^n - p^n + 1)} = \prod_{i=0}^{p^n-1} \frac{p^n m - i}{p^n - i}. \quad (10.11)$$

Com que, per hipòtesi, p és primer aquesta expressió només serà divisible per p si ho són els elements del numerador. Fixem doncs $i \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ i estudiem

l' i -èsim terme del producte de (10.11). Notem primer que si $i = 0$ aquest terme no és divisible per p . Imposem ara també que $i \neq 0$. Si el denominador, $p^n m - i$, és divisible per p tindrem que $p^n m - i = p^k m'$, on m' no és divisible per p , i per tant k serà l'exponent més gran que satisfaci la igualtat. Si aïllem i obtindrem $i = p^k(p^{n-k}m - m')$. Ara bé, tenim doncs que $p^n - i = p^n - p^k(p^{n-k}m - m')$, i això és $p^n - p^k(p^{n-k}m - m') = p^k(p^{n-k}(1 - m) - m')$, i per tant tindrem que l' i -èsim terme del producte de (10.11) serà de la forma

$$\frac{p^n m - i}{p^n - i} = \frac{p^k m'}{p^k(p^{n-k}(1 - m) - m')} = \frac{m'}{p^{n-k}(1 - m) - m'},$$

i així veiem que aquest i -èsim terme del producte no serà divisible per p ; i com que això és cert per a qualsevol $i \in \{0, \dots, p^n + 1\}$ tenim que (10.10) tampoc ho serà, com volíem veure. \square

Teorema 10.3.10 (Primer Teorema de Sylow). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ tal que $|G| = p^n m$ amb p primer que no divideix m . Aleshores existeix un subconjunt $P \subseteq G$ tal que P sigui un p -subgrup de Sylow de G .*

Demostració. Sigui $\mathcal{P}_{p^n}(G) = \{H \subseteq G \mid |H| = p^n\} = \{H_1, \dots, H_k\}$ el conjunt de subconjunts d'ordre p^n de G . Aleshores tenim que

$$k = |\mathcal{P}_{p^n}(G)| = \binom{p^n m}{p^n},$$

i pel lema 10.3.9 tenim que p no divideix k .

Sigui e l'element neutre de G . Definim

$$\begin{aligned} \cdot : G \times \mathcal{P}_{p^n}(G) &\longrightarrow \mathcal{P}_{p^n}(G) \\ (g, X) &\longmapsto \{g\}X. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Veurem que \cdot és una acció de G sobre $\mathcal{P}_{p^n}(G)$. Primer hem de veure que, efectivament, \cdot està ben definida. Prenem $g_1, g_2 \in G$ i $X_1, X_2 \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ tals que $g_1 = g_2$ i $X_1 = X_2$. Per tant tenim $g_1 \cdot X_1 = g_2 \cdot X_2$ ja que $\{g_1\}X_1 = \{g_2\}X_2$. Per veure que $g_1 \cdot X_1 \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ en tenim prou amb veure que, per a tot $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$, si fixem $g \in G$ l'aplicació $g \cdot X$ té inversa, que per la definició de l'invers d'un element d'un grup (10.1.7) és $x^{-1} \cdot X$, i per tant $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$.

Comprovem que \cdot satisfà la definició de **acció d'un grup sobre un conjunt** (10.3.1). Tenim que $e \cdot X = X$ per a tot $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ ja que, per la definició de **conjugació entre conjunts sobre grups** (10.1.22), $eX = X$.

De nou per la definició de **conjugació entre conjunts sobre grups** (10.1.22) veiem que per a tot $g_1, g_2 \in G$ i $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ tenim que

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2) \cdot X &= \{g_1 * g_2\}X \\ &= \{g_1\}\{g_2\}X \\ &= \{g_1\}(\{g_2\}X) = g_1 \cdot (g_2 \cdot X). \end{aligned}$$

i per tant \cdot satisfà la definició de **acció d'un grup sobre un conjunt** (10.3.1).

Veiem ara que existeix almenys un element $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ tal que la seva òrbita, $\mathcal{O}(X)$, tingui ordre no divisible per p . Per veure això observem que per la definició de **l'òrbita d'un element d'un G -conjunt** (10.3.3) veiem que $\mathcal{O}(X)$

és un classe d'equivalència, i per tant l'ordre del conjunt \mathcal{P}_{p^n} és la suma dels ordres de les òrbites dels seus elements, $\mathcal{O}(X)$, i si p divideix l'ordre de $\mathcal{O}(X)$ per a tot $X \in \mathcal{P}_{p^n}$ tindriem que p també divideix k , però ja hem vist que això no pot ser. Per tant existeix almenys un element $X \in \mathcal{P}_{p^n}$ tal que $|\mathcal{O}(X)|$ no és divisible per p . Fixem aquest conjunt X .

Prenem l'estabilitzador de X , $\text{St}(X)$. Per la proposició 10.3.7 tenim que $|\text{St}(X)|$ divideix p^n . Prenem també $x_0 \in X$ i $g \in \text{St}(X)$. Per la definició de l'estabilitzador d'un element per una acció (10.3.4) tenim que $\{g\}X = X$, i per tant $g*x_0 \in X$, i equivalentment $g \in X\{x_0^{-1}\}$. Així veiem que $\text{St}(X) \subseteq X\{x_0^{-1}\}$, i per tant tenim que $|\text{St}(X)| \leq |X\{x_0\}|$. Observem que $X\{x_0\} \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ i per tant $|X\{x_0\}| = p^n$. Ara bé, l'ordre de $\text{St}(X)$ divideix p^n , però acabem de veure que $|\text{St}(X)| \leq p^n$. Per tant ha de ser $|\text{St}(X)| = p^n$, i per tant, per la proposició 10.3.6 tenim que $\text{St}(X) \leq G$, i per tant, per la definició de p -subgrup de Sylow (10.3.8), $\text{St}(X)$ és un p -subgrup de Sylow. \square

Corol·lari 10.3.11 (Teorema de Cauchy per grups). *Siguin G un grup d'ordre finit amb l'operació $*$ i p un primer que divideix l'ordre de G . Aleshores existeix un element $g \in G$ tal que l'ordre de g sigui p .*

Demostració. Direm que e és l'element neutre de G . Pel **Primer Teorema de Sylow** (10.3.10) tenim que existeix un p -subgrup de Sylow P de G , que per la definició de p -subgrup de Sylow (10.3.8) té ordre p^n per a cert $n \in \mathbb{N}$. Ara bé, pel **Teorema de Lagrange** (10.1.36) tenim que per a tot $x \in P$ diferent del neutre el grup cíclic generat per x ha de tenir ordre p^t amb $t \in \{2, \dots, n\}$, i per tant l'element $x^{p^{t-1}}$ té ordre p , ja que

$$\left(x^{p^{t-1}}\right)^p = x^{p^t} = e. \quad \square$$

Lema 10.3.12. *Siguin G un grup d'ordre p^n on p és un primer amb l'operació $*$, X un G -conjunt d'ordre finit amb una acció \cdot i $X_G = \{x \in X \mid g \cdot x = x \text{ per a tot } g \in G\}$ un conjunt. Aleshores*

$$|X_G| \equiv |X| \pmod{p}.$$

Demostració. Siguin $\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_r)$ les òrbites dels elements de X . Aleshores, com que per la definició de l'òrbita d'un element d'un G -conjunt (10.3.3) aquestes són classes d'equivalència, tenim que

$$X = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{O}(x_i),$$

i com que aquestes òrbites són disjunts per ser classes d'equivalència

$$|X| = \sum_{i=1}^r |\mathcal{O}(x_i)|. \quad (10.13)$$

Ara bé, per les proposicions 10.3.7 i 10.3.6 i el **Teorema de Lagrange** (10.1.36) tenim que l'ordre $|\mathcal{O}(x_i)|$ divideix l'ordre de X , i per tant els únics elements amb òrbites que tinguin un ordre que no sigui divisible per p són els elements del

conjunt X_G ; i com que les òrbites d'aquests elements tenen un únic element tenim que

$$|X_G| = \sum_{x \in X_G} |\mathcal{O}(x)|,$$

i per tant, recordant que totes les altres òrbites tenen ordre divisible per p , trobem, amb (10.13), que

$$|X_G| \equiv |X| \pmod{p}. \quad \square$$

Teorema 10.3.13 (Segon Teorema de Sylow). *Siguin G un grup d'ordre finit amb l'operació $*$, p un primer que divideixi l'ordre de G i P_1, P_2 dos p -subgrups de Sylow de G . Aleshores existeix $g \in G$ tal que*

$$\{g\}P_1\{g^{-1}\} = P_2.$$

Demostració. Primer observem que aquest enunciat té sentit pel **Primer Teorema de Sylow** (10.3.10).

Definim el conjunt $X = \{\{x\}P_1 \mid x \in G\}$ i

$$\begin{aligned} \cdot: P_2 \times X &\longrightarrow X \\ (y, \{x\}P_1) &\longmapsto \{y\}\{x\}P_1. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Primer veurem que \cdot és una acció. Per veure que \cdot està ben definida prenem $\{x\}P_1, \{x'\}P_1 \in X$ tals que $\{x\}P_1 = \{x'\}P_1$. Aleshores per a tot $y \in P_2$ tindrem $y \cdot \{x\}P_1 = \{y\}\{x\}P_1$ i $y \cdot \{x'\}P_1 = \{y\}\{x'\}P_1$, i com que per hipòtesi $\{x\}P_1 = \{x'\}P_1$, ha de ser $\{y\}\{x\}P_1 = \{y\}\{x'\}P_1$.

Comprovem que \cdot satisfà la definició de **acció d'un grup sobre un conjunt** (10.3.1). Veiem que per a tot $y \in P_2$, $\{x\}P_1 \in X$ es compleix que $y \cdot \{x\}P_1 \in X$. Per la definició (10.14) tenim $y \cdot \{x\}P_1 \in X = \{y\}\{x\}P_1 = \{y * x\}P_1$, i com que per hipòtesi G és un grup i $x, y \in G$, per la definició de **grup** (10.1.1) tenim que $y * x \in G$, i per tant $y \cdot \{x\}P_1 \in X$.

Sigui e l'element neutre de G . Tenim que

$$\begin{aligned} e \cdot \{x\}P_1 &= \{e\}\{x\}P_1 \\ &= \{e * x\}P_1 = \{x\}P_1. \end{aligned} \quad (\text{l'element neutre d'un grup (10.1.3)})$$

i per últim veiem que per a tot $y, y' \in G$ tenim $(y * y') \cdot P_1 = y \cdot (y' \cdot P_1)$. Això és

$$\begin{aligned} (y * y') \cdot P_1 &= \{y * y'\}P_1 \\ &= \{y\}\{y'\}P_1 \\ &= \{y\}(\{y'\}P_1) = y \cdot (y' \cdot P_1). \end{aligned} \quad (\text{Definició (10.14)})$$

i per la definició de **acció d'un grup sobre un conjunt** (10.3.1) tenim que X és un G -conjunt.

Definim el conjunt

$$X_{P_2} = \{\{x\}P_1 \in X \mid y \cdot \{x\}P_1 = \{x\}P_1 \text{ per a tot } y \in P_2\}. \quad (10.15)$$

Aleshores pel lema 10.3.12 tenim que

$$|X_{P_2}| \equiv |X| \pmod{p}.$$

Ara bé, per la definició de l'índex d'un subgrup en un grup (10.1.38) i (10.14) tenim que $|X| = [G : P_1]$, i per hipòtesi tenim que $|X| = \frac{p^n m}{p^n} = m$, en particular $|X_{P_2}| \neq 0$. Així veiem que existeix almenys un element que satisfà la definició de X_{P_2} , (10.15); és a dir, existeix almenys un $\{x\}P_1$ tal que $y \cdot \{x\}P_1 = \{x\}P_1$ per a tot $y \in P_2$, i per tant tenim que $\{y\}\{x\}P_1 = \{x\}P_1$, i per tant $\{x^{-1}\}\{y\}\{x\}P_1 \in \{x^{-1}\}\{x\}P_1$, i equivalentment $x^{-1} * y * x \in P_1$ per a tot $y \in P_2$, i per tant $\{x^{-1}\}P_2\{x\} \subseteq P_1$, però, per hipòtesi, al ser els dos p -subgrups de Sylow, per la definició de p -subgrup de Sylow (10.3.8) trobem $|P_1| = |P_2| = |\{x^{-1}\}P_2\{x\}|$ i tenim que $\{x\}P_1\{x^{-1}\} = P_2$. \square

Corol·lari 10.3.14. *G té un únic p -subgrup de Sylow si i només si aquest és un subgrup normal.*

Teorema 10.3.15 (Tercer Teorema de Sylow). *Siguin G un grup d'ordre $p^n m$ on p és un primer que no divideix m amb l'operació $*$ i n_p el número de p -subgrups de Sylow de G . Aleshores $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ i n_p divideix l'ordre de G .*

Demostració. Definim el conjunt

$$X = \{T \subseteq G \mid T \text{ és un } p\text{-subgrup de Sylow de } G\}.$$

Pel **Primer Teorema de Sylow** (10.3.10) tenim que X és no buit³ i fixem $P \in X$. Definim

$$\begin{aligned} \cdot : P \times X &\longrightarrow X \\ (g, T) &\longmapsto \{g\}T\{g^{-1}\}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Anem a veure que \cdot és una acció. Veiem que \cdot està ben definida, ja que si $T \in X$, aleshores per a tot $x \in G$, i en particular per a tot $x \in P$ ja que $P \leq G$, tenim $|\{x\}T\{x^{-1}\}| = |T|$, i per tant $|\{x\}T\{x^{-1}\}| \in X$ per la definició de p -subgrup de Sylow (10.3.8). Veiem ara que \cdot satisfà les condicions de la definició de acció d'un grup sobre un conjunt (10.3.1). Sigui e l'element neutre de G . Tenim que per a tot $T \in X$

$$\begin{aligned} e \cdot T &= \{e\}T\{e^{-1}\} \\ &= T \end{aligned} \quad (\text{Definició (10.16)})$$

i per a tot $g_1, g_2 \in P$ i $T \in X$

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2) \cdot T &= \{g_1 * g_2\}T\{g_1 * g_2^{-1}\} && (\text{Definició (10.16)}) \\ &= \{g_1 * g_2\}T\{g_2^{-1} * g_1^{-1}\} && (\text{Proposició 10.1.10}) \\ &= \{g_1\}\{g_2\}T\{g_2^{-1}\}\{g_1^{-1}\} \\ &= \{g_1\}(g_2 \cdot T)\{g_1^{-1}\} && (\text{Definició (10.16)}) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot T) && (\text{Definició (10.16)}) \end{aligned}$$

i per tant, per la definició de acció d'un grup sobre un conjunt (10.3.1) X és un P -conjunt amb l'acció \cdot .

³Tindrem que $|X| = n_p$.

Definim el conjunt

$$X_P = \{T \in X \mid g \cdot T = T \text{ per a tot } g \in P\},$$

i per la definició (10.16) tenim que si $T \in X_P$ aleshores per a tot $g \in G$ es compleix $\{g\}T\{g^{-1}\} = T$. Ara bé, això és que $T = P$ per a tot $T \in X_P$, i per tant $|X_P| = 1$. Aleshores pel lema 10.3.12 tenim que

$$|X| \equiv |X_P| \pmod{p},$$

o equivalentment

$$|X| \equiv 1 \pmod{p}.$$

Per veure que $|X|$ divideix l'ordre de G prenem $P \in X$ i tenim, pel Segon Teorema de Sylow (10.3.13) i la definició de l'òrbita d'un element d'un G -conjunt (10.3.3), que

$$\mathcal{O}(P) = X,$$

on $\mathcal{O}(P)$ és l'òrbita de P , i per tant

$$|\mathcal{O}(P)| = |X|,$$

i per les proposicions 10.3.6 i 10.3.7 i el Teorema de Lagrange (10.1.36) tenim que $|X|$ divideix l'ordre de G . \square

Corol·lari 10.3.16. *Si G té ordre $p^n q^m$ on p, q són primers amb $p < q$ aleshores $n_q = 1$, i pel corol·lari 10.3.14, aquest és normal en G .*

Capítol 11

Teoria d'anells

11.1 Anells

11.1.1 Propietats bàsiques dels anells i subanells

Definició 11.1.1 (Anell). Sigui R un conjunt no buit i

$$+ : R \times R \longrightarrow R \qquad \cdot : R \times R \longrightarrow R$$

dues operacions que satisfan

1. R amb l'operació $+$ és un grup abelià.
2. Existeix un element e de R tal que $x \cdot e = e \cdot x = x$ per a tot $x \in R$.
3. Per a tot $x, y, z \in R$ tenim

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. Per a tot $x, y, z \in R$ tenim

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{i} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Aleshores direm que R és un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . També direm que R és un anell amb element neutre pel producte e .

Si per a tot $x, y \in R$ tenim $x \cdot y = y \cdot x$ direm que R és un anell commutatiu.

Proposició 11.1.2. *Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i element neutre pel producte e . Aleshores l'element neutre pel producte de R és únic.*

Demostració. Suposem que existeix un altre $e' \neq e$ tal que $x \cdot e' = e' \cdot x = x$ per a tot $x \in R$. Aleshores tindríem

$$e \cdot e' = e' \cdot e = e$$

a la vegada que

$$e \cdot e' = e' \cdot e = e'$$

i per tant ha de ser $e = e'$, que contradiu la hipòtesi que existeix un altre element neutre pel producte a R , i en conseqüència aquest és únic. \square

Definició 11.1.3 (Elements neutres d'un anell). Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores direm que 0_R és l'element neutre de R per la suma i 1_R és l'element neutre de R pel producte i els denotarem per 0_R i 1_R , respectivament.

Aquesta definició té sentit per la proposició 10.1.2 i la proposició 11.1.2.

Notació 11.1.4. Donat un anell R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot , aprofitant que el producte \cdot és associatiu escriurem

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

També, si el context ho permet (quan treballem amb un únic anell R), denotarem $1_R = 1$ i $0_R = 0$.

Proposició 11.1.5. Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores per a tot $a, b, c \in R$ tenim

1. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
2. $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$.
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
4. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

Demostració. Comprovem el punt (1). Només veurem que $0 \cdot a = 0$ ja que l'altre demostració és anàloga. Com que $0 = 0 + 0$ per la definició de l'element neutre d'un anell per la suma (11.1.3), per la definició d'anell (11.1.1) tenim que

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= (0 + 0) \cdot a \\ &= 0 \cdot a + 0 \cdot a \end{aligned}$$

i per tant, per la definició de grup (10.1.1)

$$0 \cdot a - (0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a - (0 \cdot a)$$

d'on veiem

$$0 \cdot a = 0,$$

com volíem veure.

Veiem ara el punt (2). Per la definició d'anell (11.1.1) tenim

$$1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a \quad \text{i} \quad (-1) \cdot a + 1 \cdot a = (-1 + 1) \cdot a$$

i per tant, com que $1 - 1 = -1 + 1 = 0$ per la definició de l'element neutre d'un anell per la suma (11.1.3), tenim que $a + (-1) \cdot a = (-1) \cdot a + a = 0$, però per la proposició 10.1.6 tenim que $(-1) \cdot a = -a$. L'altre igualtat és anàloga.

Continuem veient el punt (3). Pel punt (2) tenim que

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b.$$

Ara bé, pel punt (2) de nou tenim que $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$, i per la proposició 10.1.9 tenim que $-(-1) = 1$ i per tant

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Per veure el punt (4) només veurem que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ ja que l'altre demostració és anàloga. Pel punt (2) tenim que

$$-(a \cdot b) = (-1) \cdot (a \cdot b) \quad \text{i} \quad (-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b.$$

Ara bé, per la definició d'anell (11.1.1)

$$(-1) \cdot a \cdot b - (-1) \cdot (a \cdot b) = (-1 - (-1)) \cdot (a \cdot b),$$

i per la proposició 10.1.9 tenim que $-(-1) = 1$ i per tant, per la definició de grup (10.1.1) tenim $-1 + 1 = 0$ i trobem

$$(-1) \cdot a \cdot b - (-1) \cdot (a \cdot b) = 0 \cdot (a \cdot b) = 0,$$

i podem veure també que

$$(-1) \cdot (a \cdot b) - (-1) \cdot a \cdot b = 0$$

de manera anàloga. Aleshores, per la proposició 10.1.6 tenim que

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b),$$

com volíem veure. □

Proposició 11.1.6. *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i a un element de R tal que existeixi $b \in R$ que satisfaci*

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Aleshores b és únic.

Demostració. Suposem que existeix un altre element $b' \in R$ tal que

$$a \cdot b' = b' \cdot a = 1.$$

Aleshores tenim

$$a \cdot b = a \cdot b'$$

i per tant

$$b \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot b'$$

i com que per hipòtesi $b \cdot a = 1$ per la definició de l'element neutre d'un anell pel producte (11.1.3) trobem

$$b = b'. \quad \square$$

Definició 11.1.7 (Element invertible). *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i x un element de R tal que existeixi $x' \in R$ tals que*

$$x \cdot x' = x' \cdot x = 1.$$

Aleshores direm que x és invertible o que x és un element invertible de R .

Definició 11.1.8 (L'invers d'un element). *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i x un element invertible de R . Aleshores denotarem per x^{-1} l'element de R tal que*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Direm que x^{-1} és l'invers de x .

Aquesta definició té sentit per la proposició 11.1.6.

Definició 11.1.9 (Subanell). Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i $S \subseteq R$ un subconjunt amb $1 \in S$ tal que per a tot $a, b \in S$ tenim $a \cdot b, a + b \in S$ i S un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores direm que S és un subanell de R .

Ho denotarem amb $S \leq R$.

11.1.2 Ideals i ideals principals

Definició 11.1.10 (Ideal). Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I un subconjunt no buit de R tal que I sigui un subgrup del grup R amb la suma $+$ i tal que per a tot $x \in I, r \in R$ tenim $r \cdot x \in I$. Aleshores direm que I és un ideal de R .

Observació 11.1.11. $0 \in I$.

Notació 11.1.12. Si I és un ideal d'un anell R denotarem $I \triangleleft R$.

Proposició 11.1.13. Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I un subconjunt no buit de R . Aleshores tenim que I és un ideal de R si i només si

1. Per a tot $x, y \in I$ tenim $x - y \in I$.
2. Per a tot $r \in R, x \in I$ tenim $r \cdot x \in I$.

Demostració. Veiem que la condició és suficient (\implies). Suposem que I és un ideal de R . Hem de veure que per a tot $x, y \in I, r \in R$ tenim $x - y \in I$ i $r \cdot x \in I$. Per la definició de grup (10.1.1) tenim que $x - y \in I$, ja que, per la definició d'ideal d'un anell (11.1.10) tenim que I és un grup amb la suma $+$. També trobem $r \cdot x \in I$ per la definició d'ideal d'un anell (11.1.10).

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem que per a tot $x, y \in I, r \in R$ tenim $x - y \in I$ i $r \cdot x \in I$. Per la proposició 10.1.15 tenim que I és un subgrup del grup R amb la suma $+$, i per la definició d'ideal d'un anell (11.1.10) tenim que I és un ideal de R . \square

Notació 11.1.14. Si (a) és un ideal principal d'un anell R denotarem $(a) \trianglelefteq R$.

Proposició 11.1.15. Sigui I, J dos ideals d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores els conjunts

1. $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$.
2. $I \cap J$.
3. $IJ = \{x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n \mid x_1, \dots, x_n \in I, y_1, \dots, y_n \in J, n \in \mathbb{N}\}$.

són ideals de R .

Demostració. Comencem demostrant el punt (1). Per la proposició 11.1.13 només ens cal veure que per a tot $a, b \in I + J, r \in R$ tenim $a - b \in I + J$ i $r \cdot a \in I + J$. Prenem doncs $a, b \in I + J$. Aleshores tenim $a = a_1 + a_2$ i

$b = b_1 + b_2$ per a certs $a_1, b_1 \in I$ i $a_2, b_2 \in J$. Volem veure que $a - b \in I + J$. Això és

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) &= a_1 + a_2 - b_1 - b_2 & (11.1.5) \\ &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) & (\text{grup abelià } (10.1.25)) \end{aligned}$$

i com que, per hipòtesi, I, J són ideals de R per la proposició 11.1.13 tenim que $a_1 - b_1 \in I$ i $a_2 - b_2 \in J$, i per tant $a - b = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \in I + J$.

Veiem ara que per a tot $r \in R$ es satisfà $r \cdot a \in I + J$. Tenim

$$\begin{aligned} r \cdot a &= r \cdot (a_1 + a_2) & (\text{anell } (11.1.1)) \\ &= r \cdot a_1 + r \cdot a_2 & (\text{anell } (11.1.1)) \end{aligned}$$

i per la proposició 11.1.13 tenim que $r \cdot a_1 \in I$ i $r \cdot a_2 \in J$, i per tant $r \cdot a = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 \in I + J$. Aleshores per la proposició 11.1.13 tenim que $I + J$ és un ideal de $(R, +, \cdot)$.

Veiem ara el punt (2). Per la proposició 11.1.13 només ens cal veure que per a tot $a, b \in I \cap J$, $r \in R$ tenim $a - b \in I \cap J$ i $r \cdot a \in I \cap J$. Prenem doncs $a, b \in I \cap J$, i per tant $a, b \in I$ i $a, b \in J$, i per la proposició 11.1.13 tenim que $a - b \in I$ i $a - b \in J$, i tenim que $a - b \in I \cap J$.

Per veure que $r \cdot a \in I \cap J$ per a tot $r \in R$ tenim per la definició d'ideal d'un anell (11.1.10) que $r \cdot a \in I$ i $r \cdot a \in J$, i per tant $r \cdot a \in I \cap J$ i per la proposició 11.1.13 $I \cap J$ és un ideal de R .

Acabem veient el punt (3). Per la proposició 11.1.13 només ens cal veure que per a tot $a, b \in IJ$, $r \in R$ tenim $a - b \in IJ$ i $r \cdot a \in IJ$. Prenem doncs $a, b \in IJ$, i tenim que $a = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$, $b = x'_1 \cdot y'_1 + \cdots + x'_m \cdot y'_m$ per a certs $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m \in I$, $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_m \in J$. Per veure que $a - b \in IJ$ fem, per la proposició 11.1.5,

$$\begin{aligned} a - b &= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n - (x'_1 \cdot y'_1 + \cdots + x'_m \cdot y'_m) = \\ &= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n - x'_1 \cdot y'_1 - \cdots - x'_m \cdot y'_m \end{aligned}$$

i com que I és, per hipòtesi, un anell, per les proposicions 11.1.5 i 11.1.13 tenim que $-x'_1, \dots, -x'_m \in I$ i $a - b = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n - x'_1 \cdot y'_1 - \cdots - x'_m \cdot y'_m \in IJ$.

Veiem ara que per a tot $r \in R$ es satisfà $r \cdot a \in IJ$. Això és

$$\begin{aligned} r \cdot a &= r \cdot (x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n) \\ &= r \cdot x_1 \cdot y_1 + \cdots + r \cdot x_n \cdot y_n & (11.1.5) \end{aligned}$$

i com que I és, per hipòtesi, un anell, per les proposicions 11.1.5 i 11.1.13 tenim que $r \cdot x_1, \dots, r \cdot x_n \in I$, i per tant $r \cdot a = r \cdot x_1 \cdot y_1 + \cdots + r \cdot x_n \cdot y_n \in IJ$ i per la proposició 11.1.13 tenim que IJ és un ideal de R . \square

Definició 11.1.16 (Ideal principal). Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma + i el producte \cdot tal que $I = \{a\}R = R\{a\} = \{r \cdot a \mid r \in R\}$ per a cert $a \in I$. Aleshores direm que I és un anell principal de R . Ho denotarem amb $I = (a)$.

11.1.3 Cossos i l'anell quocient

Definició 11.1.17 (Cos). Sigui \mathbb{K} un anell commutatiu amb la suma + i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ tal que $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sigui un grup abelià amb el producte \cdot . Aleshores direm que \mathbb{K} és un cos amb la suma + i el producte \cdot .

Proposició 11.1.18. *Sigui \mathbb{K} un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$. Aleshores tenim que \mathbb{K} és un cos si i només si els únics ideals de \mathbb{K} són (0) i \mathbb{K} .*

Demostració. Comencem comprovant que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que \mathbb{K} és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i que I és un ideal de \mathbb{K} amb $I \neq (0)$, i per tant existeix $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ tal que $a \in I$. Com que, per hipòtesi, $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ és un grup i $a \neq 0$ per la definició de [l'invers d'un element d'un grup \(10.1.7\)](#) existeix $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, i per la definició d'[ideal d'un anell \(11.1.10\)](#) trobem que $1 \in I$, i per tant per la proposició [11.1.13](#) tenim que per a tot $x \in \mathbb{K}$ tenim $x \cdot 1 = x \in I$, i per tant $I = \mathbb{K}$.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem que els únics ideals de \mathbb{K} són (0) i \mathbb{K} . Prenem un element $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ i considerem l'ideal principal (a) , que per hipòtesi ha de ser $(a) = (1) = \mathbb{K}$, i per la definició d'[ideal principal \(11.1.16\)](#) tenim que existeix $a' \in (1)$ tal que $a \cdot a' = 1$, i per tant, per la definició de [grup \(10.1.1\)](#) tenim que $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ és un grup amb el producte \cdot i per la definició de [cos \(11.1.17\)](#) tenim que \mathbb{K} és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot . \square

Proposició 11.1.19. *Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores la relació*

$$x \sim y \iff x - y \in I \quad \text{per a tot } x, y \in R$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem que \sim satisfà la definició de [relació d'equivalència \(2.3.2\)](#):

1. Reflexiva: Prenem $x \in R$. Per l'observació [11.1.11](#) tenim que $0 \in I$, i per tant $x - x = 0 \in I$ i veiem que $x \sim x$.
2. Simètrica: Siguin $x_1, x_2 \in R$ tals que $x_1 \sim x_2$. Això és que $x_1 - x_2 \in I$. Per la definició d'[ideal d'un anell \(11.1.10\)](#) tenim que $(-1) \cdot (x_1 - x_2) \in I$, i per la proposició [11.1.5](#) tenim que $x_2 - x_1 \in I$, és a dir, $x_2 \sim x_1$.
3. Transitiva: Siguin $x_1, x_2, x_3 \in R$ tals que $x_1 \sim x_2$ i $x_2 \sim x_3$. Per la definició d'[ideal d'un anell \(11.1.10\)](#) tenim que $x_3 - x_2 \in I$, i per la proposició [11.1.13](#) tenim que $x_1 - x_2 - (x_3 - x_2) \in I$. Ara bé, per la proposició [11.1.5](#) tenim que això és $x_1 - x_3 \in I$, i per tant $x_1 \sim x_3$.

Per tant \sim és una relació d'equivalència. \square

Proposició 11.1.20. *Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores R/I amb la suma $[x] + [y] = [x + y]$ i el producte $[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ és un anell.*

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició [11.1.19](#).

Per la proposició [10.1.31](#) tenim que $(R/I, +)$ és un grup, i com que

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \\ &= [y + x] \\ &= [y] + [x] \end{aligned} \quad (\text{grup abelià (10.1.25)})$$

tenim que R/I és un grup abelià amb la suma $+$. Veiem ara que per a tot $x, y, z \in R/I$ tenim $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$ i $[x] \cdot ([y] + [z]) = [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z]$. Tenim

$$\begin{aligned} [x] \cdot ([y] \cdot [z]) &= [x] \cdot [y \cdot z] \\ &= [x \cdot (y \cdot z)] \\ &= [(x \cdot y) \cdot z] \\ &= [x \cdot y] \cdot [z] = ([x] \cdot [y]) \cdot [z] \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} [x] \cdot ([y] + [z]) &= [x] \cdot [y + z] \\ &= [x \cdot (y + z)] \\ &= [x \cdot y + x \cdot z] = [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z] \end{aligned}$$

i per la definició d'anell (11.1.1) tenim que R/I és un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . \square

Definició 11.1.21 (Anell quocient). Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I un ideal de R . Aleshores direm que R/I és un anell quocient.

Aquesta definició té sentit per la proposició 11.1.20.

11.2 Tres Teoremes d'isomorfisme entre anells

11.2.1 Morfismes entre anells

Definició 11.2.1 (Morfisme entre anells). Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ una aplicació tal que

1. $f(x +_R y) = f(x) +_S f(y)$ per a tot $x, y \in R$.
2. $f(x *_R y) = f(x) *_S f(y)$ per a tot $x, y \in R$.
3. $f(1_R) = 1_S$.

Aleshores diem que f és un morfisme entre anells. Definim també

1. Si f és injectiva direm que f és un monomorfisme entre anells.
2. Si f és exhaustiva direm que f és un epimorfisme entre anells.
3. Si f és bijectiva direm que f és un isomorfisme entre anells. També escriurem $R \cong S$.
4. Si $R = S$ direm que f és un endomorfisme entre anells.
5. Si $R = S$ i f és bijectiva direm que f és un automorfisme entre anells.

Observació 11.2.2. Si f és un morfisme entre anells aleshores f és un morfisme entre grups.

Proposició 11.2.3. *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores*

1. $f(0_R) = 0_S$.
2. $f(-x) = -f(x)$ per a tot $x \in R$.

Demostració. Per l'observació 11.2.2 tenim que f és un morfisme entre els grups R amb la suma $+_R$ i S amb la suma $+_S$, i per la proposició 10.2.2 tenim que $f(0_R) = 0_S$ i $f(-x) = -f(x)$ per a tot $x \in R$. \square

Definició 11.2.4 (Nucli i imatge). *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores definim*

$$\ker(f) = \{x \in R \mid f(x) = 0_S\}$$

com el nucli de f , i

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in S \mid f(x) = y \text{ per a cert } x \in R\}$$

com la imatge de f .

Observació 11.2.5. $\ker(f) \subseteq R$, $\operatorname{Im}(f) \subseteq S$.

Proposició 11.2.6. *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores*

1. $\ker(f) \triangleleft R$.
2. $\operatorname{Im}(f) \leq S$.

Demostració. Aquest enunciat té sentit per l'observació 11.2.6

Comencem veient el punt (1). Com que, per la proposició 11.2.3, tenim que $f(0_R) = 0_S$ veiem, per la definició de [nucli d'un morfisme entre anells](#) (11.2.4), que $\ker(f) \neq \emptyset$. Prenem doncs $a \in \ker(f)$. Observem que, per la definició de [morfisme entre anells](#) (11.2.1), tenim que $f(r *_R a) = f(r) *_S f(a)$ per a tot $r \in R$, i per tant, com que per la definició de [nucli d'un morfisme entre anells](#) (11.2.4) es compleix $f(a) = 0_S$ tenim que

$$f(r *_R a) = f(r) *_S f(a) = f(r) *_S 0_S = 0_S$$

i per tant $r *_R a \in \ker(f)$ per a tot $r \in R$, $a \in \ker(f)$. Ara bé per la definició de [ideal d'un anell](#) (11.1.10) tenim que $\ker(f)$ és un ideal de R .

Veiem ara el punt (2). Veiem que per a tot $x, y \in \operatorname{Im}(f)$ tenim $x *_S y \in \operatorname{Im}(f)$. Per la definició d'[imatge d'un morfisme entre anells](#) (11.2.4) tenim que existeixen $a, b \in R$ tals que $f(a) = x$ i $f(b) = y$. Ara bé, per la definició d'[anell](#) (11.1.1) tenim que $a *_R b = c \in R$, i per tant per la definició d'[imatge d'un morfisme entre anells](#) (11.2.4) tenim que $f(c) = x *_S y \in \operatorname{Im}(f)$. Veiem ara que $\operatorname{Im}(f)$ és un anell amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$. Com que, per l'observació 11.2.2 tenim que f és un morfisme entre grups per la proposició 10.2.7 tenim que $\operatorname{Im}(f)$

és un subgrup del grup S amb la suma $+_S$; i per la definició d'anell (11.1.1) tenim que per a tot $x, y, z \in R$ es satisfà

$$x *_R (y *_R z) = (x *_R y) *_R z \quad \text{i} \quad x *_R (y +_R z) = x *_R y +_R x *_R z,$$

i per la definició de subanell (11.1.9) tenim que $\text{Im}(f)$ és un subanell de S , com volíem veure. \square

Proposició 11.2.7. *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$, D un anell commutatiu amb la suma $+_D$ i el producte $*_D$ tres anells commutatius amb $1_R \neq 0_R$, $1_S \neq 0_S$ i $1_D \neq 0_D$ i $f: R \rightarrow S$, $g: S \rightarrow D$ dos morfismes entre anells. Aleshores $g \circ f: R \rightarrow D$ és un morfisme entre anells.*

Demostració. Per la definició de morfisme entre anells (11.2.1) trobem que

$$\begin{aligned} g(f(x +_R y)) &= g(f(x) +_S g(y)) \\ &= g(f(x)) +_D g(g(y)), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} g(f(x *_R y)) &= g(f(x) *_S g(y)) \\ &= g(f(x)) *_D g(g(y)). \end{aligned}$$

També tenim

$$g(f(1_R)) = g(1_S) = 1_D$$

i per la definició de morfisme entre anells (11.2.1) tenim que $g \circ f$ és un morfisme entre anells. \square

Corol·lari 11.2.8. *Si f, g són isomorfismes aleshores $g \circ f$ és isomorfisme.*

Lema 11.2.9. *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores*

$$\ker(f) \text{ és un ideal de } R \quad \text{i} \quad \text{Im}(f) \text{ és un subanell de } S.$$

Demostració. Comencem veient que $\ker(f)$ és un ideal de R . Per l'observació 11.2.2 tenim que $\ker(f)$ és un morfisme entre grups, i per la proposició 10.2.7 tenim que $\ker(f)$ és un subgrup del grup R amb la suma $+_R$.

Prenem $x \in \ker(f)$ i $r \in R$. Volem veure que $r *_R x \in \ker(f)$. Tenim

$$\begin{aligned} f(r *_R x) &= f(r) *_S f(x) && (\text{morfisme entre anells (11.2.1)}) \\ &= f(r) *_S 0_S && (\text{nucli d'un morfisme entre anells (11.2.4)}) \\ &= 0_S && (\text{l'element neutre d'un anell pel producte (11.1.3)}) \end{aligned}$$

i per la definició de nucli d'un morfisme entre anells (11.2.4) tenim que $r *_R x \in \ker(f)$, i per la proposició 11.1.13 tenim que $\ker(f)$ és un ideal de R .

Veiem ara que $\text{Im}(f)$ és un subanell de S . Per l'observació 11.2.2 tenim que $\text{Im}(f)$ és un morfisme entre grups, i per la proposició 10.2.7 tenim que $\text{Im}(f)$ és un subgrup del grup S amb la suma $+_S$.

Prenem $x, y \in \text{Im}(f)$. Volem veure que $x *_S y \in \text{Im}(f)$. Per la definició d'imatge d'un morfisme entre anells (11.2.4) tenim que existeixen $x', y' \in R$ tals que $f(x') = x$ i $f(y') = y$. Ara bé, per la definició d'anell (11.1.1) tenim que $x' *_R y' \in R$, i per tant

$$\begin{aligned} f(x' *_R y') &= f(x') *_S f(y') && \text{(morfisme entre anells (11.2.1))} \\ &= x *_S y \end{aligned}$$

i per la definició de imatge d'un morfisme entre grups (10.2.5) trobem que $x *_S y \in \text{Im}(f)$.

També tenim, per la definició de morfisme entre anells (11.2.1), que $1_S \in \text{Im}(f)$, ja que $f(1_R) = 1_S$, i per tant, per la definició de subanell (11.1.9), tenim que $\text{Im}(f)$ és un subanell de S . \square

11.2.2 Teoremes d'isomorfisme entre anells

Teorema 11.2.10 (Primer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin R un anell amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ i $\varphi: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores*

$$R/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi).$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 11.2.6. \square

Teorema 11.2.11 (Segon Teorema de l'isomorfisme). *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I, J dos ideals de R . Aleshores*

$$(I + J)/I \cong J/(I \cap J).$$

Demostració. \square

Lema 11.2.12. *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I, J dos ideals de R tals que $I \subseteq J$. Aleshores J/I és un ideal de R/I .*

Demostració. \square

Teorema 11.2.13 (Tercer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I, J dos ideals de R tals que $I \subseteq J$. Aleshores*

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit pel lema 11.2.12. \square

11.2.3 Característica d'un anell

Definició 11.2.14 (Característica). Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . Direm que R té característica $n > 0$ si $n = \min_{n \in \mathbb{N}} \{n \cdot 1 = 0\}$. Ho denotarem amb $\text{ch}(R) = n$. Si aquest n no existeix diem que R té característica 0 i $\text{ch}(R) = 0$.

Proposició 11.2.15. *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i*

$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow R$$

$$n \longmapsto n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1 \quad (n \text{ cops})$$

una aplicació. Aleshores f és un morfisme entre anells i $\ker(f) = (\text{ch}(R))$.

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 11.2.6.

Comencem veient que f és un morfisme entre anells. Veiem que f és un morfisme entre els grup. Tenim que per a tot $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(n+m) &= 1 + \cdots + 1 \quad (n+m \text{ cops}) \\ &= (1 + \cdots + 1) + (1 + \cdots + 1) \quad (n \text{ i } m \text{ cops}) \\ &= f(n) + f(m) \end{aligned}$$

i per la definició de **morfisme entre grups** (10.2.1) tenim que f és un morfisme entre grups. Veiem ara que $f(1) = 1$. Tenim que $f(1) = 1 \cdot 1 = 1$ i per tant per la definició de **morfisme entre anells** (11.2.1) tenim que f és un morfisme entre anells.

Veiem ara que $\ker(f) = (\text{ch}(R))$. Per la definició de **nucli d'un morfisme entre anells** (11.2.4) tenim que $\ker(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = 0\}$. Per tant

$$\ker(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 0\}$$

i per la definició de **característica d'un anell** (11.2.14) tenim que $n = \text{ch}(R)$, i per tant $\ker(f) = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ara bé, per la definició de **ideal d'un anell** (11.1.10) tenim que $\ker(f) = (n)$, com volíem veure. \square

Corol·lari 11.2.16. *Si $\text{ch}(R) = 0$ aleshores existeix un subanell S de R tal que $S \cong \mathbb{Z}$.*

Si $\text{ch}(R) = n$ aleshores existeix un subanell S de R tal que $S \cong \mathbb{Z}/(n)$.

11.3 Dominis

11.3.1 Dominis d'integritat, ideals primers i maximals

Definició 11.3.1 (Divisor de 0). *Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i $a, b \neq 0$ dos elements de R tals que $a \cdot b = 0$. Aleshores diem que a és un divisor de 0 en R .*

Definició 11.3.2 (Dominis d'integritat). *Sigui D un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ tal que no existeix cap $a \in D$ tal que a sigui un divisor de 0 en D . Aleshores direm que D és un domini d'integritat.*

Proposició 11.3.3. *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $a \neq 0$ un element de D . Aleshores*

$$a \cdot x = a \cdot y \implies x = y.$$

Demostració. Tenim

$$a \cdot x - a \cdot y = 0$$

i per la proposició 11.1.5 tenim que

$$(x - y) \cdot a = 0.$$

Ara bé, com que, per hipòtesi, D és un domini d'integritat i $a \neq 0$ tenim que ha de ser $x - y = 0$, i per tant trobem $x = y$. \square

Definició 11.3.4 (Ideal primer). Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $I \neq R$ tal que si $a \cdot b \in I$ tenim $a \in I$ o $b \in I$. Aleshores direm que I és un ideal primer de R .

Proposició 11.3.5. *Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $I \neq R$. Aleshores*

$$R/I \text{ és un domini d'integritat} \iff I \text{ és un ideal primer de } R.$$

Demostració. Comencem demostrant que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que R/I és un domini d'integritat i prenem $[a], [b] \in R/I$ tals que $[a] \cdot [b] = [0]$. Aleshores per la definició de [anell quocient](#) (11.1.21) tenim que $a \cdot b \in I$. Ara bé, com que per hipòtesi R/I és un domini d'integritat tenim que ha de ser $[a] = [0]$ ó $[b] = [0]$, i per tant trobem que ha de ser $a \in I$ o $b \in I$, i per la definició d'[ideal primer](#) (11.3.4) trobem que I és un ideal primer de R .

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que I és un ideal primer de R . Per la proposició 11.1.20 tenim que R/I és un anell commutatiu amb $1 \neq 0$. Prenem doncs $a \in R$, $a \notin I$ i suposem que existeix $b \in R$ tal que $[a] \cdot [b] = [0]$. Això és que $a \cdot b \in I$, i com que per hipòtesi I és un ideal primer, per la definició d'[ideal primer](#) (11.3.4) trobem que ha de ser $b \in I$, i per tant $[b] = [0]$ i per la definició de [domini d'integritat](#) (11.3.2) tenim que R/I és un domini d'integritat. \square

Corol·lari 11.3.6. *R és un domini d'integritat si i només si (0) és un ideal primer.*

Definició 11.3.7 (Ideal maximal). Sigui M un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $M \neq R$ tal que per a tot ideal I de R amb $M \subseteq I \subseteq R$ ha de ser $I = M$ o $I = R$. Aleshores direm que M és un ideal maximal de R .

Proposició 11.3.8. *Sigui M un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $I \neq R$. Aleshores*

$$R/M \text{ és un cos} \iff M \text{ és un ideal maximal de } R.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 11.1.20.

Comencem veient la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que R/M és un cos i prenem un ideal I/M de R/M . Aleshores ha de ser $M \subseteq I \subseteq R$. Per la proposició 11.1.18 tenim que els únics ideals de R/M són $([0])$ i R/M , i per tant ha de ser $I = M$ o $I = R$, i per la definició d'[ideal maximal](#) (11.3.7) tenim que M és un ideal maximal de R .

Veiem ara la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem doncs que M és un ideal maximal de l'anell R i considerem, per la proposició 11.1.20, l'anell

R/M . Per la proposició 11.1.18 tenim que només hem de veure que els únics ideals de R/M són (0) i R . Prenem un ideal I/M de R/M . Aquest ha de ser tal que $M \subseteq I \subseteq R$, i per la definició d'ideal maximal (11.3.7) tenim que ha de ser $I = M$ o $I = R$, i per tant I/M ha de ser $([0])$ o R/M i per la proposició 11.1.20 tenim que R/M és un cos. \square

Corol·lari 11.3.9. M és maximal $\implies M$ és primer.

Teorema 11.3.10. Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$. Aleshores R és un domini d'integritat si i només si $R \setminus \{0\}$ és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot .

Demostració. \square

Proposició 11.3.11. Sigui $I \neq (0)$ un ideal primer d'un domini d'integritat D amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores I és maximal.

Demostració. Posem $I = (a)$. Per hipòtesi tenim que $a \neq 0$ i que I és un ideal primer. Sigui $b \in D$ tal que $(a) \subseteq (b)$. Aleshores tenim que $a \in (b)$, i per la definició d'ideal principal (11.1.16) tenim que $a = a' \cdot b$ per a cert $a' \in D$. Aleshores, per la definició d'ideal primer (11.3.4), tenim que $a' \in (a)$ o $b \in (a)$.

Suposem que $a' \in (a)$. Aleshores tenim que $a' = a \cdot \beta$ per a cert $\beta \in D$, i per tant $a = a \cdot \beta \cdot b$, i per la proposició 11.3.3 tenim que $1 = \beta \cdot b$, i per tant $1 \in (b)$, d'on trobem $(b) = R$. Suposem ara que $b \in I$. Aleshores $(a) = (b)$, i per la definició de ideal maximal (11.3.7) tenim que $I = (a)$ és un ideal maximal de D . \square

11.3.2 Lema de Zorn

Definició 11.3.12 (Relació d'ordre). Sigui A un conjunt no buit i \leq una relació binària en A que satisfaci

1. Reflexiva: $a \leq a$ per a tot $a \in A$.
2. Antisimètrica: $a \leq b$ i $b \leq a$ impliquen $a = b$ per a tot $a, b \in A$.
3. Transitiva: Si $a \leq b$ i $b \leq c$, aleshores $a \leq c$ per a tot $a, b, c \in A$.

Aleshores direm que \leq és una relació d'ordre.

Definició 11.3.13 (Cadena). Sigui \mathcal{C} un conjunt i \leq una relació d'ordre en A tal que per a tot $a, b \in \mathcal{C}$ es satisfà $a \leq b$ o $b \leq a$. Aleshores direm que \mathcal{C} amb \leq és una cadena.

Proposició 11.3.14. Sigui Y i $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ dos conjunts tals que per a tot $A, B \in \mathcal{X}$ tenim $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Aleshores \mathcal{X} amb \subseteq és una cadena.

Demostració. Comprovem que \subseteq satisfà les condicions de la definició de relació d'ordre (11.3.12):

1. Reflexiva: Si $A \in \mathcal{X}$ tenim $A = A$, i en particular $A \subseteq A$.
2. Antisimètrica: Si $A, B \in \mathcal{X}$ tals que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ tenim, per doble inclusió, que $A = B$.

3. Transitiva: Si $A, B, C \in \mathcal{X}$ tals que $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ aleshores $A \subseteq C$.

per tant, per les definicions de [relació d'ordre](#) (11.3.12) i [cadena](#) (11.3.13) tenim que \mathcal{X} amb \subseteq és una cadena. \square

Definició 11.3.15 (Cota superior d'una cadena). Sigui \mathcal{C} amb \leq una cadena, a un element de \mathcal{C} i B un subconjunt de \mathcal{C} tal que per a tot $b \in B$ es compleix $b \leq a$. Aleshores direm que a és una cota superior de B .

Si $a \leq b$ implica $b = a$ per a tot $b \in B$ direm que a és maximal per B .

Axioma 11.3.16 (Lema de Zorn). *Sigui \mathcal{A} amb \leq una cadena tal que per a tot subconjunt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ la cadena \mathcal{C} té alguna cota superior. Aleshores \mathcal{A} té algun element maximal.*

Teorema 11.3.17. *Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot commutatiu amb $1 \neq 0$. Aleshores existeix $M \subseteq R$ tal que M sigui un ideal maximal de R .*

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{I \triangleleft R \mid I \neq R\}.$$

i amb un subconjunt $\mathcal{C} \subseteq A$ considerem, per la proposició 11.3.14, la cadena (\mathcal{C}, \subseteq) . Considerem ara el conjunt

$$J = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$$

i veiem que J és un ideal de R , ja que si $x, y \in J$ tenim $x \in J_1$ i $y \in J_2$ per a certs $J_1, J_2 \in \mathcal{C}$. Ara bé, si $J_2 \subseteq J_1$ tenim que $x - y \in J_1$, i per tant $x - y \in J$, i si $J_1 \subseteq J_2$ tenim que $x - y \in J_2$, i per tant $x - y \in J$. Si prenem $x \in J$ i $r \in R$ aleshores $r \cdot x \in J$, ja que tenim $x \in J_1$ per a cert $J_1 \in \mathcal{C}$, i per tant $r \cdot x \in J_1$, i en particular $r \cdot x \in J$. Per tant per la definició d'[ideal d'un anell](#) (11.1.10) tenim que J és un ideal de R . Per veure que $J \in A$ hem de comprovar que $J \neq R$. Ho fem per contradicció. Suposem que $J = R$. Aleshores $1 \in J$, i per tant $1 \in I$ per a cert $I \in A$, però això no pot ser ja que si $I \in A$ s'ha de complir $I \neq R$, i per tant $1 \notin I$. Per tant $J \neq R$ i tenim que $J \in A$.

Ara bé, pel [Lema de Zorn](#) (11.3.16) tenim que existeix $M \in \mathcal{C}$ tal que per a tot $I \in \mathcal{C}$ tenim $I \subseteq M$ i per la definició d'[ideal maximal](#) (11.3.7) tenim que M és un ideal maximal de $(R, +, \cdot)$. \square

11.3.3 Divisibilitat

Definició 11.3.18 (Divisors i múltiples). Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $a, b \in D$ tals que existeix $c \in D$ tal que $b = a \cdot c$. Aleshores direm que a divideix b o que b és múltiple de a . Ho denotarem amb $a \mid b$.

Observació 11.3.19. $b \mid a \iff (a) \subseteq (b)$.

Proposició 11.3.20. *Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i a, b, c, c' quatre elements, amb $a \neq 0$, $b \neq 0$, tals que $a \mid b$ i $b \mid a$, i $a = c \cdot b$ i $b = c' \cdot a$. Aleshores $c' = c^{-1}$.*

Demostració. Tenim que $b = c' \cdot c \cdot b$, i per la proposició 11.3.3 tenim que $1 = c' \cdot c$, i per la definició d'element invertible (11.1.7) tenim que $c' = c^{-1}$. \square

Proposició 11.3.21. *Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot commutatiu amb $1 \neq 0$ i \sim una relació binària tal que per a tot $x, y \in R$ tenim*

$$x \sim y \implies x = u \cdot y \text{ per a algun } u \in R \text{ invertible.}$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les condicions de la definició de relació d'equivalència (2.3.2):

1. Simètrica: Per a tot $x \in R$ tenim $x = 1 \cdot x$.
2. Reflexiva: Sigui $x, y \in R$ tals que $x \sim y$. Aleshores tenim que existeix $u \in R$ invertible tal que $x = u \cdot y$. Ara bé, com que u és invertible tenim per la definició de element invertible (11.1.7) que $y = u^{-1} \cdot x$, i per tant $y \sim x$.
3. Transitiva: Sigui $x, y, z \in R$ tals que $x \sim y$ i $y \sim z$. Aleshores tenim que $x = u \cdot y$ i $y = u' \cdot z$ per a certs $u, u' \in R$ invertibles, i per tant $x = u \cdot u' \cdot z$, i com que $1 = u \cdot u' \cdot u'^{-1} \cdot u^{-1}$ per la definició de element invertible (11.1.7) tenim que $x \sim z$.

i per la definició de relació d'equivalència (2.3.2) tenim que \sim és una relació d'equivalència. \square

Definició 11.3.22 (Elements associats). Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i $a, b \in R$ dos elements tals que existeix un element invertible $u \in R$ tal que $a = u \cdot b$. Aleshores direm que a i b són associats i escriurem $a \sim b$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 11.3.21.

Proposició 11.3.23. *Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot , a, b dos elements de D i $X \subseteq D$ un conjunt tal que per a tot $d \in X$ tenim $d \mid a$, $d \mid b$ i per a tot $c \in D$ tal que $c \mid a$, $c \mid b$ es compleix $c \mid d$. Aleshores tenim que per a tot $d' \in X$ si i només si $d \sim d'$.*

Demostració. Comencem amb la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem que $d' \in X$. Hem de veure que $d \sim d'$. Tenim $d \mid d'$ i $d' \mid d$ i per la definició de divisor (11.3.18) trobem que $d \sim d'$.

Fem ara la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem que $d' \sim d$. Hem de veure que $d' \in X$. Per hipòtesi tenim que $d \mid a$ i $d \mid b$. Per tant existeixen $\alpha, \beta \in D$ tals que $a = \alpha d$ i $b = \beta d$, i per la proposició 11.3.20 tenim que si $d' = d \cdot u$ amb $u \in D$ invertible aleshores $d = d' \cdot u^{-1}$. Per tant

$$a = \alpha \cdot d' \cdot u^{-1} \quad \text{i} \quad b = \beta \cdot d' \cdot u^{-1}$$

i per tant $d' \mid a$ i $d' \mid b$. Ara bé, com que per hipòtesi $d \sim d'$, per la definició d'elements associats (11.3.22) tenim que $d' \in X$. \square

Definició 11.3.24 (Màxim comú divisor). Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $a, b, d \in D$ tres elements tals que $d \mid a$ i $d \mid b$ i tals que per a tot $c \in D$ que satisfaci $c \mid a$ i $c \mid b$ tenim $c \mid d$. Aleshores direm que d és el màxim comú divisor de a i b . Direm que d és un màxim comú divisor de a i b o que $d \sim \text{mcd}(a, b)$. Entendrem que $\text{mcd}(a, b)$ és un element de D .

Aquesta definició té sentit per la proposició 11.3.23.

Proposició 11.3.25. Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot , a, b dos elements de D i $X \subseteq D$ un conjunt tal que per a tot $m \in X$ tenim $a \mid m$, $b \mid m$ i per a tot $c \in D$ tal que $a \mid c$, $b \mid c$ es compleix $m \mid c$. Aleshores tenim que per a tot $m' \in X$ si i només si $m \sim m'$.

Demostració. Comencem amb la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem que $m' \in X$. Hem de veure que $m \sim m'$. Tenim $m' \mid m$ i $m \mid m'$ i per la definició de múltiple (11.3.18) trobem que $m \sim m'$.

Fem ara la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem que $m' \sim m$. Hem de veure que $m' \in X$. Per hipòtesi tenim que $a \mid m$ i $b \mid m$. Per tant existeixen $\alpha, \beta \in D$ tals que $m = \alpha \cdot a$ i $m = \beta \cdot b$, i per la proposició 11.3.20 tenim que si $m' = u \cdot m$ amb $u \in D$ invertible aleshores $m = m' \cdot u^{-1}$. Per tant

$$m' = \alpha \cdot a \cdot u^{-1} \quad \text{i} \quad m' = \beta \cdot b \cdot u^{-1}$$

i per tant $m' \mid a$ i $m' \mid b$. Ara bé, com que per hipòtesi $m \sim m'$, per la definició d'elements associats (11.3.22) tenim que $m' \in X$. \square

Definició 11.3.26 (Mínim comú múltiple). Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $a, b, m \in D$ tres elements tals que $a \mid m$ i $b \mid m$ i tals que per a tot $c \in D$ que satisfaci $a \mid c$ i $b \mid c$ tenim $m \mid c$. Aleshores direm que m és el mínim comú múltiple de a i b . Direm que m és un mínim comú múltiple de a i b o que $m \sim \text{mcm}(a, b)$. Entendrem que $\text{mcm}(a, b)$ és un element de D .

Aquesta definició té sentit per la proposició 11.3.25.

Proposició 11.3.27. Siguin $(a), (b)$ dos ideals principals d'un domini d'integritat $(D, +, \cdot)$. Aleshores tenim les igualtats

1. $(a) + (b) = (\text{mcd}(a, b))$.
2. $(a) \cap (b) = (\text{mcm}(a, b))$.
3. $(a)(b) = (a \cdot b)$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la proposició 11.1.15 tenim que $(a) + (b) = \{x + y \mid x \in (a), y \in (b)\}$, i per la definició d'ideal principal (11.1.16) això és

$$(a) + (b) = \{r_1 \cdot a + r_2 \cdot b \mid r_1, r_2 \in R\},$$

que podem reescriure com

$$(a) + (b) = \{x \mid \text{existeixen } m, n \in R \text{ tals que } x = n \cdot m + b \cdot n\}$$

i per tant $(a) + (b) = (\text{mcd}(a, b))$ és un ideal principal de R .

Continuem veient el punt (2). Per la proposició 11.1.15 tenim que

$$(a) \cap (b) = \{x \mid x \in (a), x \in (b)\},$$

que, per la definició d'ideal principal (11.1.16), podem reescriure com

$$(a) \cap (b) = \{x \mid x \text{ divideix } a \text{ i } b\}$$

i per tant $(a) \cap (b) = (\text{mcm}(a, b))$ és un ideal principal de R .

Acabem veient el punt (3). Per la proposició 11.1.15 tenim que

$$(a)(b) = \{x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \mid x_1, \dots, x_n \in (a), y_1, \dots, y_n \in (b)\},$$

que, per la definició d'ideal principal (11.1.16) i la proposició 11.1.5, podem reescriure com

$$\begin{aligned} (a)(b) &= \{(r_1 \cdot a)(r'_1 \cdot b) + \cdots + (r_n \cdot a)(r'_n \cdot b) \mid r_1, \dots, r_n, r'_1, \dots, r'_n \in R\} \\ &= \{(r_1 \cdot r'_1 + \cdots + r_n \cdot r'_n) \cdot (a \cdot b) \mid r_1, \dots, r_n, r'_1, \dots, r'_n \in R\}, \end{aligned}$$

i si fixem $r_2 = \dots = r_n = 0$ i $r'_1 = 1$ tenim, amb $r_1 = r$ que

$$(a)(b) = \{r \cdot (a \cdot b) \mid r \in R\},$$

i per la definició d'ideal principal (11.1.16) tenim que $(a)(b)$ és un ideal principal de R amb

$$(a)(b) = (a \cdot b). \quad \square$$

Definició 11.3.28 (Primer). Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot , $p \neq 0$ un element de D tal que per a tot a, b dos elements de D que satisfacin $p \mid a \cdot b$ tenim $p \mid a$ ó $p \mid b$. Aleshores direm que p és primer.

Observació 11.3.29. $a \neq 0$, (a) és un ideal primer si i només si a és primer.

Definició 11.3.30 (Element irreductible). Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot , $a \neq 0$ un element no invertible de D i b, c dos elements de D tals que $a = b \cdot c$. Aleshores direm que a és irreductible si b ó c són invertibles.

Proposició 11.3.31. Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i p un element primer de D . Aleshores p és irreductible.

Demostració. Suposem que a, b són dos elements de D tals que $p = a \cdot b$. Per la definició de primer (11.3.28) tenim que ha de ser $p \mid a$ ó $p \mid b$. Si $p \mid a$ tenim que $a = \alpha \cdot p$ per a cert $\alpha \in D$. Ara bé, per hipòtesi, tenim que $p = a \cdot b$. Per tant $a = \alpha \cdot a \cdot b$, i per la proposició 11.3.3 tenim que $1 = \alpha \cdot b$, i per la definició d'element invertible (11.1.7) tenim que b és invertible i per la definició d'irreductible (11.3.30) tenim que p és irreductible.

El cas $p \mid b$ és anàleg. \square

11.3.4 Dominis de factorització única

Definició 11.3.32 (Domini de factorització única). Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot tal que per a tot element no invertible $a \neq 0$ de D

1. Existeixen p_1, \dots, p_n elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

2. Si existeixen p_1, \dots, p_r i q_1, \dots, q_s elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

aleshores $r = s$ i existeix $\sigma \in S_r$ tal que

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot q_{\sigma(r)},$$

amb $p_i \sim q_{\sigma(i)}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$.

Aleshores direm que D és un domini de factorització única.

Teorema 11.3.33. *Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores D és un domini de factorització única si i només si tenim*

1. *Per a tot $a \neq 0$ element no invertible de D existeixen p_1, \dots, p_r elements irreductibles de D tals que*

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

2. *Si a és un element irreductible de D aleshores a és primer.*

Demostració. Comencem demostrant que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que D és un domini de factorització única. El punt (1) és conseqüència de la definició de [domini de factorització única \(11.3.32\)](#). Per tant només ens queda veure que tot element irreductible és primer. Sigui p un element irreductible de D i a, b dos elements no invertibles no nuls de D tals que $p \mid a \cdot b$. Per la definició de [domini de factorització única \(11.3.32\)](#) tenim que existeixen $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \quad \text{i} \quad b = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

i per tant

$$a \cdot b = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

i com que, per hipòtesi, $p \mid a \cdot b$ i la definició de [domini de factorització única \(11.3.32\)](#) tenim que

$$a \cdot b = p \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_t$$

per a certs $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ elements irreductibles de D . Per tant tenim

$$a \cdot b = p \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_t = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

i, de nou, per la definició de [domini de factorització única \(11.3.32\)](#) tenim que $p \sim p_i$ ó $p \sim q_j$ per a certs $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, i per tant $p \mid a$ ó $p \mid b$, i per la definició de [primer \(11.3.28\)](#) tenim que p és primer.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que

1. Per a tot a element no invertible de D existeixen p_1, \dots, p_r elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

2. Si a és in element irreductible de D aleshores a és primer.

Sigui a un element no invertible de D . Pel punt (1) tenim que existeixen p_1, \dots, p_r elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r.$$

Suposem que existeixen també q_1, \dots, q_s elements irreductibles de D tals que

$$a = q_1 \cdot \dots \cdot q_s.$$

Aleshores volem veure que $r = s$ i que existeix $\sigma \in S_r$ tal que

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot q_{\sigma(r)},$$

amb $p_i \sim q_{\sigma(i)}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$.

Tenim que $p_1 \mid a$, i com que pel punt (2) tenim que p_1 és primer, per la definició de [primer](#) (11.3.28) tenim que $p_1 \mid q_j$ per a cert $j \in \{1, \dots, s\}$, i per la definició de [irreductible](#) (11.3.30) i la definició d'[elements associats](#) (11.3.22) tenim que $p_1 \sim q_j$. Sigui doncs $\sigma \in S_s$ tal que $p_1 \mid q_{\sigma(1)}$. Aleshores tenim

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = u_1 \cdot q_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot q_s$$

per a cert u_1 element invertible de D . Podem iterar aquest argument per a p_2, \dots, p_t , on $t = \min(r, s)$ per obtenir

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_t \cdot p_{t+1} \cdot \dots \cdot p_r = (u_1 \cdot q_1) \cdot \dots \cdot (u_t \cdot q_t) \cdot p_{t+1} \cdot \dots \cdot p_s$$

per a certs u_1, \dots, u_t elements invertibles de D . Ara bé, tenim que $r = s$, ja que si $r > s$ tindríem que p_{s+1}, \dots, p_r són invertibles, i si $s > r$ tindríem que q_{r+1}, \dots, q_s són invertibles, però per la definició d'[irreductible](#) (11.3.30) i la definició de [element invertible](#) (11.1.7) tenim que això no pot ser, i per tant $r = s$ i per la definició de [domini de factorització única](#) (11.3.32) tenim que D és un domini de factorització única, com volíem veure. \square

Proposició 11.3.34. *Sigui D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot i a, b dos elements no invertibles i no nuls de D tals que existeixen p_1, \dots, p_r tals que*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad i \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$$

per a certs $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}$. Aleshores

$$\prod_{i=1}^r p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \sim \text{mcd}(a, b) \quad i \quad \prod_{i=1}^r p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} \sim \text{mcm}(a, b).$$

Demostració. Denotem $d = \prod_{i=1}^r p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ i $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

Prenem c un element de D tal que $c \mid a$ i $c \mid b$. Aleshores tenim que

$$c = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$$

per a certs $\gamma_i \leq \min(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$. Ara bé, com que $\gamma_i \leq \min(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$, i per tant $d \mid c$, i per la definició de [màxim comú divisor](#) (11.3.24) tenim que $d \sim \text{mcd}(a, b)$.

Prenem ara c un element de D tal que $a \mid c$ i $b \mid c$. Aleshores tenim que

$$c = q \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$$

per a cert q element de D i certs $\gamma_i \geq \max(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$. Ara bé, com que $\gamma_i \geq \max(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$, i per tant $m \mid c$, i per la definició de [mínim comú múltiple](#) (11.3.26) tenim que $m \sim \text{mcm}(a, b)$. \square

11.3.5 Anells Noetherians

Definició 11.3.35 (Anell Noetherià). Sigui N un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ tal que si

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

són ideals de N existeix n_0 tal que per a tot $i \geq n_0$ tenim $I_i = I_{i+1}$. Aleshores diem que N és Noetherià.

Observació 11.3.36. $(\{I_1, I_2, I_3, \dots\}, \subseteq)$ és una cadena.

Lema 11.3.37. *Siguin N un domini d'integritat Noetherià amb la suma $+$ i el producte \cdot i $a \neq 0$ un element no invertible de N . Aleshores existeixen p_1, \dots, p_n elements irreductibles de N tals que*

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Demostració. Ho farem per reducció a l'absurd. Definim el conjunt

$$X = \{a \in N \text{ invertible} \mid a \neq p_1 \cdot \dots \cdot p_n \text{ per a } p_1, \dots, p_n \in N \text{ irreductibles}\}.$$

Volem veure que $X = \emptyset$. Suposem doncs que $X \neq \emptyset$ i prenem $a_1 \in X$. Per la definició d'[irreductible](#) (11.3.30) tenim que a_1 no és irreductible, i per tant existeixen $b_1, c_1 \in N$ no invertibles tals que

$$a_1 = b_1 \cdot c_1$$

i ha de ser $b_1 \in X$ o $c_1 \in X$.

Suposem que $b_1 \in X$, la demostració de l'altre opció és anàloga. Aleshores tenim, per l'observació 11.3.19, que $(a) \subset (b)$. Ara bé, també tindriem que $b_1 = b_2 \cdot c_2$ per a certs b_2, c_2 elements no invertibles de N amb $b_2 \in X$ o $c_2 \in X$, i podem iterar aquest argument per construir

$$(a_1) \subset (b_1) \subset (b_2) \subset (b_3) \subset \dots$$

però això entra en contradicció amb la definició de [anell Noetherià](#) (11.3.35), i per tant $X = \emptyset$, com volíem veure. \square

11.3.6 Dominis d'ideals principals

Definició 11.3.38 (Domini d'ideals principals). Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot tal que tot ideal de D és un ideal principal. Aleshores direm que D és un domini d'ideals principals.

Proposició 11.3.39. *Sigui D un domini d'ideals principals amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores un element $a \in D$ és irreductible si i només si (a) és un ideal maximal.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\Leftarrow). Suposem doncs que a és un element irreductible de D i prenem $b \in D$ tal que $(a) \subseteq (b) \neq D$. Aleshores, per l'observació 11.3.19 tenim que $b \mid a$, és a dir, existeix $r \in D$ tal que $a = b \cdot r$, i per la definició d'irreductible (11.3.30) tenim que r ó b són invertibles. Ara bé, com que, per hipòtesi, $(b) \neq D$ tenim que b no és invertible, per tant ha de ser r invertible per la definició d'element invertible (11.1.7) tenim que $a \cdot r^{-1} = b$, per l'observació 11.3.19 tenim que $(a) = (b)$, i per la definició d'ideal maximal (11.3.7) tenim que (a) és un ideal maximal.

Tenim que la condició és necessària (\Rightarrow) per la proposició 11.3.11. \square

Proposició 11.3.40. *Sigui D un domini d'ideals principals amb la suma $+$ i el producte \cdot i a un element irreductible de D . Aleshores a és primer.*

Demostració. Per la proposició 11.3.39 tenim que (a) és maximal, pel corol·lari 11.3.9 veiem que (a) és primer, i per l'observació 11.3.29 trobem que a és primer, com volíem veure. \square

Teorema 11.3.41. *Sigui D un domini d'ideals principals amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores D és Noetherià.*

Demostració. Sigui I_1, \dots, I_i, \dots ideals de D tals que

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

i

$$\mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

Aleshores tenim que \mathcal{I} és un ideal. També veiem que si $x \in \mathcal{I}$ existeix n tal que $x \in I_n$, i per la definició d'ideal d'un anell (11.1.10) tenim que si $y \in D$ aleshores $x \cdot y \in I_n$.

Ara bé, com que per hipòtesi D és un domini d'ideals principals tenim, per la definició de domini d'ideals principals (11.3.38) que existeix $a \in D$ tal que $\mathcal{I} = (a)$, i per tant existeix n tal que $a \in I_n$, i trobem que

$$\mathcal{I} = (a) \subseteq I_n \subseteq I_{n+k} \subseteq \mathcal{I}$$

per a tot $k \in \mathbb{N}$, i per tant $I_n = I_{n+k}$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, i per la definició de anell Noetherià (11.3.35) trobem que D és un anell Noetherià. \square

Teorema 11.3.42. *Sigui D un domini d'ideals principals amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores D és un domini de factorització única.*

Demostració. Pel Teorema 11.3.41 tenim que D és un anell Noetherià, i pel lema 11.3.37 tenim que per a tot element no irreductible a de D existeixen p_1, \dots, p_n elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

També tenim, per la proposició 11.3.40 que si a és un element irreductible de D aleshores a és primer.

Per acabar, pel Teorema 11.3.33 tenim que D és un domini de factorització única. \square

11.3.7 Dominis Euclidiàns

Definició 11.3.43 (Domini Euclidià). Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $U : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicació tal que

1. $U(x) \leq U(x \cdot y)$ per a tot $x, y \in D \setminus \{0\}$.
2. Per a tot $x, y \in D$, $y \neq 0$ existeixen $Q, r \in D$ tals que $x = Q \cdot y + r$, amb $r = 0$ ó $U(r) < U(y)$.

Aleshores direm que D és un domini Euclidià amb la norma U .

Proposició 11.3.44. *Sigui D un domini Euclidià amb la suma $+$ i el producte \cdot amb la norma U . Aleshores*

$$U(1) \leq U(x) \quad \text{per a tot } x \in D \setminus \{0\}.$$

Demostració. Per la definició de domini Euclidià (11.3.43) tenim que $U(x) \leq U(x \cdot y)$ per a tot $x, y \in D \setminus \{0\}$. Per tant

$$U(1) \leq U(1 \cdot x) = U(x) \quad \text{per a tot } x \in D \setminus \{0\}. \quad \square$$

Proposició 11.3.45. *Sigui D un domini Euclidià amb la suma $+$ i el producte \cdot amb la norma U . Aleshores*

$$U(u) = U(1) \iff u \text{ és un element invertible de } D.$$

Demostració. Comencem veient l'implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que u és un element invertible de D .

Per la proposició 11.3.44 tenim que $U(1) \leq U(u)$ i que $U(u) \leq U(u \cdot u^{-1})$. Ara bé, per la definició de l'invers d'un element invertible (11.1.8) tenim que $u \cdot u^{-1} = 1$, i per tant

$$U(1) \leq U(u) \leq U(u \cdot u^{-1}) = U(1),$$

i trobem $U(u) = U(1)$.

Veiem ara l'implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem que $U(u) = U(1)$.

Per la definició de domini Euclidià (11.3.43) tenim que existeixen Q, r elements de D tals que

$$1 = Q \cdot u + r$$

amb $r = 0$ ó $U(r) < U(u)$. Ara bé, per hipòtesi $U(u) = U(1)$, i per la proposició 11.3.44 trobem que ha de ser $r = 0$. Per tant tenim

$$1 = Q \cdot u$$

i per la definició d'element invertible (11.1.7) trobem que u és invertible. \square

Teorema 11.3.46. *Sigui D un domini Euclidià amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $(D, +, \cdot)$ és un domini d'ideals principals.*

Demostració. Siguin U una norma de D i I un ideal de D . Si $I = \{0\}$ aleshores $I = (0)$. Suposem doncs que $I \neq (0)$ i prenem $b \in I$ tal que $U(b) \leq U(x)$ per a tot $x \in I$, $x \neq 0$.

Prenem ara $a \in I$. Per la definició de **domini Euclidià (11.3.43)** tenim que existeixen $Q, r \in D$ tals que

$$a = Q \cdot b + r$$

amb $r = 0$ ó $U(r) < U(b)$. I com que, per la definició de **anell (11.1.1)** tenim que $(D, +)$ és un grup tenim

$$r = a - Q \cdot b,$$

i per la proposició **11.1.13** tenim que

$$r = a - Q \cdot b \in I$$

i per tant, $r \in I$ amb $r = 0$ ó $U(r) < U(b)$. Ara bé, per hipòtesi tenim que $U(r) \geq U(b)$, per tant ha de ser $r = 0$ i tenim que

$$a = Q \cdot b,$$

d'on trobem que I és un ideal principal, i per la definició de **domini d'ideals principals (11.3.38)** tenim que D és un domini d'ideals principals. \square

Teorema 11.3.47. *Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores \mathbb{K} és un domini Euclidià.*

Demostració. \square

11.4 Anells de polinomis

11.4.1 Cos de fraccions d'un domini d'integritat

Proposició 11.4.1. *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i \sim definida a $D \times D \setminus \{0\}$ una relació binària tal que per a tot $a, c \in D$, $b, d \in D \setminus \{0\}$*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. \square

Notació 11.4.2. Denotarem el conjunt quocient $D \times D \setminus \{0\} / \sim$ com $\mathbb{Q}(D)$ i la classe d'equivalència $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Q}(D)$ com $\frac{a}{b}$.

Lema 11.4.3. *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $\mathbb{Q}(D)$ és un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ amb les operacions*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \quad i \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \quad \text{per a tot } a, c \in D, b, d \in D \setminus \{0\}.$$

Demostració. □

Teorema 11.4.4. *Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $\mathbb{Q}(D)$ és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot .*

Demostració. □

Teorema 11.4.5 (Unicitat de $\mathbb{Q}(D)$). *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $\mathbb{Q}_1(D)$ i $\mathbb{Q}_2(D)$ dos cossos amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores*

$$\mathbb{Q}_1(D) \cong \mathbb{Q}_2(D)$$

Demostració. □

Definició 11.4.6 (Cos de fraccions). *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores direm que $\mathbb{Q}(D)$ és el cos de fraccions de D .*

11.4.2 El Teorema de Gauss

Proposició 11.4.7. *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i*

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in R\}$$

un conjunt. Aleshores $R[x]$ és un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot .

Demostració. □

Observació 11.4.8. $1_R = 1_{R[x]}$, $0_R = 0_{R[x]}$.

Observació 11.4.9. *Si R és un anell commutatiu aleshores $R[x]$ també és un anell commutatiu.*

Definició 11.4.10 (Anell de polinomis). *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i*

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in R\}.$$

Aleshores direm que l'anell $R[x]$ és l'anell de polinomis de R .

Aquesta definició té sentit per la proposició 11.4.7.

Observació 11.4.11. $D \subseteq D[x]$.

Teorema 11.4.12 (Teorema de la base de Hilbert). *Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot Noetherià. Aleshores l'anell de fraccions de R , $R[x]$ és un anell Noetherià.*

Demostració. □

Definició 11.4.13 (Contingut d'un polinomi). *Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ un element de $D[x]$. Aleshores definim*

$$\text{cont}(f) \sim \text{mcd}(a_0, \dots, a_n)$$

com el contingut de f .

Interpretarem $\text{cont}(f(x))$ com un element de D .

Definició 11.4.14 (Polinomi primitiu). Sigui D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un element de $D[x]$ tal que

$$\text{cont}(f(x)) \sim 1.$$

Aleshores direm que $f(x)$ és un polinomi primitiu.

Lema 11.4.15 (Lema de Gauss). Sigui D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x), g(x)$ dos polinomis primitius de $D[x]$. Aleshores $f(x) \cdot g(x)$ és un polinomi primitiu.

Demostració. □

Corol·lari 11.4.16. Sigui D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x), g(x)$ dos elements de $D[x]$. Aleshores

$$\text{cont}(f(x) \cdot g(x)) \sim \text{cont}(f(x)) \cdot \text{cont}(g(x)).$$

Demostració. □

Lema 11.4.17. Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i p un element irreductible de D . Aleshores tenim que p és un element irreductible de $D[x]$.

Demostració. □

Teorema 11.4.18. Sigui D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de $D[x]$. Aleshores $\text{grau}(f(x)) \geq 1$ i $f(x)$ és un polinomi irreductible de $D[x]$ si i només si $\text{cont}(f(x)) \sim 1$ i $f(x)$ és irreductible en $\mathbb{Q}(D)[x]$.

Demostració. □

Teorema 11.4.19 (Teorema de Gauss). Sigui D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $D[x]$ és un domini de factorització única.

Demostració. □

Teorema 11.4.20. Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores són equivalents

1. D és un domini de factorització única.
2. $D[x]$ és un domini de factorització única.
3. $D[x_1, \dots, x_n]$ és un domini de factorització única.

Demostració. □

11.4.3 Criteris d'irreductibilitat

Definició 11.4.21 (Arrel). Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$, $f(x)$ un element de $R[x]$ i α un element de R tal que $f(\alpha) = 0$. Aleshores direm que α és una arrel de $f(x)$.

Proposició 11.4.22. Siguin \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un element de $\mathbb{K}[x]$. Aleshores

1. Si $\text{grau}(f(x)) = 1$ aleshores $f(x)$ és irreductible.
2. Si $\text{grau}(f(x)) = 2$ ó 3 aleshores $f(x)$ és irreductible si i nomé si $f(x)$ no té cap arrel.

Demostració. □

Proposició 11.4.23. Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ un polinomi de $D[x]$ i $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}(D)$ una arrel de $f(x)$ amb $\text{mcd}(a, b) \sim 1$. Aleshores tenim que $a \mid a_0$ ó $b \mid a_n$.

Demostració. □

Teorema 11.4.24 (Criteri modular). Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ un polinomi primitiu de $D[x]$ i p un element irreductible de D amb $p \nmid a_n$ tals que

$$\overline{f(x)} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{x} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{x}^n$$

sigui un polinomi irreductible de $D/(p)[x]$. Aleshores $f(x)$ és un polinomi irreductible de $D[x]$.

Demostració. □

Teorema 11.4.25 (Criteri d'Eisenstein). Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ un polinomi primitiu de $D[x]$ amb $n \geq 1$ i p un element irreductible de D tal que $p \mid a_0, \dots, p \mid a_{n-1}$ i $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$. Aleshores $f(x)$ és un polinomi irreductible de $D[x]$.

Demostració. □

Corollari 11.4.26. Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ un polinomi de $D[x]$ amb $n \geq 1$ i p un element irreductible de D tal que $p \mid a_0, \dots, p \mid a_{n-1}$ i $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$. Aleshores $f(x)$ és un polinomi irreductible de $\mathbb{Q}(D)[x]$.

Demostració. □

Capítol 12

Teoria de cossos finits

12.1 Cossos finits

12.1.1 Propietats bàsiques dels cossos finits

Proposició 12.1.1. *Siguin \mathbb{K} i \mathbb{E} dos cossos amb la suma $+$ i el producte \cdot tals que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$. Aleshores \mathbb{E} és un \mathbb{K} -espai vectorial.*

Demostració. □

Definició 12.1.2 (Cos finit). *Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot tal que $|\mathbb{K}| \in \mathbb{N}$. Aleshores direm que \mathbb{K} és un cos finit.*

Observació 12.1.3. *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $\text{ch}(\mathbb{K})$ és primer.*

Teorema 12.1.4. *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores*

$$\text{ch}(\mathbb{K}) = p \iff |\mathbb{K}| = p^n \text{ per a cert } n \in \mathbb{N}.$$

Demostració. □

Corol·lari 12.1.5. *Siguin \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot i \mathbb{F} un subcòs de \mathbb{K} amb $|\mathbb{K}| = p^n$. Aleshores $|\mathbb{F}| = p^d$ amb $d \mid n$.*

Demostració. □

Teorema 12.1.6 (Teorema de l'element primitiu). *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ és un grup cíclic amb el producte \cdot .*

Demostració. □

Definició 12.1.7 (Element primitiu). *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot i β un element de \mathbb{K} tal que $\langle \beta \rangle = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Aleshores direm que β és un element primitiu de \mathbb{K} .*

Aquesta definició té sentit pel [Teorema de l'element primitiu \(12.1.6\)](#).

Teorema 12.1.8. *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $|\mathbb{K}| = p$. Aleshores existeix un polinomi irreductible $f(x)$ en $\mathbb{Z}/(p)[x]$ tal que*

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{Z}/(p)[x]/(f(x)).$$

Demostració. □

12.1.2 Arrels d'un polinomi

Definició 12.1.9 (Descomposició d'un polinomi). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de \mathbb{K} tal que existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ satisfent $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$. Aleshores direm que $f(x)$ descompon en \mathbb{K} .

Teorema 12.1.10 (Teorema de Kronecker). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$. Aleshores existeix un cos \mathbb{L} , amb $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, tal que $f(x)$ descompon en \mathbb{L} .

Demostració. □

Definició 12.1.11 (Cos de descomposició). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x)$ un polinomi de \mathbb{K} i \mathbb{L} el mínim cos on $f(x)$ descompon amb $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$, amb $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{L}$. Aleshores direm que \mathbb{L} és el cos descomposició de $f(x)$. Denotarem $\mathbb{L} = \mathbb{K}(f(x))$.

Aquesta definició té sentit pel [Teorema de Kronecker](#) (12.1.10).

Definició 12.1.12 (Derivada formal). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ un polinomi de \mathbb{K} . Aleshores definim la derivada formal de $f(x)$ com

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1}.$$

Proposició 12.1.13. Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$, $g(x)$ dos polinomis de \mathbb{K} . Aleshores es compleix

1. $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ per a tot $a \in \mathbb{K}$.
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $(f(x)^n)' = n \cdot f(x)^{n-1}$.

Demostració. □

Proposició 12.1.14. Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $\text{ch}(\mathbb{K}) = 0$ i $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ un polinomi de \mathbb{K} amb $n \geq 1$. Aleshores $n \cdot a_n \neq 0$ i $f'(x) \neq 0$.

Demostració. □

Proposició 12.1.15. Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $\text{ch}(\mathbb{K}) = p$ no nul i $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ un polinomi de \mathbb{K} amb $n \geq 1$. Aleshores

$$f'(x) \neq 0 \iff p \mid i \text{ per a tot } i \geq 1 \text{ tal que } a_i \neq 0.$$

Demostració. □

Definició 12.1.16 (Arrels múltiples). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$, α una arrel de $f(x)$ i $g(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}(f(x))$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x)$$

amb $m \geq 2$. Aleshores direm que α és una arrel múltiple de $f(x)$.

Proposició 12.1.17. Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$. Aleshores α és una arrel múltiple de $f(x)$ si i només si α és una arrel de $f'(x)$.

Demostració. □

Corol·lari 12.1.18. Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) \geq 1$. Aleshores $\text{mcd}(f(x), f'(x)) = 1$ si i només si $f(x)$ no té arrels múltiples.

Demostració. □

12.2 Caracterització dels cossos finits i els seus subcossos

12.2.1 Teoremes d'existència i unicitat dels cossos finits

Teorema 12.2.1 (Teorema d'existència dels cossos finits). Sigui p un primer i n un natural. Aleshores existeix un cos \mathbb{K} amb la suma $+$ i el producte \cdot tal que $|\mathbb{K}| = p^n$.

Demostració. □

Corol·lari 12.2.2. Sigui p un primer i n un natural. Aleshores existeix un polinomi $f(x)$ de $\mathbb{Z}/(p)[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) = n$.

Demostració. □

Lema 12.2.3. Sigui n, d dos naturals tal que $d \mid n$, p un primer i $f(x)$ un polinomi irreductible de $\mathbb{Z}/(p)[x]$. Aleshores $f(x) \mid (x^{p^n} - x)$.

Demostració. □

Teorema 12.2.4 (Teorema d'unicitat dels cossos finits). Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+\mathbb{K}$ i el producte $*\mathbb{K}$ i \mathbb{F} un cos finit amb la suma $+\mathbb{F}$ i el producte $*\mathbb{F}$ amb $|\mathbb{K}| = |\mathbb{F}| = p^n$. Aleshores

$$(\mathbb{K}, +\mathbb{K}, *\mathbb{K}) \cong (\mathbb{F}, +\mathbb{F}, *\mathbb{F}).$$

Demostració. □

Teorema 12.2.5 (Teorema d'existència dels subcossos finits). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $|\mathbb{K}| = p^n$ i d un natural tal que $d \mid n$. Aleshores existeix un $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ amb $|\mathbb{L}| = p^d$ tal que \mathbb{L} és un subcòs de \mathbb{K} .

Demostració. □

Teorema 12.2.6 (Teorema d'unicitat dels subcossos finits). *Siguin \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $|\mathbb{K}| = p^n$, d un natural tal que $d \mid n$ i $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ dos subcossos de \mathbb{K} amb $|\mathbb{L}_1| = |\mathbb{L}_2| = p^d$. Aleshores $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.*

Demostració. □

Notació 12.2.7. Denotarem el cos de p^n elements com \mathbb{F}_{p^n} .

12.2.2 El morfisme de Frobenius

Teorema 12.2.8. *Siguin n un natural, p un primer i*

$$\mathcal{F} = \{f(x) \in \mathbb{Z}/(p)[x] \mid f(x) \text{ és un polinomi m\acute{o}nic irreductible de grau } d \mid n\}.$$

Aleshores

$$x^{p^n} - x = \prod_{f(x) \in \mathcal{F}} f(x).$$

Demostració. □

Proposició 12.2.9 (Morfisme de Frobenius). *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $\text{ch}(\mathbb{K}) = p$. Aleshores l'aplicació*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto a^p \end{aligned}$$

és un automorfisme.

Demostració. □

Teorema 12.2.10. *Siguin p un primer, $f(x)$ un polinomi irreductible de l'anell de polinomis $\mathbb{Z}/(p)[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) = n$ i α una arrel de $f(x)$ en $\mathbb{K}(p(x))$. Aleshores les arrels de $f(x)$ són $\alpha, \alpha^{p^2}, \alpha^{p^3}, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ i $\alpha^{p^n} = \alpha$.*

Demostració. □

Teorema 12.2.11. *Siguin p un primer, $f(x)$ un polinomi irreductible de l'anell de polinomis $\mathbb{Z}/(p)[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) = n$ i α una arrel de $f(x)$ en $\mathbb{K}(p(x))$. Aleshores les arrels de $f(x)$ són $\alpha, \alpha^{p^2}, \alpha^{p^3}, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ i $\alpha^{p^i} \neq \alpha^{p^j}$ per a tot $i \neq j$, $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Demostració. □

Bibliografia

- [1] José Dorronsoro i Eugenio Hernández. *Números, grupos y anillos*. Castellà. Addison-Wesley, 1996. ISBN: 9788478290093.
- [2] Ramon Antoine, Rosa Camps i Jaume Moncasi. *Introducció a l'àlgebra abstracta. Amb elements de matemàtica discreta*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2007. ISBN: 978-84-490-2515-0.
- [3] Ferran Cedó Giné i Vladimir Gisin. *Àlgebra bàsica*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2007. ISBN: 978-84-490-2495-5.
- [4] Paul Moritz Cohn. *Basic Algebra. Groups, Rings and Fields*. Anglès. Springer, 2003. ISBN: 978-0-85729-428-9.
- [5] Félix Delgado De La Mata, Concepción Fuertes Fraile i Sebastian Xambó Descamps. *Introducción Al Álgebra. Anillos, Factorización Y Teoría De Cuerpos*. Castellà. Ediciones Universidad de Valladolid, 1998. ISBN: 978-8477628668.
- [6] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Anglès. Addison-wesley, 1982. ISBN: 978-0201020847.
- [7] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Anglès. Addison-wesley, 1974. ISBN: 978-0201020847.

El capítol de teoria de grups està molt ben explicat en [1], i la teoria de cossos finits està complementada amb [2] sobre la teoria de classe.

La bibliografia del curs inclou els textos [2, 3, 4, 1, 5, 6, 7].

Part VII

Mètodes numèrics

Capítol 13

Interpolació numèrica

Sovint podem mesurar un procés físic com un número de punts (per exemple, la temperatura d'una habitació en diferents instants de temps), però no tenim una expressió analítica per aquest procés que ens permeti calcular el seu valor en un punt arbitrari. L'interpolació ens proporciona un mètode simple per estimar aquesta expressió analítica en el rang dels punts mesurats¹.

13.1 El problema d'interpolació

13.1.1 Problemes d'interpolació

Definició 13.1.1 (Problema d'interpolació). Siguin

$$\Phi(x; a_1, \dots, a_n): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

una família de funcions que depenen dels paràmetres reals a_0, \dots, a_n , una família $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ de n punts. Direm que el problema d'interpolació de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ per $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$ consisteix a determinar a_0, \dots, a_n tals que

$$\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = y_i \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, n\}.$$

També direm que $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ són els punts de suport, $\{x_i\}_{i=0}^n$ són les abscisses de suport i $\{y_i\}_{i=0}^n$ les ordenades de suport.

Direm que un problema d'interpolació de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ per $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$ és un problema d'interpolació lineal si existeixen $\Phi_0, \dots, \Phi_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0\Phi_0(x) + \dots + a_n\Phi_n(x).$$

Exemple 13.1.2. *Exemples de problemes d'interpolació lineal són problemes com la interpolació polinòmica:*

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n;$$

o la interpolació trigonomètrica:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1e^{x^i} + \dots + a_ne^{nx^i}.$$

¹Si el punt que avaluem es troba fora del rang aquest problema s'anomena extrapolació i sol ser menys precís que la interpolació.

Mentre que exemples de problemes d'interpolació no lineals són problemes com la interpolació racional:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m};$$

o la interpolació exponencial:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n, \lambda_0, \dots, \lambda_n) = a_0e^{\lambda_0x} + \dots + a_ne^{\lambda_nx}.$$

La interpolació trigonomètrica es fa servir en l'anàlisi numèric de les sèries de Fourier, la interpolació exponencial és útil en l'anàlisi de desintegració radioactiva.

13.2 Polinomis interpoladors de Lagrange

13.2.1 Interpolació de Lagrange

Definició 13.2.1 (Problema d'interpolació de Lagrange). Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació per $P(x; a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $x_i \neq x_j$ per a tot $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$, amb $i \neq j$. Aleshores direm que el problema d'interpolació és un problema d'interpolació de Lagrange.

Definició 13.2.2 (Polinomis bàsics de Lagrange). Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x; a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_n[x]$ on, per a cert $k \in \{0, \dots, n\}$ fix tenim que $y_k = 1$ i per a tot $i \in I = \{0, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ tenim $y_i = 0$. Aleshores direm que els polinomis

$$L_k(x) = \prod_{i \in I} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

són polinomis bàsics de Lagrange.

Observació 13.2.3.

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Proposició 13.2.4. Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$. Aleshores la funció $P(x)$ que satisfà

$$P(x_i) = y_i$$

per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$ és única.

Demostració. Per l'observació 13.2.3 veiem que una solució a aquest problema d'interpolació és

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x).$$

Per veure'n la unicitat suposem que existeix un altre $Q(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ tal que

$$P(x_i) = Q(x_i) = y_i$$

per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Això és equivalent a que

$$P(x_i) - Q(x_i) = 0$$

per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Ara bé, tenim que x_0, \dots, x_n són arrels diferents de $P(x) - Q(x)$ per la definició de [problema d'interpolació de Lagrange \(13.2.1\)](#). Com que $P(x) - Q(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$, aquests són els seus únics zeros, i pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra tenim que ha de ser $P(x) = Q(x)$. \square

Proposició 13.2.5. *Siguin $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un conjunt de punts de suport, $I = \{i_0, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ un conjunt i $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$ un problema d'interpolació per $P_{i_0, \dots, i_k} \in \mathbb{R}_k[x]$, on*

$$P_{i_0, \dots, i_k}(x_{i_j}) = y_{i_j} \quad \text{per a tot } j \in \{0, \dots, k\}.$$

Aleshores

$$P_i(x) = y_i$$

i

$$P_{i_0, \dots, i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Demostració. Fixem $k = 1$. Aleshores tenim

$$P_i(x) = y_i.$$

Veiem la segona part. Definim

$$G(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

tenim $G = P_{i_0, \dots, i_k}$ per la proposició [13.2.4](#), i per tant

$$G(x_{i_0}) = P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x_{i_0}) = y_{i_0}$$

i

$$G(x_{i_k}) = P_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_k}) = y_{i_k},$$

i per tant

$$G(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})y_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})y_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = y_{i_j}$$

per a tot $j \in \{1, \dots, k-1\}$, com volíem veure. \square

Observació 13.2.6 (Algorisme de Neville). *Aquest mètode recurrent es pot organitzar en una taula com*

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
x_0	$y_0 = P_0(x)$		
x_1	$y_1 = P_1(x)$	$P_{0,1}(x)$	
x_2	$y_2 = P_2(x)$	$P_{1,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$
\vdots	\vdots		

que s'omple de columna a columna de dreta a esquerra. Es coneix com a algorisme de Neville.

Exemple 13.2.7. Sigui $\{(0, 1), (1, 3), (3, 2)\}$ un problema d'interpolació per $P_{0,1,2}(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Volem avaluar el polinomi interpolador de Lagrange en $x = 2$, és a dir, volem trobar $P_{0,1,2}(2)$.

Solució. La taula de l'algoritme de Neville plantejada en l'observació [algorisme de Neville \(13.2.6\)](#) per aquest problema és

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$x_0 = 0$	$y_0 = P_0(2) = 1$		
		$P_{0,1}(2) = 5$	
$x_1 = 1$	$y_1 = P_1(2) = 3$		$P_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}$
		$P_{1,2}(2) = \frac{5}{2}$	
$x_2 = 3$	$y_2 = P_2(2) = 2$		

i per tant trobem $P_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}$.

◇

13.2.2 Mètode de les diferències dividides de Newton

El mètode de Neville és útil per avaluar un polinomi interpolador en un punt una vegada, però si es vol obtenir l'expressió general del polinomi interpolador per poder avaluar-lo múltiples vegades en diferents punts s'hauran d'emparar altres solucions.

Definició 13.2.8 (Diferències dividides). Sigui $P(x; a_0, \dots, a_n)$ el polinomi interpolador de Lagrange amb els punts de suport $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. Aleshores direm que

$$[x_0, \dots, x_k] = a_k$$

és la diferència dividida d'ordre n del problema d'interpolació de Lagrange de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^k$ per $P(x; a_0, \dots, a_k)$.

Aquesta definició té sentit per la proposició [13.2.4](#).

Proposició 13.2.9. Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$. Aleshores

$$P(x) = [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^n \left([x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right).$$

Demostració. Denotem per $P_{1,\dots,k} \in \mathbb{K}_{k+1}[x]$ el polinomi que satisfà

$$P_{0,\dots,k}(x_j) = y_j \quad \text{per a tot } j \in \{0, \dots, k\}.$$

Aleshores tenim que el polinomi

$$G_k(x) = P_{0,\dots,k}(x) - P_{0,\dots,k-1}(x)$$

té com arrels x_0, \dots, x_{k-1} , i per tant existeix una única constant C_k tal que

$$G_k(x) = C_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

i per tant, si fem

$$G_k(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

tenim que $C_k = a_k$. Aleshores per la definició de [diferències dividides \(13.2.8\)](#) tenim que

$$G_k(x) = [x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

i per la proposició [13.2.4](#) tenim

$$P(x) = P_n$$

i per tant trobem recursivament

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_{n-1}(x) + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= P_{n-2}(x) + [x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \\ &\quad + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad \vdots \\ &= P_{n-r}(x) + \sum_{i=0}^{n-r+1} \left([x_0, \dots, x_{n-l+1}] \prod_{j=0}^{n-r} (x - x_j) \right) \quad (r > 0) \\ &\quad \vdots \\ &= P_1(x) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + [x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \\ &\quad + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

i per la definició de [diferències dividides \(13.2.8\)](#) tenim que $P_1(x) = [x_0]$

$$\begin{aligned} &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + [x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \\ &\quad + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) = P(x). \quad \square \end{aligned}$$

Observació 13.2.10. *Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange. Aleshores per a tot $\sigma \in S_4$ tenim*

$$[x_0, \dots, x_n] = [x_{\sigma 0}, \dots, x_{\sigma(n)}].$$

Demostració. Per la proposició [13.2.4](#). □

Proposició 13.2.11. *Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$. Aleshores*

$$[x_i] = y_i \quad \text{per a tot } i \in \{0, \dots, n\} \quad (13.1)$$

i

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_1, \dots, x_n] - [x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \quad (13.2)$$

Demostració. Per veure [\(13.1\)](#) tenim prou en veure que per a un problema d'interpolació de $\{(x, y)\}$ per $P(x)$ tenim que $P(x) \in \mathbb{R}_0[x]$, i per tant és una constant i per la definició de [diferències dividides \(13.2.8\)](#) trobem $[x] = y$.

Per veure [\(13.2\)](#) tenim, per la proposició [13.2.5](#)

$$P_{0, \dots, n}(x) = \frac{(x - x_0)P_{1, \dots, n}(x) - (x - x_n)P_{0, \dots, n-1}(x)}{x_n - x_0},$$

on $P_{i_1, \dots, i_k}(x)$ és el polinomi interpolador de Lagrange del problema interpolador del problema $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}}$. Per tant per la proposició 13.2.9 trobem

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_1, \dots, x_n] - [x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

com volíem veure. \square

13.2.3 Error en la interpolació de Lagrange

Teorema 13.2.12. *Siguin $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe de diferenciabilitat C^{n+1} i $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$ amb abscisses de suport que satisfan $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$. Aleshores per a tot $x \in [a, b]$ tenim*

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega(x),$$

on $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, per a una certa funció $\xi(x): [a, b] \rightarrow [c, d]$ amb $c = \min\{\min_{i \in [0, n]} \{x_i\}, x\}$ i $d = \max\{\max_{i \in [0, n]} \{x_i\}, x\}$.

Demostració. Fixem $x \in [a, b]$. Tenim $f(x_i) - P(x_i) = 0$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Si imposem $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ i definim la funció

$$F(z) = f(z) - P(z) - \omega(z)S(x)$$

on

$$S(x) = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}. \quad (13.3)$$

Observem que $S(x)$ està ben definida pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra.

Observem també que

$$F(x_i) = f(x_i) - P(x_i) - \omega(x_i)S(x) = 0$$

i

$$F(x) = f(x) - P(x) - \omega(x) \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)} = 0$$

és a dir, $F(z)$ existeixen $\xi_0^{(0)}, \dots, \xi_{n+1}^{(0)} \in [a, b]$ tals que $F(\xi_i^{(0)}) = 0$ per a tot $i \in \{0, \dots, n+1\}$ amb $\xi_{i+1}^{(0)} > \xi_i^{(0)}$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$.

Aplicant el **Teorema de Rolle** (5.2.15) trobem que per a tot $i \in \{1, \dots, n+1\}$ existeixen $\{\xi_i^{(1)}\}_{i=1}^{n+1}$ tals que $F'(\xi_i^{(1)}) = 0$ amb $\xi_i^{(1)} \in (\xi_{i-1}^{(0)}, \xi_i^{(0)})$. Iterant aquest argument trobem que per a $k \in \{0, \dots, n+1\}$ tenim que per a tot $i \in \{k, \dots, n+1\}$ existeixen $\{\xi_i^{(k)}\}_{i=k}^{n+1}$ tals que $F^{(k)}(\xi_i^{(k)}) = 0$ amb $\xi_i^{(k)} \in (\xi_{i-1}^{(k-1)}, \xi_i^{(k-1)})$; i per tant quan $k = n+1$ tenim que existeix $\xi_{n+1}^{(n+1)} \in (\xi_n^{(n)}, \xi_{n+1}^{(n)})$ tal que $F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) = 0$ i trobem

$$F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) - (n+1)!S(x)$$

i per tant, recordant (13.3), tenim

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)})}{(n+1)!} = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}$$

d'on trobem

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \omega(x),$$

com volíem veure. \square

Observació 13.2.13.

$$f(x) - P(x) = [x_0, \dots, x_n, x] \omega(x)$$

Corol·lari 13.2.14. Sigui $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange. Aleshores existeix un cert $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Exemple 13.2.15. Considerem el següent problema d'interpolació

i	0	1	2	4
x_i	100	101	102	103
$\log(x_i)$	$\log(100)$	$\log(101)$	$\log(102)$	$\log(103)$

per $P(x)$. Volem estimar l'error comés en calcular el valor de $P(102.5)$.

Solució. Per la definició de [problema d'interpolació de Lagrange \(13.2.1\)](#) tenim que aquest problema d'interpolació és de Lagrange. Aleshores, pel Teorema [13.2.12](#) tenim que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \omega(x)$$

i per tant, amb $f(x) = \log(x)$,

$$\log(x) - P(x) = \frac{-1}{\xi^4(x) 4} (x-100)(x-101)(x-102)(x-103)$$

i si prenem $x = 102.5$ tenim

$$\log(102.5) - P(102.5) = \frac{-1}{\xi^4(102.5) 4} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{-1}{2}$$

amb $\xi(102.5) \in [100, 103]$, i per tant $\frac{1}{103} \leq \frac{1}{\xi(102.5)} \leq \frac{1}{100}$. Aleshores tenim

$$|\log(102.5) - P(x)| = \frac{3 \cdot 5}{2^4 \cdot \xi^4(102.5)} \leq \frac{15}{64} \frac{1}{100^4} \approx 2.34 \cdot 10^{-9}. \quad \diamond$$

13.2.4 Interpolació en nodes equiespaiats

Definició 13.2.16 (Nodes equiespaiats). Sigui $\{x_i\}_{i=0}^n$ abscisses de suport que satisfacin

$$x_i = x_0 + ih$$

amb $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Aleshores direm que les abscisses de suport $\{x_i\}_{i=0}^n$ són equiespaiades o que un problema d'interpolació $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ és un problema d'interpolació amb nodes equiespaiats.

També denotarem

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{i} \quad \Delta^{n+1} f(x) = \Delta(\Delta^n f(x)).$$

Teorema 13.2.17. *Sigui $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange amb nodes equiespaiats. Aleshores, si $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ tenim*

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

Demostració. Ho farem per inducció sobre n . El cas $n = 1$ és cert, ja que

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + h) - f(x_0) && \text{(nodes equiespaiats (13.2.16))} \\ &= f(x_1) - f(x_0) \\ &= h \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= h[x_0, x_1] && \text{(diferències dividides (13.2.8))} \end{aligned}$$

i per tant

$$[x_0, x_n] = \frac{\Delta f(x_0)}{h}. \quad (13.4)$$

Suposem ara que l'enunciat és cert per a k fix i demostrem-ho pel cas $k + 1$. Tenim que

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f(x_0) &= \Delta(\Delta^k f(x_0)) && \text{(nodes equiespaiats (13.2.16))} \\ &= \Delta^k f(x_1) - \Delta^k f(x_0) && \text{(nodes equiespaiats (13.2.16))} \\ &= k!h^k([x_1, \dots, x_{k+1}] - [x_0, \dots, x_k]) && (13.4) \\ &= k!h^k(k+1)h \frac{[x_1, \dots, x_{k+1}] - [x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \\ &= (k+1)!h^{k+1}[x_0, \dots, x_{k+1}], && \text{(diferències dividides (13.2.8))} \end{aligned}$$

i per tant tenim

$$[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{\Delta^{k+1} f(x_0)}{(k+1)!h^{k+1}},$$

com volíem veure. □

13.3 Polinomis interpoladors per splines

13.3.1 Interpolació per splines

Definició 13.3.1. Siguin $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ una partició d'un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció a trossos de classe \mathcal{C}^{p-1} de la forma

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ s_{k+1}(x) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ \vdots & \\ s_n(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

amb $s_i \in \mathbb{R}_p[x]$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores direm que s és un spline de grau p associat a Δ .

Denotarem

$$S_p(\Delta) = \{s \mid s \text{ és un spline de grau } p \text{ associat a } \Delta\}.$$

Nota 13.3.2. *Només treballarem amb splines cúbics, és a dir, amb $p = 3$, que són els més emparats.*

ai haig de córrer

Bibliografia

- [1] Josep Maria Mondelo. «Apunts de Mètodes Numèrics». 2008.
- [2] Antoni Aubanell, Antoni Benseny i Amadeu Delshams. *Eines bàsiques de càlcul numèric. Amb 87 problemes resolts*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1994. ISBN: 84-7929-231-8.
- [3] Richard L. Burden i D. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Castellà. 7a ed. Brooks/Cole, 2000. ISBN: 978-0534382162.
- [4] Miguel Grau Sánchez i Miquel Noguera Batlle. *Càlcul numèric*. Edicions UPC, 2000. ISBN: 9788483013816.
- [5] David R. Kincaid i Cheney E. Ward. *Numerical Analysis. Mathematics of Scientific Computing*. Anglès. 2a ed. Brooks Cole, 1996. ISBN: 978-0534338923.
- [6] Peter Henrici. *Elements of Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, 1964. ISBN: 978-0471372417.
- [7] Germund Dahlquist i Ake Bjorck. *Numerical Methods*. Anglès. Prentice Hall PTR, 1964. ISBN: 978-0136273158.
- [8] Eugene Isaacson i Herbert Bishop Keller. *Analysis of Numerical Methods*. Anglès. Dover Publications, 1966. ISBN: 978-0486680293.
- [9] Josef Stoer i Roland Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Anglès. Springer, 2002. ISBN: 978-0-387-21738-3.
- [10] Brian Kernighan i Dennis Ritchie. *The C Programming Language*. Anglès. 2a ed. Prentice Hall, 1998. ISBN: 978-0131103627.
- [11] Brian Kernighan i Rob Pike. *The Practice of Programming*. Addison-Wesley, 1999. ISBN: 978-0201615869.

La bibliografia del curs inclou els textos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Part VIII

Topologia

Capítol 14

L'espai topològic

14.1 Espais mètrics

14.1.1 Boles i oberts

Definició 14.1.1 (Espai mètric). Sigui X un conjunt i $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació que per a tot x, y i z de X satisfà

1. $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
4. $d(x, y) \geq 0$.

Aleshores direm que X amb la distància d és un espai mètric. També direm que d és la distància o mètrica de l'espai mètric.

Definició 14.1.2 (Bola). Sigui X amb la distància d un espai mètric, a un element de X i $r > 0$ un nombre real. Aleshores definim

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

com la bola de radi r centrada en a .

Definició 14.1.3 (Obert). Sigui X amb la distància d un espai mètric i \mathcal{U} un subconjunt de X tals que per a tot element x de \mathcal{U} existeix un $\varepsilon > 0$ real tal que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Aleshores direm que \mathcal{U} és un obert.

Proposició 14.1.4. *Sigui X amb la distància d un espai mètric i $B(a, r)$ una bola de X . Aleshores $B(a, r)$ és un obert.*

Demostració. Prenem un element b de $B(a, r)$ i definim

$$\varepsilon = \frac{r - d(a, b)}{2}. \quad (14.1)$$

Aleshores considerem la bola $B(b, \varepsilon)$ i tenim que $B(b, \varepsilon) \subset B(a, r)$, ja que si prenem un element x de $B(b, \varepsilon)$, per la definició de [distància \(14.1.1\)](#) trobem

que

$$\begin{aligned}
 d(x, a) &\leq d(x, b) + d(b, a) \\
 &< \varepsilon + d(b, a) && \text{(bola (14.1.2))} \\
 &= \frac{r - d(a, b)}{2} + d(b, a) && \text{(14.1)} \\
 &= \frac{r - d(a, b)}{2} + d(a, b) && \text{(distància (14.1.1))} \\
 &= \frac{r + d(a, b)}{2} < r,
 \end{aligned}$$

ja que, per la definició de [bola \(14.1.2\)](#) tenim que $d(a, b) < r$ i per tant trobem $r + d(a, b) < 2r$. \square

Proposició 14.1.5 (Propietat de Hausdorff). *Siguin X amb la distància d un espai mètric i x i y dos elements diferents de X . Aleshores existeixen dos oberts \mathcal{U} i \mathcal{V} disjunts tals que x és un element de \mathcal{U} i y és un element de \mathcal{V} .*

Demostració. Definim $r = \frac{d(x, y)}{3}$ i considerem les boles $B(x, r)$ i $B(y, r)$. Per la definició de [distància \(14.1.1\)](#) i la definició de [bola \(14.1.2\)](#) tenim que x és un element de $B(x, r)$ i y és un element de $B(y, r)$.

També tenim que les boles $B(x, r)$ i $B(y, r)$ són disjunts, ja que si prenem un element a de X tal que a pertanyi a $B(x, r)$ i a $B(y, r)$ aleshores tenim, per la definició de [bola \(14.1.2\)](#), que $d(x, a) < r$ i $d(a, y) < r$, i per la definició de [distància \(14.1.1\)](#) tenim que

$$d(x, a) + d(a, y) \geq d(x, y).$$

Ara bé, tenim per hipòtesi que $r = \frac{d(x, y)}{3}$. Per tant

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\
 &\leq \frac{d(x, y)}{3} + \frac{d(x, y)}{3} \\
 &\leq \frac{2d(x, y)}{3} < d(x, y),
 \end{aligned}$$

i per tant aquest a no existeix i trobem que $B(x, r)$ i $B(y, r)$ són disjunts.

Per acabar, per la proposició [14.1.4](#) tenim que les boles $B(x, r)$ i $B(y, r)$ són oberts, i hem acabat. \square

14.2 L'espai topològic

14.2.1 Una topologia d'un conjunt i els oberts

Definició 14.2.1 (Topologia). Sigui X un conjunt i τ una família de subconjunts de X tals que

1. \emptyset i X són elements de τ .
2. La intersecció d'una família finita d'elements de τ és un element de τ .
3. La unió d'una família d'elements de τ és un element de τ .

Aleshores direm que τ és una topologia de X o que X amb la topologia τ és un espai topològic.

També direm que els elements de τ són oberts i que els elements de X són punts.

Exemple 14.2.2 (Topologia induïda per una mètrica). *Siguin X amb la distància d'un espai mètric i $\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U} \text{ és un obert}\}$. Volem veure que X amb la topologia τ és un espai topològic.*

Solució. Per la definició d'obert (14.1.3) trobem que \emptyset és un obert, ja que per l'axioma de regularitat (2.1.9) tenim que \emptyset és un subconjunt de X , i per a tot x de X existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon)$ pertany a \emptyset . També tenim que X és un obert, ja que pel Teorema de la doble inclusió (2.1.3) tenim que $X \subseteq X$ i si prenem un element x de X tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$ és un subconjunt de X . Per tant \emptyset i X són elements de τ .

Prenem $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ una família d'elements de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i.$$

Sigui x un element de \mathcal{U} . Per la definició d'obert (14.2.1) tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ existeix un $\varepsilon_i > 0$ real tal que

$$B(x, \varepsilon_i) \subset \mathcal{U}_i.$$

Per tant, si definim $\varepsilon = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \varepsilon_i$. Aleshores per la definició de bola (14.1.2) tenim que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, n\}.$$

i per tant $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ i per la definició de obert (14.2.1) tenim que \mathcal{U} és un obert.

Prenem $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família d'oberts de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Sigui x un element de \mathcal{U} . Per la definició d'unió de conjunts (2.1.12) tenim que existeix un $i \in I$ tal que \mathcal{U}_i conté x . Ara bé, per hipòtesi tenim que \mathcal{U}_i és un obert, i per la definició d'obert (14.1.3) trobem que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon)$ és un subconjunt de \mathcal{U}_i , i com que \mathcal{U}_i és un subconjunt de \mathcal{U} tenim que $B(x, \varepsilon)$ també és un subconjunt de \mathcal{U} , i per la definició d'obert (14.1.3) trobem que \mathcal{U} és un obert, i per la definició de espai topològic (14.2.1) hem acabat. \diamond

Exemple 14.2.3 (Topologia grollera). *Siguin X i $\tau = \{\emptyset, X\}$ dos conjunts. Aleshores τ és una topologia de X .*

Solució. Comprovem les condicions de la definició de topologia. Com que $\tau = \{\emptyset, X\}$ tenim que \emptyset i X són elements de τ . Observem també que $\emptyset \cap X = \emptyset$, $X \cap X = X$ i $\emptyset \cup X = X \cup X = X$, i per la definició de topologia (14.2.1), tenim que τ és una topologia de X . \diamond

Exemple 14.2.4 (Topologia discreta). *Siguin X i $\tau = \mathcal{P}(X)$ dos conjunts. Aleshores τ és una topologia de X .*

Solució. Tenim per l'axioma del conjunt potència (2.1.4) que \emptyset i X són subconjunts de τ , ja que per l'axioma de regularitat (2.1.9) trobem que $\emptyset \subseteq X$, i pel Teorema de la doble inclusió (2.1.3) trobem que $X \subseteq X$.

Per la definició d'unió de conjunts (2.1.12) trobem que si $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és una família de subconjunts de X aleshores

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \subseteq X,$$

i per la definició d'intersecció de conjunts (2.1.13) trobem que si $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ és una família de subconjunts de X aleshores

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \subseteq X,$$

i per tant, com que $\tau = \mathcal{P}(X)$ trobem per la definició de topologia (14.2.1) que τ és una topologia de X . \diamond

14.2.2 Tancats

Definició 14.2.5 (Tancat). *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i C un subconjunt de X tal que $X \setminus C$ sigui obert. Aleshores direm que C és tancat.*

Teorema 14.2.6. *Sigui X amb la topologia τ un espai topològic. Aleshores*

1. \emptyset i X són tancats.
2. La unió de qualsevol família finita de tancats és un tancat.
3. La intersecció de qualsevol família de tancats és un tancat.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Tenim que $X \setminus \emptyset = X$. Per la definició d'espai topològic (14.2.1) tenim que X és un obert, i per la definició de tancat (14.2.5) trobem que \emptyset és un tancat.

També tenim que $X \setminus X = \emptyset$. Per la definició d'espai topològic (14.2.1) tenim que \emptyset és un obert, i per la definició de tancat (14.2.5) trobem que X és un tancat.

Veiem ara el punt (2). Prenem una família $\{C_i\}_{i=1}^n$ de tancats de X i considerem

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i = X \cap \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right)^c.$$

Per la llei de De Morgan (1.1.17) trobem que

$$\begin{aligned} X \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i \right)^c &= X \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}_i^c \right) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X \cap \mathcal{C}_i^c) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{C}_i). \end{aligned}$$

Per hipòtesi tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ el conjunt \mathcal{C}_i és un tancat, i per la definició de **tancat** (14.2.5) tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ el conjunt $X \setminus \mathcal{C}_i$ és un obert, i per la definició d'**espai topològic** (14.2.1) tenim que $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{C}_i)$ és un obert. Ara bé, tenim que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{C}_i),$$

i per tant, per la definició de **tancat** (14.2.5) trobem que $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ és un tancat.

Veiem per acabar el punt (3). Prenem una família $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ de tancats de X i considerem

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = X \cap \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \right)^c.$$

Per la llei de De Morgan (1.1.18) trobem que

$$\begin{aligned} X \cap \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \right)^c &= X \cap \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i^c \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} (X \cap \mathcal{C}_i^c) \\ &= \bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i). \end{aligned}$$

Ara bé, per la definició de **tancat** (14.2.5) tenim que per a tot $i \in I$ el conjunt $X \setminus \mathcal{C}_i$ és un obert, i per la definició de **espai topològic** (14.2.1) trobem que el conjunt $\bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i)$ és un obert. Tenim

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i),$$

i, de nou per la definició de **tancat** (14.2.5), tenim que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ és un tancat, com volíem veure. \square

14.2.3 Base d'una topologia

Definició 14.2.7 (Base d'una topologia). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i \mathcal{B} una família d'oberts tals que per a tot obert \mathcal{U} de X i per a tot punt x de \mathcal{U} existeix un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathcal{U}$. Aleshores direm que \mathcal{B} és una base de la topologia τ .

Exemple 14.2.8. *Siguin X amb la distància d d'un espai mètric i*

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in X \text{ i } \varepsilon > 0\}$$

un conjunt. Aleshores \mathcal{B} és una base de la topologia τ induïda per la mètrica.

Solució. Tenim que

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U} \text{ és un obert}\}.$$

Prenem doncs un obert \mathcal{U} de τ i un punt x de \mathcal{U} . Per la definició d'obert (14.1.3) tenim que existeix un $\varepsilon > 0$ real tal que $B(x, \varepsilon)$ és un subconjunt de \mathcal{U} , i per la definició de base d'una topologia (14.2.7) hem acabat. \diamond

Definició 14.2.9 (Finor d'una topologia). Siguin X un conjunt i τ, τ' dues topologies de X tals que $\tau \subset \tau'$. Aleshores direm que τ' és més fina que τ .

Proposició 14.2.10. *Siguin X un conjunt i \mathcal{B} una família de subconjunts de X tals que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

i tal que per a tot \mathcal{U} i \mathcal{V} de \mathcal{B} i per a tot x de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existeix un \mathcal{W} de \mathcal{B} tal que x pertanyi a \mathcal{W} i $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Aleshores existeix una única topologia τ de X tal que \mathcal{B} és una base de τ i τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} .

Demostració. Definim

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ amb } B_i \in \mathcal{B}\} \quad (14.2)$$

Observem que X i \emptyset pertanyen a τ .

Siguin \mathcal{U} i \mathcal{V} dos elements de \mathcal{B} i prenem un element x de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Per hipòtesi tenim que existeix un element \mathcal{W}_x de \mathcal{B} tal que $x \in \mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Per tant

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}} \mathcal{W}_x,$$

i per la definició del conjunt τ tenim que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ és un element de τ .

Prenem dos elements \mathcal{U} i \mathcal{V} del conjunt τ . Per la definició (14.2) trobem que existeixen dues famílies $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ i $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \quad \text{i} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j.$$

Per tant tenim que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j),$$

i per la definició (14.2) trobem que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ pertany a τ . Per tant per la definició de topologia (14.2.1) trobem que τ és una topologia de X .

Veiem ara que \mathcal{B} és base de la topologia τ . Prenem un obert \mathcal{U} de τ i x un element de \mathcal{U} . Per la definició (14.2) tenim que existeix una família $\{B_i\}_{i \in I}$ d'elements de \mathcal{B} tal que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Per tant existeix un element B de \mathcal{B} tal que $x \in B$ i $B \subseteq \mathcal{U}$ i per la definició de [base d'una topologia \(14.2.7\)](#) trobem que \mathcal{B} és una base de la topologia τ .

Continuem veient que τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} . Suposem que existeix una topologia τ' de X tal que τ és més fina que τ' i tal que τ' conté els elements de \mathcal{B} . Per la definició de [finor d'una topologia \(14.2.9\)](#) això és que $\tau' \subset \tau$.

Prenem un obert \mathcal{U} de τ . Per la definició [\(14.2\)](#) trobem que existeix una família $\{B_i\}_{i \in I}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Ara bé, tenim per hipòtesi que \mathcal{B} és un subconjunt de la topologia τ' , i per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) trobem que \mathcal{U} pertany a τ' . Per tant ha de ser $\tau \subseteq \tau'$, i trobem que τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} .

Veiem ara que aquesta topologia τ és única. Suposem que existeix una altre topologia τ' tal que \mathcal{B} és una base de τ' i τ' és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} .

Prenem un obert \mathcal{U} de τ . Per la definició [\(14.2\)](#) trobem que existeix una família $\{B_i\}_{i \in I}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) tenim que \mathcal{U} és un element de τ' , ja que per hipòtesi \mathcal{B} és un subconjunt de τ' . Per tant tenim que $\tau \subseteq \tau'$. Ara bé, ja hem vist que τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} , i per la definició de [finor d'una topologia \(14.2.9\)](#) això és que $\tau' \subseteq \tau$, i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) ha de ser $\tau = \tau'$, com volíem veure. \square

14.2.4 Entorns, interior i adherència

Definició 14.2.11 (Entorn). Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, x un punt i N un conjunt tal que existeix un obert \mathcal{U} satisfent que x és un element de \mathcal{U} i \mathcal{U} és un subconjunt de N . Aleshores direm que N és un entorn de x .

També direm que x és un punt interior de N .

Observació 14.2.12. Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i x un punt. Aleshores existeix un subconjunt N de X tal que N és un entorn de x .

Demostració. Si $N = X$ tenim $x \in X \subseteq N$. Per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) tenim que X és un obert i per la definició d'[entorn \(14.2.11\)](#) trobem que N és un entorn de x . \square

Definició 14.2.13 (Interior). Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, x un punt de X , A subconjunt de X i

$$\text{Int}(A) = \{x \in X \mid A \text{ és un entorn de } x\}.$$

Aleshores direm que $\text{Int}(A)$ és l'interior del conjunt A .

Proposició 14.2.14. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores $\text{Int}(A)$ és un obert.*

Demostració. Prenem un element x de $\text{Int}(A)$. Per la definició de [interior](#) (14.2.13) tenim que existeix un obert \mathcal{U}_x tal que $x \in \mathcal{U}_x$ i $\mathcal{U}_x \subseteq A$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned}\text{Int}(A) &= \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \text{Int}(A) = \text{Int}(A).\end{aligned}$$

Per tant tenim que

$$\text{Int}(A) \subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \quad \text{i} \quad \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \subseteq \text{Int}(A),$$

i pel [Teorema de la doble inclusió](#) (2.1.3) trobem

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x$$

i per la definició de [topologia](#) (14.2.1) trobem que $\text{Int}(A)$ és un obert. \square

Proposició 14.2.15. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i*

$$Y = \{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subseteq A\}.$$

Aleshores

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{\mathcal{U} \in Y} \mathcal{U}.$$

Demostració. Sigui x un element de A tal que existeixi un obert \mathcal{U}_x satisfent que x és un element de \mathcal{U}_x i $\mathcal{U}_x \subseteq A$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned}\text{Int}(A) &= \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \text{Int}(A) = \text{Int}(A)\end{aligned}$$

i pel [Teorema de la doble inclusió](#) (2.1.3) trobem

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{\mathcal{U} \in Y} \mathcal{U}$$

com volíem veure. \square

Corol·lari 14.2.16. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i \mathcal{U} un obert tal que \mathcal{U} sigui un subconjunt de A . Aleshores \mathcal{U} és un subconjunt de $\text{Int}(A)$.*

Corol·lari 14.2.17. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores A és un obert si i només si $\text{Int}(A)$ és un obert.*

Definició 14.2.18 (Punt adherent). *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i x un punt tal que per a tot entorn N de x tenim*

$$A \cap N \neq \emptyset.$$

Aleshores direm que x és un punt adherent a A .

Definició 14.2.19 (Clausura). *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un conjunt. Aleshores direm que*

$$\text{Cl}(A) = \{x \in X \mid x \text{ és un punt adherent a } A\}$$

és la clausura de A .

Observació 14.2.20. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores*

$$A \subseteq \text{Cl}(A).$$

Proposició 14.2.21. *Siguin X amb τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores $\text{Cl}(A)$ és un tancat.*

Demostració. Prenem un element x de $X \setminus \text{Cl}(A)$. Per la definició de [clausura](#) (14.2.19) tenim que existeix un entorn N de x tal que

$$A \cap N = \emptyset, \tag{14.3}$$

i per la definició d'[entorn](#) (14.2.11) tenim que existeix un obert \mathcal{U}_x tal que x és un element de \mathcal{U}_x i que \mathcal{U}_x és un subconjunt de N . Per tant, per (14.3) tenim que $A \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$.

Per tant trobem

$$\begin{aligned} X \setminus \text{Cl}(A) &= \bigcup_{x \in X \setminus \text{Cl}(A)} x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in X \setminus \text{Cl}(A)} \mathcal{U}_x \subseteq X \setminus \text{Cl}(A), \end{aligned}$$

i pel [Teorema de la doble inclusió](#) (2.1.3) trobem que

$$X \setminus \text{Cl}(A) = \bigcup_{x \in X \setminus \text{Cl}(A)} \mathcal{U}_x,$$

i com que \mathcal{U}_x és un obert, per la definició de [topologia](#) (14.2.1) tenim que $X \setminus \text{Cl}(A)$ és un obert, i per la definició de [tancat](#) (14.2.5) trobem que $\text{Cl}(A)$ és un tancat. \square

Proposició 14.2.22. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i*

$$Y = \{\mathcal{C} \subseteq X \mid A \subseteq \mathcal{C} \text{ i } \mathcal{C} \text{ és un tancat}\}.$$

Aleshores

$$\text{Cl}(A) = \bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C}.$$

Demostració. Sigui x un punt adherent a A amb $x \notin A$. Suposem que existeix un tancat \mathcal{C} tal que A és un subconjunt de \mathcal{C} i tal que x no pertany a \mathcal{C} . Aleshores x és un element de $X \setminus \mathcal{C}$, i per la definició de [tancat](#) (14.2.5) tenim que $\mathcal{U} = X \setminus \mathcal{C}$ és un obert. Ara bé, per la definició d'[entorn](#) (14.2.11) tenim que \mathcal{U} és un entorn de x , però A és un subconjunt de \mathcal{C} , i per tant tenim que $X \setminus \mathcal{C}$ és un subconjunt de $X \setminus A$, i tenim que \mathcal{U} és un subconjunt de $X \setminus A$, i per tant $A \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Ara bé, per la definició de [punt adherent](#) (14.2.18) tenim que $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Per tant ha de ser que x pertany a \mathcal{C} i trobem que

$$\text{Cl}(A) \subseteq \bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C}. \quad (14.4)$$

Per la proposició 14.2.21 tenim que $\text{Cl}(A)$ és un tancat, i per tant $\text{Cl}(A)$ és un element de Y i tenim que

$$\bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C} \subseteq \text{Cl}(A). \quad (14.5)$$

Ara bé, tenim (14.4) i (14.5), i pel [Teorema de la doble inclusió](#) (2.1.3) trobem que

$$\text{Cl}(A) = \bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C}. \quad \square$$

Corol·lari 14.2.23. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i \mathcal{C} un tancat tal que A és un subconjunt de \mathcal{C} . Aleshores $\mathcal{C} \subseteq \text{Cl}(A)$.*

Corol·lari 14.2.24. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores A és tancat si i només si $A = \text{Cl}(A)$.*

Proposició 14.2.25. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores*

$$\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}(A).$$

Demostració. Prenem un element x de $\text{Cl}(X \setminus A)$. Per la definició de [clausura](#) (14.2.19) tenim que per a tot obert \mathcal{U} que conté x tenim que

$$\mathcal{U} \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Ara bé, per la definició d'[interior](#) (14.2.13) que $\text{Int}(A)$ és un subconjunt de A , i per tant $X \setminus A$ és un subconjunt de $X \setminus \text{Int}(A)$, i per tant $\mathcal{U} \cap (X \setminus \text{Int}(A)) \neq \emptyset$. Per tant per la definició d'[interior](#) (14.2.13) trobem que

$$\text{Cl}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{Int}(A) \quad (14.6)$$

Prenem ara un element x de $X \setminus \text{Int}(A)$. Per la definició d'interior (14.2.13) tenim que no existeix cap obert \mathcal{U} tal que x sigui un element de \mathcal{U} i \mathcal{U} sigui un subconjunt de A , o equivalentment, que $\mathcal{U} \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ per a tot obert \mathcal{U} tal que x sigui un element de \mathcal{U} i que \mathcal{U} sigui un subconjunt de A . Ara bé, per la definició de clausura (14.2.19) tenim que \mathcal{U} és un element de $\text{Cl}(X \setminus A)$, i per tant trobem que

$$X \setminus \text{Int}(A) \subseteq \text{Cl}(X \setminus A). \quad (14.7)$$

Per tant, amb (14.6) i (14.7) i el Teorema de la doble inclusió (2.1.3) trobem que $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}(A)$, com volíem veure. \square

14.3 Aplicacions contínues

14.3.1 Aplicacions obertes, tancades i contínues

Definició 14.3.1 (Aplicació oberta). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot obert \mathcal{U} de X tenim que el conjunt $\{f(x) \in Y \mid x \in \mathcal{U}\}$ és un obert de Y . Aleshores direm que f és una aplicació oberta.

Observació 14.3.2. La composició d'aplicacions obertes és oberta.

Definició 14.3.3 (Aplicació tancada). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot tancat \mathcal{C} de X tenim que el conjunt $\{f(x) \in Y \mid x \in \mathcal{C}\}$ és un tancat de Y . Aleshores direm que f és una aplicació tancada.

Observació 14.3.4. La composició d'aplicacions tancades és tancada.

Definició 14.3.5 (Aplicació contínua). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot obert \mathcal{V} de Y el conjunt $\{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{V}\}$ és un obert de X . Aleshores direm que f és una aplicació contínua.

Observació 14.3.6. La composició d'aplicacions contínues és contínua.

Exemple 14.3.7. Considerem

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

Volem veure que S^n és un tancat de \mathbb{R}^{n+1} .

Solució. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|. \end{aligned}$$

Veiem que f és una aplicació contínua. Sigui \mathcal{V} un obert de \mathbb{R} i considerem el conjunt

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \in \mathcal{V}\}. \quad (14.8)$$

Prenem un element x de \mathbb{R}^{n+1} . Com que, per hipòtesi, tenim que \mathcal{V} és un obert de \mathbb{R} , per la definició de obert (14.1.3) tenim que existeix un real $\delta > 0$ tal que la bola $B(f(x), \delta)$ és un subconjunt de \mathcal{V} , i per la definició (14.8) tenim que existeix un element y de \mathbb{R}^{n+1} tal que $f(y)$ és un element de $B(f(x), \delta)$, i per la definició de bola (14.1.2) trobem que $|f(x) - f(y)| < \delta$. \diamond

14.3.2 Homeomorfismes entre topologies

Definició 14.3.8 (Homeomorfisme). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació bijectiva, oberta i contínua. Aleshores direm que f és un homeomorfisme.

Definició 14.3.9 (Espais topològics isomorfs). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics tals que existeix un homeomorfisme $f: X \rightarrow Y$. Aleshores direm que X i Y són dos espais topològics isomorfs. També denotarem

$$X \cong Y.$$

Proposició 14.3.10. *Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics. Aleshores la relació*

$$X \cong Y \iff X \text{ és isomorf a } Y$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Tenim que l'aplicació Id_X és bijectiva, oberta i contínua. Per la definició d'[homeomorfisme entre topologies](#) (14.3.8) tenim que Id_X és un homeomorfisme, i per la definició d'[espais topològics isomorfs](#) (14.3.9) tenim que $X \cong X$.
2. Simètrica: Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics isomorfs. Per la definició d'[espais topològics isomorfs](#) (14.3.9) tenim que existeix un homeomorfisme $f: X \rightarrow Y$.

Pel Teorema 2.2.19 trobem que existeix l'aplicació inversa f^{-1} de Y a X , i pel corollari 2.2.20 tenim que l'aplicació f^{-1} és bijectiva.

També trobem que f^{-1} és oberta, ja que per la definició d'[homeomorfisme entre topologies](#) (14.3.8) tenim que f és contínua, i per la definició d'[aplicació oberta](#) (14.3.1) i la definició d'[aplicació contínua](#) (14.3.5) trobem que f^{-1} és oberta. De mateixa manera trobem que f^{-1} és contínua, ja que per la definició d'[homeomorfisme entre topologies](#) (14.3.8) tenim que f és oberta, i per la definició d'[aplicació contínua](#) (14.3.5) i la definició d'[aplicació oberta](#) (14.3.1) trobem que f^{-1} és contínua.

Per tant, per la definició d'[homeomorfisme entre topologies](#) (14.3.8) trobem que f^{-1} és un homeomorfisme entre topologies i per tant $Y \cong X$.

3. Transitiva: Siguin X_1 amb la topologia τ_1 , X_2 amb la topologia τ_2 i X_3 amb la topologia τ_3 tres espais topològics tals que $X_1 \cong X_2$ i $X_2 \cong X_3$. Per la definició d'[espais topològics isomorfs](#) (14.3.9) tenim que existeixen dos homeomorfismes $f: X_1 \rightarrow X_2$ i $g: X_2 \rightarrow X_3$.

Considerem l'aplicació $h = g \circ f$. Pel Teorema 2.2.15 trobem que h és bijectiva, i per l'observació 14.3.2 i l'observació 14.3.6 trobem que h és oberta i contínua, i per la definició d'[homeomorfisme entre topologies](#) (14.3.8) trobem que h és un homeomorfisme entre X_1 i X_3 , i per la definició d'[espais topològics isomorfs](#) (14.3.9) trobem que $X_1 \cong X_3$.

I per la definició de [relació d'equivalència](#) (2.3.2) hem acabat. \square

Capítol 15

Altres topologies

15.1 Topologies induïdes

15.1.1 La topologia induïda per un subconjunt

Proposició 15.1.1. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores A amb la topologia*

$$\tau_A = \{\mathcal{U} \subseteq A \mid \text{Existeix un obert } \mathcal{W} \text{ de } X \text{ tal que } \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap A\} \quad (15.1)$$

és un espai topològic.

Demostració. Observem que A pertany a τ_A , ja que per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) tenim que X és un obert de X , i trobem $X \cap A = A$. També tenim que \emptyset pertany a τ_A , ja que per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) tenim que \emptyset és un obert de X , i trobem $\emptyset \cap A = \emptyset$.

Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família d'elements de τ_A . Per la definició [\(15.1\)](#) tenim que existeix una família $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$ d'oberts de X tals que $\mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \cap A$, per a tot i de I . Considerem ara

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i \cap A,$$

i tenim

$$\mathcal{U} = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i \right),$$

i per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) tenim que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i$ és un obert de X , i per la definició [\(15.1\)](#) trobem que \mathcal{U} pertany a τ_A .

Sigui $\{\mathcal{U}\}_{i=1}^n$ una família d'elements de τ_A . Per la definició [\(15.1\)](#) tenim que existeix una família $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^n$ d'oberts de X tals que $\mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \cap A$, per a tot i de $\{1, \dots, n\}$. Considerem ara

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i.$$

Tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \cap A,$$

i tenim

$$\mathcal{U} = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \right),$$

i per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) tenim que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i$ és un obert de X , i per la definició [\(15.1\)](#) trobem que \mathcal{U} pertany a τ_A . Per tant per la definició d'[espai topològic \(14.2.1\)](#) trobem que A amb la topologia τ_A és un espai topològic. \square

Definició 15.1.2 (Topologia induïda per un subconjunt). Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores denotem

$$\tau_A = \{\mathcal{U} \subseteq A \mid \text{Existeix un obert } \mathcal{W} \text{ de } X \text{ tal que } \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap A\}$$

i direm que τ_A és la topologia induïda per A .

Aquesta definició té sentit per la proposició [15.1.1](#).

Definició 15.1.3 (Subespai topològic). Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores direm que A amb la topologia τ_A és un subespai topològic de X .

Proposició 15.1.4. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i τ_A la topologia induïda per un subconjunt A de X . Aleshores \mathcal{C} és un tancat de A si i només si existeix un tancat \mathcal{K} de τ tal que $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{K}$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Sigui \mathcal{C} un tancat de A . Per la definició de [tancat \(14.2.5\)](#) tenim que això és equivalent a que $A \setminus \mathcal{C}$ és un obert. Per la definició de [topologia induïda per un subconjunt \(15.1.2\)](#) tenim que això és si i només si existeix un obert \mathcal{U} de X tal que $A \setminus \mathcal{C} = \mathcal{U} \cap A$. Ara bé, tenim que $\mathcal{U} = X \setminus (X \setminus \mathcal{U})$, i per la definició de [tancat \(14.2.5\)](#) tenim que $\mathcal{K} = X \setminus \mathcal{U}$ és un tancat, i tenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= A \setminus A \setminus \mathcal{C} \\ &= A \setminus (\mathcal{U} \cap A) \\ &= A \setminus \mathcal{U} \\ &= A \cap (X \setminus \mathcal{U}) \\ &= A \cap \mathcal{K} \end{aligned}$$

i hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Sigui \mathcal{K} un tancat de X . Prenem $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{K}$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} A \setminus \mathcal{C} &= A \setminus (A \cap \mathcal{K}) \\ &= A \cap (X \setminus \mathcal{K}). \end{aligned}$$

Ara bé, per hipòtesi, tenim que \mathcal{K} és un tancat de X , i per tant $X \setminus \mathcal{K}$ és un obert, i per la definició de [topologia induïda per un subconjunt \(15.1.2\)](#) trobem que $A \cap (X \setminus \mathcal{K})$ és un obert de A , i per la definició de [tancat \(14.2.5\)](#) tenim que $A \setminus \mathcal{C}$ és un tancat de A , com volíem veure. \square

Proposició 15.1.5. *Siguin X amb la topologia τ una espai topològic, A un obert de X , τ_A la topologia induïda per A i \mathcal{U} un subconjunt de A . Aleshores \mathcal{U} és un obert de A si i només si \mathcal{U} és un obert de X .*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que \mathcal{U} és un obert de A . Per la definició de [topologia induïda per un subconjunt \(15.1.2\)](#) tenim que existeix un obert \mathcal{W} de X tal que $\mathcal{U} = A \cap \mathcal{W}$. Ara bé, com que, per hipòtesi, A i \mathcal{W} són dos oberts de X per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) trobem que \mathcal{U} és un obert de X .

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que \mathcal{U} és un obert de X . Com que, per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#), \mathcal{U} és un subconjunt de A , tenim que $\mathcal{U} = A \cap \mathcal{U}$, i per la definició de [topologia induïda per un subconjunt \(15.1.2\)](#) trobem que \mathcal{U} és un obert de A . \square

Proposició 15.1.6. *Siguin X amb la topologia τ una espai topològic, A un tancat de X , τ_A la topologia induïda per A i \mathcal{C} un subconjunt de A . Aleshores \mathcal{C} és un tancat de A si i només si \mathcal{C} és un tancat de X .*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que \mathcal{C} és un tancat de A . Per la proposició [15.1.4](#) tenim que existeix un tancat \mathcal{K} de X tal que $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{K}$. Ara bé, com que A i \mathcal{K} són dos tancats de X , pel Teorema [14.2.6](#) trobem que \mathcal{C} és un tancat de X .

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que \mathcal{C} és un tancat de X . Com que, per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#), \mathcal{C} és un subconjunt de A , tenim que $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{C}$, i per la definició de [topologia induïda per un subconjunt \(15.1.2\)](#) trobem que \mathcal{C} és un tancat de A . \square

15.1.2 La topologia producte

Proposició 15.1.7. *Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics,*

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y \subseteq X \times Y \mid \mathcal{V}_X \in \tau_X \text{ i } \mathcal{V}_Y \in \tau_Y\}$$

i

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \times Y \mid \text{Existeix una família } \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\}.$$

Aleshores τ és una topologia de $X \times Y$.

Demostració. Per l'[axioma de regularitat \(2.1.9\)](#) trobem que \emptyset és un subconjunt de \mathcal{B} , i per la definició de τ trobem que \emptyset és un element de τ .

Per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) trobem que X és un obert de X i Y és un obert de Y . Per tant $X \times Y$ és un element de \mathcal{B} i per la definició de τ trobem que $X \times Y$ és un element de τ .

Prenem una família $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ d'elements de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Per la definició de τ trobem que per a cada i de I existeix una família $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J_i}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U}_i = \bigcup_{j \in J_i} \mathcal{V}_j.$$

Ara bé, per la definició de \mathcal{B} trobem que per a tot j de J_i existeixen oberts $\mathcal{V}_{j,X}$ de X i oberts $\mathcal{V}_{j,Y}$ de Y tals que

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y},$$

i per tant trobem que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} (\mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y}),$$

i per la definició de τ trobem que \mathcal{U} és un element de τ .

Siguin \mathcal{U} i \mathcal{V} dos elements de τ i considerem

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}.$$

Per la definició de τ tenim que existeixen dues famílies $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ i $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \quad \text{i} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j,$$

i per la definició de \mathcal{B} trobem que per a cada i de I existeixen un obert $\mathcal{U}_{i,X}$ de X i un obert $\mathcal{U}_{i,Y}$ de Y tals que

$$\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{i,X} \times \mathcal{U}_{i,Y}$$

i per a cada j de J existeixen un obert $\mathcal{V}_{j,X}$ de X i un obert $\mathcal{V}_{j,Y}$ de Y tals que

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y}.$$

Per tant tenim que

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_{i,X} \times \mathcal{U}_{i,Y}) \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} (\mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y}) \right)$$

i trobem que

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,X} \times \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,Y} \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,X} \times \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,Y} \right)$$

i per tant

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,X} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,X} \right) \times \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,Y} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,Y} \right),$$

i per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) trobem que

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,X} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,X} \quad \text{i} \quad \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,Y} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,Y}$$

són oberts, i per la definició de τ trobem que \mathcal{U} és un element de τ , i per la definició de [topologia \(14.2.1\)](#) trobem que τ és una topologia de $X \times Y$, com volíem veure. \square

Definició 15.1.8 (Topologia producte). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y \subseteq X \times Y \mid \mathcal{V}_X \in \tau_X \text{ i } \mathcal{V}_Y \in \tau_Y\}.$$

Aleshores direm que $X \times Y$ amb la topologia

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \times Y \mid \text{Existeix una família } \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } \mathcal{U} = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i\}$$

és l'espai topològic producte de X i Y i que τ és la topologia producte de X i Y .

Aquesta definició té sentit per la proposició 15.1.7

Exemple 15.1.9 (Projeccions). Siguin $X \times Y$ amb la topologia τ la topologia producte de X i Y i

$$\begin{aligned} \pi_X: X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

un aplicació. Volem veure que π_X és contínua i oberta.

Solució. Comencem veient que π_X és contínua. Prenem un obert \mathcal{U} de X i considerem

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x, y) \in \mathcal{U}\}.$$

Tenim doncs que

$$\mathcal{U} \times Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x, y) \in \mathcal{U}\},$$

i com que, per hipòtesi, Y és un espai topològic, tenim que Y és un obert de Y , i de nou per hipòtesi tenim que \mathcal{U} és un obert de X . Per tant trobem que $\mathcal{U} \times Y$ és un obert de $X \times Y$, i per la definició d'**aplicació contínua** (14.3.5) trobem que π_X és contínua.

Veiem ara que π_X és oberta. Prenem un obert A de $X \times Y$ i un punt x de $\{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\}$. Aleshores tenim que existeix un punt a de A tal que $\pi_X(a) = x$. Per la definició de **topologia producte** (15.1.8) tenim que existeixen un obert \mathcal{U}_x de X i un obert \mathcal{V}_x de Y tals que

$$a \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_x \subseteq A.$$

Observem que

$$\mathcal{U} = \{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_x\}$$

és un obert de X , i per tant

$$x \in \mathcal{U}_x \subseteq \{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\},$$

i, denotant $B = \{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\}$, trobem que

$$\begin{aligned} B &\subseteq \bigcup_{x \in B} x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in B} \mathcal{U}_x \\ &\subseteq B, \end{aligned}$$

i per tant trobem que $\{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\}$ és un obert de X , i per la definició d'**aplicació oberta** (14.3.1) trobem que π_X és una aplicació oberta. \diamond

Teorema 15.1.10. *Siguin Z amb la topologia τ_Z un espai topològic, $X \times Y$ amb la topologia τ la topologia producte de X i Y , $f: Z \rightarrow X \times Y$ una aplicació. Aleshores f és contínua si i només si les aplicacions $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que f és contínua. Aleshores per l'exercici 15.1.9 trobem que les aplicacions π_X i π_Y són contínues i per l'observació 14.3.6 hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que les aplicacions $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues.

Sigui $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ un obert de $X \times Y$. Per la definició de [topologia producte](#) (15.1.8) tenim que \mathcal{V} és un obert de X i \mathcal{W} és un obert de Y . Ara bé, com que per hipòtesi les aplicacions $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues, tenim per la definició d'[aplicació contínua](#) (14.3.5) que els conjunts

$$\mathcal{U}_X = \{x \in Z \mid \pi_X \circ f(x) \in \mathcal{V}\} \quad \text{i} \quad \mathcal{U}_Y = \{x \in Z \mid \pi_Y \circ f(x) \in \mathcal{W}\}$$

són oberts de Z , i per la definició de [topologia](#) (14.2.1) trobem que el conjunt

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_X \cup \mathcal{U}_Y$$

és un obert de Z . Per tant tenim que

$$\mathcal{U} = \{x \in Z \mid f(x) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}\},$$

és un obert de Z , i com que per hipòtesi el conjunt $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ és un obert de $X \times Y$, per la definició de [aplicació oberta](#) (14.3.1) trobem que f és una aplicació oberta. \square

Proposició 15.1.11. *Siguin X_1 amb la topologia τ_{X_1} , X_2 amb la topologia τ_{X_2} , Y_1 amb la topologia τ_{Y_1} i Y_2 amb la topologia τ_{Y_2} quatre espais topològics tals que*

$$X_1 \cong X_2 \quad \text{i} \quad Y_1 \cong Y_2.$$

Aleshores

$$X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2.$$

Demostració. Per la definició d'[espais topològics isomorfs](#) (14.3.9) trobem que existeixen dos homeomorfismes $f: X_1 \rightarrow X_2$ i $g: Y_1 \rightarrow Y_2$. Considerem doncs l'aplicació

$$\begin{aligned} h: X_1 \times Y_1 &\rightarrow X_2 \times Y_2 \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)). \end{aligned}$$

Com que, per hipòtesi, les aplicacions f i g són homeomorfismes, tenim per la definició d'[homeomorfisme entre topologies](#) (14.3.8) que f i g són bijectives. Ara bé, trobem que h també és bijectiva, ja que té per inversa la funció

$$\begin{aligned} h^{-1}: X_2 \times Y_2 &\rightarrow X_1 \times Y_1 \\ (x, y) &\mapsto (f^{-1}(x), g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Continuem veient que h és una aplicació oberta. Per la definició d'[aplicació oberta](#) (14.3.1) i la definició d'[aplicació contínua](#) (14.3.5) en tenim prou amb

veure que h^{-1} és una aplicació contínua. Observem que per a tot (x, y) de $X_2 \times Y_2$ tenim

$$\pi_{X_1} \circ h^{-1}(x, y) = f^{-1}(x) \quad \text{i} \quad \pi_{Y_1} \circ h^{-1}(x, y) = g^{-1}(y),$$

i com que, per hipòtesi, les aplicacions f^{-1} i g^{-1} són contínues tenim pel Teorema 15.1.10 que l'aplicació h^{-1} és contínua, i per tant h és una aplicació oberta.

Per acabar veiem ara que h és una aplicació contínua. Observem que per a tot (x, y) de $X_1 \times Y_1$ tenim

$$\pi_{X_2} \circ h(x, y) = f(x) \quad \text{i} \quad \pi_{Y_2} \circ h(x, y) = g(y),$$

i com que, per hipòtesi, les aplicacions f i g són aplicacions contínues tenim pel Teorema 15.1.10 que l'aplicació h és contínua.

Per tant per la definició d'**homeomorfisme entre topologies** (14.3.8) trobem que h és un homeomorfisme, i per la definició d'**espais topològics isomorfs** (14.3.9) trobem que $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$, com volíem veure. \square

15.1.3 La topologia quocient

15.2 Espai d'Alexandroff

15.2.1 Propietats bàsiques

Definició 15.2.1 (Topologia d'Alexandroff). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic tal que per a tota família d'oberts $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de X tenim que

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

és un obert de X . Aleshores direm que τ és una topologia d'Alexandroff o que X amb τ és un espai topològic d'Alexandroff.

Proposició 15.2.2. Sigui X amb la topologia τ un espai topològic amb X finit. Aleshores τ és una topologia d'Alexandroff.

Demostració. Com que X és finit tenim que $\mathcal{P}(X)$ és finit, i com que τ és, per la definició de **topologia** (14.2.1), un subconjunt de $\mathcal{P}(X)$ trobem que τ és finit.

Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família d'oberts de X i definim

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Tenim que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un subconjunt de τ , i tenim també que τ és finit, per tant $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ ha de ser finit i per tant existeix un natural n tal que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} = \{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$, i per la definició de **topologia** (14.2.1) hem acabat. \square

Part IX

Equacions diferencials ordinàries I

Capítol 16

Equacions diferencials de primer ordre en una variable

16.1 Espai de funcions contínues i acotades

16.1.1 L'espai de funcions contínues i acotades és complet

Notació 16.1.1 (Espai de funcions contínues i acotades). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores denotem

$$\mathcal{C}_b(X, T) = \{f(x) \mid f(x) \text{ és una funció contínua i acotada de } X \text{ a } T\}.$$

Definició 16.1.2 (Norma d'una funció). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic, T un compacte de \mathbb{R}^n i $f(x)$ una funció de $\mathcal{C}_b(X, T)$. Aleshores definim

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

com la norma de f .

Definició 16.1.3 (Successió de Cauchy). Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió tal que per a tots naturals n i m existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és de Cauchy.

Definició 16.1.4 (Espai mètric complet). Sigui X amb la distància d un espai mètric tal que per a tota successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy tenim que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

és un element de X . Aleshores direm que X és complet.

Proposició 16.1.5. *Sigui f i g dues funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ i*

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Aleshores per a tot f, g i h de $\mathcal{C}_b(X, T)$ es satisfà

1. $d(f, g) \geq 0$.

$$2. d(f, g) = 0 \text{ si i només si } f = g.$$

$$3. d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

$$4. d(f, g) = d(g, f).$$

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la definició de **norma d'una funció** (16.1.2) tenim que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|,$$

i per tant ha de ser $d(f, g) \geq 0$.

Veiem ara el punt (2). Si $f = g$ aleshores tenim que per a tot x de X es satisfà $f(x) = g(x)$, i per tant trobem

$$\sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\| = 0,$$

i això és que $d(f, g) = 0$.

Suposem ara que $d(f, g) = 0$. Per la definició de **norma d'una funció** (16.1.2) ha de ser

$$\sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\| = 0,$$

i per tant trobem que $f(x) = g(x)$ per a tot x de X i per tant tenim que ha de ser $f = g$.

Veiem ara el punt (3). Tenim que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\| \\ &= \sup_{x \in X} \|f(x) - h(x) + h(x) - g(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in X} \|f(x) - h(x)\| + \sup_{x \in X} \|h(x) - g(x)\| = d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Per acabar veiem el punt (4). Tenim que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\| \\ &= \sup_{x \in X} \|g(x) - f(x)\| = d(g, f). \end{aligned} \quad \square$$

Definició 16.1.6 (Distància entre funcions). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic, T un compacte de \mathbb{R}^n i f i g dues funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$. Aleshores definim

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

com la distància entre f i g en $\mathcal{C}_b(X, T)$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 16.1.5.

Lema 16.1.7. *Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores $\mathcal{C}_b(X, T)$ amb la distància d és espai mètric.*

Demostració. \square

Notació 16.1.8. Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores denotarem per $\mathcal{C}_b(X, T)$ l'espai mètric de amb la distància entre funcions d .

Observem que això té sentit pel lema 16.1.7.

Teorema 16.1.9. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores $\mathcal{C}_b(X, T)$ és espai mètric complet.*

Demostració. Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de Cauchy de $\mathcal{C}_b(X, T)$. Per la definició de **successió de Cauchy** (16.1.3) tenim que per a tots naturals n i m existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Per la definició de **distància entre funcions** (16.1.6) trobem que

$$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

i trobem que per a tot x de X es satisfà

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

i per la definició de **successió de Cauchy** (16.1.3) trobem que la successió $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ és de Cauchy, i per la definició de **límit** (5.2.1) trobem que la successió $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent. Denotem, per a tot x de X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (16.1)$$

Sigui n_0 un natural. Per la definició de **límit** (5.2.1) tenim que existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que per a tot n i m enters amb $n, m \geq n_0$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ara bé, per (16.1) tenim, per a tot x de X , que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| = \|f_n(x) - f(x)\|.$$

Per tant tenim que per a tot x de X es satisfà

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

i per la definició de **convergència uniforme** (9.2.4) tenim que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a $f(x)$, i per la definició de **espai mètric complet** (16.1.4) tenim que $\mathcal{C}_b(X, T)$ és complet. \square

16.1.2 Aplicacions contractives i punts fixes

Definició 16.1.10 (Aplicació contractiva). Siguin X amb la distància d un espai mètric i $T: X \rightarrow X$ una aplicació tal que existeixi un real $0 < k < 1$ satisfent, per a tots x i y de X ,

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y).$$

Aleshores direm que T és una aplicació contractiva sobre X .

Observació 16.1.11. *Siguin X amb la distància d un espai mètric i T una aplicació contractiva sobre X . Aleshores T és uniformement contínua.*

Definició 16.1.12 (Punt fix). *Siguin X amb la distància d un espai mètric, T una aplicació contractiva sobre X i a un punt tal que $d(a, T(a)) = 0$. Aleshores direm que a és un punt fix de T .*

Teorema 16.1.13. *Siguin X amb la distància d un espai mètric complet i T una aplicació contractiva sobre X . Aleshores T té un únic punt fix.*

Demostració. Per la definició d'**aplicació contractiva** (16.1.10) tenim que existeix un real $0 < k < 1$ tal que per a tots x i y de X es satisfà

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y). \quad (16.2)$$

Veiem que si existeix un punt fix aquest és únic. Suposem que existeixen dos punts a i b de X tals que a i b són punts fixos de T . Aleshores tenim que

$$d(a, b) = d(T(a), T(b)),$$

i per (16.2) tenim que

$$d(a, b) \leq k d(a, b).$$

Ara bé, com que $0 < k < 1$, ha de ser $d(a, b) = 0$, i per tant trobem que $a = b$.

Veiem ara que existeix un punt fix. Prenem un element x de X i considerem la successió $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Sigui r un natural. Aleshores tenim que per a tot n natural

$$d(T^{n+r}(x), T^n(x)) \leq k d(T^{n+r-1}(x), T^{n-1}(x)) \quad (16.2)$$

$$\leq k^2 d(T^{n+r-2}(x), T^{n-2}(x)) \quad (16.2)$$

$$\vdots$$

$$\leq k^n d(T^r(x), x) \quad (16.2)$$

$$\leq k^n (d(T^r(x), T^{r-1}(x)) + d(T^{r-1}(x), T^{r-2}(x)) + \dots$$

$$\dots + d(T(x), x))$$

$$= k^n (k^{r-1} d(T(x), x) + k^{r-2} d(T(x), x) + \dots + d(T(x), x))$$

$$= k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^{r-1}) d(T(x), x)$$

$$< \frac{k^n}{1 - k} d(T(x), x). \quad (9.1.3)$$

Ara bé, com que $0 < k < 1$ tenim que existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$d(T^{n+r}(x), T^n(x)) < \varepsilon,$$

i per la definició de **successió de Cauchy** (16.1.3) tenim que la successió $(T^n(x))$ és una successió de Cauchy, i com que, per hipòtesi, X és complet, tenim que existeix un element p de X tal que

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x). \quad (16.3)$$

Considerem el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)).$$

Com que, per l'observació 16.1.11, T és contínua, tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)\right)$$

i per (16.3) trobem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = T(p).$$

Ara bé, tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x)$$

i per tant trobem que

$$T(p) = p,$$

i per la definició de **punt fix d'una aplicació contractiva** (16.1.12) hem acabat. \square

Corol·lari 16.1.14. *Siguin X amb la distància d'un espai mètric complet i T una aplicació de X en X tal que existeix un natural k satisfent que T^k sigui una aplicació contractiva sobre X . Aleshores T té un únic punt fix.*

Demostració. Suposem que existeixen dos punts x i y de X tals que x i y són punts fixos de T . Aleshores per la definició de **punt fix d'una aplicació contractiva** (16.1.12) tenim que

$$T^k(x) = x$$

i

$$T^k(y) = y.$$

Ara bé, pel Teorema 16.1.13 tenim que ha de ser $x = y$, i per tant aquest punt és únic.

Veiem ara que existeix un punt x tal que $T(x) = x$. Tenim, per hipòtesi, que existeix un k natural tal que T^k és contractiva, i pel Teorema 16.1.13 tenim que existeix un punt x de X tal que $T^k(x) = x$. Tenim també que

$$T^{k+1}(x) = T(T^k(x)), \quad (16.4)$$

i per tant

$$T^{k+1}(x) = x \quad (16.5)$$

i amb (16.4) i (16.5), com que $T^k(x) = x$, trobem que

$$T(x) = x. \quad \square$$

16.2 Teoremes d'existència i unicitat

16.2.1 El Teorema de Picard

Definició 16.2.1 (Funció Lipschitz respecte la segona variable). Siguin $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunt, $K \geq 0$ un real i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|$$

per a tot (t, x) i (t, y) de Ω . Aleshores direm que f és Lipschitz respecte la segona variable.

Teorema 16.2.2 (Teorema de Picard). *Siguin a, b i t_0 tres reals, x_0 un punt de \mathbb{R}^n , $\Omega = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, b)$ un conjunt, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua i Lipschitz respecte la segona variable i*

$$M = \max_{(t,x) \in \Omega} \|f(t, x)\|.$$

Aleshores el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

té una única solució sobre l'interval

$$\left[t_0 - \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, t_0 + \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \right].$$

Demostració. Denotem $X = \mathcal{C}_b((t_0 - a, t_0 + a), \bar{B}(x_0, b))$ i definim una aplicació

$$\begin{aligned} T: X &\rightarrow X \\ u(t) &\mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Observem que una funció $u(t)$ és solució del problema de Cauchy de l'enunciat si i només si

$$T(u(t)) = u(t).$$

Tenim que si u és un element de X , aleshores $T(u)$ també pertany a X , ja que si prenem un t de $(t_0 - a, t_0 + a)$ trobem que

$$\begin{aligned} \|T(u(t)) - x_0\| &= \left\| x_0 - x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \right| \\ &\leq M|t - t_0| \leq b. \end{aligned} \tag{7.1.19}$$

i per tant tenim que

$$\|T(u(t)) - x_0\| \leq b.$$

Per la definició de [bola \(14.1.2\)](#) trobem que $T(u(t))$ és un element de $\bar{B}(x_0, b)$, i per tant $T(u)$ és un element de X per a tot u de X .

Per hipòtesi tenim que f és Lipschitz respecte la segona variable, i per la definició de [funció Lipschitz respecte la segona variable \(16.2.1\)](#) trobem que existeix un real $K \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|. \tag{16.6}$$

Volem veure que per a tot m natural, u i v funcions de X i t de $(t_0 - a, t_0 + a)$ tenim

$$\|T^m(u(t)) - T^m(v(t))\| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v).$$

Ho fem per inducció. Veiem el cas $m = 1$. Tenim

$$\begin{aligned} \|T(u(t)) - T(v(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \quad (7.1.19)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t K \|u(s) - v(s)\| ds \right| \quad (16.6)$$

$$= K \left| \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\| ds \right| \quad (7.1.17)$$

$$\leq K |t - t_0| d(u, v).$$

Suposem ara que l'hipòtesi és certa per a $m - 1$ fix. És a dir, suposem que

$$\|T^{m-1}(u(t))(t) - T^{m-1}(v(t))(t)\| \leq \frac{K^{m-1}}{(m-1)!} |t - t_0|^{m-1} d(u, v) \quad (16.7)$$

i veiem que també és cert per m . Tenim pel Teorema 7.1.19 que

$$\begin{aligned} \|T^m(u(t)) - T^m(v(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, T^{m-1}(u(s))) - f(s, T^{m-1}(v(s)))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, T^{m-1}(u(s))) - f(s, T^{m-1}(v(s)))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K \|T^{m-1}(u(s)) - T^{m-1}(v(s))\| ds \right| \end{aligned} \quad (16.6)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{K^m}{(m-1)!} |s - t_0|^{m-1} d(u, v) ds \right| \quad (16.7)$$

$$= \frac{K^m}{(m-1)!} d(u, v) \int_{t_0}^t |s - t_0|^{m-1} ds \quad (7.1.17)$$

$$= \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v).$$

Per tant, pel **principi d'inducció** (3.1.7) tenim que per a tot m natural, u i v funcions de X i t de $(t_0 - a, t_0 + a)$ es satisfà

$$\|T^m(u(t)) - T^m(v(t))\| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v),$$

com volíem veure.

Ara bé, tenim que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m = 0,$$

i per la definició de **límit** (5.2.1) tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$0 < \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m < 1.$$

Per tant, per la definició d'[aplicació contractiva](#) (16.1.10) tenim que per a tot $n > n_0$ l'aplicació T^n és una aplicació contractiva, i pel corollari 16.1.14 tenim que existeix una única funció u de X tal que

$$T(u(t)) = u(t). \quad \square$$

Corollari 16.2.3. *Siguin I un interval tancat de \mathbb{R} , $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ un conjunt, (t_0, x_0) un element de Ω i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua i Lipschitz respecte la segona variable. Aleshores el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

té una única solució definida en l'interval I .

Demostració. Quan b tendeix a infinit tenim que $\bar{B}(x_0, b) = \mathbb{R}^n$. \square

16.2.2 El Teorema de Peano

Definició 16.2.4 (Família de funcions puntualment acotada). Sigui H una família de funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ tal que per a tot x de X existeix un real M_x tal que

$$\|f(x)\| < M_x$$

per a tot f de H . Aleshores direm que H és puntualment acotada.

Definició 16.2.5 (Família de funcions equicontínua). Sigui H una família de funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ i x un punt de X tal que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un entorn N_x de x tal que per a tot y de N_x i f de H es satisfà

$$\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que H és equicontínua en x . Si H és equicontínua en x per a tot x de X direm que H és equicontínua en X .

Lema 16.2.6 (Teorema de Arzelà-Ascoli). *Siguin X un compacte i $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ equicontínua i puntualment acotada. Aleshores la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ té una parcial acotada.*

Demostració. Prenem un real $\varepsilon > 0$. Per la definició de [família de funcions equicontínua](#) (16.2.5) tenim que per a tot punt x de X existeix un entorn N_x de x tal que per a tot y de N_x tenim, per a tot n natural, que

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ara bé, per la definició d'[entorn](#) (14.2.11) tenim que existeix un obert \mathcal{V}_x de X tal que x és un element de \mathcal{V}_x i \mathcal{V}_x és un subconjunt de N_x . Per tant tenim que per a tot y de \mathcal{V}_x , per a tot n natural, es satisfà

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.8)$$

També tenim, per hipòtesi, que X és compacte, i per tant existeix una família $\{x_i\}_{i=1}^k$ de punts de X tals que

$$X = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_{x_i}. \quad (16.9)$$

Com que, per hipòtesi, la $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de funcions puntualment acotada, per la definició de **família de funcions puntualment acotada** (16.2.4) tenim que existeix un real M tal que per a tot n natural tenim

$$\|f_n(x_i)\| < M,$$

i tenim pel **Teorema de Bolzano-Weierstrass** (5.2.17) que existeix una parcial $(f_n^1(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Podem repetir l'argument per trobar una successió de la forma

$$(f_n^k(x_i))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{per a tot } i \text{ de } \{1, \dots, k\}.$$

Tenim que la successió $(f_n^k(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent. Per tant, per la definició de **límit** (5.2.1) trobem que existeix un element de X , $f^k(x_i)$ tal que existeix un natural n'_ε satisfent que per a tot $n > n'_\varepsilon$ es compleix

$$\|f_n^k(x_i) - f^k(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (16.10)$$

per tant trobem, si $m > n$ i $n > n'_\varepsilon$, que

$$\begin{aligned} \|f_n^k(x_i) - f_m^k(x_i)\| &\leq \|f_n^k(x_i) - f^k(x_i)\| + \|f^k(x_i) - f_m^k(x_i)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \end{aligned} \quad (16.10)$$

i per tant

$$\|f_n^k(x_i) - f_m^k(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.11)$$

Prenem ara un element x de X . Per (16.9) tenim que existeix un j de $\{1, \dots, k\}$ tal que x és un element de \mathcal{V}_{x_j} , i tenim que

$$\begin{aligned} \|f_n^k(x) - f_m^k(x)\| &\leq \|f_n^k(x) - f_n^k(x_j)\| + \|f_n^k(x_j) - f_m^k(x)\| \\ &\leq \|f_n^k(x) - f_n^k(x_j)\| + \|f_n^k(x_j) - f_m^k(x_j)\| + \\ &\quad + \|f_m^k(x_j) - f_m^k(x)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n^k(x_j) - f_m^k(x_j)\| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (16.11)$$

Tenim doncs que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix una parcial $(g_{n'_\varepsilon+n}^{(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfà

$$\|g_{n'_\varepsilon+n}^{(\varepsilon)} - g_{n'_\varepsilon+m}^{(\varepsilon)}\| \leq \varepsilon$$

per a tot n i m enters.

Definim, per simplificar la notació, la successió

$$(g_{n'_\varepsilon+n}^{(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}} = (f_{n'_\varepsilon-1+n}^{(\varepsilon-1)})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Per tant tenim que per a $\varepsilon = 1$ es satisfà

$$\left\| f_{n'_1+n}^{(1)}(x) - f_{n'_1+m}^{(1)}(x) \right\| \leq 1.$$

Si prenem $\varepsilon = \frac{1}{2}$ trobem una parcial $(f_{n_2+n}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_{n_1+n}^1)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfà

$$\left\| f_{n_2+n}^{(2)}(x) - f_{n_2+m}^{(2)}(x) \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Tenim doncs que per a tot i natural la successió $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ és una parcial de la successió $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ i per a tot n i m naturals tenim

$$\left\| f_{n_{i+1}+n}^{i+1}(x) - f_{n_{i+1}+m}^{i+1}(x) \right\| < \frac{1}{i},$$

i per tant, per la definició de **successió de Cauchy** (16.1.3) trobem que la successió $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ és de Cauchy per a tot i natural, i com que pel Teorema 16.1.9 tenim que $\mathcal{C}_b(X, T)$ és un espai complet, per la definició d'**espai mètric complet** (16.1.4) trobem que la parcial $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent, com volíem veure. \square

Teorema 16.2.7 (Teorema Peano). *Siguin a, b i t_0 dos reals, x_0 un punt de \mathbb{R}^n , $\Omega = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b)$ un conjunt, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua i M un real tal que $\|f(t, x)\| < M$ per a tot (t, x) de Ω . Aleshores el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

té una solució sobre l'interval

$$\left[t_0 - \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, t_0 + \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \right].$$

Demostració. \square

Corol·lari 16.2.8. *Siguin $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua i K un compacte de Ω . Aleshores existeix un real $\alpha > 0$ tal que per a tot punt (t_0, x_0) de K el problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

té solució sobre l'interval

$$[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Demostració. \square

16.2.3 Solucions improrrogables

Definició 16.2.9 (Conjunt de solucions d'un problema de Cauchy). Sigui

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(x)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (16.12)$$

un problema de Cauchy. Aleshores definirem

$$A(t_0, x_0) = \{(I, u) \mid u \text{ és solució del problema de Cauchy en l'interval } I\}$$

con el conjunt de solucions del problema de Cauchy (16.12).

Proposició 16.2.10. *Siguin $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy i \leq una relació tal que per a dos elements (I, u) i (J, v) de $A(t_0, x_0)$ tenim*

$$(I, u) \geq (J, v)$$

si i només si

$$J \subseteq I \quad \text{i} \quad u(x) = v(x) \text{ per a tot } x \in J.$$

Aleshores la relació \leq és una relació d'ordre.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'ordre:

1. Reflexiva: Pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) tenim que $I \subseteq I$ i per la definició d'[aplicació \(2.2.5\)](#) tenim que $u(x) = u(x)$ per a tot x de I . Per tant trobem $(I, u) \geq (I, u)$.
2. Antisimètrica: Suposem que $(I, u) \geq (J, v)$ i $(J, v) \geq (I, u)$. Aleshores tenim que $J \subseteq I$ i $I \subseteq J$, i pel [Teorema de la doble inclusió \(2.1.3\)](#) trobem que $I = J$. També tenim que $u(x) = v(x)$ per a tot x de I , i per la definició d'[aplicació \(2.2.5\)](#) trobem que $u = v$, i per tant $(I, u) = (J, v)$.
3. Transitiva: Siguin (I_1, u_1) , (I_2, u_2) i (I_3, u_3) tres elements de $A(t_0, x_0)$ tals que $(I_1, u_1) \geq (I_2, u_2)$ i $(I_2, u_2) \geq (I_3, u_3)$. Aleshores tenim que $I_3 \subseteq I_2$ i $I_2 \subseteq I_1$, i per la definició de [subconjunt \(2.1.2\)](#) trobem que $I_3 \subseteq I_1$.
També tenim que $u_1(x) = u_2(x)$ per a tot x de I_2 , i $u_2(x) = u_3(x)$ per a tot x de I_3 . Ara bé, com que I_3 és un subconjunt de I_1 tenim que $u_1(x) = u_2(x)$ per a tot x de I_3 , i per tant $u_1(x) = u_3(x)$ per a tot x de I_3 , i trobem que $(I_1, u_1) \geq (I_3, u_3)$.

I per la definició de [relació d'ordre \(11.3.12\)](#) hem acabat. \square

Definició 16.2.11 (Prolongació). Siguin $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy i (I, u) i (J, v) dos elements de $A(t_0, x_0)$ tals que

$$J \subseteq I \quad \text{i} \quad u(x) = v(x) \text{ per a tot } x \in J.$$

Aleshores direm que (I, u) és una prolongació de (J, v) .

Si (I, u) és un element maximal direm que (I, u) és una solució improrrogable.

Proposició 16.2.12. *Sigui $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy. Aleshores existeix un element (I, u) de $A(t_0, x_0)$ tal que (I, u) és una solució improrrogable.*

Demostració. Sigui $\{I_i, u_i\}_{i \in J}$ una família de solucions del problema de Cauchy amb $(I_i, u_i) \leq (I_j, u_j)$ si $i \leq j$. Aleshores, per la definició de [cadena](#) (11.3.13), trobem que la família $\{I_i, u_i\}_{i \in J}$ és una cadena.

Considerem $I = \bigcup_{i \in J} I_i$ i definim la funció $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $u(t) = u_n(t)$ si t pertany a I_n . Veiem que u està ben definida. Prenem t_0 de I . Suposem que t_0 pertany a I_n i I_m fixats. Aleshores, com que per hipòtesi, $(I_n, u_n) \leq (I_m, u_m)$ ó $(I_m, u_m) \leq (I_n, u_n)$. Suposem que $(I_n, u_n) \leq (I_m, u_m)$. Aleshores per la definició de [prolongació](#) (16.2.11) tenim que per a tot t de I_n tenim que $u_n(t) = u_m(t)$, i per tant u està ben definida. El cas $(I_m, u_m) \leq (I_n, u_n)$ és anàleg.

Ara bé, tenim que $(I_i, u_i) \leq (I, u)$ per a tot i de J , i per la definició de [cota superior d'una cadena](#) (11.3.15) tenim que $(I_i, u_i) \leq (I, u)$ és un element maximal de la cadena $(I_i, u_i)_{i \in J}$, i pel [Lema de Zorn](#) (11.3.16) tenim que existeix un element maximal de la cadena, i per la definició de [solució improrrogable](#) (16.2.11) hem acabat. \square

Proposició 16.2.13. *Siguin $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció tal que per a tot (t_0, x_0) de Ω el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (16.13)$$

té una única solució. Aleshores per a cada (t_0, x_0) de Ω el problema de Cauchy (16.13) té una única solució improrrogable.

Demostració. Prenem un element (t_0, x_0) de Ω i siguin (I, u) i (J, v) dues solucions de $A(t_0, x_0)$ \square

Teorema 16.2.14 (Lema de Wintner). *Siguin $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua, (φ, I) una solució de l'equació diferencial*

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t))$$

i (b, y) un punt d'acumulació de la gràfica de φ en Ω . Aleshores

$$\lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = y$$

i existeix una solució (J, v) de l'equació diferencial tal que $I \subseteq J$ i $b \in J$.

Demostració. \square

16.3 Dependència de les solucions d'un problema de Cauchy

Lema 16.3.1. *Sigui $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió uniformement equicontínua i uniformement acota de funcions contínues reals sobre un espai mètric compacte F tal que tota parcial uniformement convergent de la successió té per límit una funció φ . Aleshores la successió (φ_n) convergeix uniformement a φ .*

Demostració. Suposem que la successió $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no convergeix uniformement a φ . Per la definició de [límit \(5.2.1\)](#) tenim que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que per a tot N natural existeix un $n_N > N$ tal que

$$\|\varphi_{n_N} - \varphi\| \geq \varepsilon.$$

Per tant podem construir una successió $(\varphi_{n_N})_{N \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|\varphi_{n_N} - \varphi\| \geq \varepsilon \quad (16.14)$$

per a tot N natural. Ara bé, pel Teorema d'[Teorema de Arzelà-Ascoli \(16.2.6\)](#) la successió $(\varphi_{n_N})_{N \in \mathbb{N}}$ té una parcial uniformement convergent, que contradiu (16.14). Per tant tenim que la successió (φ_n) convergeix uniformement a φ . \square

Definició 16.3.2 (Convergència uniforme sobre compactes). Sigui X un espai mètric i $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues sobre \mathbb{R} tal que per a tot compacte K la successió de funcions $(f_m^K)_{m \in \mathbb{N}}$ definides com

Teorema 16.3.3 (Continuïtat respecte les condicions inicials). *Siguin Ω un obert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua tal que per a cada punt (t_0, x_0) de Ω el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

té una única solució maximal φ_{t_0, x_0} definida en un interval I_{t_0, x_0} i

$$D = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I_{t_0, x_0}\}.$$

Aleshores D és un obert i l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, t_0, x_0) &\mapsto \varphi_{t_0, x_0}(t) \end{aligned}$$

és contínua.

Demostració.

\square