

CLAUDI LLEYDA MOLTÓ

Apunts de matemàtiques

Les matemàtiques són un joc de definicions



NOTES DE CLASSE

PROMOCIÓ 2016-17

Índex

Índex	3
I Fonaments de les matemàtiques	13
1 Lògica matemàtica	15
1.1 Els fonaments	15
1.1.1 Processos fonamentals de les matemàtiques	15
1.1.2 Operacions lògiques elementals	15
1.1.3 Relacions vertaderes	16
1.1.4 Tautologies	16
2 Teoria de conjunts	21
2.1 Conjunts	21
2.1.1 Elements i subconjunts	21
2.1.2 Unió i intersecció de conjunts	22
2.2 Aplicacions entre conjunts	23
2.2.1 Aplicacions	23
2.2.2 Tipus d'aplicacions	24
2.2.3 Conjugació d'aplicacions	24
2.2.4 Aplicacions invertibles	25
2.3 Relacions d'equivalència	26
2.3.1 Relacions d'equivalència	26
2.3.2 Classes d'equivalència i conjunt quocient	27
3 Conjunts amb operacions i els nombres	29
3.1 Els nombres naturals	29
3.1.1 Axiomes de Peano	29
3.1.2 Operacions sobre els nombres naturals	30
3.2 Els nombres enters	35
3.2.1 Construcció dels nombres enters	35
3.2.2 Operacions sobre els nombres enters	36
3.2.3 Divisibilitat dels nombres enters	40
3.2.4 Màxim comú divisor	41
3.2.5 La divisió euclidiana i la identitat de Bézout	42
3.2.6 Mínim comú múltiple	44
3.2.7 Teorema Fonamental de l'Aritmètica	45
3.3 Els nombres modulars	47
3.3.1 Construcció dels nombres modulars	47

3.3.2	Operacions sobre nombres modulars	47
3.3.3	Congruències i aritmètica modular	49
3.3.4	El Teorema xinès de les restes	50
3.4	Les permutacions	52
3.4.1	El grup simètric	52
3.4.2	Permutacions disjunctes	53
3.4.3	Cicles	54
3.4.4	Descomposició en transposicions i signe	56
3.5	Els nombres racionals	56
3.5.1	Construcció dels nombres racionals	56
3.5.2	Operacions entre nombres racionals	58
Bibliografia		62
II Àlgebra lineal		65
4	Matrius	67
4.1	Matrius i operacions	67
4.1.1	Cossos	67
4.1.2	Les matrius	67
4.1.3	Propietats de les operacions amb matrius	68
4.1.4	Matrius inverses i matrius transposades	71
4.1.5	Producte de matrius en blocs	73
4.2	Rang d'una matriu	75
4.2.1	Transformacions elementals	75
4.2.2	Matrius esglaonades i mètode de Gauss	76
4.2.3	Reducció d'una matriu	78
4.3	Determinant d'una matriu	81
4.3.1	Propietats dels determinants	81
III Coses per fer		83
5	Aviat	85
5.1	Àlgebra lineal	85
5.1.1	Definicions	85
5.1.2	Proposicions	85
5.1.3	Teoremes	85
5.2	Funcions de variable real	86
5.2.1	Definicions	86
5.2.2	Proposicions	86
5.2.3	Teoremes	87
5.3	Trobar lloc per tot això	87
5.3.1	Complexos	88
5.4	Equacions diferencials ordinàries I	88
5.4.1	Teoria qualitativa	88

IV	Càlcul en diverses variables i optimització	91
6	Càlcul diferencial	93
6.1	Arcs i conjunts connexos	93
6.1.1	Arcs en múltiples variables	93
6.1.2	Oberts connexos	94
6.2	Funcions diferenciables	96
6.2.1	Diferencial d'una funció en múltiples variables	96
6.2.2	La Matriu Jacobiana i la regla de la cadena	99
6.2.3	Gradient, punts crítics i extrems relatius	102
6.2.4	Canvis de coordenades diferenciables	103
6.3	Teoremes de la funció implícita i inversa	104
6.3.1	Dependència i independència funcional	104
6.3.2	Varietats	105
6.3.3	Teorema de la funció inversa	107
6.3.4	Teorema de la funció implícita	110
6.4	Extrems relatius	111
6.4.1	El mètode de multiplicadors de Lagrange	111
6.4.2	Teorema del rang constant	112
6.4.3	Derivades d'ordre superior	114
6.4.4	Fórmula de Taylor en múltiples variables	115
6.4.5	Extrems lliures	116
7	Càlcul integral	119
7.1	La integral Riemann	119
7.1.1	Funcions integrables Riemann	119
7.1.2	La integral com a límit de sumes	123
7.1.3	Propietats de la integral Riemann definida	123
7.2	Les funcions integrables Riemann	126
7.2.1	Caracterització de les funcions integrables Riemann	126
7.2.2	Integració sobre conjunts generals	128
8	Càlcul vectorial	129
	Bibliografia	130
V	Anàlisi matemàtica	133
9	Sèries	135
9.1	Sèries numèriques	135
9.1.1	Convergència d'una sèrie numèrica	135
9.1.2	Sèries de termes positius	139
9.1.3	Criteris de convergència	140
9.1.4	Sèries alternades	149
9.1.5	Convergència absoluta d'una sèrie	150
9.1.6	Sèries del producte de successions	152
9.1.7	Reordenació de sèries	156
9.2	Successions de funcions	160
9.2.1	Convergència d'una successió de funcions	160

9.2.2	Convergència uniforme	160
9.2.3	Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat	161
9.3	Sèries de funcions	162
9.3.1	Convergència d'una sèrie de funcions	162
9.3.2	Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat	163
9.3.3	Convergència d'una sèrie de funcions	163
9.3.4	Sèries de potències	165
9.3.5	Teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass	167
10	Integrals impròpies	169
10.1	Integral impròpia de Riemann	169
10.1.1	Funcions localment integrables	169
10.1.2	Integrals impròpies de funcions positives	170
10.1.3	Convergència d'una integral impròpia	171
10.2	Aplicacions de les integrals impròpies	172
10.2.1	Integrals dependents d'un paràmetre	172
10.2.2	La funció Gamma d'Euler	173
11	Sèries de Fourier	175
11.1	Funcions periòdiques	175
11.1.1	Funcions periòdiques complexes	175
11.1.2	Funcions contínues a trossos	176
11.2	Sèries de Fourier	177
11.2.1	Coefficients de Fourier	177
11.2.2	Paritat d'una funció	178
11.2.3	Sèries de Fourier en termes de sinus i cosinus	178
11.3	Transformació de Fourier	179
11.3.1	Convolució de funcions 1-periòdiques	179
11.3.2	Polinomis trigonomètrics	181
	Bibliografia	182
VI	Estructures algebraiques	185
12	Teoria de grups	187
12.1	Grups	187
12.1.1	Propietats bàsiques dels grups	187
12.1.2	Subgrups i subgrups normals	191
12.1.3	Grups cíclics i grups abelians	194
12.1.4	Grup quocient	195
12.2	Tres Teoremes d'isomorfisme entre grups	197
12.2.1	Morfismes entre grups	197
12.2.2	Teoremes d'isomorfisme entre grups	202
12.3	Tres Teoremes de Sylow	205
12.3.1	Accions sobre grups	205
12.3.2	Teoremes de Sylow	207
13	Teoria d'anells	213
13.1	Anells	213

13.1.1	Propietats bàsiques dels anells i subanells	213
13.1.2	Ideals i ideals principals	216
13.1.3	Cossos i l'anell quocient	217
13.2	Tres Teoremes d'isomorfisme entre anells	219
13.2.1	Morfismes entre anells	219
13.2.2	Teoremes d'isomorfisme entre anells	222
13.2.3	Característica d'un anell	222
13.3	Dominis	223
13.3.1	Dominis d'integritat, ideals primers i maximals	223
13.3.2	Lema de Zorn	225
13.3.3	Divisibilitat	226
13.3.4	Dominis de factorització única	229
13.3.5	Anells Noetherians	231
13.3.6	Dominis d'ideals principals	232
13.3.7	Dominis Euclidians	233
13.4	Anells de polinomis	234
13.4.1	Cos de fraccions d'un domini d'integritat	234
13.4.2	El Teorema de Gauss	235
13.4.3	Criteris d'irreductibilitat	237
14	Teoria de cossos finits	239
14.1	Cossos finits	239
14.1.1	Propietats bàsiques dels cossos finits	239
14.1.2	Arrels d'un polinomi	240
14.2	Caracterització dels cossos finits i els seus subcossos	241
14.2.1	Teoremes d'existència i unicitat dels cossos finits	241
14.2.2	El morfisme de Frobenius	242
	Bibliografia	243
VII	Mètodes numèrics	245
15	Interpolació numèrica	247
15.1	El problema d'interpolació	247
15.1.1	Problemes d'interpolació	247
15.2	Polinomis interpoladors de Lagrange	248
15.2.1	Interpolació de Lagrange	248
15.2.2	Mètode de les diferències dividides de Newton	250
15.2.3	Error en la interpolació de Lagrange	252
15.2.4	Interpolació en nodes equiespaiats	253
15.3	Polinomis interpoladors per splines	254
15.3.1	Interpolació per splines	254
	Bibliografia	256
VIII	Topologia	259
16	L'espai topològic	261
16.1	Espais mètrics	261

16.1.1	Boles i oberts	261
16.2	L'espai topològic	262
16.2.1	Una topologia d'un conjunt i els oberts	262
16.2.2	Tancats	264
16.2.3	Base d'una topologia	265
16.2.4	Entorns, interior i adherència	267
16.3	Aplicacions contínues	270
16.3.1	Aplicacions obertes, tancades i contínues	270
16.3.2	Homeomorfismes entre topologies	271
17	Altres topologies	273
17.1	Topologies induïdes	273
17.1.1	La topologia induïda per un subconjunt	273
17.1.2	La topologia producte	275
17.2	La topologia quocient	279
17.2.1	Topologia quocient per una aplicació	279
17.2.2	Topologia quocient per una relació d'equivalència	281
17.2.3	Topologia quocient per un grup	282
18	Espais topològics	283
18.1	Espais compactes	283
18.1.1	Recobriments	283
18.1.2	Compacitat	284
18.1.3	Propietats dels espais compactes	286
18.2	Espais de Hausdorff	289
18.2.1	L'axioma de Hausdorff	289
18.2.2	Axiomes de separació de Tychonoff	290
18.2.3	Propietats dels espais Hausdorff	291
19	Espais connexos	297
19.1	Connexió	297
19.1.1	Els espais connexos	297
19.1.2	Propietats dels espais connexos	299
19.1.3	Connexió per camins	300
19.1.4	Components connexos d'un espai	300
	Bibliografia	302
IX	Probabilitat i modelització estocàstica	305
20	Models probabilístics	307
20.1	L'espai de probabilitat	307
20.1.1	Espais mostrals	307
20.1.2	Àlgebres i σ -àlgebres	308
20.1.3	L'àlgebra de Borel	309
20.1.4	Probabilitats	310

X	Equacions diferencials ordinàries I	317
21	Equacions diferencials de primer ordre en una variable	319
21.1	Espai de funcions contínues i acotades	319
21.1.1	L'espai de funcions contínues i acotades és complet . .	319
21.1.2	Aplicacions contractives i punts fixos	321
21.2	Teoremes d'existència i unicitat	323
21.2.1	Problema de Cauchy	323
21.2.2	El Teorema de Picard	324
21.2.3	El Teorema de Peano	327
21.2.4	Solucions improrrogables	331
21.3	Dependència de les solucions d'un problema de Cauchy	333
XI	Teoria de Galois	337
22	Teoria de Galois	339
22.1	Extensions de cossos	339
22.1.1	Elements algebraics i elements transcendents	339
22.1.2	Grau d'una extensió de cossos	341
22.1.3	TBD	341
22.1.4	Extensions algebraiques	343
22.1.5	El grup de Galois	344
22.1.6	Extensions de morfismes	345
22.1.7	El cos de descomposició	346
22.1.8	El cos de descomposició d'una família de polinomis . .	347
22.2	Extensions normals i extensions separables	349
22.2.1	Extensions normals	349
22.2.2	Elements separables	349
XII	Anàlisi complexa i de Fourier	351
23	Els nombres complexos	353
23.1	Estructura dels nombres complexos	353
23.1.1	Cos de nombres complexos	353
23.1.2	Propietats de nombres complexos	355
23.1.3	Topologia de nombres complexos	357
XIII	Geometria diferencial	361
24	Corbes	363
24.1	Parametritzacions i longitud	363
24.1.1	Reparametrització d'una corba	363
24.1.2	La longitud d'una corba i el paràmetre arc	364
24.2	Curvatura i torsió	369
24.2.1	Producte escalar i producte vectorial	369
24.2.2	Fórmules de Frenet	373
24.2.3	Teorema Fonamental de la teoria local de corbes	380

25	Superfícies	383
25.1	Superfícies regulars	383
25.1.1	Immersions i submersions	383
25.1.2	Superfícies	386
25.1.3	Funcions diferenciables i l'espai tangent	388
25.2	Primera forma fonamental	389
25.2.1	Espai tangent a una superfície	389
25.2.2	Longitud d'una corba	391
26	Càlcul vectorial	393
26.1	Formes diferencials i integració	393
26.1.1	Camps vectorials diferenciables	393
26.1.2	L'espai de camps vectorials	394
26.1.3	Producte escalar de camps vectorials	395
26.1.4	Derivada de Lie	395
26.1.5	Corbes integrals	395
XIV	Equacions diferencials ordinàries II	397
27	Sistemes autònoms al pla	399
27.1	Sistemes no integrables	399
27.1.1	Comportament límit de les òrbites	399
27.1.2	Teorema de Poincaré-Bendixson	400
27.1.3	Criteri de Bendixson-Dulac	400
28	Equacions en derivades parcials	401
28.1	Equacions en derivades parcials de primer ordre	401
28.1.1	Equació general de primer ordre	401
28.1.2	Equacions quasi-lineals de primer ordre	401

Part I

Fonaments de les matemàtiques

Lògica matemàtica

1.1 Els fonaments

1.1.1 Processos fonamentals de les matemàtiques

Definirem de manera informal els conceptes d'*objecte matemàtic*, de *relació* entre objectes i de *demostració* d'una relació. Aquests són els tres processos fonamentals de les matemàtiques.

Els *objectes matemàtics* són abstraccions de conceptes. Anomenem a les possibles propietats d'aquests objectes *relacions*. Aquestes poden ser o bé vertaderes o bé falses.

Anomenem a algunes d'aquestes relacions *axiomes*, que són relacions que prenem com a vertaderes des d'un principi. Per determinar la veracitat d'altres relacions empararem les *demostracions*. Direm que una relació és vertadera quan es pot deduir a partir dels axiomes amb una demostració, que és una successió d'arguments rigorosos per convèncer-nos que una relació és vertadera.

1.1.2 Operacions lògiques elementals

Definició 1.1.1 (Disjunció). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada disjunció. L'escriurem $R \vee S$, i ho llegirem “ R o S ”.

Definició 1.1.2 (Negació). Sigui R una relació. Aleshores definim una relació anomenada negació. L'escriurem $\neg R$ i ho llegirem “no R ”.

Definició 1.1.3 (Conjunció). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada conjunció definida com

$$R \wedge S = \neg((\neg R) \vee (\neg S)).$$

Ho llegirem “ R i S ”.

Definició 1.1.4 (Disjunció excloent). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada disjunció excloent definida com

$$R \vee\!\!\!\wedge S = (R \wedge (\neg S)) \vee ((\neg R) \wedge S).$$

Ho llegirem “o bé R o bé S ”.

Definició 1.1.5 (Implicació). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada implicació definida com

$$R \implies S = S \vee (\neg R).$$

Ho llegirem “ R implica S ” o “si R aleshores S ”.

Definició 1.1.6 (Doble implicació). Siguin R i S dues relacions. Aleshores definim una relació anomenada doble implicació definida com

$$R \iff S = (R \implies S) \wedge (S \implies R).$$

Ho llegirem com “ R si i només si S ” o “ R és equivalent a S ”.

1.1.3 Relacions vertaderes

Axioma 1.1.7. *Sigui R una relació. Aleshores la relació*

$$(R \vee R) \implies R$$

és vertadera.

Axioma 1.1.8. *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$R \implies (R \vee S)$$

és vertadera.

Axioma 1.1.9. *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$(R \vee S) \implies (S \vee R)$$

és vertadera.

Axioma 1.1.10. *Siguin R , S i T tres relacions. Aleshores la relació*

$$(R \implies S) \implies ((R \vee T) \implies (S \vee T))$$

és vertadera.

Axioma 1.1.11. *Siguin R i S dues relacions tals que R i $R \implies S$ siguin vertaderes. Aleshores S és vertadera.*

Definició 1.1.12 (Relació falsa). Sigui R una relació tal que $\neg R$ sigui vertadera. Aleshores direm que R és falsa.

1.1.4 Tautologies

Tautologia 1.1.13. *Siguin R , S i T tres relacions tals que $R \implies S$ i $S \implies T$ siguin vertaderes. Aleshores la relació $R \implies T$ és vertadera.*

Demostració. Per l'axioma 1.1.10 la relació

$$(S \implies T) \implies (S \vee (\neg R) \implies (T \vee (\neg R)))$$

és vertadera. Ara bé, per la definició d'1.1.5 això ho podem escriure com

$$(S \implies T) \implies ((R \implies S) \implies (R \implies T))$$

i com que, per hipòtesi, la relació $S \implies T$ és vertadera per l'axioma 1.1.11 tenim que la relació $(R \implies S) \implies (R \implies T)$ és vertadera, i com que, de nou per hipòtesi, tenim que la relació $R \implies S$ és vertadera tenim per l'axioma 1.1.11 que la relació $R \implies T$ és vertadera, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.14 (Tercer exclòs). *Sigui R una relació. Aleshores la relació $R \vee (\neg R)$ és vertadera.*

Demostració. La relació $R \vee (\neg R)$ és equivalent, per la definició d'1.1.5, a $R \implies R$. Per l'axioma 1.1.7 tenim que la relació $(R \vee R) \implies R$ és vertadera, i per l'axioma 1.1.8 tenim que la relació $R \implies (R \vee R)$ és vertadera. Per tant, per la tautologia 1.1.13, veiem que $R \implies R$. \square

Tautologia 1.1.15. *Siguin R i S dues relacions tals que R sigui vertadera. Aleshores les relacions $R \vee S$ i $S \vee R$ són vertaderes.*

Demostració. Per l'axioma 1.1.8 tenim que $R \implies (R \vee S)$ és vertadera, i per l'axioma 1.1.9 tenim que $(R \vee S) \implies (S \vee R)$ és vertadera.

Ara bé, per hipòtesi tenim que R és vertadera, i per l'axioma 1.1.11 veiem que les relacions $R \vee S$ i $S \vee R$ són vertaderes. \square

Tautologia 1.1.16. *Sigui R una relació. Aleshores la relació $R \iff \neg(\neg R)$ és vertadera.*

Demostració. Per la definició de 1.1.6 hem de veure que la relació

$$(\neg(\neg R) \vee (\neg R)) \wedge (R \vee (\neg(\neg(\neg R))))$$

és vertadera. Ara bé, si R és vertadera trobem per la definició de 1.1.2 que $\neg R$ és falsa, i aleshores per la tautologia del 1.1.14 les relacions $\neg(\neg R) \vee (\neg R)$ i $R \vee (\neg(\neg(\neg R)))$ són vertaderes

Si R és falsa trobem per la definició de 1.1.2 que $\neg R$ és vertadera, aleshores, de nou per la tautologia del 1.1.14, les relacions $\neg(\neg R) \vee (\neg R)$ i $R \vee (\neg(\neg(\neg R)))$ són vertaderes, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.17 (Primera llei de De Morgan). *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$\neg(R \vee S) \iff ((\neg R) \wedge (\neg S))$$

és vertadera.

Demostració. Per la definició de 1.1.3 volem veure que la relació

$$\neg(R \vee S) \iff \neg((\neg(\neg R)) \vee (\neg(\neg S)))$$

és vertadera. Aleshores, per la tautologia del 1.1.14 això és equivalent a veure que la relació

$$\neg(R \vee S) \iff \neg(R \vee S)$$

és vertadera, i per l'axioma 1.1.9 hem acabat. \square

Tautologia 1.1.18 (Segona llei de De Morgan). *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$\neg(R \wedge S) \iff ((\neg R) \vee (\neg S))$$

és vertadera.

Demostració. Per la definició de 1.1.3 hem de veure que la relació

$$((\neg R) \vee (\neg S)) \iff \neg((\neg(\neg R)) \wedge (\neg(\neg S))),$$

i per la tautologia 1.1.16 això és equivalent a veure que la relació

$$((\neg R) \vee (\neg S)) \iff \neg(R \wedge S),$$

que és conseqüència de la 1.1.17. □

Tautologia 1.1.19 (Llei de les contrarecíproques). *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació*

$$(R \implies S) \iff ((\neg S) \implies (\neg R))$$

és vertadera.

Demostració. Per la definició d'1.1.5 hem de veure que la relació

$$(S \vee (\neg R)) \iff ((\neg R) \vee (\neg(\neg S)))$$

és vertadera. Ara bé, per la tautologia 1.1.16 tenim que això és equivalent a veure que la relació

$$(S \vee (\neg R)) \iff ((\neg R) \vee S)$$

és vertadera, i pels axiomes 1.1.9 i 1.1.10 i la definició de 1.1.6 tenim que aquesta relació és vertadera, com volíem veure. □

Tautologia 1.1.20. *Siguin R i S dues relacions. Aleshores la relació $R \wedge S$ és vertadera si i només si R és vertadera i S és vertadera.*

Demostració. Veiem primer l'implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que R i S són vertaderes. Per l'axioma 1.1.8 la relació $S \vee (\neg R)$ és vertadera i, per la definició de 1.1.5 tenim que $R \implies S$ és vertadera. Ara bé, per la tautologia de 1.1.19 tenim que la relació $(\neg S) \implies (\neg R)$ és vertadera, i pels axiomes 1.1.10 i 1.1.7 tenim que la relació

$$((\neg S) \vee (\neg R)) \implies (\neg R)$$

és vertadera, i de nou per la tautologia de 1.1.19 trobem que la relació

$$(\neg(\neg R)) \implies (\neg(\neg S) \vee (\neg R))$$

és vertadera, i per la tautologia 1.1.16 trobem que la relació

$$R \implies (\neg((\neg S) \vee (\neg R)))$$

és vertadera, i per la definició de 1.1.3 això és equivalent a que la relació

$$R \implies (R \wedge S)$$

és vertadera, i per tant per l'axioma 1.1.11 trobem que $R \wedge S$ és vertadera, com volíem veure.

Veiem ara l'implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem doncs que la relació $R \wedge S$ és vertadera. Per la tautologia de 1.1.19 tenim que la relació $(R \wedge S) \Rightarrow S$ és vertadera si i només si la relació

$$(\neg R) \Rightarrow (\neg(\neg((\neg R) \vee (\neg S))))$$

és vertadera. Ara bé, per la tautologia 1.1.16 tenim que això és equivalent a veure que la relació

$$(\neg R) \Rightarrow ((\neg R) \vee (\neg S))$$

és vertadera, que és conseqüència de l'axioma 1.1.8, i per tant la relació $(R \wedge S) \Rightarrow R$ és vertadera. La demostració del cas $(R \wedge S) \Rightarrow S$ és anàloga. \square

Tautologia 1.1.21. *Siguin R i S dues relacions tals que R sigui falsa i $R \vee S$ sigui vertadera. Aleshores la relació S és vertadera.*

Demostració. Per la tautologia 1.1.16 tenim que la relació $R \Rightarrow (\neg(\neg R))$ és vertadera, i per l'axioma 1.1.10 això és que la relació

$$(R \vee S) \Leftarrow (\neg(\neg R) \vee S)$$

és vertadera. Ara bé, per la definició d'1.1.5 tenim que això és equivalent a la relació

$$(R \vee S) \Leftarrow ((\neg R) \Rightarrow S).$$

I com que, per hipòtesi, $R \vee S$ i $\neg R$ són vertaderes, tenim que S és vertadera, com volíem veure. \square

Tautologia 1.1.22. *Siguin R i S dues relacions tals que S sigui falsa i $R \vee S$ sigui vertadera. Aleshores R és vertadera.*

Demostració. Tenim, per la definició de 1.1.4, que la relació

$$(R \wedge (\neg S)) \vee ((\neg R) \wedge S)$$

és vertadera. Ara bé, com per hipòtesi S és falsa per la tautologia 1.1.21 tenim que la relació $(\neg R) \wedge S$ és falsa. Per tant per la tautologia 1.1.20 tenim que la relació $R \wedge (\neg S)$ és vertadera, i per la tautologia 1.1.20 tenim que R és vertadera. \square

Tautologia 1.1.23. *Siguin R i S dues relacions tals que R i $R \vee S$ siguin vertaderes. Aleshores S és falsa.*

Demostració. Tenim, per la definició de 1.1.4, que la relació

$$(R \wedge (\neg S)) \vee ((\neg R) \wedge S)$$

és vertadera. Com per hipòtesi la relació R és vertadera, per la definició de 1.1.2 tenim que $\neg R$ és falsa. I per la tautologia 1.1.20 tenim que la relació $(\neg R) \wedge S$ és falsa, i per la tautologia 1.1.21 tenim que la relació $R \wedge (\neg S)$ és vertadera.

Ara bé, de nou per la tautologia 1.1.20, tenim que la relació $\neg S$ ha de ser vertadera, i per la definició de 1.1.2 trobem que S és falsa. \square

Teoria de conjunts

2.1 Conjunts

2.1.1 Elements i subconjunts

Igual que en la secció anterior, només farem una introducció informal a la teoria de conjunts.

Definirem *conjunt* com un objecte matemàtic, i entre conjunts la relació \in de pertinència. Interpretem la relació $x \in A$ com que x és un *element* de A o que x pertany a A . Si la relació $x \in A$ és falsa aleshores ho denotarem com $x \notin A$ i direm que x no pertany a A .

Axioma 2.1.1 (Axioma d'Extensionalitat). *Siguin A i B dos conjunts tals que per a tot x tenim $x \in A$ si i només si $x \in B$. Aleshores $A = B$.*

Definició 2.1.2 (Subconjunt). *Siguin A i B dos conjunts tals que per a tot $x \in B$ tenim $x \in A$. Aleshores direm que B és un subconjunt de A i ho denotarem $B \subseteq A$.*

Teorema 2.1.3 (Doble inclusió). *Siguin A i B dos conjunts. Aleshores $A = B$ si i només si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\Leftarrow). Suposem doncs que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Per la definició de 2.1.2 tenim que si $x \in A$ aleshores $x \in B$, ja que per hipòtesi $A \subseteq B$. De mateixa manera tenim que si $x \in B$ aleshores $x \in A$, ja que per hipòtesi $B \subseteq A$. Per tant, per l'2.1.1 tenim que $A = B$.

Veiem ara que la condició és necessària (\Rightarrow). Suposem doncs que $A = B$. Tenim que si $x \in A$, aleshores $x \in B$, i per la definició de 2.1.2 això és que $A \subseteq B$. De mateixa manera, si $x \in B$ tenim $x \in A$, i de nou per la definició de 2.1.2 tenim que $B \subseteq A$, com volíem veure. \square

Axioma 2.1.4 (Axioma del Conjunt Potència). *Sigui A un conjunt. Aleshores existeix un conjunt $\mathcal{P}(A)$ tal que $B \subseteq A$ si i només si $B \in \mathcal{P}(A)$.*

Notació 2.1.5. Denotarem els conjunts com claus separant els seus elements amb comes. Per exemple, si tinguéssim un conjunt X que conté únicament els elements a , b i c el podríem denotar com

$$X = \{a, b, c\}.$$

Si tots els elements de X satisfan una relació R denotarem

$$X = \{x \mid x \text{ satisfà } R\}.$$

Axioma 2.1.6 (Axioma de Separació). *Siguin A un conjunt i R una relació. Aleshores el conjunt $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \text{ satisfà } R)\}$ existeix.*

Proposició 2.1.7. *Existeix un únic conjunt sense elements.*

Demostració. Considerem un conjunt A . Aleshores, per l'2.1.6 tenim que existeix un conjunt

$$X = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin A)\},$$

i per la tautologia 1.1.20 tenim que la relació $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ és falsa. Per tant el conjunt X no té elements.

La unicitat la tenim per l'2.1.1. □

Definició 2.1.8 (Conjunt buit). Direm que el conjunt que no té elements és el conjunt buit, i el denotarem com \emptyset .

Aquesta definició té sentit per la proposició 2.1.7.

Axioma 2.1.9 (Axioma de Regularitat). *Sigui A un conjunt. Aleshores tenim que $\emptyset \subseteq A$.*

2.1.2 Unió i intersecció de conjunts

Axioma 2.1.10 (Axioma d'Infinitud). *Existeix un conjunt infinit.*

Axioma 2.1.11 (Axioma de la Unió). *Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ és una família de conjunts. Aleshores el conjunt $\{x \mid x \in A_i \text{ per a cert } i \in I\}$ existeix.*

Definició 2.1.12 (Unió de conjunts). *Siguin A i B dos conjunts. Aleshores direm que el conjunt*

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

és la unió de A i B .

Aquesta definició té sentit per l'2.1.11.

Definició 2.1.13 (Intersecció de conjunts). *Siguin A i B dos conjunts. Aleshores direm que el conjunt*

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

és la intersecció de A i B .

Aquesta definició té sentit per l'2.1.6.

Notació 2.1.14. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ és una família de conjunts, denotarem la unió de tots aquests com

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ per a cert } i \in I\}.$$

Denotem la intersecció de tots aquests com

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ per a tot } i \in I\}.$$

2.2 Aplicacions entre conjunts

2.2.1 Aplicacions

Axioma 2.2.1 (Axioma del Parell). *Per a qualsevol parella d'elements a, b existeix un conjunt $\{a, b\}$ que conté únicament a i b .*

Definició 2.2.2 (Parelles ordenades). Siguin a i b dos elements. Aleshores direm que $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ és una parella ordenada.

Aquesta definició té sentit per l'2.2.1.

Proposició 2.2.3. *Siguin (a, b) i (c, d) dues parelles ordenades. Aleshores $(a, b) = (c, d)$ si i només si $a = c$ i $b = d$.*

Demostració. Suposem que $a = c$ i $b = d$. Aleshores tenim que $a \in \{c, \{c, d\}\}$, $\{a, b\} \in \{c, \{c, d\}\}$, $c \in \{a, \{a, b\}\}$ i $\{c, d\} \in \{a, \{a, b\}\}$, i per tant, per la definició de 2.1.2 tenim que $\{c, \{c, d\}\} \subseteq \{a, \{a, b\}\}$ i $\{a, \{a, b\}\} \subseteq \{c, \{c, d\}\}$, i pel 2.1.3 tenim que això és si i només si $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$, i per la definició de 2.2.2 trobem que $(a, b) = (c, d)$. \square

Definició 2.2.4 (Producte cartesià de conjunts). Siguin A i B dos conjunts. Aleshores definim el conjunt

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

com el producte cartesià de A i B .

Definició 2.2.5 (Aplicació). Siguin A i B dos conjunts i f un subconjunt de $A \times B$ tal que si (a, b) i (a, b') són elements de f , aleshores $b = b'$. Aleshores direm que f és una aplicació de A sobre B i escriurem $b = f(a)$. També denotarem $f: A \rightarrow B$ i

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto b \end{aligned}$$

Axioma 2.2.6 (Axioma de Reemplaçament). *Siguin A i B dos conjunts i f una aplicació de A sobre B . Aleshores el conjunt $\{f(x) \in B \mid x \in A\}$ existeix.*

2.2.2 Tipus d'aplicacions

Definició 2.2.7 (Aplicació injectiva). Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot a, a' elements de X satisfent $f(a) = f(a')$ tenim $a = a'$. Aleshores direm que f és injectiva.

Definició 2.2.8 (Aplicació exhaustiva). Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot $b \in Y$ existeix $a \in A$ satisfent $f(a) = b$. Aleshores direm que f és exhaustiva.

Definició 2.2.9 (Aplicació bijectiva). Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació injectiva i exhaustiva. Aleshores direm que f és bijectiva.

2.2.3 Conjugació d'aplicacions

Proposició 2.2.10. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions. Aleshores $h(a) = g(f(a))$ per a tot $a \in A$ és una aplicació de A en C .*

Demostració. Per la definició d'2.2.5 hem de veure que h està ben definida. És a dir, que si prenem dos elements a i a' de A tals que $a = a'$, aleshores $h(a) = h(a')$.

Siguin doncs a i a' dos elements de A tals que $a = a'$. Com que, per hipòtesi, f és una aplicació tenim per la definició d'2.2.5 que $f(a) = f(a') = b$, per a cert $b \in B$, i per tant, com que per hipòtesi g és una aplicació, trobem $g(f(a)) = g(b) = c$ i $g(f(a')) = g(b) = c$ per a cert $c \in C$, i per tant $h(a) = h(a')$, com volíem veure.

També tenim que $f \subseteq A \times C$, ja que si $c = h(a)$ tenim $c = g(f(a))$, i per la definició d'2.2.5 tenim que $a \in A$ i $c \in C$. Per tant, per la definició de 2.1.2 tenim que h és una aplicació. \square

Definició 2.2.11 (Conjugació d'aplicacions). Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions. Aleshores direm que l'aplicació $g(f)$ és la composició de g amb f i ho denotarem com

$$\begin{aligned} g \circ f: A &\rightarrow C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

Aquesta definició té sentit per la proposició 2.2.10.

Proposició 2.2.12. *Siguin $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ i $h: C \rightarrow D$ aplicacions. Aleshores*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Demostració. Hem de veure que per a tot $a \in A$ tenim $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$. Ara bé, tenim que

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

i

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))).$$

Per tant, per la definició d'2.2.5 tenim que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. \square

Teorema 2.2.13. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions injectives. Aleshores l'aplicació $g \circ f$ és injectiva.*

Demostració. Prenem a i a' dos elements de A tals que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Aleshores tenim $g(f(a)) = g(f(a'))$, i per la definició d'2.2.7 com que, per hipòtesi g i és injectiva tenim que $f(a) = f(a')$, i com que, per hipòtesi, f és injectiva, tenim que $a = a'$, i de nou per la definició d'2.2.7 tenim que $g \circ f$ és injectiva. \square

Teorema 2.2.14. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions exhaustives. Aleshores l'aplicació $g \circ f$ és exhaustiva.*

Demostració. Prenem un element $c \in C$. Aleshores per la definició d'2.2.8 tenim que existeixen $a \in A$ i $b \in B$ tals que $b = f(a)$ i $c = g(b)$. Per tant per la definició d'2.2.8 tenim que $g \circ f$ és una aplicació exhaustiva, ja que per a tot $c \in C$ existeix $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. \square

Teorema 2.2.15. *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions bijectiva. Aleshores l'aplicació $g \circ f$ és bijectiva.*

Demostració. Per la definició d'2.2.9 hem de veure que $g \circ f$ és injectiva i exhaustiva. Ara bé, per hipòtesi tenim que f i g són bijectives, i de nou per la definició d'2.2.9 tenim que f i g són ambdues injectives i exhaustives. Per tant, pel Teorema 2.2.13 tenim que $g \circ f$ és injectiva, i pel Teorema 2.2.14 tenim que $g \circ f$ és exhaustiva, com volíem veure. \square

2.2.4 Aplicacions invertibles

Definició 2.2.16 (Aplicació invertible). *Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow A$ dues aplicacions tals que per a tot $a \in A$ i $b \in B$ es compleix*

$$(f \circ g)(a) = a \quad \text{i} \quad (g \circ f)(b) = b.$$

Aleshores direm que f és la inversa de g i que f és una aplicació invertible o que f té inversa.

Teorema 2.2.17. *Siguin $f: A \rightarrow B$ una aplicació invertible i $g_1: B \rightarrow A$ i $g_2: B \rightarrow A$ dues inverses de f . Aleshores $g_1 = g_2$.*

Demostració. Per la definició d'2.2.16 tenim que per a tot $a \in A$, $b \in B$

$$(g_1 \circ f)(a) = a \quad \text{i} \quad (f \circ g_2)(b) = b.$$

Ara bé, tenim

$$((g_1 \circ f) \circ g_2)(b) = g_2(b) \quad \text{i} \quad (g_1 \circ (f \circ g_2))(b) = g_1(b)$$

i per la proposició 2.2.12 trobem que $g_1 = g_2$, com volíem veure. \square

Notació 2.2.18. Aprofitant el Teorema 2.2.17 denotarem la inversa d'una aplicació $f: A \rightarrow B$ amb f^{-1} , i per tant definim l'aplicació

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A.$$

Aleshores tenim que $Id_A: A \rightarrow A$ és l'aplicació bijectiva i satisfà $Id_A(a) = a$ per a tot $a \in A$.

També denotarem la conjugació d'una aplicació $g: A \rightarrow A$ amb sí mateixa k de vegades com

$$g^k = g \circ \overset{k}{\dots} \circ g.$$

Teorema 2.2.19. *Sigui $f: A \rightarrow B$ una funció. Aleshores f és bijectiva si i només si f és invertible.*

Demostració. Comencem veient que la condició és necessària (\implies). Suposem doncs que f és una aplicació bijectiva. Per la definició d'2.2.9 tenim que f és injectiva i exhaustiva. Per tant per la definició d'2.2.7 i la definició d'2.2.8 tenim que per a tot $b \in B$ existeix un únic $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

Per tant definim l'aplicació $g: B \rightarrow A$ tal que $g(b) = a$. Ara bé, tenim que per a tot $a \in A$ i $b \in B$

$$(g \circ f)(a) = a \quad \text{i} \quad (f \circ g)(b) = b,$$

i per la definició d'2.2.16 tenim que f és invertible, com volíem veure.

Comprovem ara que la condició és suficient (\impliedby). Suposem doncs que f té inversa. Prenem dos elements a i a' de A tals que $f(a) = f(a')$. Ara bé, per la definició d'2.2.16 tenim que $(f^{-1} \circ f)(a) = a$ i $(f^{-1} \circ f)(a') = a'$ amb $(f^{-1} \circ f)(a) = (f^{-1} \circ f)(a')$, i per tant $a = a'$ i per la definició d'2.2.7 tenim que f és injectiva.

Sigui b un element de B i prenem a de A tal que $f^{-1}(b) = a$. Aleshores trobem

$$b = Id_B(b) = f \circ f^{-1}(b) = f(a),$$

i per la definició d'2.2.8 tenim que f és una aplicació exhaustiva, i per la definició d'2.2.9 trobem que f és bijectiva. \square

Corol·lari 2.2.20. *Si f és invertible aleshores f^{-1} és invertible i $(f^{-1})^{-1} = f$.*

2.3 Relacions d'equivalència

2.3.1 Relacions d'equivalència

Definició 2.3.1 (Relació binària). Sigui X un conjunt no buit, \sim un subconjunt de $X \times X$ i (x, y) un element del subconjunt \sim . Aleshores direm que els elements x i y estan relacionats i escriurem $x \sim y$. També direm que \sim és una relació binària.

Si (x', y') no és un element de \sim escriurem $x' \not\sim y'$.

Definició 2.3.2 (Relació d'equivalència). Sigui X un conjunt no buit i \sim una relació que satisfà les propietats

1. Reflexiva: Si x és un element de X , aleshores $x \sim x$.
2. Simètrica: Si x, y són elements de X tals que $x \sim y$, aleshores $y \sim x$.
3. Transitiva: Si x, y, z són elements de X tals que $x \sim y$ i $y \sim z$, aleshores $x \sim z$.

Aleshores direm que \sim és una relació d'equivalència en X .

2.3.2 Classes d'equivalència i conjunt quocient

Definició 2.3.3 (Classe d'equivalència). Sigui X un conjunt no buit, \sim una classe d'equivalència en X i

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

un subconjunt de X . Aleshores direm que $[x]$ és la classe d'equivalència de x .

També denotarem $[x] = \bar{x}$.

Proposició 2.3.4. *Sigui X un conjunt no buit i x, y elements de X . Aleshores o bé $[x] = [y]$ o bé $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Demostració. Denotarem la relació d'equivalència amb \sim .

Suposem que $x \sim y$. Tenim que $[x] \subseteq [y]$, ja que si prenem $z \in X$ tal que $z \in [x]$. Aleshores per la definició de 2.3.3 tenim que $x \sim z$. Per hipòtesi tenim que $x \sim y$, i per tant, per la definició de 2.3.2 tenim que $y \sim z$, i per la definició de 2.3.3 trobem $z \in [y]$. Per tant, per la definició de 2.1.2 tenim que $[x] \subseteq [y]$.

Ara bé, també tenim que $[y] \subseteq [x]$, ja que si prenem $z \in X$ tal que $z \in [y]$. Aleshores per la definició de 2.3.3 tenim que $y \sim z$. Per hipòtesi tenim que $x \sim y$, i per tant, per la definició de 2.3.2 tenim que $z \sim x$, i per la definició de 2.3.3 trobem $z \in [x]$. Per tant, per la definició de 2.1.2 tenim que $[y] \subseteq [x]$. Per tant, pel 2.1.3 tenim que $[x] = [y]$.

Suposem ara que $x \not\sim y$ i prenem un element $z \in [x] \cap [y]$. Aleshores, per la definició de 2.3.3 tenim que $z \sim x$ i $y \sim z$, i per la definició de 2.3.2 tenim que $x \sim y$. Ara bé, havíem suposat que $x \not\sim y$. Per tant z no pot existir i trobem $[x] \cap [y] = \emptyset$. \square

Definició 2.3.5 (Conjunt quocient). Sigui X un conjunt no buit i \sim una relació d'equivalència en X . Aleshores definim el conjunt

$$X / \sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

com el conjunt quocient de X per \sim .

Conjunts amb operacions i els nombres

3.1 Els nombres naturals

3.1.1 Axiomes de Peano

Definició 3.1.1 (Nombres naturals). Sigui \mathbb{N} un conjunt i S una aplicació que satisfan

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $S(n) \in \mathbb{N}$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $S(n) \neq 1$.
4. Si $n, m \in \mathbb{N}$ amb $S(n) = S(m)$, aleshores $n = m$.
5. Si \mathbb{M} és un conjunt tal que $1 \in \mathbb{M}$ i tal que $S(m) \in \mathbb{M}$ per a tot $m \in \mathbb{M}$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$.

Aleshores direm que \mathbb{N} és el conjunt dels nombres naturals, i anomenarem els elements de \mathbb{N} nombres naturals.

Lema 3.1.2. $\mathbb{N} = \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\}$.

Demostració. Ho farem pel principi de doble inclusió. Per la definició de 3.1.1 tenim que si $n \in \mathbb{N}$, aleshores $S(n) \in \mathbb{N}$. Per tant trobem que

$$\mathbb{N} \supseteq \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\}.$$

Tenim també, per la definició de 3.1.1, que si \mathbb{M} és un conjunt tal que $1 \in \mathbb{M}$ i tal que $S(m) \in \mathbb{M}$ per a tot $m \in \mathbb{M}$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}$, i per tant

$$\mathbb{N} \subseteq \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\},$$

i pel 2.1.3 tenim que

$$\mathbb{N} = \{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\},$$

com volíem veure. \square

Notació 3.1.3. Denotarem $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 4$, etc. Per tant

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Això té sentit pel lema 3.1.2.

Notació 3.1.4. Denotarem l'acció d'aplicar l'aplicació S al nombre natural n un nombre natural k de vegades com $S^k(n)$.

Teorema 3.1.5 (Teorema del primer element). *Sigui A un subconjunt no buit de \mathbb{N} . Aleshores existeix $a \in A$ tal que no existeixi cap $b \in A$ satisfent $S(b) = a$.*

Demostració. Sigui a un element de A . Aleshores pel lema 3.1.2 tenim que $a = S^k(1)$ per a cert $k \in \mathbb{N}$. Si $1 \in A$ hem acabat per la definició de 3.1.1. Suposem doncs que $1 \notin A$. Si $S(1) \in A$ també hem vist el que volíem. Podem iterar aquest procés un màxim de k vegades, ja que $S^k(1)$ és, per hipòtesi, un nombre natural, i per tant seria a un element de A tal que no existeix b satisfent $S(b) = a$. \square

Definició 3.1.6 (Primer element). Sigui A un subconjunt no buit de \mathbb{N} i a un element de A tal que no existeix cap $b \in A$ satisfent $S(b) = a$. Aleshores direm que a és el primer element de A .

Aquesta definició té sentit per la definició de 3.1.1 i el Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.7 (Principi d'inducció). *Sigui $R(n)$ una relació dependent d'un paràmetre $n \in \mathbb{N}$ tal que*

1. $R(1)$ és vertadera.
2. Si $R(n)$ és vertadera aleshores $R(S(n))$ és vertadera.

Aleshores $R(n)$ és vertadera per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid R(n) \text{ és falsa}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 tenim que $A \subseteq \mathbb{N}$. Suposem que A és un conjunt no buit. Aleshores pel 3.1.5 tenim que existeix un primer element a de A . Ara bé, pel punt (1) tenim que $a \neq 1$, per tant, pel lema 3.1.2 tenim que $a = S(b)$ per a cert $b \in \mathbb{N}$. Com que a és el primer element de A , per la definició de 3.1.6 tenim que $b \notin A$, i per tant $P(b)$ és vertadera. Ara bé, pel punt (2) tenim que $P(S(b)) = P(a)$ és vertadera, i per tant $a \notin A$, arribant a contradicció. Per tant trobem que A és el conjunt buit, i trobem que $R(n)$ és vertadera per a tot $n \in \mathbb{N}$. \square

3.1.2 Operacions sobre els nombres naturals

Definició 3.1.8 (Suma de nombres naturals). Definim la suma de nombres naturals com una operació $+$ que satisfà per a tot $n, k \in \mathbb{N}$

$$n + 1 = S(n) \quad \text{i} \quad n + S(k) = S(n + k).$$

Definició 3.1.9 (Producte de nombres naturals). Definim el producte de nombres naturals com una operació \cdot que satisfà per a tot $n, k \in \mathbb{N}$

$$n \cdot 1 = n \quad \text{i} \quad n \cdot S(k) = n \cdot k + n.$$

Denotarem $n \cdot k = nk$ per a tot $n, k \in \mathbb{N}$.

Proposició 3.1.10. *Siguin x, y, z tres nombres naturals. Aleshores*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid (x + y) + z = x + (y + z) \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tenim

$$x + (y + 1) = x + S(y) \quad (3.1.8)$$

$$= S(x + y) \quad (3.1.8)$$

$$= (x + y) + 1. \quad (3.1.8)$$

També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, tenim per a tot $x, y \in \mathbb{N}$

$$x + (y + S(z)) = x + S(y + z) \quad (3.1.8)$$

$$= S(x + (y + z)) \quad (3.1.8)$$

$$= S((x + y) + z) \quad (\text{Per hipòtesi})$$

$$= (x + y) + S(z). \quad (3.1.8)$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.11. *Siguin x, y dos nombres naturals. Aleshores*

$$x + S(y) = S(x) + y.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid x + S(y) = S(x) + y \text{ per a tot } x \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$x + S(1) = S(x + 1) \quad (3.1.8)$$

$$= S(S(x)) \quad (3.1.8)$$

$$= S(x) + 1. \quad (3.1.8)$$

També tenim que si $y \in A$, aleshores $S(y) \in A$. Efectivament, tenim que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$x + S(S(y)) = S(x + S(y)) \quad (3.1.8)$$

$$= S(S(x) + y) \quad (\text{Per hipòtesi})$$

$$= S(x) + S(y). \quad (3.1.8)$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(y) \in A$ per a tot $y \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.12. *Siguin x, y dos nombres naturals. Aleshores*

$$x + y = y + x.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 + y = y + 1\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $B \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in B$, ja que $1 + 1 = 1 + 1$. També tenim que si $y \in B$, aleshores $S(y) \in B$. Efectivament,

$$\begin{aligned} S(y) + 1 &= y + S(1) && \text{(Proposició 3.1.11)} \\ &= S(y + 1) && \text{(3.1.8)} \\ &= S(1 + y) && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= 1 + S(y). && \text{(3.1.8)} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si B és un conjunt tal que $1 \in B$ i tal que $S(y) \in B$ per a tot $y \in B$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq B$, i pel 2.1.3 tenim que $\mathbb{N} = B$.

Definim ara el conjunt

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid x + y = y + x \text{ per a tot } x \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que $1 \in B \subseteq A$. També tenim que si $y \in A$, aleshores $S(y) \in A$. Efectivament, tenim que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x + S(y) &= S(x + y) && \text{(3.1.8)} \\ &= S(y + x) && \text{(Per hipòtesi)} \\ &= y + S(x). && \text{(3.1.8)} \\ &= S(y) + x. && \text{(Proposició 3.1.11)} \end{aligned}$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(y) \in A$ per a tot $y \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.13. *Siguin x, y, z tres nombres naturals. Aleshores*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tenim

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot S(y) \quad (3.1.8)$$

$$= x \cdot y + x \quad (3.1.9)$$

$$= x \cdot y + x \cdot 1. \quad (3.1.9)$$

També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, tenim per a tot $x, y \in \mathbb{N}$

$$x \cdot (y + S(z)) = x \cdot S(y + z) \quad (3.1.8)$$

$$= x \cdot (y + z) + x \quad (3.1.9)$$

$$= (x \cdot y + x \cdot z) + x \quad (\text{Per hipòtesi})$$

$$= x \cdot y + (x \cdot z + x) \quad (\text{Proposició 3.1.10})$$

$$= x \cdot y + x \cdot S(z). \quad (3.1.9)$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.14. *Siguin x, y, z tres nombres naturals. Aleshores*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tenim

$$x \cdot (y \cdot 1) = x + y \quad (3.1.9)$$

$$= (x \cdot 1) \cdot y. \quad (3.1.9)$$

També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, tenim per a tot $x, y \in \mathbb{N}$

$$x \cdot (y \cdot S(z)) = x \cdot (y \cdot z + y) \quad (3.1.9)$$

$$= x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y \quad (\text{Proposició 3.1.13})$$

$$= (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y \quad (\text{Per hipòtesi})$$

$$= (x \cdot y) \cdot S(z). \quad (3.1.9)$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Proposició 3.1.15. *Siguin x, y dos nombres naturals. Aleshores*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Demostració. Definim el conjunt

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot y = y \cdot 1\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $B \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in B$, ja que $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$. També tenim que si $x \in B$, aleshores $S(x) \in B$. Efectivament,

$$S(x) \cdot 1 = (x + 1) \cdot 1 \quad (3.1.8)$$

$$= x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \quad (3.1.9)$$

$$= x \cdot 1 + 1 \quad (3.1.9)$$

$$= 1 \cdot x + 1 \quad (\text{Per hipòtesi})$$

$$= 1 \cdot S(x). \quad (3.1.9)$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si B és un conjunt tal que $1 \in B$ i tal que $S(y) \in B$ per a tot $y \in B$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq B$, i pel 2.1.3 tenim que $\mathbb{N} = B$.

Definim ara el conjunt

$$A = \{y \in \mathbb{N} \mid x + y = y + x \text{ per a tot } x \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que $1 \in B \subseteq A$. També tenim que si $y \in A$, aleshores $S(y) \in A$. Efectivament, tenim que per a tot $x \in \mathbb{N}$

$$x \cdot S(y) = x \cdot y + x \quad (3.1.9)$$

$$= y \cdot x + x \quad (\text{Per hipòtesi})$$

$$= y \cdot x + x \cdot 1 \quad (3.1.9)$$

$$= y \cdot x + 1 \cdot x \quad (1 \in A)$$

$$= (y + 1) \cdot x \quad (\text{Proposició 3.1.13})$$

$$= S(y) \cdot x. \quad (3.1.9)$$

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(y) \in A$ per a tot $y \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Teorema 3.1.16. *Siguin x, y i z tres nombres naturals tals que $x + z = x + y$. Aleshores $x = y$.*

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid x + z = y + z \implies x = y \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que si $x + 1 = y + 1$ per la definició de 3.1.8 trobem que $S(x) = S(y)$, i per la definició de 3.1.1 trobem que $x = y$. També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tals que $x + S(z) = y + S(z)$ tenim per la definició de 3.1.8 que

$$x + z + 1 = y + z + 1,$$

i per la proposició 3.1.12 tenim que

$$x + 1 + z = y + 1 + z.$$

Per tant, per la definició de 3.1.8, trobem

$$S(x) + z = S(y) + z,$$

i per hipòtesi, $S(x) = S(y)$, i per la definició de 3.1.1 tenim que $x = z$.

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

Teorema 3.1.17. *Siguin x , y i z tres nombres naturals tals que $xz = yz$. Aleshores $x = y$.*

Demostració. Definim el conjunt

$$A = \{z \in \mathbb{N} \mid xz = yz \implies x = y \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Per la definició de 2.1.2 trobem que $A \subseteq \mathbb{N}$.

Tenim que $1 \in A$, ja que si $x \cdot 1 = y \cdot 1$ per la definició de 3.1.9 trobem que $x = y$. També tenim que si $z \in A$, aleshores $S(z) \in A$. Efectivament, per a tot $x, y \in \mathbb{N}$ tals que $x \cdot S(z) = y \cdot S(z)$ tenim per la definició de 3.1.9 que

$$x \cdot z + x \cdot 1 = y \cdot z + y \cdot 1.$$

Ara bé, per hipòtesi tenim que $x \cdot z = y \cdot z$, i pel Teorema 3.1.16 trobem $x = y$.

Ara bé. Per la definició de 3.1.1, tenim que si A és un conjunt tal que $1 \in A$ i tal que $S(z) \in A$ per a tot $z \in A$, aleshores $\mathbb{N} \subseteq A$, i pel 2.1.3 tenim que $A = \mathbb{N}$. \square

3.2 Els nombres enters

3.2.1 Construcció dels nombres enters

Proposició 3.2.1. *Sigui \sim una relació binària sobre $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, amb $n + 0 = 0 + n = n$ i $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$, tal que per a tot (a, b) i (c, d) elements de $A \times A$*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Sigui (a, b) un element de $A \times A$. Aleshores per la proposició 3.1.12 tenim que $a + b = b + a$, i per tant $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Simètrica: Siguin (a, b) i (c, d) elements de $A \times A$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$. Aleshores significa que $a + d = b + c$, i per la la proposició 3.1.12 tenim que $c + b = d + a$ i per tant $(c, d) \sim (a, b)$.

3. Transitiva: Siguin (a, b) , (c, d) i (e, f) elements de $A \times A$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$. Això és que

$$a + d = b + c \quad \text{i} \quad c + f = d + e.$$

Ara bé, tenim

$$a + d + f = b + c + f$$

i per tant

$$a + d + f = b + d + e$$

d'on trobem $a + f = b + e$, i per tant $(a, b) \sim (e, f)$.

I per la definició de 2.3.2 hem acabat. \square

Definició 3.2.2 (Nombres enters). Sigui \sim una relació d'equivalència sobre $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$, amb $n + 0 = 0 + n = n$ i $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$, i \sim una relació d'equivalència tal que per a tot (a, b) i (c, d) elements de $A \times A$

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Aleshores direm que el conjunt quocient $\mathbb{Z} = A \times A / \sim$ és el conjunt dels nombres enters. També direm que els elements de \mathbb{Z} són nombres enters.

Definició 3.2.3 (Resta de nombres naturals). Siguin a , b i c nombres naturals tals que $a \geq b$ i $a = b + c$. Aleshores escriurem $a - b = c$.

3.2.2 Operacions sobre els nombres enters

Definició 3.2.4 (Suma de nombres enters). Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ dos nombres enters. Definim la suma de nombres enters com una operació $+$ que satisfà

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}.$$

Definició 3.2.5 (Producte de nombres enters). Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ dos nombres enters. Definim el producte de nombres enters com una operació \cdot que satisfà

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

Proposició 3.2.6. Sigui $\overline{(a, b)}$ un nombre enter. Aleshores

1. $\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a, b)}$.
2. $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a, b)}$.
3. $\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(0, 0)}$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la definició de 3.2.5 tenim que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a + 0, b + 0)},$$

i per la proposició 3.1.12 i definició de 3.2.2 trobem

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a, b)}.$$

Veiem ara el punt (2). Per la definició de 3.2.5 tenim que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1)},$$

i per la definició de 3.1.9 i la definició de 3.2.2 trobem

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(1, 0)} = \overline{(a, b)}.$$

Veiem el punt (3). Per la definició de 3.2.4 tenim que

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)}.$$

Ara bé, per la proposició 3.1.12 i la definició de 3.2.2 tenim que

$$a + b + 0 = b + a + 0$$

i, de nou per la definició de 3.2.2, trobem $(a + b, b + a) \sim (0, 0)$, i per la definició de 2.3.3 tenim que $\overline{(a + b, a + b)} = \overline{(0, 0)}$. \square

Proposició 3.2.7. *Sigui $\overline{(a, b)}$ un nombre enter. Aleshores*

1. Si $a \geq b$, $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$.
2. Si $a \leq b$, $\overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Tenim que

$$a + 0 = a + b - b,$$

ja que $b + 0 = b$, i per tant, per la definició de 3.2.3 tenim que $b - b = 0$. Per tant, per la definició de 3.2.2 tenim $(a, b) \sim (a - b, 0)$, i per la definició de 2.3.3 trobem que $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$.

La demostració del punt (2) és anàloga. \square

Notació 3.2.8. Denotarem $\overline{(a, 0)} = a$ i $\overline{(0, a)} = -a$. Per tant

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Observació 3.2.9. $a - b = 0 \iff a = b$.

Teorema 3.2.10. *Sigui $\overline{(a, b)}$ un nombre enter. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)} \iff a = b.$$

Demostració. Suposem que $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$. Per la definició de 2.3.3 això és

$$(a, b) \sim (0, 0),$$

i per la definició de 3.2.2 tenim que això és

$$a + 0 = b + 0$$

i de nou per la definició de 3.2.2 això és

$$a = b. \quad \square$$

Proposició 3.2.11. *Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)}.$$

Demostració. Per la definició de 3.2.4 tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} &= \overline{(a + d, b + c)} \\ &= \overline{(d + a, c + b)} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$= \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)}, \quad (3.2.4)$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.12. *Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)}.$$

Demostració. Per la definició de 3.2.5 tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} \\ &= \overline{(ca + db, da + cb)} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$= \overline{(ca + db, cb + da)} \quad (3.1.12)$$

$$= \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)}, \quad (3.2.5)$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.13. *Siguin $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}$ i $\overline{(e, f)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} + \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) = \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \right) + \overline{(e, f)}.$$

Demostració. Per la definició de 3.2.4 tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} + \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) &= \overline{(a, b)} + \overline{(c + e, d + f)} \\ &= \overline{(a + (c + e), b + (d + f))} \\ &= \overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} \\ &= \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e, f)} \\ &= \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \right) + \overline{(e, f)}, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.14. *Siguin $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}$ i $\overline{(e, f)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)} \right) = \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)}.$$

Demostració. Per la definició de 3.2.5 tenim que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)} \right) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} \\ &= \overline{(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(cf + de))} \end{aligned}$$

Per la proposició 3.1.13

$$= \overline{(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bcf + bde)}$$

i per la proposició 3.1.15

$$= \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)}$$

i de nou per la proposició 3.1.13

$$\begin{aligned} &= \overline{((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e)} \\ &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} \\ &= \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)}, \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 3.2.15. *Siguin $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}$ i $\overline{(e, f)}$ nombres enters. Aleshores*

$$\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \cdot \overline{(e, f)}$$

i

$$\left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)} = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(e, f)} + \overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)}.$$

Demostració. Per la definició de 3.2.4 tenim que

$$\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)} \right) = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c + e, d + f)}$$

per la definició de 3.2.5

$$= \overline{(a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e))}$$

per la proposició 3.1.13

$$= \overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)}$$

per la proposició 3.1.12

$$= \overline{(ac + bd + ae + bd, ad + bc + af + be)}$$

per la definició de 3.1.8

$$= \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bd, af + be)}$$

i per la definició de 3.1.9

$$= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \cdot \overline{(e, f)} \quad \square$$

Teorema 3.2.16. *Siguin $\overline{(a, b)}$ i $\overline{(c, d)}$ dos nombres enters tals que $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(0, 0)}$. Aleshores $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$ ó $\overline{(c, d)} = \overline{(0, 0)}$.*

Demostració. Per la definició de 3.2.5 tenim que

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

Com que per hipòtesi $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(0, 0)}$, tenim que per la definició de 3.2.2 tenim que

$$ac + bd + 0 = ad + bc + 0,$$

i de nou per la definició de 3.2.2 això és

$$ac + bd = ad + bc.$$

Suposem que $\overline{(c, d)} \neq \overline{(0, 0)}$. Pel Teorema 3.2.10 trobem que $c \neq d$.

Suposem també que $c > d$. Això és que existeix un natural k satisfent $c + k = d$. Per tant

$$a(d + k) + db = ad + b(d + k)$$

i per la proposició 3.2.15 i la proposició 3.2.11 tenim que

$$ad + db + ak = ad + bd + bk.$$

Ara bé, pel Teorema 3.1.16 i el Teorema 3.1.17 tenim que

$$a = b$$

i per la proposició 3.2.10 trobem que $\overline{(a, b)} = \overline{(0, 0)}$.

Les demostracions dels altres casos són anàlogues. \square

Corol·lari 3.2.17. *Siguin a , b i c nombres enters amb $c \neq 0$ tals que*

$$ac = bc.$$

Aleshores $a = b$.

Demostració. Per la proposició 3.2.15 trobem

$$(a - b)c = 0,$$

aleshores pel Teorema 3.2.16 trobem que ha de ser $a - b = 0$, i per l'observació 3.2.9 tenim $a = b$, com volíem veure. \square

3.2.3 Divisibilitat dels nombres enters

Definició 3.2.18 (Divisors i múltiples). Siguin a i b dos nombres enters tal que existeix un nombre enter c satisfent $a = bc$. Aleshores direm que b divideix a a o que a és múltiple de b .

Notació 3.2.19. Siguin a i b enters tals que b divideix a a . Denotarem $b \mid a$.

Proposició 3.2.20. *Siguin a i b enters. Aleshores*

1. $b \mid a$ si i només si $b \mid -a$.
2. $b \mid a$ si i només si $-b \mid a$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Si $b \mid a$ per la definició de 3.2.18 tenim que existeix un enter c tal que $a = bc$, i per tant $-a = b(-c)$, i equivalentment $b \mid -a$.

Veiem ara el punt (2). Si $b \mid a$ per la definició de 3.2.18 tenim que existeix un enter c tal que $a = bc$, i per tant $a = (-c)(-b)$, i equivalentment $-b \mid a$. \square

Proposició 3.2.21. *Siguin c , b i a enters tals que $c \mid a$. Aleshores $c \mid ab$.*

Demostració. Si $c \mid a$ per la definició de 3.2.18 tenim que existeix un k tal que $a = kc$. Ara bé, també tenim $ab = kbc$, i per tant $c \mid ab$. \square

Proposició 3.2.22. *Siguin a , b i c enters tals que $c \mid a$ i $c \mid b$. Aleshores $c \mid a + b$ i $c \mid a - b$.*

Demostració. Per la definició de 3.2.18 tenim que existeixen enters k i k' tals que $a = kc$ i $c = k'b$. Per tant per la proposició 3.2.15 trobem

$$a + b = (k + k')c \quad \text{i} \quad a - b = (k - k')c. \quad \square$$

Proposició 3.2.23. *Siguin a , b i c enters tal que $a \mid b$ i $b \mid c$. Aleshores $a \mid c$.*

Demostració. Per la definició de 3.2.18 tenim que existeixen enters k i k' tals que $a = kb$ i $b = k'c$. Per tant $a = kk'c$. \square

Proposició 3.2.24. *Siguin a i b enters tals que $a \mid b$ i $b \mid a$. Aleshores $a = b$ ó $a = -b$.*

Demostració. Per la definició de 3.2.18 tenim que existeixen enters k i k' tals que $a = kb$ i $b = k'a$. Per tant trobem

$$b = kk'b$$

i tenim

$$0 = kk'b - b$$

i per la proposició 3.2.15 trobem

$$0 = (kk' - 1)b.$$

Ara bé, si $b = 0$ tenim que $a = k0$ i $a = 0$, i per tant $a = b$. Si $b \neq 0$ pel Teorema 3.2.16 trobem que ha de ser $kk' = 1$ i per tant ha de ser $k = 1$ i $k' = 1$ ó $k = -1$ i $k' = -1$ i trobem que $a = b$ ó $a = -b$. \square

3.2.4 Màxim comú divisor

Definició 3.2.25 (Màxim comú divisor). *Siguin a i b enters. Aleshores definim*

$$\text{mcd}(a, b) = \max_{c \in \mathbb{Z}} \{c \mid a \text{ i } c \mid b\}$$

com el màxim comú divisor de a i b .

Proposició 3.2.26. *Siguin a i b enters. Aleshores $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a)$.*

Demostració. Per la definició de 3.2.25 tenim que

$$\text{mcd}(a, b) = \max_{c \in \mathbb{Z}} \{c \mid a \text{ i } c \mid b\} \quad \text{i} \quad \text{mcd}(b, a) = \max_{c \in \mathbb{Z}} \{c \mid b \text{ i } c \mid a\},$$

i per tant, per la Tautologia 1.1.20 trobem que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a)$. \square

Proposició 3.2.27. *Siguin a i b enters. Aleshores per a tot λ enter*

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - \lambda b, b) = \text{mcd}(a, b - \lambda a).$$

Demostració. Prenem un enter c tal que $c \mid a$ i $c \mid b$. Aleshores per la proposició 3.2.21 tenim que c divideix $-\lambda b$, i per la proposició 3.2.22 trobem que $c \mid a - \lambda b$, i per la definició de 3.2.25 tenim que, efectivament, $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a - \lambda b, b)$. \square

3.2.5 La divisió euclidiana i la identitat de Bézout

Lema 3.2.28. *Siguin D i d nombres enters amb $D, d > 0$. Aleshores existeixen dos únics q, r enters tals que*

$$D = dq + r$$

amb $0 \leq r < d$.

Demostració. Definim el conjunt

$$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \text{ i existeix } z \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = D - dz\}.$$

Observem que $D \in S$, i per tant $S \neq \emptyset$. Sigui doncs $r = \min\{x \in S\}$. Per tant existeix un enter q tal que

$$r = D - dq.$$

Ara bé, tenim que $r < d$, ja que si $r \geq d$ tindríem

$$\begin{aligned} 0 &\geq r - d \\ &= D - dq - d \\ &= D - d(q + 1) \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

i per tant $r - d$ seria un element de S , amb $r - d < r$, però això entraria amb contradicció amb que $r = \min\{x \in S\}$. Per tant $0 \leq r < d$ i hem acabat. \square

Teorema 3.2.29 (Criteri de divisibilitat d'Euclides). *Siguin D i d nombres enters amb $d \neq 0$. Aleshores existeixen dos únics q, r enters tals que*

$$D = dq + r$$

amb $0 \leq r < |d|$.

Demostració. Veiem primer que si q i r existeixen aquests són únics. Suposem doncs que existeixen q_1, q_2, r_1, r_2 tals que

$$D = dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2$$

amb $0 \leq r_1 < |d|$ i $0 \leq r_2 < |d|$. Aleshores tenim

$$D - D = d(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

i per tant

$$r_2 - r_1 = d(q_1 - q_2).$$

Ara bé, tenim que $r_2 - r_1 < |d|$, ja que per hipòtesi $r_1, r_2 < |d|$, i per tant ha de ser $r_2 - r_1 = 0$, i per l'observació 3.2.9 tenim $r_1 = r_2$. Ara bé, aleshores tenim

$$0 = d(q_1 - q_2)$$

i com que, per hipòtesi, $d \neq 0$, pel Teorema 3.2.16 ha de ser $q_1 - q_2 = 0$, i de nou per l'observació 3.2.9 tenim $q_1 = q_2$. Per tant la unicitat queda demostrada.

Veiem ara que existeixen. Efectivament, si $D, d > 0$ l'enunciat és cert pel lema 3.2.28.

Si $D < 0$ i $d > 0$ definim $D' = -D$. Aleshores $D' > 0$, i pel lema 3.2.28 tenim que existeixen q' i r' enters tals que

$$D' = dq' + r'$$

amb $0 \leq r' < d$. I per tant

$$\begin{aligned} D &= -(dq' + r') \\ &= d(-q') - r' \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$$\begin{aligned} &= d(-q') - d + d - r' \\ &= d(-q' - 1) + (d - r') \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

i si prenem $q = -q' - 1$ i $r = d - r'$ tenim

$$D = dq + r$$

amb $0 \leq d - r' < d$.

Si $d < 0$ prenem $d' = -d$, i aleshores $d' > 0$ i pels casos anteriors hem acabat. \square

Teorema 3.2.30 (Identitat de Bézout). *Siguin a i b dos enters. Aleshores existeixen enters α i β tals que*

$$\alpha a + \beta b = \text{mcd}(a, b).$$

Demostració. Considerem el conjunt

$$S = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\}.$$

Observem que si $x = 1$ i $y = 0$, l'enter a pertany a S . Per tant S és un conjunt no buit i tenim que existeixen enters s i t tals que $as + bt = \min\{d \in S\}$. Posem $d = as + bt$. Pel 3.2.29 tenim que existeixen dos enters q i r amb $0 \leq r < d$ tals que

$$a = dq + r.$$

Tenim que r és un element de $S \cup \{0\}$, ja que

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(as + bt) \\ &= a(1 - qs) - b(qt). \end{aligned}$$

Ara bé, tenim que $0 \leq r < d$ i $as + bt = \min\{d \in S\}$. Per tant ha de ser $r = 0$ i per la definició de 3.2.18 trobem $d \mid a$. Amb un argument anàleg podem veure que $d \mid b$. Suposem ara que existeix c tal que $c \mid a$ i $c \mid b$. Per la definició de 3.2.18 tenim que existeixen k i k' satisfent

$$a = kc \quad \text{i} \quad b = k'c$$

i per tant

$$\begin{aligned} d &= as + bt \\ &= cks + ck't \\ &= c(ks + k't), \end{aligned}$$

i per tant $c < d$, i per la definició de 3.2.25 trobem que $\text{mcd}(a, b) = as + bt$. \square

Definició 3.2.31 (Coprims). Siguin a i b dos enters tals que $\text{mcd}(a, b) = 1$. Aleshores direm que a i b són coprims.

Teorema 3.2.32. *Siguin a i b dos enters. Aleshores a i b són coprims si i només si existeixen dos enters α i β tals que*

$$\alpha a + \beta b = 1.$$

Demostració. Veiem que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que a i b són coprims. Per 3.2.30 hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que existeixen dos enters α i β tals que $\alpha a + \beta b = 1$. Tenim que si existeix un enter c tal que $c \mid a$ i $c \mid b$, aleshores $c \mid 1$, i per la definició de 3.2.25 trobem que $\text{mcd}(a, b) = 1$. \square

Proposició 3.2.33. *Sigui c un enter i a i b dos enters coprims tals que $a \mid bc$. Aleshores $a \mid c$.*

Demostració. Pel Teorema 3.2.32 tenim que existeixen dos enters α i β tals que

$$1 = \alpha a + \beta b.$$

Per tant

$$c = c\alpha a + c\beta b,$$

i per la definició de 3.2.18 tenim que existeix un enter k tal que $ak = bc$. Per tant

$$c = c\alpha a + ak\beta$$

i per la proposició 3.2.15 tenim que $c = (c\alpha + k\beta)a$ i per la definició de 3.2.18 tenim que $a \mid c$. \square

3.2.6 Mínim comú múltiple

Definició 3.2.34 (Mínim comú múltiple). Siguin a i b dos enters. Aleshores definim

$$\text{mcm}(a, b) = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m > 0, a \mid m \text{ i } b \mid m\}$$

com el mínim comú múltiple de a i b .

Teorema 3.2.35. *Siguin a i b dos enters. Aleshores*

$$\text{mcd}(a, b) \text{ mcm}(a, b) = |ab|.$$

Demostració. Sigui $d = \text{mcd}(a, b)$. Per la definició de 3.2.25 existeixen a' i b' tals que $a = da'$ i $b = db'$. Per tant, per la proposició 3.2.21 trobem que $d \mid ab$, i per la definició de 3.2.18 trobem que existeix un enter l tal que $dl = |ab|$. Per tant $dl = da'b$ i $dl = adb'$, i pel corol·lari 3.2.17 tenim que $l = a'b$ i $l = ab'$, i per la definició de 3.2.18 tenim que $a \mid l$ i $b \mid l$.

Sigui m un enter tal que $a \mid m$ i $b \mid m$. Per la definició de 3.2.18 tenim que existeixen dos enters k_1 i k_2 tals que $m = ak_1$ i $m = bk_2$. Ara bé, per 3.2.30

tenim que existeixen dos enters α i β tals que $\alpha a + \beta b = d$. Per tant

$$md = m\alpha a + m\beta b \quad (3.2.15)$$

$$= bk_2\alpha a + ak_1\beta b$$

$$= ab(bk_2 + ak_1) \quad (3.2.15)$$

$$= dl(bk_2 + ak_1)$$

i de nou pel corol·lari 3.2.17 trobem que $m = l(bk_2 + ak_1)$, i per tant $l \leq m$. Per tant, per la definició de 3.2.34 tenim que $l = \text{mcm}(a, b)$, i per tant

$$|ab| = \text{mcd}(a, b) \text{mcm}(a, b). \quad \square$$

3.2.7 Teorema Fonamental de l'Aritmètica

Definició 3.2.36 (Enter primer). Sigui $p > 1$ un enter amb i d un enter tal que si $d \mid p$ aleshores d és igual a 1 ó p . Aleshores direm que p és primer.

Proposició 3.2.37. Sigui a i b dos enters i p un primer tals que $p \mid ab$. Aleshores $p \mid a$ ó $p \mid b$.

Demostració. Suposem que $p \nmid a$. Aleshores per la definició de 3.2.31 tenim que p i a són coprimers. Per tant per la proposició 3.2.33 tenim que $p \mid b$. El cas $p \nmid b$ és anàleg. \square

Lema 3.2.38. Sigui a un enter amb $a > 1$. Aleshores existeixen p_1, \dots, p_n primers i r_1, \dots, r_n enters positius tals que

$$a = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}.$$

Demostració. Observem primer que si a és primer tenim $a = a$ i aquest cas particular de l'enunciat és cert.

Ho farem per inducció. Si $a = 2$ tenim que a és primer i hem acabat.

Suposem ara que $a > 2$ i que l'enunciat és cert per a a fix. Volem veure que també és cert per a $a + 1$. Si $a + 1$ és primer, per la definició d'3.2.36 hem acabat. Suposem doncs que $a + 1$ no és primer. Aleshores existeixen enters α i β tals que $a + 1 = \alpha\beta$. Bé, tenim que es compleix $2 \leq \alpha \leq a$ i $2 \leq \beta \leq a$. Ara bé, per l'hipòtesi d'inducció tenim que existeixen $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ primers tals que

$$\alpha = p_1 \cdots p_r \quad \text{i} \quad \beta = q_1 \cdots q_s,$$

i per tant

$$a + 1 = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s,$$

i pel 3.1.7 tenim que l'enunciat és cert. \square

Lema 3.2.39. Sigui $a > 1$ un enter i p_1, \dots, p_n i q_1, \dots, q_r primers satisfent $p_1 \leq \cdots \leq p_n, q_1 \leq \cdots \leq q_r$ tals que

$$a = p_1 \cdots p_n \quad \text{i} \quad a = q_1 \cdots q_r.$$

Aleshores $n = r$ i $p_i = q_i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostració. Tenim que

$$p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_r,$$

i per la definició de 3.2.18 trobem que $p_1 \mid q_1 \cdots q_r$, i per la proposició 3.2.37 trobem que $p_1 \mid q_{j_1}$ per a cert $j_1 \in \{1, \dots, r\}$ i per la definició d'3.2.36 trobem que existeix un $\{j_1 \in \{1, \dots, r\}$ tal que $p_1 = q_{j_1}$. Aleshores pel corol·lari 3.2.17 trobem que

$$p_2 \cdots p_n = q_1 \cdots q_{j_1-1} q_{j_1+1} \cdots q_r.$$

Podem iterar aquest procés $k = \min(n, r)$ vegades. Ara bé, si $n > r$ tenim

$$p_{k+1} \cdots p_n = 1,$$

que, per la definició d'3.2.36, no és possible, i si $n < r$ trobem

$$1 = q_{j_{k+1}} \cdots q_{j_r}$$

on $j_{k+1}, \dots, j_r \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$, i de nou per la definició d'3.2.36, no és possible. Per tant ha de ser $n = r$ i hem acabat. \square

Teorema 3.2.40 (Teorema Fonamental de l'Aritmètica). *Sigui $a > 1$ un enter. Aleshores existeixen p_1, \dots, p_n primers amb $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ únics tals que $a = p_1 \cdots p_n$.*

Demostració. És conseqüència del lema 3.2.38 i el lema 3.2.39. \square

Teorema 3.2.41 (Teorema d'Euclides). *Sigui m un natural. Aleshores existeix un nombre natural $n > m$ tal que p_1, \dots, p_n siguin nombres primers diferents dos a dos.*

Demostració. Siguin p_1, \dots, p_m primers diferents. Definim

$$p = \left(\prod_{i=1}^m p_i \right) + 1.$$

Per la definició de 3.2.18 tenim que $p_j \mid \prod_{i=1}^m p_i$ per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$. Fixem aquest $j \in \{1, \dots, m\}$, i de nou per la definició de 3.2.18 tenim que existeix un enter q tal que

$$qp_j = \prod_{i=1}^m p_i$$

i tenim que

$$p = qp_j + 1,$$

o equivalentment,

$$p - qp_j = 1.$$

Per tant pel Teorema 3.2.32 i la definició de 3.2.31 trobem que p i p_j són coprimers per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$.

Si p és primer hem acabat, ja que p és més gran que p_1, \dots, p_m , i per tant diferent. Ara bé, si p no és primer pel lema 3.2.38 tenim que existeix un primer p' tal que $p' \mid p$, però hem vist que $p_1 \dots p_m \nmid p$, per tant p' és diferent de p_1, \dots, p_m i hem acabat. \square

3.3 Els nombres modulars

3.3.1 Construcció dels nombres modulars

Proposició 3.3.1. *Siguin m un nombre enter. Aleshores la relació*

$$x \sim y \iff x - y = mk \quad \text{per a cert } k \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{Z}$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Sigui x un nombre enter. Aleshores per l'observació 3.2.9 tenim que $x - x = 0$ i per la definició de 3.2.2 trobem que $0 = m \cdot 0$, i per tant $x \sim x$.
2. Simètrica: Sigui x i y dos enters tals que $x \sim y$. Per hipòtesi tenim que $x - y = km$ per a cert k enter, i per tant $y - x = -km$ i tenim $y \sim x$.
3. Transitiva: Sigui x, y i z nombres enters tals que $x \sim y$ i $y \sim z$. Per hipòtesi això és que $x - y = mk$ i $y - z = mk'$ per a cert k, k' enters. Per tant trobem

$$\begin{aligned} x - z &= x - y + y - z \\ &= mk + mk' \\ &= m(k + k') \end{aligned}$$

i per tant $x \sim z$.

I per la definició de 2.3.2 hem acabat. □

Definició 3.3.2 (Nombres modulars). Sigui m un enter i

$$x \sim y \iff x - y = mk \quad \text{per a cert } k \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } x, y \in \mathbb{Z}$$

una relació d'equivalència. Aleshores denotem el conjunt quocient \mathbb{Z}/\sim com $\mathbb{Z}/(m)$, i si $x \sim y$ escriurem $x \equiv y \pmod{m}$. Direm que $\mathbb{Z}/(m)$ són nombres modulars i si $x \sim y$ direm que x i y són congruents mòdul m .

Aquesta definició té sentit per la proposició 3.3.1

3.3.2 Operacions sobre nombres modulars

Definició 3.3.3 (Suma de nombres modulars). Sigui \bar{x} i \bar{y} dos elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores definim la seva suma com l'operació

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}.$$

Definició 3.3.4 (Producte de nombres modulars). Sigui \bar{x} i \bar{y} dos elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores definim el seu producte com l'operació

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}.$$

Proposició 3.3.5. *Siguin \bar{a}, \bar{b} i \bar{c} elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores*

1. $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

$$2. \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

$$3. \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$$

$$4. \bar{a} + \overline{-a} = \bar{0}.$$

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad (3.3.3)$$

$$= \overline{b + a} \quad (3.2.11)$$

$$= \bar{b} + \bar{a}. \quad (3.3.3)$$

Per veure el punt (2) fem

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b + c} \quad (3.3.3)$$

$$= \overline{a + (b + c)} \quad (3.3.3)$$

$$= \overline{(a + b) + c} \quad (3.2.13)$$

$$= \overline{a + b} + \bar{c} \quad (3.3.3)$$

$$= (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}. \quad (3.3.3)$$

Per veure el punt (3) fem

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} \quad (3.3.3)$$

$$= \bar{a}. \quad (3.2.6)$$

Per veure el punt (4) fem

$$\bar{a} + \overline{-a} = \overline{a - a} \quad (3.3.3)$$

$$= \bar{0}. \quad (3.2.9)$$

I hem acabat. □

Proposició 3.3.6. *Siguin \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} elements de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores*

$$1. \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

$$2. \bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}.$$

$$3. \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

$$4. \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}.$$

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} \quad (3.3.4)$$

$$= \overline{b \cdot a} \quad (3.2.12)$$

$$= \bar{b} \cdot \bar{a}. \quad (3.3.4)$$

Per veure el punt (2) fem, per la definició de 3.3.4

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \overline{a \cdot 1},$$

i per la proposició 3.2.6 trobem

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}.$$

Per veure el punt (3) fem

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{b \cdot c} \quad (3.3.4)$$

$$= \overline{a \cdot (b \cdot c)} \quad (3.3.4)$$

$$= \overline{(a \cdot b) \cdot c} \quad (3.2.14)$$

$$= \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c} \quad (3.3.4)$$

$$= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}. \quad (3.3.4)$$

Per veure el punt (4) fem

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{b + c} \quad (3.3.3)$$

$$= \overline{a \cdot (b + c)} \quad (3.3.4)$$

$$= \overline{ab + ac} \quad (3.2.15)$$

$$= \overline{ab} + \overline{ac} \quad (3.3.3)$$

$$= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}. \quad (3.3.4)$$

I hem acabat. □

3.3.3 Congruències i aritmètica modular

Proposició 3.3.7. *Siguin a, a', b, b' i $m > 1$ enters tals que*

$$a \equiv a' \pmod{m} \quad i \quad b \equiv b' \pmod{m}.$$

Aleshores

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{m} \quad i \quad ab \equiv a'b' \pmod{m}.$$

Demostració. Per la definició de 3.3.2 tenim que existeixen enters λ i μ tals que $a - a' = \lambda m$ i $b - b' = \mu m$. Per tant

$$\begin{aligned} (a + b) - (a' + b') &= (a - a') + (b - b') \\ &= \lambda m + \mu m \\ &= (\lambda + \mu)m, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

i per la definició de 3.3.2 trobem que $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$. També veiem que

$$\begin{aligned} ab - a'b' &= (a' + \lambda m)(b' - \mu m) - a'b' \\ &= a'b' + (a'\mu + b'\lambda + \lambda\mu m)m - a'b' \\ &= (a'\mu + b'\lambda + \lambda\mu m)m, \end{aligned}$$

i per tant $ab \equiv a'b' \pmod{m}$. □

Definició 3.3.8 (Nombre modular invertible). Sigui \bar{a} un element de $\mathbb{Z}/(m)$ tal que existeix un element \bar{a}' de $\mathbb{Z}/(m)$ satisfent $\bar{a}\bar{a}' = \bar{1}$. Aleshores direm que \bar{a} és invertible pel producte i que \bar{a}' és la inversa de \bar{a} .

Denotarem \bar{a}^{-1} com la inversa de \bar{a}

Proposició 3.3.9. *Sigui \bar{a} un element de $\mathbb{Z}/(m)$. Aleshores \bar{a} és invertible si i només si a i m són coprimers.*

Demostració. Per la definició de 3.3.8 tenim que \bar{a} és invertible si existeix un element \bar{a}' tal que $aa' \equiv 1 \pmod{m}$, i per la definició de 3.3.2 tenim que això és si existeix un enter λ tal que $aa' - 1 = \lambda m$.

Això és equivalent a que $aa' - \lambda m = 1$, i per 3.2.30 tenim que això és si i només si $\text{mcd}(a, m) = 1$, i per la definició de 3.2.31 tenim que a i m són coprimers. \square

Corol·lari 3.3.10. *Sigui $p > 1$ un enter. Aleshores p és primer si i només si \bar{a} és invertible per a tot $\bar{a} \in \mathbb{Z}/(p) \setminus \{\bar{0}\}$.*

Teorema 3.3.11 (El Petit Teorema de Fermat). *Siguin p un primer i a un enter tal que $p \nmid a$. Aleshores*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Demostració. Observem que per la definició de 3.2.18 i la definició de 3.2.31 tenim que a i p són coprimers. Per tant per la proposició 3.3.9 tenim que a és invertible.

Considerem el conjunt

$$X = \{\bar{a}, \bar{2a}, \bar{3a}, \dots, \overline{(p-1)a}\}.$$

Veiem que tots els elements de X són diferents. Efectivament, si $na \equiv ma \pmod{p}$ per a certs enters n i m per la definició de 3.3.8 trobem que $n \equiv m \pmod{p}$.

També tenim que

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod{p},$$

i per tant

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p},$$

i de nou per la definició de 3.2.18 i la definició de 3.2.31 tenim que $(p-1)!$ i p són coprimers, per tant per la proposició 3.3.9 tenim que $(p-1)!$ és invertible i trobem

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad \square$$

3.3.4 El Teorema xinès de les restes

Lema 3.3.12. *Siguin m_1, \dots, m_n naturals més grans que 1, a_1, \dots, a_n enters i x_0 un enter tal que*

$$\begin{cases} x_0 \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x_0 \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Aleshores, si $x = x_0 + \lambda M$ amb $M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n)$ i per a tot λ enter es satisfà

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Demostració. Tenim que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, és satisfà $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ si i només si es satisfà $x \equiv x_0 \pmod{m_i}$. Per tant hem de veure que es satisfà

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv x_0 \pmod{m_n} \end{cases}$$

Ara bé, per la definició de 3.3.2 i la definició de 3.2.25 tenim que ha de ser

$$x - x_0 = \lambda M$$

per a cert λ enter. \square

Teorema 3.3.13 (Teorema xinès de les restes). *Siguin m_1, \dots, m_n enters més grans que 1 coprimers dos a dos i a_1, \dots, a_n enters. Aleshores el sistema*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

té una única solució, que és $|m_1 \cdots m_n|$.

Demostració. Prenem $M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n)$. Per la definició de 3.2.34 i la definició de 3.2.31 tenim que

$$M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n) = \left| \prod_{i=1}^n m_i \right|.$$

Per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ definim

$$M_i = m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_n$$

i tenim, per la definició de 3.2.31, que M_i i m_i són coprimers.

Per tant la congruència

$$M_i x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

té solució, ja que per la proposició 3.3.9 tenim que M_i és invertible i per tant $x \equiv a_i M_i^{-1} \pmod{m_i}$. Denotem $b_i = a_i M_i^{-1}$ i considerem

$$x_0 = M_1 b_1 + \cdots + M_n b_n.$$

Aleshores tenim per la definició de 3.3.2 tenim que

$$x_0 \equiv M_i b_i \pmod{m_i}.$$

Per tant, pel lema 3.3.12 tenim que

$$x = x_0 + \lambda M$$

amb $M = \text{mcm}(m_1, \dots, m_n)$ són les solucions del sistema, i per la definició de 3.3.2 trobem que $x = x_0$ i per tant és única. \square

3.4 Les permutacions

3.4.1 El grup simètric

Definició 3.4.1 (Permutació). Sigui X un conjunt i $\sigma: X \rightarrow X$ una aplicació bijectiva. Aleshores direm que σ és una permutació.

Definició 3.4.2 (Grup simètric). Sigui X un conjunt no buit i

$$S_X = \{\sigma: X \rightarrow X \mid \sigma \text{ és una permutació}\}$$

un conjunt. Aleshores direm que S_X és el grup simètric de X .

Si $X = \{1, \dots, n\}$ aleshores denotarem el grup simètric de X com S_n .

Definició 3.4.3 (Elements moguts per una permutació). Sigui X un conjunt no buit, $\sigma \in S_X$ una permutació i

$$M(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$$

un conjunt. Aleshores direm que $M(\sigma)$ és el conjunt d'elements de X moguts per σ .

Proposició 3.4.4. *Sigui X un conjunt no buit i σ una permutació de S_X . Aleshores*

$$M(\sigma) = \emptyset \iff \sigma = \text{Id}_X.$$

Demostració. Comencem veient l'implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que $M(\sigma) = \emptyset$. Aleshores per la definició de 3.4.3 trobem que $\{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\} = \emptyset$, i per tant ha de ser $\sigma(x) = x$ per a tot $x \in X$, i per tant $\sigma = \text{Id}_X$.

Veiem ara l'implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Prenem Id_X . Aleshores ha de ser $M(\text{Id}_X) = \emptyset$, ja que per la definició de 3.4.3 tenim que $M(\text{Id}_X) = \{x \in X \mid \text{Id}_X(x) \neq x\}$. \square

Proposició 3.4.5. *Sigui X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions de S_X . Aleshores*

$$M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau).$$

Demostració. Prenem $a \in X$ tal que $a \in M(\sigma \circ \tau)$. Això és, per la definició de 3.4.3, que $a \in \{x \in X \mid \sigma \circ \tau(x) \neq x\}$. Volem veure que $a \in M(\sigma) \cup M(\tau)$, i per la definició d'2.1.12 hem de veure que $a \in M(\sigma)$ ó $a \in M(\tau)$.

Si $a \notin M(\tau)$ tenim que $\tau(a) = a$, i tenim $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a)$. Ara bé, ha de ser $\sigma(a) \neq a$, ja que si no tindríem $a \notin M(\sigma \circ \tau)$. Per tant ha de ser $a \in M(\sigma)$.

Si $a \notin M(\sigma)$ tenim que $\sigma(a) = a$, i per tant tenim que $\tau(a) \neq a$, ja que si $\tau(a) = a$ tindríem $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a) = a$, i seria $a \notin M(\sigma \circ \tau)$. Per tant ha de ser $a \in M(\tau)$.

Per tant tenim que si $a \in M(\sigma \circ \tau)$ aleshores $a \in M(\sigma) \cup M(\tau)$, i per la definició de 2.1.2 trobem que $M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau)$, com volíem veure. \square

3.4.2 Permutacions disjunctes

Definició 3.4.6 (Permutacions disjunctes). Sigui X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions de S_X tals que $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$. Aleshores direm que σ i τ són disjunctes.

Proposició 3.4.7. Sigui X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions disjunctes de S_X . Aleshores

$$M(\sigma \circ \tau) = M(\sigma) \cup M(\tau).$$

Demostració. Per la proposició 3.4.5 tenim que $M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau)$. Veiem doncs que $M(\sigma \circ \tau) \supseteq M(\sigma) \cup M(\tau)$.

Prenem un element $a \in M(\sigma) \cup M(\tau)$. Com que, per hipòtesi, σ i τ són dues permutacions disjunctes, per la definició de 3.4.6 tenim que $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$ i per la definició d'2.1.13 tenim que o bé $a \in M(\sigma)$ o bé $a \in M(\tau)$.

Suposem que $a \in M(\sigma)$. Per la definició de 3.4.3 tenim que $\sigma(a) \neq a$ i $\tau(a) = a$, ja que $a \notin M(\tau)$. Per tant $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(a) \neq a$, i per tant $a \in M(\sigma \circ \tau)$.

Suposem ara que $a \in M(\tau)$. Per la definició de 3.4.3 tenim que $\tau(a) \neq a$ i $\sigma(a) = a$, ja que $a \notin M(\sigma)$. Per tant $\sigma \circ \tau(a) = \sigma(b)$ per a cert $b \neq a$, $b = \tau(a)$. Ara bé, com que per la definició de 3.4.1 σ és una aplicació bijectiva, i per la definició d'2.2.9 trobem que σ és una aplicació injectiva, i per la definició d'2.2.7 tenim que $\sigma(b) \neq a$, ja que $\sigma(a) = a$ i $b \neq a$. Per hem vist que

$$M(\sigma \circ \tau) \subseteq M(\sigma) \cup M(\tau) \quad \text{i} \quad M(\sigma \circ \tau) \supseteq M(\sigma) \cup M(\tau),$$

i pel 2.1.3 tenim que

$$M(\sigma \circ \tau) = M(\sigma) \cup M(\tau). \quad \square$$

Lema 3.4.8. Sigui X un conjunt no buit i τ una permutació de S_X . Aleshores

$$x \in M(\sigma) \iff \sigma(x) \in M(\sigma).$$

Demostració. Per la definició de 3.4.1 tenim que σ és bijectiva, i per la definició de 3.4.3 trobem que $\sigma(x) = x$ si i només si $\sigma(\sigma(x)) = \sigma(x)$.

Prenent la negació d'això trobem que $\sigma(x) \neq x$ si i només si $\sigma(\sigma(x)) \neq \sigma(x)$, que per la definició de 3.4.3 és equivalent a $x \in M(\sigma) \iff \sigma(x) \in M(\sigma)$. \square

Teorema 3.4.9. Sigui X un conjunt no buit i σ i τ dues permutacions disjunctes de S_X . Aleshores

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

Demostració. Per la definició de 3.4.6 i la definició de 3.4.3 tenim que, per hipòtesi, $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$. Per tant, per a tot $x \in X$ tenim o bé $x \in M(\sigma)$, o bé $x \in M(\tau)$ o bé $x \notin M(\sigma) \cup M(\tau)$. Estudiem els cassos.

Suposem que $x \in M(\sigma)$, i per tant $x \notin M(\tau)$. Per la definició de 3.4.3 tenim que $\tau(x) = x$ i per tant $\sigma(\tau(x)) = \sigma(x)$. Ara bé, pel lema 3.4.8 tenim que $\sigma(x) \in M(\sigma)$, d'on trobem que $\sigma(x) \notin M(\tau)$, ja que, per hipòtesi, $M(\sigma) \cap M(\tau) = \emptyset$, i per tant $\tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$.

Suposem que $x \in M(\tau)$, i per tant $x \notin M(\sigma)$. Per la definició de 3.4.3 tenim que $\sigma(x) = x$ i per tant $\tau(\sigma(x)) = \tau(x)$. Ara bé, pel lema 3.4.8 tenim que $\tau(x) \in$

$M(\tau)$, d'on trobem que $\tau(x) \notin M(\sigma)$, ja que, per hipòtesi, $M(\tau) \cap M(\sigma) = \emptyset$, i per tant $\sigma(\tau(x)) = \tau(x)$.

Suposem per acabar que $x \notin M(\sigma) \cup M(\tau)$. Aleshores tenim que $\sigma(x) = x$ i $\tau(x) = x$, i per tant $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, com volíem veure. \square

3.4.3 Cicles

Definició 3.4.10 (r -cicle). Sigui X un conjunt no buit i σ una permutació de S_X tals que $M(\sigma) = \{a_1, \dots, a_r\}$ amb $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r-1\}$ i $\sigma(a_r) = a_1$. Aleshores direm que σ és un r -cicle, o un cicle, i denotarem

$$\sigma = (a_1, \dots, a_r).$$

Proposició 3.4.11. Sigui X un conjunt no buit, a un element de $M(\sigma)$ i σ un r -cicle de S_X . Aleshores

$$\sigma = (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)).$$

Demostració. Per la definició d'3.4.10 tenim que $M(\sigma) = \{a_1, \dots, a_r\}$, i com que $a \in M(\sigma)$ tenim que $a = a_k$ per a cert $k \in \{1, \dots, r\}$. Tenim doncs que

$$\sigma = (a, a_{k+1}, \dots, a_{r-k}).$$

Ara bé, per la definició d'3.4.10 tenim que

$$a_{i+1} = \sigma(a_i) \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, r-1\}$$

i $a_1 = \sigma(a_r)$. Per tant trobem

$$\sigma^i(a) = a_{k+i} \quad \text{per a tot } i \in \{-k+1, \dots, r-k-1\},$$

i per tant trobem

$$\sigma = (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a)). \quad \square$$

Lema 3.4.12. Sigui X un conjunt no buit i σ un r -cicle de S_X . Aleshores $r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = \text{Id}_X\}$.

Demostració. Per la definició d'3.4.10 tenim que existeixen a_1, \dots, a_r tals que $M(\sigma) = \{a_1, \dots, a_r\}$ amb $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r-1\}$ i $\sigma(a_r) = a_1$, i per tant $\sigma^r = \text{Id}_X$ ja que tenim $\sigma^r(x) = x$ per a tot $x \in X$. Ara bé, per la proposició 3.4.11 tenim que, amb $a \in M(\sigma)$,

$$\sigma = (a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^{r-1}(a))$$

i per la definició d'3.4.10 tenim que $\sigma^i(a) \neq a$ per a tot $i \in \{0, \dots, r-1\}$, i per tant $r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = \text{Id}_X\}$, com volíem veure. \square

Teorema 3.4.13. Sigui X un conjunt no buit i σ un r -cicle de S_X . Aleshores

$$\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}.$$

Demostració. Pel lema 3.4.12 tenim que $\sigma^r = \text{Id}_X$. Aleshores tenim $\sigma \circ \sigma^{r-1} = \text{Id}_X$ i $\sigma^{r-1} \circ \sigma = \text{Id}_X$. Per tant per la definició d'2.2.16 trobem que $\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}$. \square

Teorema 3.4.14 (Descomposició de permutacions en cicles disjunts). *Sigui X un conjunt finit no buit i σ una permutació de S_X . Aleshores existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ cicles disjunts dos a dos de S_X tals que*

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s,$$

i aquests $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ són únics llevat de l'ordre en que es conjuguen.

Demostració. Prenem $a_1 \in M(\sigma)$ i el conjunt $\{a_1, \sigma(a_1), \sigma^2(a_1), \dots\}$. Com que, per hipòtesi, X és finit tenim que existeixen i i j tals que $\sigma^i(a_1) = \sigma^j(a_1)$, i per tant $\sigma^{i-j}(a_1) = a_1$.

Sigui doncs $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k(a) = a\}$. Per la definició d'3.4.10 tenim que

$$\alpha_1 = (a_1, \sigma(a_1), \dots, \sigma^{k_1-1}(a_1)) \quad (3.1)$$

és un k_1 -cicle.

Si existeix un $a_2 \in X$ que no pertanyi a $\{a_1, \sigma(a_1), \dots, \sigma^{k_1-1}(a_1)\}$. Amb el mateix procés podem generar un nou k_2 -cicle α_2 disjunt amb α_1 , i així obtenim $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ cicles disjunts dos a dos. Aleshores trobem

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s,$$

ja que $\sigma(x) = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s(x)$ per a tot $x \in X$.

Tenim doncs que

$$\alpha_i = (a_i, \sigma(a_i), \dots, \sigma^{k_i-1}(a_i)). \quad (3.2)$$

Suposem ara que existeixen β_1, \dots, β_r cicles disjunts dos a dos de S_X tals que

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_r. \quad (3.3)$$

Per la proposició 3.4.7 tenim que $a_i \in M(\beta_{j_i})$ per a cert $j_i \in \{1, \dots, r\}$, i per la definició de 3.4.6 i la definició d'2.1.13 tenim que aquest j_i és únic.

Ara bé, com que per hipòtesi β_{j_i} és un cicle, per la proposició 3.4.11 tenim que

$$\beta_{j_i} = \left(a_i, \beta_{j_i}(a_i), \dots, \beta_{j_i}^{k'_{j_i}-1}(a_i) \right)$$

per a cert k'_{j_i} . Ara bé, tenim per (3.3) que $\beta_{j_i}^k(a_i) = \sigma^k(a_i)$ per a tot k . Per tant

$$\beta_{j_i} = \left(a_i, \sigma(a_i), \dots, \sigma^{k'_{j_i}-1}(a_i) \right).$$

Ara bé, havíem definit $k_i = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k(a_i) = a_i\}$. Per tant $k'_{j_i} = k_i$ i, com que per hipòtesi $a_i \in M(\alpha_{j_i})$ és un cicle, per la proposició 3.4.11, per (3.1) i per (3.2) tenim que $\alpha_i = \beta_{j_i}$. Per tant podem reescriure (3.1) com

$$\sigma = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s \circ \beta_{j_{s+1}} \circ \dots \circ \beta_{j_r},$$

i per tant ha de ser $\beta_{j_{s+1}} \circ \dots \circ \beta_{j_r} = \text{Id}_X$. □

3.4.4 Descomposició en transposicions i signe

Definició 3.4.15 (Transposició). Sigui X un conjunt no buit i τ un 2-cicle de S_X . Aleshores direm que τ és una transposició.

Observació 3.4.16. $\tau = \tau^{-1}$.

Proposició 3.4.17. Sigui X un conjunt finit no buit i σ una permutació de S_X . Aleshores existeixen transposicions τ_1, \dots, τ_s de S_X tals que

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_s.$$

Demostració. Observem que per a tot r -cicle α de S_X existeixen transposicions τ_1, \dots, τ_r de S_X tals que $\alpha = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$. Efectivament, per la definició d'3.4.10 tenim que si $\alpha = (a_1, \dots, a_r)$ aleshores

$$\alpha = (a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \dots \circ (a_{r-1}, a_r),$$

i per la definició de 3.4.15 tenim que (a_i, a_{i+1}) és una transposició de S_X per a tot $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

Per tant, pel 3.4.14 hem acabat. \square

Teorema 3.4.18. Sigui X un conjunt finit no buit, σ una permutació de S_X i $\tau_1, \dots, \tau_r, \tau'_1, \dots, \tau'_{r'}$ transposicions de S_X tals que

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r = \tau'_1 \circ \dots \circ \tau'_{r'}.$$

Aleshores $r - r'$ és parell.

Demostració. :(\square

Definició 3.4.19 (Signe d'una permutació). Sigui X un conjunt finit no buit, σ una permutació de S_X i τ_1, \dots, τ_r transposicions de S_X tals que

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r.$$

Aleshores definim

$$\text{sig}(\sigma) = (-1)^r$$

com el signe de σ .

Aquesta definició té sentit pel Teorema 3.4.18.

3.5 Els nombres racionals

3.5.1 Construcció dels nombres racionals

Proposició 3.5.1. Sigui \sim una relació tal que per a tot $(a, b), (c, d)$ elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tenim

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Per la proposició 3.2.12 tenim $ab = ba$, i per tant $(a, b) \sim (a, b)$.
2. Simètrica: Siguin (a, b) i (c, d) dos elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$. Per hipòtesi tenim que $ad = bc$, i per la proposició 3.2.12 tenim que $cb = da$ i trobem $(c, d) \sim (a, b)$.
3. Transitiva: Siguin (a, b) , (c, d) i (e, f) elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tals que $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$. Per hipòtesi això és $ad = bc$ i $cf = de$. Ara bé, tenim

$$bcf = bde$$

i per tant

$$adf = bde$$

i pel corol·lari 3.2.17 trobem que $af = be$ i tenim que $(a, b) \sim (e, f)$.

I per la definició de 2.3.2 hem acabat. \square

Definició 3.5.2 (Conjunt dels nombres racionals). Sigui \sim una relació d'equivalència tal que

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

per a tot $(a, b), (c, d)$ elements de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aleshores direm que el conjunt quocient $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \sim$ és el conjunt dels nombres racionals. Direm que els elements de \mathbb{Q} són nombres racionals.

Aquesta definició té sentit per la proposició 3.5.1.

Notació 3.5.3. Sigui $\overline{(a, b)}$ un element de \mathbb{Q} . Aleshores denotarem

$$\overline{(a, b)} = \frac{a}{b}.$$

Proposició 3.5.4. Sigui $\frac{a}{b}$ un nombre racional. Aleshores

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{1} \iff a = b.$$

Demostració. Per la definició de 2.3.3 tenim que

$$(a, b) \sim (1, 1),$$

si i només si, per la definició de 3.2.2, tenim

$$a \cdot 1 = b \cdot 1.$$

I per tant, per la proposició 3.2.6 trobem que ha de ser $a = b$. \square

Proposició 3.5.5. Siguin $\frac{0}{a}$ i $\frac{0}{b}$ racionals. Aleshores

$$\frac{0}{a} = \frac{0}{b}.$$

Demostració. Tenim que $0 \cdot b = 0 \cdot a$, i per tant per la definició de 3.5.2 trobem $(0, a) \sim (0, b)$ i per la definició de 2.3.3 trobem

$$\frac{0}{a} = \frac{0}{b}.$$

\square

3.5.2 Operacions entre nombres racionals

Definició 3.5.6 (Suma de nombres racionals). Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ nombres racionals. Aleshores definim la suma de $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ com una operació $+$ que satisfà

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

Definició 3.5.7 (Producte de nombres racionals). Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ nombres racionals. Aleshores definim el producte de $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ com una operació \cdot que satisfà

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Escriurem

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \frac{c}{d}.$$

Proposició 3.5.8. Siguin $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$ nombres racionals. Aleshores es satisfà

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.
2. $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.
3. $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$.
4. $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{1}$.

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \tag{3.5.6}$$

$$= \frac{cb + ad}{bd} \tag{3.2.11}$$

$$= \frac{cb + ad}{db} \tag{3.2.12}$$

$$= \frac{c}{d} + \frac{a}{b}. \tag{3.5.6}$$

Per veure el punt (2) fem

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + ed}{df} \tag{3.5.6}$$

$$= \frac{adf + (cf + ed)b}{bdf} \tag{3.5.6}$$

$$= \frac{adf + cfb + edb}{bdf} \tag{3.2.15}$$

$$= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf} \tag{3.2.12}$$

$$= \frac{(ad + cb)f + ebd}{bdf} \tag{3.2.15}$$

$$= \frac{ad + cb}{bd} + \frac{e}{f} \tag{3.5.6}$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}. \tag{3.5.6}$$

Per veure el punt (3) fem

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} \quad (3.5.6)$$

$$= \frac{a}{b}. \quad (3.2.6)$$

Per veure el punt (4) fem

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ab}{bb} \quad (3.5.6)$$

$$= \frac{0}{bb} \quad (3.2.6)$$

$$= \frac{0}{1}. \quad (3.5.5)$$

i hem acabat. \square

Proposició 3.5.9. *Siguin $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$ nombres racionals. Aleshores es satisfà*

$$1. \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \frac{a}{b}.$$

$$2. \frac{a}{b} \frac{1}{1} = \frac{a}{b}.$$

$$3. \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \frac{c}{d} \right) \frac{e}{f}.$$

$$4. \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \frac{e}{f}.$$

Demostració. Per veure el punt (1) fem

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{ca}{db} \quad (3.2.12)$$

$$= \frac{c}{d} \frac{a}{b}. \quad (3.5.7)$$

Per veure el punt (2) fem

$$\frac{a}{b} \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{a}{b}. \quad (3.2.6)$$

Per veure el punt (3) fem

$$\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \frac{ce}{df} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{a(ce)}{b(df)} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{(ac)e}{(bd)f} \quad (3.2.14)$$

$$= \frac{ac}{bd} \frac{e}{f} \quad (3.5.7)$$

$$= \left(\frac{a}{b} \frac{c}{d} \right) \frac{e}{f}. \quad (3.5.7)$$

Per veure el punt (4) fem

$$\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \frac{cf + de}{df} \quad (3.5.6)$$

$$= \frac{a(cf + de)}{bdf} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{acf + ade}{bdf} \quad (3.2.15)$$

$$= \frac{acf + ade}{bdf} \frac{1}{1} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{acf + ade}{bdf} \frac{b}{b} \quad (3.5.4)$$

$$= \frac{(acf + aed)b}{bdfb} \quad (3.5.7)$$

$$= \frac{acfb + aedb}{bdfb} \quad (3.2.5)$$

$$= \frac{acbf + aebd}{bdbf} \quad (3.2.12)$$

$$= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} \quad (3.5.6)$$

$$= \frac{a}{b} \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \frac{e}{f}. \quad (3.5.7)$$

I hem acabat. □

Teorema 3.5.10. *Siguin $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dos racionals tals que*

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{0}{1}.$$

Aleshores $a = 0$ ó $c = 0$.

Demostració. Per la definició de 3.5.7 trobem que

$$\frac{ac}{bd} = \frac{0}{1},$$

i per la definició de 3.5.2 tenim que es satisfà

$$ac \cdot 1 = bd \cdot 0.$$

Per tant

$$ac = 0,$$

i pel Teorema 3.2.16 tenim que ha de ser $a = 0$ ó $c = 0$. □

Teorema 3.5.11. *Sigui $\frac{a}{b}$ un racional amb $a \neq 0$. Aleshores*

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{1}{1}.$$

Demostració. Per la definició de 3.5.7 i la proposició 3.2.12 tenim que

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}$$

i per la proposició 3.5.4 tenim que

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{1}{1}. \quad \square$$

Bibliografia

- [1] *Construction of number systems*. 1 de jul. de 2018. URL: <https://www.math.wustl.edu/~kumar/courses/310-2011/Peano.pdf>.
- [2] Ramon Antoine, Rosa Camps i Jaume Moncasi. *Introducció a l'àlgebra abstracta. Amb elements de matemàtica discreta*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2007. ISBN: 978-84-490-2515-0.
- [3] Agustí Reventós Tarrida. «Temes diversos de fonaments de les matemàtiques». 2014.
- [4] *Apunts d'un curs de Topologia elemental*. Vers. 1.2. 2017. URL: <http://mat.uab.cat/~aguade/teaching.html>.
- [5] Manuel Castellet i Irene Llerena. *Àlgebra lineal i geometria*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2009. ISBN: 84-7488-943-X.
- [6] Roger Godement. *Algebra*. Anglès. Kershaw Publishing Co Ltd, 1969. ISBN: 978-0901665003.
- [7] Antonella Cupillari. *The Nuts and Bolts of Proofs. An Introduction to Mathematical Proofs*. Anglès. 4a ed. Academic Press, 2012. ISBN: 978-0123822178.
- [8] Emilio Bujalance García et al. *Problemas de Matemática Discreta*. Castellà. Sanz y Torres, 1933. ISBN: 9788488667038.
- [9] Peter Eccles. *An Introduction to Mathematical Reasoning*. Anglès. University of Manchester, 1997. ISBN: 9780521597180.
- [10] Carol Schumacher. *Chapter Zero. Fundamental Notions of Abstract Mathematics*. Anglès. Addison Wesley, 2001. ISBN: 9780201826531.

La secció sobre els axiomes de Peano està fortament inspirada en [1]. La resta de la teoria és una combinació de [2] i [3], uns apunts de l'assignatura que sospito que només són accessibles des del campus virtual. La part axiomàtica de la secció de teoria de conjunts està inspirada en [4], i la resta segueix [3].

La bibliografia del curs inclou els textos [2, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Part II

Àlgebra lineal

CAPÍTOL 4

Matrius

4.1 Matrius i operacions

4.1.1 Cossos

Definició 4.1.1 (Cos). Aclarir on va aquest apartat.

4.1.2 Les matrius

Definició 4.1.2 (Matriu). Siguin m i n dos enters i $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ elements d'un cos \mathbb{K} . Aleshores direm que

$$[a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

és una matriu de mida $m \times n$ sobre \mathbb{K} .

Direm que $a_{i,j}$ és el component (i, j) de la matriu $[a_{i,j}]$. Si $A = [a_{i,j}]$ també denotarem $[A]_{i,j} = a_{i,j}$.

Si $n = m$ direm que $(a_{i,j})$ és una matriu quadrada d'ordre n .

Notació 4.1.3 (Conjunt de matrius). Siguin m i n dos enters, \mathbb{K} un cos i

$$X = \{A \mid A \text{ és una matriu de mida } m \times n \text{ sobre } \mathbb{K}\}$$

un conjunt. Aleshores denotarem $X = M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Si $n = m$ denotarem $X = M_n(\mathbb{K})$.

Definició 4.1.4 (Suma de matrius). Siguin A i B dues matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores definim la seva suma com una operació $+$ que satisfà

$$[A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}.$$

Definició 4.1.5 (Producte de matrius). Siguin A una matriu de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} i B una matriu de mida $l \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores definim el seu producte com una operació \cdot que satisfà

$$[A \cdot B]_{i,j} = \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j}.$$

Escriurem $A \cdot B = AB$.

4.1.3 Propietats de les operacions amb matrius

Proposició 4.1.6. Siguin A , B i C tres matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Demostració. Per la definició de 4.1.4 tenim que

$$\begin{aligned} [(A + B) + C]_{i,j} &= [A + B]_{i,j} + [C]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} + [C]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + ([B]_{i,j} + [C]_{i,j}) \\ &= [A]_{i,j} + [B + C]_{i,j} \\ &= [A + (B + C)]_{i,j}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

□

Proposició 4.1.7. Siguin A i B dues matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores

$$A + B = B + A.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.4 tenim que

$$\begin{aligned} [A + B]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [B]_{i,j} \\ &= [B]_{i,j} + [A]_{i,j} \\ &= [B + A]_{i,j}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

□

Notació 4.1.8 (Matriu nul·la). Denotarem la matriu de mida $m \times n$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

com $0_{m \times n}$, ó 0 si és clar pel context. També escriurem $0_{n \times n} = 0_n$.

Proposició 4.1.9. Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores

$$A + 0 = A.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.4 tenim que

$$\begin{aligned} [A + 0]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [0]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} + 0 \\ &= [A]_{i,j}, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

com volíem veure.

□

Definició 4.1.10 (Producte d'una matriu per escalars). Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} i α un escalar de \mathbb{K} . Aleshores definim

$$[\alpha A]_{i,j} = \alpha[A]_{i,j}.$$

Denotarem $(-1)A$ com $-A$.

Proposició 4.1.11. Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores

$$A - A = 0.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.4 tenim que

$$\begin{aligned} [A - A]_{i,j} &= [A]_{i,j} + [-A]_{i,j} \\ &= [A]_{i,j} - [A]_{i,j} & (4.1.10) \\ &= 0 & (4.1.1) \end{aligned}$$

i trobem $A - A = 0$. \square

Proposició 4.1.12. Sigui A una matriu de mida $m \times n$ i α i β dos escalars de \mathbb{K} . Aleshores

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Demostració. Per la definició de 4.1.10 tenim que

$$\begin{aligned} [(\alpha\beta)A]_{i,j} &= \alpha\beta[A]_{i,j} \\ &= \alpha(\beta[A]_{i,j}) & (4.1.1) \\ &= \alpha[\beta A]_{i,j}. & \square \end{aligned}$$

Proposició 4.1.13. Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} i α i β dos escalars de \mathbb{K} . Aleshores

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.10 tenim que

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta)A]_{i,j} &= (\alpha + \beta)[A]_{i,j} \\ &= \alpha[A]_{i,j} + \beta[A]_{i,j}, & (4.1.1) \\ &= [\alpha A]_{i,j} + [\beta A]_{i,j} \end{aligned}$$

i hem acabat. \square

Proposició 4.1.14. Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores

$$1A = A.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.10 tenim que

$$[1A]_{i,j} = 1[A]_{i,j}$$

i per la definició de 4.1.1 trobem que

$$1[A]_{i,j} = [A]_{i,j},$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.15. *Siguin \mathbb{K} un cos i A una matriu de mida $m \times l$ sobre \mathbb{K} , B una matriu de mida $l \times s$ sobre \mathbb{K} i C una matriu de mida $s \times m$ sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$(AB)C = A(BC).$$

Demostració. Per la definició de 4.1.5 tenim que

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{i,j} &= \sum_{r=1}^s [AB]_{i,r} [C]_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^s \left(\sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,r} \right) [C]_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^s \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,r} [C]_{r,j} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$= \sum_{k=1}^l \sum_{r=1}^s [A]_{i,k} [B]_{k,r} [C]_{r,j} \quad (4.1.1)$$

$$= \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} \sum_{r=1}^s ([B]_{k,r} [C]_{r,j}) \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [BC]_{k,j} \\ &= [A(BC)]_{i,j}, \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.16. *Siguin A i A' dues matrius de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} i B, B' dues matrius de mida $l \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A + A')B = AB + A'B$$

i

$$A(B + B') = AB + AB'.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.5 tenim que

$$\begin{aligned} [(A + A')B]_{i,j} &= \sum_{k=1}^l [A + A']_{i,k} [B]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^l ([A]_{i,k} + [A']_{i,k}) [B]_{k,j} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$= \sum_{k=1}^l ([A]_{i,k} [B]_{k,j} + [A']_{i,k} [B]_{k,j}) \quad (4.1.1)$$

$$= \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j} + \sum_{k=1}^l [A']_{i,k} [B]_{k,j} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} &= [AB]_{i,j} + [A'B]_{i,j} \\ &= [AB + A'B]_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

L'altre demostració és anàloga. \square

4.1.4 Matrius inverses i matrius transposades

Notació 4.1.17 (Matriu identitat). Denotarem la matriu d'ordre n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

com I_n i direm que I_n és la matriu identitat d'ordre n .

Proposició 4.1.18. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$I_m A = A = A I_n.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.5 tenim que

$$[I_m A]_{i,j} = \sum_{k=1}^m [I_m]_{i,k} [A]_{k,j}.$$

Ara bé, tenim que

$$[I_m]_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

i per la definició de 4.1.1 tenim que

$$\sum_{k=1}^m [I_m]_{i,k} [A]_{k,j} = [A]_{i,j}$$

i per tant $I_m A = A$.

La demostració de l'altre igualtat és anàloga. \square

Proposició 4.1.19. *Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixin dues matrius A_1 i A_2 d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que*

$$A A_1 = A_1 A = I_n \quad i \quad A A_2 = A_2 A = I_n.$$

Aleshores $A_1 = A_2$.

Demostració. Per la proposició 4.1.15 tenim que

$$A_1 (A A_2) = (A_1 A) A_2$$

i per hipòtesi trobem que $A_1 I_n = I_n A_2$, i per la proposició 4.1.18 trobem que $A_1 = A_2$, com volíem veure. \square

Definició 4.1.20 (Matriu invertible). Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixi una matriu A' d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que

$$A A' = A' A = I_n.$$

Aleshores direm que A és una matriu invertible i que A' és la inversa de A . També denotarem $A' = A^{-1}$.

Observem que aquesta definició té sentit per la proposició 4.1.19.

Observació 4.1.21. *Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} tal que existeix un $i \in \{1, \dots, n\}$ satisfent*

$$a_{i,j} = 0 \text{ ó } a_{j,i} = 0 \quad \text{per a tot } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Aleshores A no és invertible.

Proposició 4.1.22. *Siguin A i B dues matrius invertibles d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores la matriu AB és invertible.*

Demostració. Per la proposició 4.1.15 i la definició de 4.1.20 tenim que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \text{Id} \quad \text{i} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = \text{Id},$$

i de nou per la definició tenim que AB és invertible. \square

Proposició 4.1.23. *Siguin A i B dues matrius invertibles d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Aquest enunciat té sentit per la proposició 4.1.22.

Demostració. Per la definició de 4.1.20 tenim que

$$(AB)^{-1}AB = I_n,$$

i com que, per hipòtesi, les matrius A i B són invertibles trobem

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1} &= (AB)^{-1}ABB^{-1}A^{-1} \\ &= (AB)^{-1}AA^{-1} = (AB)^{-1}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 4.1.24. *Sigui A una matriu invertible d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Demostració. Per la proposició 4.1.23 tenim que

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A$$

i com que, per hipòtesi, la matriu A és invertible trobem

$$AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = AA^{-1}A$$

i tenim

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad \square$$

Definició 4.1.25 (Matriu transposada). *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Definim la transposada de A com una matriu A^t de mida $n \times m$ sobre \mathbb{K} que satisfà*

$$[A^t]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Proposició 4.1.26. *Siguin A i B dues matrius de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores*

$$(A + B)^t = A^t + B^t.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.25 tenim que

$$\begin{aligned} [(A+B)^t]_{i,j} &= [A+B]_{j,i} \\ &= [A]_{j,i} + [B]_{j,i} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} &= [A^t]_{i,j} + [B^t]_{i,j} \\ &= [A^t + B^t]_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.27. *Siguin A una matriu de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} i B una matriu de mida $l \times n$ sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.25 tenim que

$$\begin{aligned} [(AB)^t]_{i,j} &= [AB]_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^l [A]_{j,k} [B]_{k,i} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^l [A^t]_{k,j} [B]_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^l [B^t]_{i,k} [A^t]_{k,j} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$= [B^t A^t]_{i,j}, \quad (4.1.1)$$

com volíem veure. \square

Proposició 4.1.28. *Sigui A una matriu invertible d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Demostració. Per la proposició 4.1.27 tenim que

$$A^t (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t \quad \text{i} \quad (A^{-1})^t A^t = (A A^{-1})^t,$$

i per la definició de 4.1.20 tenim que A^t és invertible i que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, com volíem veure. \square

Definició 4.1.29 (Matriu simètrica). *Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que $A^t = A$. Aleshores direm que A és una matriu simètrica.*

4.1.5 Producte de matrius en blocs

Definició 4.1.30 (Files i columnes). *Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores definim*

$$F_i = [a_{i,1} \quad \cdots \quad a_{i,n}]$$

com la i -èsima fila de A i

$$C_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$$

com la i -èsima columna de A .

Observació 4.1.31. Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ tenim $F_i \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$ i $C_i \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$.

Notació 4.1.32. Si A és una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , F_1, \dots, F_m les files de A i C_1, \dots, C_n les columnes de A . Aleshores denotem

$$A = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = [C_1 \quad \cdots \quad C_n].$$

Notació 4.1.33. Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , m_1, \dots, m_p i n_1, \dots, n_q nombres naturals tals que $m_1 + \dots + m_p = m$ i $n_1 + \dots + n_q = n$, $m_0 = n_0 = 1$ i

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{m_{i-1}, n_{j-1}} & \cdots & a_{m_{i-1}, n_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_i, n_{j-1}} & \cdots & a_{m_i, n_j} \end{bmatrix}$$

matrius sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores denotem

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix}.$$

Proposició 4.1.34. Sigui A una matriu de mida $m \times l$ sobre un cos \mathbb{K} , B una matriu de mida $l \times n$ sobre \mathbb{K} , m_1, \dots, m_p , l_1, \dots, l_q i n_1, \dots, n_r nombres naturals satisfent $m_1 + \dots + m_p = m$, $l_1 + \dots + l_q = l$ i $n_1 + \dots + n_r = n$, i per a tot $i \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ i $j \in \{1, \dots, r\}$ tals que $A_{i,k}$ és una matriu de mida $m_i \times l_k$ sobre \mathbb{K} i $B_{k,j}$ és una matriu de mida $l_k \times n_j$ sobre \mathbb{K} tals que

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \end{bmatrix}.$$

Aleshores

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^q A_{1,k} B_{k,1} & \sum_{k=1}^q A_{1,k} B_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^q A_{1,k} B_{k,r} \\ \sum_{k=1}^q A_{2,k} B_{k,1} & \sum_{k=1}^q A_{2,k} B_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^q A_{2,k} B_{k,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^q A_{p,k} B_{k,1} & \sum_{k=1}^q A_{p,k} B_{k,2} & \cdots & \sum_{k=1}^q A_{p,k} B_{k,r} \end{bmatrix}.$$

Demostració. Per la definició de 4.1.5 tenim que

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j}.$$

També tenim que $i = m_1 + \dots + m_{k_i} + i'$ i $j = n_1 + \dots + n_{k_j} + j'$ per a certs $k_i \in \{1, \dots, p-1\}$, $k_j \in \{1, \dots, r-1\}$, $i' \leq m_{k_i+1} - m_{k_i}$ i $j' \leq n_{k_j+1} - n_{k_j}$. Per tant hem de veure que

$$\sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j} = \left[\sum_{k=1}^q A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}} \right]_{i',j'}.$$

Per la definició de 4.1.4 tenim que

$$\left[\sum_{k=1}^q A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}} \right]_{i',j'} = \sum_{k=1}^q [A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}}]_{i',j'},$$

i per la definició de 4.1.5 trobem

$$\sum_{k=1}^q [A_{m_{k_i},k} B_{k,n_{k_j}}]_{i',j'} = \sum_{k=1}^q \left(\sum_{h=1}^{l_k} [A_{m_{k_i},k}]_{i',h} [B_{k,n_{k_j}}]_{h,j'} \right).$$

Ara bé, com que per hipòtesi tenim que

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,q} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{q,1} & \cdots & B_{q,r} \end{bmatrix}.$$

i que $i = m_1 + \dots + m_{k_i} + i'$ i $j = n_1 + \dots + n_{k_j} + j'$, trobem

$$\sum_{k=1}^q \left(\sum_{h=1}^{l_k} [A_{m_{k_i},k}]_{i',h} [B_{k,n_{k_j}}]_{h,j'} \right) = \sum_{k=1}^l [A]_{i,k} [B]_{k,j}. \quad \square$$

4.2 Rang d'una matriu

4.2.1 Transformacions elementals

Definició 4.2.1 (Transformacions elementals). Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} i i i j dos naturals diferents amb $i, j \leq m$ i λ un element no nul de \mathbb{K} . Aleshores definim les funcions

$$P_{i,j}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad D_{i,\lambda}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \lambda a_{i,1} & \cdots & \lambda a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$\text{i } E_{i,j,\lambda}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} - \lambda a_{j,1} & \cdots & a_{i,n} - \lambda a_{j,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

com les transformacions elementals per files de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposició 4.2.2. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores per a tota successió de transformacions elementals per files f existeix una matriu P d'ordre m sobre \mathbb{K} tal que $f(A) = PA$ i per a tota successió de transformacions elementals per columnes g existeix una matriu Q d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que $g(A) = AQ$.*

Demostració. En tenim prou amb veure que $P_{i,j}(A) = P_{i,j}(I_m)A$, $D_{i,\lambda}(A) = D_{i,\lambda}(I_m)A$ i $E_{i,j,\lambda}(A) = E_{i,j,\lambda}(I_m)A$ i que $P_{i,j}(A^t)^t = AP_{i,j}(I_n)$, $D_{i,\lambda}(A^t)^t = AD_{i,\lambda}(I_n)$ i $E_{i,j,\lambda}(A^t)^t = AE_{i,j,\lambda}(I_n)$, i això és conseqüència de la definició de 4.1.5. \square

Definició 4.2.3 (Matriu elemental). Sigui P una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixi una sèrie de transformacions elementals tals que per a tota matriu A de mida $m \times n$ sobre \mathbb{K} tenim $f(A) = PA$. Aleshores direm que P és una matriu elemental.

Aquesta definició té sentit per la proposició 4.2.2.

Observació 4.2.4. *Siguin P i Q dues matrius elementals d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores PQ és una matriu elemental.*

Notació 4.2.5. Denotarem les transformacions elementals per files $P_{i,j}$ com $F_i \leftrightarrow F_j$, $D_{i,\lambda}$ com $F_i \rightarrow \lambda F_i$ i $E_{i,j,\lambda}$ com $F_i \rightarrow F_i + \lambda F_j$.

Aprofitant la proposició 4.2.2 també denotarem una successió de transformacions elementals com una matriu quadrada.

Si apliquem una transformació elemental per files a una matriu transposada i transposem el resultat denotarem $P_{i,j}$ com $C_i \leftrightarrow C_j$, $D_{i,\lambda}$ com $C_i \rightarrow \lambda C_i$ i $E_{i,j,\lambda}$ com $C_i \rightarrow C_i + \lambda C_j$ i direm que són transformacions elementals per columnes.

Proposició 4.2.6. *Sigui P una matriu elemental d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores P és una matriu invertible.*

Demostració. En tenim prou amb veure que $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$, $D_{i,\lambda}^{-1} = D_{i,\lambda^{-1}}$ i $E_{i,j,\lambda}^{-1} = E_{i,j,-\lambda}$. Per tant, per la definició de 4.2.3 i la definició de 4.1.20 tenim que P és una matriu invertible. \square

4.2.2 Matrius esglaonades i mètode de Gauss

Definició 4.2.7 (Matriu esglaonada). Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} tal que existeixen $j_1 < \cdots < j_r$ nombres naturals tals que per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$ i per a tot $j < j_i$ tenim $a_{i,j} = 0$ i $a_{i,j_i} = 1$; i per a tot $i > j_r$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ tenim $a_{i,j} = 0$.

Aleshores direm que A està esglaonada per files i que A^t està esglaonada per columnes.

Direm que una matriu A es pot esglaonar per files si existeix una successió P de transformacions elementals per files tals que PA està esglaonada per files.

Proposició 4.2.8. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A es pot esglaonar per files.*

Demostració. Denotem $A = (a_{i,j})$. Ho farem per inducció sobre n .

Suposem que $n = 1$. Si $a_{i,1} = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$ per la definició de 4.2.7 hem acabat. Suposem doncs que existeix un $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a_{i,1} \neq 0$. Aleshores podem fer les transformacions elementals

$$A = \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_i \leftrightarrow F_1} \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i-1,1} \\ a_{1,1} \\ a_{i+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow a_{1,1}^{-1} F_1} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_i \rightarrow F_i - a_{i,1} F_1 \\ \text{per a tot } i \in \{2, \dots, m\}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

i per la definició de 4.2.7 hem acabat.

Suposem doncs que la hipòtesi és certa per a n . Veiem que també ho és per $n + 1$. Sigui $A = (a_{i,j})$ una matriu de mida $m \times (n + 1)$ sobre \mathbb{K} . Considerem la matriu

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1,2} & \dots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,n+1} \end{bmatrix}.$$

Per la definició de 4.1.2 tenim que A' és una matriu de mida $m \times n$ sobre \mathbb{K} , i per l'hipòtesi d'inducció tenim que podem esglaonar-la. Sigui doncs B la matriu A' esglaonada. Considerem la matriu

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,m} \end{bmatrix},$$

que correspon a la primera columna de la matriu A . Hem vist que podem esglaonar-la, i per tant per la definició de 4.2.7 tenim que podem esglaonar la matriu A , ja que

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,m} \end{bmatrix} & A' \end{array} \right],$$

i pel 3.1.7 hem acabat. \square

Corol·lari 4.2.9. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A es pot esglaonar per columnes.*

4.2.3 Reducció d'una matriu

Teorema 4.2.10 (Teorema de la PAQ -reducció). *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores existeixen un únic nombre natural r satisfent $r \leq \min(m, n)$, una matriu elemental P d'ordre m sobre \mathbb{K} i una matriu elemental Q d'ordre n sobre \mathbb{K} tals que*

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Demostració. Denotem $A = (a_{i,j})$. Si $a_{i,j} = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ aleshores tenim $r = 0$ i hem acabat. Suposem doncs que existeixen $i \in \{1, \dots, m\}$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ tals que $a_{i,j} \neq 0$.

Per la proposició 4.2.8 tenim que existeix una matriu elemental P d'ordre m sobre \mathbb{K} tal que PA està esglaonada per files. Per la definició de 4.2.7 tenim que existeixen j_i per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$ amb $j_1 < \dots < j_r$ tals que per a tot $j < j_i$ tenim $a_{i,j} = 0$ i $a_{i,j_i} = 1$. Fent les transformacions elementals

$$C_1 \leftrightarrow C_{j_1}, \quad C_2 \leftrightarrow C_{j_2}, \dots, C_r \leftrightarrow C_{j_r}$$

a la matriu PA obtenim la matriu

$$A_1 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{r-1,r} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right],$$

i fent a la matriu A_1 les transformacions elementals

$$\begin{aligned} C_{k_1} &\rightarrow C_{k_1} - b_{1,k_1} C_1, & \text{per a } k_1 \in \{2, \dots, n\} \\ C_{k_2} &\rightarrow C_{k_2} - b_{2,k_2} C_2, & \text{per a } k_2 \in \{3, \dots, n\} \\ &\vdots \\ C_{k_r} &\rightarrow C_{k_r} - b_{r,k_r} C_r, & \text{per a } k_r \in \{r+1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

i per la proposició 4.2.2 tenim que existeix una matriu P d'ordre n sobre \mathbb{K} tal que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

i per la definició de 4.2.2 tenim que les matrius P i Q són matrius elementals.

Veiem ara que r és únic. Suposem que existeixen un nombre natural $s \leq \min(m, n)$, una matriu elemental P_1 d'ordre m sobre \mathbb{K} i una matriu elemental Q_1 d'ordre n sobre \mathbb{K} tals que

$$P_1 A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Hem de veure que $r = s$. Suposem que $r \leq s$.

Tenim que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

i

$$P_1AQ_1 = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Com que, per la proposició 4.2.6, les matrius P , Q , P_1 i Q_1 són invertibles tenim que

$$A = P^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] Q^{-1} = P_1^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] Q_1^{-1},$$

i per tant

$$P_1P^{-1} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] Q_1^{-1}Q.$$

Denotem $P_2 = P_1P^{-1}$, $Q_2 = Q_1^{-1}Q$, $P_2 = (p_{i,j})$ i $Q_2 = (q_{i,j})$ i tenim

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} p_{1,1} & \cdots & p_{1,r} & p_{1,r+1} & \cdots & p_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s,1} & \cdots & p_{s,r} & p_{s,r+1} & \cdots & p_{s,m} \\ \hline p_{s+1,1} & \cdots & p_{s+1,r} & p_{s+1,r+1} & \cdots & p_{s+1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,r} & p_{m,r+1} & \cdots & p_{m,m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \\ & = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} q_{1,1} & \cdots & q_{1,r} & q_{1,r+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s,1} & \cdots & q_{s,r} & q_{s,r+1} & \cdots & q_{s,n} \\ \hline q_{s+1,1} & \cdots & q_{s+1,r} & q_{s+1,r+1} & \cdots & q_{s+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n,1} & \cdots & q_{n,r} & q_{n,r+1} & \cdots & q_{n,n} \end{array} \right], \end{aligned}$$

i per la proposició 4.1.34 tenim que

$$\left[\begin{array}{cccccc} p_{1,1} & \cdots & p_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s,1} & \cdots & p_{s,r} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{s+1,1} & \cdots & p_{s+1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m,1} & \cdots & p_{m,r} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc} q_{1,1} & \cdots & q_{1,r} & q_{1,r+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s,1} & \cdots & q_{s,r} & q_{s,r+1} & \cdots & q_{s,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Per tant

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} q_{1,r+1} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{s,r+1} & \cdots & q_{s,n} \end{array} \right]$$

i trobem que

$$Q_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} q_{1,1} & \cdots & q_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{s,1} & \cdots & q_{s,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline q_{s+1,1} & \cdots & q_{s+1,r} & q_{s+1,r+1} & \cdots & q_{s+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n,1} & \cdots & q_{n,r} & q_{n,r+1} & \cdots & q_{n,n} \end{array} \right].$$

Denotem per tant

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} Q'_2 & 0_{s \times (n-r)} \\ \hline Q''_2 & Q'''_2 \end{array} \right].$$

Ara bé, pel que hem vist abans, existeixen un nombre natural $t \leq \min(r, s)$, una matriu invertible P_3 d'ordre s sobre \mathbb{K} i una matriu invertible Q_3 d'ordre r sobre \mathbb{K} tals que

$$P_3 Q'_2 Q_3 = \left[\begin{array}{c|c} I_t & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

i com que, per hipòtesi, $r \leq s$ tenim $t \leq r \leq s$.

Per tant per la proposició 4.1.34 tenim que

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} P_3 & 0_{s \times (n-s)} \\ \hline 0_{(n-s) \times s} & I_{n-s} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} Q'_2 & 0_{s \times (n-r)} \\ \hline Q''_2 & Q'''_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} Q_3 & 0_{r \times (n-r)} \\ \hline 0_{(n-r) \times r} & I_{n-r} \end{array} \right] = \\ & = \left[\begin{array}{c|c|c} I_t & 0_{t \times (r-t)} & 0_{s \times (n-r)} \\ \hline 0_{(r-t) \times t} & 0_{(s-t) \times (r-t)} & \\ \hline & Q''_2 Q_3 & Q'''_2 \end{array} \right] = B. \end{aligned}$$

Per la proposició 4.1.22 trobem que la matriu B és invertible. Ara bé, per l'observació 4.1.21 trobem que ha de ser $r - t = s - t = 0$, i per tant $r = s$, com volíem veure. La demostració del cas $s \leq r$ és anàloga. \square

Definició 4.2.11 (Rang). Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , P una matriu invertible d'ordre n sobre \mathbb{K} i Q una matriu invertible d'ordre m sobre \mathbb{K} tals que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Aleshores direm que r és el rang de A i denotarem $\text{rang}(A) = r$.

Observem que aquesta definició té sentit pel 4.2.10.

Proposició 4.2.12. *Sigui A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$.*

Demostració. Per la definició de 4.2.11 tenim que existeixen una matriu P invertible d'ordre n sobre \mathbb{K} i una matriu Q invertible d'ordre m sobre \mathbb{K} tals que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ara bé, per la proposició 4.1.27 tenim que

$$Q^t A^t P^t = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Per la proposició 4.1.28 tenim que les matrius Q^t i P^t són invertibles, i per tant, per la definició de 4.2.11 tenim que $\text{rang } A^t = r$. \square

Proposició 4.2.13. *Sigui A una matriu invertible d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A és una matriu elemental.*

Demostració. Pel 4.2.10 tenim que existeixen dues matrius invertibles P i Q d'ordre n sobre \mathbb{K} tals que

$$PAQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ara bé, per la proposició 4.1.22 tenim que la matriu

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

ha de ser invertible, i per l'observació 4.1.21 trobem que ha de ser $r = n$. Per tant tenim $PAQ = I_n$ i tenim que $A = P^{-1}Q^{-1}$, i per l'observació 4.2.4 tenim que A és una matriu elemental. \square

Corol·lari 4.2.14. *Sigui A una matriu d'ordre n sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores A és invertible si i només si $\text{rang}(A) = n$.*

Observació 4.2.15. *Siguin A una matriu de mida $m \times n$ sobre un cos \mathbb{K} , P una matriu invertible d'ordre m sobre \mathbb{K} i Q una matriu invertible d'ordre n sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(PAQ).$$

4.3 Determinant d'una matriu

4.3.1 Propietats dels determinants

Definició 4.3.1 (Determinant). Sigui \mathbb{K} un cos i $\det: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ una aplicació que satisfà per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ i $j \in \{i+1, \dots, n\}$ i per a tot $C_i \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$

1. Per a tot $C'_j \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$ es satisfà

$$\begin{aligned} \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i + C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n) &= \\ &= \det(C_1, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n). \end{aligned}$$

2. Per a tot $\alpha \in \mathbb{K}$ es satisfà

$$\det(C_1, \dots, C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = \alpha \det(C_1, \dots, C_n)$$

3. Si $C_i = C_j$ es satisfà

$$\det(C_1, \dots, C_n) = 0.$$

4. $\det(I_n) = 1$.

Aleshores direm que \det és un determinant.

Proposició 4.3.2.

Part III

Coses per fer

Podeu trobar la versió actualitzada d'aquest pdf seguint aquest [link](#).

5.1 Àlgebra lineal

5.1.1 Definicions

Definició 5.1.1 (Forma bilineal). Doble la linealitat, doble el poder.

Definició 5.1.2 (Forma bilineal definida estrictament positiva o negativa). Sigui M una forma bilineal simètrica. Preguntar a en Cedò.

Definició 5.1.3 (Norma d'una aplicació lineal).

Definició 5.1.4 (Producte escalar). És lineal i més coses.

Definició 5.1.5 (Norma d'un vector). $|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Definició 5.1.6 (Dependència lineal).

5.1.2 Proposicions

Proposició 5.1.7. *Vectors linealment independents \iff determinant no nul.*

5.1.3 Teoremes

Teorema 5.1.8. *Sigui $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu simètrica. Aleshores A és definida positiva si i només si*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{vmatrix} > 0$$

per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostració. Per inducció sobre n . □

5.2 Funcions de variable real

5.2.1 Definicions

Definició 5.2.1 (Imatge). Siguin X i Y dos conjunts, A un subconjunt de X i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Aleshores definim

$$\text{Im}_A(f) = \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$$

com la imatge de f per A .

Definició 5.2.2 (Antiimatge). Siguin X i Y dos conjunts, B un subconjunt de Y i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Aleshores definim

$$\text{Im}^{-1}_B(f) = \{x \in X \mid f(x) = b \text{ per a cert } b \in B\}$$

com la antiimatge de f per B .

Definició 5.2.3 (Límit).

Definició 5.2.4 (Funció contínua). Sigui f una funció. Direm que f és contínua en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definició 5.2.5 (Partició, poligonal i longitud d'una poligonal). Sigui (a, b) un interval de \mathbb{R} . Direm que una partició de (a, b) és un conjunt de escalars $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ que compleixen $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Direm que t_0, \dots, t_n són els nodes de la partició.

Sigui $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció. Definirem la poligonal P_n d'una partició en una funció f com

$$P_n = f(t_0), \dots, f(t_n).$$

Definim la longitud de la poligonal P_n com

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|.$$

Definició 5.2.6 (Classe de diferenciabilitat d'una funció). Sigui f una funció n -vegades diferenciable amb $f^{(n)}$ contínua. Direm que f és de classe \mathcal{C}^n o que $f \in \mathcal{C}^n$.

Definició 5.2.7 (Derivada).

Definició 5.2.8 (Notació de Landau). $A(h) = o(B(h)) \dots$

5.2.2 Proposicions

Proposició 5.2.9. Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval i $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, si f és derivable en un punt $a \in I$, f és contínua en a .

Proposició 5.2.10. Sigui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i monòtona. Aleshores f és integrable Riemann.

5.2.3 Teoremes

Teorema 5.2.11 (Equivalència entre normes). *Si $q(x)$ és una norma existeixen $m, M \in \mathbb{R}^+$ tals que $m\|x\| \leq q(x) \leq M\|x\|$ per a tot $x \in \mathbb{R}^m$.*

Teorema 5.2.12 (Teorema del Valor Mig). *hmm trivial*

Teorema 5.2.13 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz).

Teorema 5.2.14 (Teorema de Taylor). *Siguin (a, b) un interval obert de \mathbb{R} i $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe \mathcal{C}^n . Aleshores, per a dos punts $x, c \in (a, b)$, amb $x < c$, existeix un punt $x_1 \in (x, c)$ tal que*

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - c)^n.$$

Teorema 5.2.15 (Teorema de Weierstrass). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, donat un compacte $S \subset U$, si f és contínua en S , f té un màxim i un mínim absoluts en S .*

Teorema 5.2.16 (Teorema del sandvitx).

Teorema 5.2.17 (Teorema de Rolle). *Sigui $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Aleshores existeix un cert $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 5.2.18 (Teorema Fonamental del Càlcul). *Siguin $[a, b]$ un interval de \mathbb{R} , $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

una funció. Aleshores $F(x)$ és derivable en $[a, b]$ i $F'(x) = f(x)$ per a tot x de $[a, b]$.

Teorema 5.2.19 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Successió acotada té parcial convergent*

5.3 Trobar lloc per tot això

Definició 5.3.1 (Conjunt obert, tancat...).

Definició 5.3.2 (Continuïtat uniforme). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^m$ dos oberts i $f: U \rightarrow V$ una funció. Aleshores direm que f és uniformement contínua en un conjunt $S \subseteq U$ si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tals que*

$$d_U(x, y) < \varepsilon \text{ i } d_V(f(x) - f(y)) < \delta$$

per a tot punt $x, y \in U$.

Teorema 5.3.3 (Teorema de Heine). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts, $S \subset U$ un compacte i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció contínua. Aleshores f és uniformement contínua en S .*

Definició 5.3.4 (Funció indicatriu). Sigui X un conjunt i $A \subseteq X$ un subconjunt de X . Definim la funció indicatriu de A com una funció

$$1_A: X \longrightarrow \{0, 1\}$$

tal que

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

5.3.1 Complexos

Definició 5.3.5 (Nombre complex). Sigui a i b dos nombres reals, i una constant que satisfà $i^2 = -1$ i

$$z = a + bi.$$

Aleshores direm que z és un nombre complex i que i és la unitat imaginària.

Definició 5.3.6 (Integral d'una funció complexa). Sigui f una funció complexa i a i b dos reals. Aleshores definim

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Re(f(x))dx + i \int_a^b \Im(f(x))dx$$

com la integral de f .

Definició 5.3.7 (Unió disjunta). Sigui A i B dos conjunts. Aleshores definim

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

com la unió disjunta entre A i B .

Definició 5.3.8 (Vectors perpendiculars).

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

5.4 Equacions diferencials ordinàries I

5.4.1 Teoria qualitativa

Observació 5.4.1. *Sigui*

$$\dot{u}(t) = X(u(t))$$

una equació diferencial autònoma sobre un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ amb $X \in \mathcal{C}^1$. Aleshores la funció X és un camp vectorial.

Definició 5.4.2 (Òrbites). Sigui φ una solució d'una equació diferencial autònoma

$$\dot{u}(t) = X(u(t))$$

on $X \in \mathcal{C}^1$. Aleshores direm que φ és una òrbita de l'equació diferencial $\dot{u}(t) = X(u(t))$.

Proposició 5.4.3. *Siguin*

$$\dot{u}(t) = X(u(t))$$

una equació diferencial autònoma sobre un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ amb $X \in \mathcal{C}^1$ i $x \in \mathcal{U}$ un punt. Aleshores existeix una solució maximal φ_x tal que $\varphi_x(0) = x$.

Demostració. Considerem el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = X(u(t)) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Aleshores per la proposició 21.2.20 tenim que existeix una solució maximal φ_x d'aquest problema de Cauchy, i per la definició de 21.2.4 trobem que $\varphi_x(0) = x$ i hem acabat. \square

Definició 5.4.4 (Flux). *Siguin*

$$\dot{u}(t) = X(u(t))$$

una equació diferencial autònoma sobre un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ amb $X \in \mathcal{C}^1$, $x \in \mathcal{U}$ un punt i φ_x la solució maximal tal que $\varphi_x(0) = x$. Aleshores direm que φ_x és el flux de x .

Part IV

Càlcul en diverses variables i optimització

Càlcul diferencial

6.1 Arcs i conjunts connexos

6.1.1 Arcs en múltiples variables

Definició 6.1.1 (Arcs a l'espai). Siguin $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció i Γ el conjunt definit per

$$\Gamma = \{f(t) \in \mathbb{R}^m \mid t \in (a, b)\},$$

aleshores direm que Γ és un arc a \mathbb{R}^m . També direm que f defineix o recorre aquest arc. Així mateix donem les següents definicions:

1. Direm que Γ és un arc continu si f és contínua en (a, b) .
2. Direm que Γ és un arc simple si f és injectiva en (a, b) .
3. Si f està definida en $[a, b]$ direm que f va de $f(a)$ a $f(b)$ o que $f(a)$ n'és el punt inicial i $f(b)$ el punt final. Si $f(a) = f(b)$ direm que Γ és un arc tancat.
4. Direm que Γ és un arc regular si f és derivable en (a, b) .
5. Direm que Γ és un arc de classe \mathcal{C}^n si $f^{(n)}$ existeix i és contínua en (a, b) .

Definició 6.1.2 (Longitud d'un arc continu). Sigui Γ un arc continu i f una manera de recórrer Γ donada per

$$f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Amb $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Considerem la partició $a = t_0 < \dots < t_n = b$. Observem que els punts donats per $f(t_i)$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$ determinen una poligonal, P_n , la longitud de la qual és, per la definició de 5.2.5

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Aleshores definim la longitud de f com

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n).$$

Direm que els arcs amb recorreguts de longitud finita són arcs rectificables.

Proposició 6.1.3. *Sigui Γ un arc de classe \mathcal{C}^1 . Aleshores Γ és rectificable.*

Demostració. Sigui f una funció que recorre Γ tal que

$$\begin{aligned} f: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto (x_1(t), \dots, x_m(t)). \end{aligned}$$

Donada una partició de (a, b) , $a = t_0 < \dots < t_n = b$ que defineix una poligonal $P_n = f(t_0), \dots, f(t_n)$. Aleshores la longitud de la poligonal és, per la definició de 5.2.5,

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i))^2}.$$

Per la proposició 5.2.9 f és contínua en (a, b) , i per tant pel 5.2.12 tenim

$$x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i) = x'_j(\xi_{i,j})(t_{i+1} - t_i),$$

amb $t_i < \xi_{i,j} < t_{i+1}$, per a tot $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Per tant

$$L(P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\sum_{j=1}^m (x'_j(\xi_{i,j}))^2}. \quad (6.1)$$

Ara volem veure que $\xi_{i,j} = t_i$ quan n tendeix a infinit. Observem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_i = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{i+1}.$$

I com que $t_i < \xi_{i,j} < t_{i+1}$ tenim que $\xi_{i,j} = t_i$ per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$. Així veiem que si $n \rightarrow \infty$ podem reescriure (6.1) com

$$L(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) |f'(t_i)| = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

I ja hem acabat. Com que $f \in \mathcal{C}^1$ tenim f' contínua, i $a, b \in \mathbb{R}$, aquesta integral és finita i Γ és rectificable, com volíem veure. \square

6.1.2 Oberts connexos

Definició 6.1.4 (Conjunt arc-connex o connex). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert. Direm que U és arc-connex si donats dos punts $P, Q \in U$ existeix una funció f que defineix un arc continu tal que $f: [a, b] \longrightarrow U$ amb $P = f(a)$, $Q = f(b)$. Direm que U és connex si el segment que els uneix està tot dins U .

Proposició 6.1.5. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i U_1, U_2 dos subconjunts de U arc-connexos amb $U_1 \cup U_2 = U$ tals que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Aleshores U és arc-connex.*

Demostració. Siguin P, Q dos punts en U tals que $P \in U_2^c$ i $Q \in U_1^c$, i $R \in U_1 \cap U_2$ un altre punt. Com que U_1 i U_2 són arc-connexos, per la definició de 6.1.4 existeixen dos arcs continus f, g tals que

$$f: [a, b] \longrightarrow U_1, \quad g: [b, c] \longrightarrow U_2,$$

on $f(a) = P$, $f(b) = g(b) = R$ i $g(c) = Q$. Aleshores definim la funció

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ g(t) & \text{si } b < t \leq c. \end{cases}$$

Tenim que h defineix un arc continu en U , i per la definició de 6.1.2, U és arc-connex. \square

Definició 6.1.6 (Distància en un arc-connex). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un arc-connex, siguin $P, Q \in U$ i F el conjunt de totes les funcions f que defineixen un arc continu en U amb $f(a) = P$, $f(b) = Q$. Definim la distància entre P i Q en U com

$$d_U(P, Q) = \inf_{f \in F} L(f).$$

Observació 6.1.7. Notem que si U és connex $d_U(P, Q) = |P - Q|$.

Proposició 6.1.8. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un arc-connex i $P, Q, R \in U$ tres punts. Aleshores

1. $d_U(P, Q) = d_U(Q, P) \geq 0$
2. $d_U(P, Q) = 0 \iff P = Q$
3. $d_U(P, Q) \leq d_U(P, R) + d_U(R, Q)$ (desigualtat triangular)

Demostració. Sigui $f: [a, b] \rightarrow U$ una funció contínua amb $f(a) = P$ i $f(b) = Q$, i amb $L(f) = \inf_{f \in F} L(f)$, on F és el conjunt de funcions contínues de $[a, b]$ en U que van de P a Q .

Per veure el punt (1) fem

$$\begin{aligned} d_U(P, Q) &= \inf_{f \in F} L(f) \\ &= \inf_{f \in F} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{\sum_{j=1}^d (x'_j(\xi_{i,j}))^2} \right) \\ &= \inf_{f \in F} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)(t_{n-(i+1)} - t_{n-i}) \sqrt{\sum_{j=1}^d (x'_j(\xi_{i,j}))^2} \right) \\ &= \inf_{f \in F} (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{n-(i+1)} - t_{n-i}) \sqrt{\sum_{j=1}^d (x'_j(\xi_{i,j}))^2} \right) \\ &= \inf_{f \in F} (-1) \int_a^b |f'(t)| dt \\ &= \inf_{f \in F} \int_b^a |f'(t)| dt = \inf_{f \in F} L(f) = d_U(Q, P) \geq 0. \end{aligned}$$

Continuem veient el punt (2). Suposem $P = Q$ i considerem, amb $\varepsilon > 0$, la bola oberta $B(\varepsilon, P) \subset U$. Aquesta bola és connexa i, pel corollari 6.1.7, $d_U(P, Q) = |P - Q| = 0 \iff P = Q$.

Acabem veient el punt (3). Sigui F_1 el conjunt de funcions contínues en U que van de P a R i F_2 el conjunt de funcions contínues en U que van de R a Q . Aleshores

$$d_U(P, Q) = \inf_{f \in F} L(f) \leq \inf \left(\inf_{F_1} L(g) + \inf_{F_2} L(h) \right) = d_U(P, R) + d_U(R, Q).$$

Observem que aquestes són les mateixes propietats de una distància. \square

6.2 Funcions diferenciables

6.2.1 Diferencial d'una funció en múltiples variables

Definició 6.2.1 (Derivada direccional). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $t \in \mathbb{R}$ un escalar, $a \in U$ un punt, \vec{u} un vector de \mathbb{R}^d i f una funció definida per

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto (f_1(a), \dots, f_m(a)), \end{aligned}$$

i considerem, per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$, els límits

$$D_{\vec{u}}f_i(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + t\vec{u}) - f_i(a)}{t}.$$

Si tots aquests límits existeixen, direm que la derivada de f en direcció \vec{u} és

$$D_{\vec{u}}f(a) = (D_{\vec{u}}f_1(a), \dots, D_{\vec{u}}f_m(a)).$$

Si \vec{u} és l' i -èsim vector de la base canònica utilitzarem la notació $D_i f(a)$.

Proposició 6.2.2. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció, $D_{\vec{u}}f(a)$ la seva derivada direccional respecte el vector \vec{u} de \mathbb{R}^d i $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Aleshores*

$$D_{\lambda\vec{u}}f(a) = \lambda D_{\vec{u}}f(a).$$

Demostració. Tenim que, per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} D_{\lambda\vec{u}}f_i(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + \lambda t\vec{u}) - f_i(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lambda \frac{f_i(a + \lambda t\vec{u}) - f_i(a)}{\lambda t} \\ &= \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + \lambda t\vec{u}) - f_i(a)}{\lambda t} = \lambda D_{\vec{u}}f_i(a). \end{aligned} \quad \square$$

Definició 6.2.3 (Diferencial d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció i $a \in U$ un punt. Direm que el diferencial de f en a és una aplicació lineal $df(a): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, donat un vector \vec{h} de \mathbb{R}^d

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

Direm que f és diferenciable en a si existeix aquest $df(a)$.

Observació 6.2.4. Observem que en aquesta definició, si $d = 1$, f és diferenciable en $a \iff f$ és derivable en a , i $df(a)(\vec{h}) = \vec{h}f'(a)$ (Si $d = 1$, multiplicar per un vector de \mathbb{R} és com multiplicar per un escalar).

Proposició 6.2.5. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores f és contínua en a .

Demostració. Sigui $df(a)$ el diferencial de f en a . Per la definició de 6.2.3 tenim que, per a qualsevol vector \vec{h} de \mathbb{R}^d

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

Com que $df(a)$ és lineal, $df(a)(\vec{h}) \rightarrow (0, \dots, 0) \iff \|\vec{h}\| \rightarrow 0$. Així veiem que

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} f(a + \vec{h}) - f(a) - df(a)(\vec{h}) = o(\vec{h}).$$

I això compleix la definició de 5.2.4, per tant f és contínua en el punt a . \square

Proposició 6.2.6. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a \in U$ un punt i f una funció tal que

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto (f_1(a), \dots, f_m(a)). \end{aligned}$$

Aleshores

f és diferenciable en $a \iff f_i$ és diferenciable en a per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$.

Demostració. Per la definició de 6.2.3 tenim que, per a qualsevol vector \vec{h} de \mathbb{R}^d

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

El que és equivalent a

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(a + \vec{h}) - f(a) - df(a)(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Sabent que $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$ podem entendre aquest límit com el següent, amb un vector al numerador, que descomponem com

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{(f_1(a + \vec{h}) - f_1(a) - df_1(a)(\vec{h}), \dots, f_m(a + \vec{h}) - f_m(a) - df_m(a)(\vec{h}))}{\|\vec{h}\|} = 0$$

si i només si

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{f_i(a + \vec{h}) - f_i(a) - df_i(a)(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$.

Tenint en compte la definició de 6.2.3, és equivalent a dir que, per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$, f_i és diferenciable en el punt a . \square

Proposició 6.2.7. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores tenim que

1. Donat un vector \vec{u} de \mathbb{R}^d , $D_{\vec{u}}f(a)$ existeix i $df(a)(\vec{u}) = D_{\vec{u}}f(a)$.
2. El diferencial de f en a , $df(a)$, és únic.

Demostració. Sigui \vec{u} un vector de \mathbb{R}^d . Tenim que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

$$f(a + \lambda\vec{u}) = f(a) + df(a)(\lambda\vec{u}) + o(\lambda\vec{u})$$

$$f(a + \lambda\vec{u}) - f(a) = \lambda df(a)(\vec{u}) + o(\lambda\vec{u})$$

$$\frac{f(a + \lambda\vec{u}) - f(a)}{\lambda} = df(a)(\vec{u}) + \frac{o(\lambda\vec{u})}{\lambda}$$

Per tant, amb $\lambda \rightarrow 0$, per la definició de 6.2.1 tenim

$$D_{\vec{u}}f(a) = df(a)(\vec{u}).$$

Amb aquesta demostració també es veu la unicitat del diferencial d'una funció en un punt. \square

Observació 6.2.8. Com a conseqüència del primer apartat veiem que si f és diferenciable en a existeixen totes les seves derivades direccionals i que aquestes compleixen que, donats dos vectors \vec{u}, \vec{v} i dos escalars λ, μ , $D_{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}f(a) = \lambda D_{\vec{u}}f(a) + \mu D_{\vec{v}}f(a)$.

Teorema 6.2.9 (Condicció suficient per a la diferenciabilitat). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció, $a \in U$ un punt i $B(a, \varepsilon)$, una bola centrada en a de radi $\varepsilon > 0$. Si les derivades direccionals de f , $D_i f(x)$, existeixen per a tot punt $x \in B(a, \varepsilon)$, per a tot $i \in \{1, \dots, d\}$ i són contínues en a , aleshores f és diferenciable en a .*

Demostració. Donat un vector \vec{h} de \mathbb{R}^d , considerem la diferencia

$$f(a + \vec{h}) - f(a),$$

amb $a = (a_1, \dots, a_d)$ i $\vec{h} = (h_1, \dots, h_d) = \sum_{i=1}^d h_i \vec{e}_i$, on \vec{e}_i és l' i -èsim vector de la base canònica, i denotarem $\vec{h}_n = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$ per a $1 \leq n \leq d$ i $\vec{h}_0 = (0, \dots, 0)$. Escrivim la suma telescòpica

$$f(a + \vec{h}) - f(a) = \sum_{i=1}^d \left(f(a + \vec{h}_i) - f(a + \vec{h}_{i-1}) \right). \quad (6.2)$$

El primer terme d'aquesta suma telescòpica és $f(a + h_1 \vec{e}_1) - f(a)$, i per la definició de 6.2.1 això és

$$f(a + h_1 \vec{e}_1) - f(a) = h_1 D_1 f(a) + h_1 o(\vec{h}),$$

i la resta de termes de (6.2) són

$$f(a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k) - f(a + \vec{h}_{k-1}).$$

Veiem que aquestes expressions varien només en $h_k \vec{e}_k$, que correspon a la k -èsima component, i com que les derivades parcials de f existeixen, això vol dir que aquestes expressions són contínues, per tant podem aplicar el 5.2.12 per a

funcions d'una variable i tenim que, per a tot $2 \leq k \leq d$ existeix un escalar ξ_k tal que

$$f(a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k) - f(a + \vec{h}_{k-1}) = h_k D_k f(\xi_k)$$

on ξ_k està al segment que uneix $a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k$ i $a + \vec{h}_{k-1}$.

Ara notem que quan $\vec{h} \rightarrow 0$ tindrem $a + \vec{h}_{k-1} + h_k \vec{e}_k \rightarrow a$ i com que, per hipòtesi, les derivades direccionals són contínues

$$h_k D_k f(\xi_k) = h_k D_k f(a) + h_k o(\vec{h})$$

i obtenim

$$\begin{aligned} f(a + \vec{h}) - f(a) &= \sum_{i=1}^d h_i D_i f(a) + \sum_{i=1}^d h_i o(\vec{h}) \\ &= \sum_{i=1}^d D_{h_i \vec{e}_i} f(a) + \sum_{i=1}^d h_i o(\vec{h}) \end{aligned}$$

i mentre $a + \vec{h} \in B(a, \varepsilon)$, el que tenim satisfà la definició de 6.2.3 per la proposició 6.2.7, i per tant f és diferenciable en a . \square

Nota 6.2.10. Notem que en aquesta demostració només hem hagut d'utilitzar la continuïtat de $d - 1$ de les derivades parcials de f en a . per tant en veritat tenim prou amb veure que totes les derivades parcials de f existeixen en a i que almenys totes menys una d'aquestes són contínues en a per poder dir que f és diferenciable en a , però a aquest curs només es dona l'enunciat reduït.

Proposició 6.2.11. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dues funcions diferenciables en un punt $a \in U$ amb diferencials $df(a), dg(a)$, respectivament. Aleshores $f + g$ és diferenciable en a i té per diferencial $df(a) + dg(a)$.

Demostració. Siguin \vec{u} un vector de \mathbb{R}^d i $D_{\vec{u}}f(a)$, $D_{\vec{u}}g(a)$ les derivades parcials de f i g , respectivament, en el punt a amb direcció \vec{u} . La derivada parcial de $f + g$ en a amb direcció \vec{u} és $D_{\vec{u}}(f + g)(a)$. Com que les derivades direccionals es comporten, per definició, com les derivades d'una variable, tenim

$$D_{\vec{u}}f(a) + D_{\vec{u}}g(a) = D_{\vec{u}}(f + g)(a),$$

i per la proposició 6.2.7, com que l'argument no depèn de \vec{u} , ja hem acabat. \square

6.2.2 La Matriu Jacobiana i la regla de la cadena

Definició 6.2.12 (Matriu Jacobiana). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores definim la matriu Jacobiana de f en a com

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_d f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Proposició 6.2.13. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$, $df(a)$ el diferencial de f en el punt a i $\vec{h} = (h_1, \dots, h_d)$ un vector de \mathbb{R}^d . Aleshores*

$$df(a)(\vec{h}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix},$$

és a dir, la matriu Jacobiana de f en a és la matriu associada del diferencial de f en el punt a .

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la definició de 6.2.3 i la definició de 6.2.12.

Donada la base canònica de \mathbb{R}^d , $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$, tenim

$$df(a)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^d h_i df(a)(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^d h_i D_i f(a),$$

i si $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a))$,

$$D_i f(a) = \begin{bmatrix} D_i f_1(a) \\ \vdots \\ D_i f_m(a) \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Per tant, podem reescriure aquestes dues igualtats com

$$df(a)(\vec{h}) = [D_1 f(a) \ \cdots \ D_d f(a)] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix}.$$

On, recordant (6.3),

$$[D_1 f(a) \ \cdots \ D_d f(a)] = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_d f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Així que

$$df(a)(\vec{h}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_d f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_d f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_d f_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix}.$$

Així veiem que la matriu Jacobiana de f en a està ben definida com a matriu associada del diferencial de f en a . \square

Observació 6.2.14. *Suposem $m = 1$. Recordant la definició de 6.2.3 i denotant $x = a + \vec{h}$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $x = (x_1, \dots, x_d)$*

$$f(x) - f(a) - o(|x - a|) = df(a)(x - a)$$

i per la definició de 6.2.12 tenim

$$f(x) - f(a) - o(|x - a|) = [D_1f(a) \cdots D_df(a)] \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_d - a_d \end{bmatrix}.$$

El que, quan $\vec{h} \rightarrow 0$, ens diu que és una aproximació a

$$(x_1 - a_1)D_1f(a) + \cdots + (x_d - a_d)D_df(a) = f(x) - f(a),$$

el que és un espai afí de dimensió $d + 1$ tangent a f en el punt a .

Teorema 6.2.15 (Regla de la cadena). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$ i siguin $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un obert i $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ una funció diferenciable en un punt $f(a) = b \in V$. Aleshores $g(f(x))$ és diferenciable en a amb diferencial $dg(b)(df(a)(\vec{h}))$, on $df(a)$ i $dg(b)$ són els diferencials de f i g en a i b , respectivament, i \vec{h} és un vector de \mathbb{R} .*

Demostració. Per la definició de 6.2.3, tenim

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}), \quad \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

Reescrivim amb $x = a + \vec{h}$ i $y = b + \vec{h}$

$$f(x) = f(a) + df(a)(x - a) + o(x - a),$$

$$g(y) = g(b) + dg(b)(y - b) + o(y - b).$$

Si fem $y = f(x)$ i substituïm en la segona equació obtenim

$$g(f(x)) = g(b) + dg(b)(f(a) + df(a)(x - a) + o(x - a) - b) + o(f(x) - b)$$

Si simplifiquem i utilitzem la linealitat del diferencial obtenim

$$g(f(x)) = g(b) + dg(b)(df(a)(x - a)) + dg(b)(o(x - a)) + o(f(x) - b)$$

Ara només hem de veure que $dg(b)(o(x - a))$ i $o(f(x) - b)$ són $o(x - a)$. El primer el podem veure amb que

$$|dg(b)(o(x - a))| \leq |dg(b)| o(|x - a|).$$

I com que quan $x \rightarrow a$, $f(a) \rightarrow b$ (donat per $\vec{h} \rightarrow 0$), ja que f és contínua. Aleshores podem escriure

$$f(x) - b = df(a)(x - a) + o(x - a),$$

i observant el cas $x \rightarrow a$ trobem que $|f(x) - b| \leq C|x - a|$, on $C \in \mathbb{R}$ és la norma de l'aplicació lineal $dg(b)$. \square

6.2.3 Gradient, punts crítics i extrems relatius

Definició 6.2.16 (Funció escalar). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Direm que f és una funció escalar de d variables si f és diferenciable per a tot $x \in U$.

Definició 6.2.17 (Conjunts de nivell). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores direm que, per a tot $C \in \mathbb{R}$,

$$L_C = \{x \in U \mid f(x) = C\}$$

és el conjunt de nivell C de la funció f .

Definició 6.2.18 (Gradient d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar. Definim el gradient de f en un punt $a \in U$ com el vector

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_d f(a)).$$

Proposició 6.2.19. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar i $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$ un vector de \mathbb{R}^d . Aleshores

$$\langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle = D_{\vec{u}} f(a).$$

Demostració. Ho veiem per la definició de 6.2.18, la definició de 6.2.1 i l'observació 6.2.8. Tenim

$$\langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle = u_1 D_1 f(a) + \dots + u_d D_d f(a) \quad (6.2.18)$$

$$= D_{u_1 \vec{e}_1} f(a) + \dots + D_{u_d \vec{e}_1} f(a) \quad (6.2.1)$$

$$= D_{u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_d \vec{e}_1} f(a) \quad (\text{Observació 6.2.8})$$

$$= D_{\vec{u}} f(a),$$

com volíem demostrar. \square

Observació 6.2.20. El gradient d'una funció en un punt és perpendicular al conjunt de nivell que conté el punt.

Proposició 6.2.21. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar i $D_{\vec{u}} f(a)$ la derivada direccional de f en la direcció \vec{u} , on \vec{u} és un vector de \mathbb{R}^d . Aleshores $D_{\vec{u}} f(a)$ és màxim si i només si $\vec{u} = \lambda \nabla f(a)$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostració. Pel 5.2.13 tenim, amb $|\vec{u}| = 1$

$$-|\nabla f(a)| \leq \langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle \leq |\nabla f(a)|$$

$$-|\nabla f(a)| \leq |D_{\vec{u}} f(a)| \leq |\nabla f(a)|,$$

però si prenem $\vec{u} = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$ tenim $D_{\vec{u}} f(a) = |\nabla f(a)|$. Amb això es veu que el gradient d'una funció en un punt ens dona la direcció de màxim creixement de la funció en el punt. \square

Observació 6.2.22. Veiem que, donat que $\nabla f(a)$ ens diu la direcció de màxim creixement de f en el punt a , $-\nabla f(a)$ ens dirà la direcció de màxim decreixement de f en a .

Definició 6.2.23 (Extrems relatius i punts crítics). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a \in U$ un punt i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar. Direm que el punt a és un extrem relatiu de f si hi ha una bola de radi $r > 0$ centrada en el punt a , $B(a, r)$, tal que, per a tot $x \in B(a, r)$, $f(a) \geq f(x)$ (direm que a és un màxim relatiu) o tal que $f(a) \leq f(x)$ (direm que a és un mínim relatiu).

Si $f(a) \geq f(x)$ o $f(a) \leq f(x)$, per a tot $x \in U$, direm que a és un màxim o un mínim absolut de f en U , respectivament.

També direm que a és un punt crític si $\nabla f(a) = \vec{0}$.

Proposició 6.2.24. *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció escalar diferenciable en a . Aleshores*

$$a \text{ és un màxim o un mínim relatiu de } f \implies \nabla f(a) = \vec{0}.$$

Demostració. Si \vec{u} és un vector qualsevol de \mathbb{R}^d , la funció $f(a + t\vec{u})$, amb $t \in \mathbb{R}$ té un extrem relatiu en $t = 0$, i per tant la seva derivada ha de ser 0; $D_{\vec{u}}f(a) = 0$, i com això no depèn de \vec{u} , per la definició de 6.2.18, $D_{\vec{u}} = \langle \nabla f(a), \vec{u} \rangle = 0$, el que és equivalent a $\nabla f(a) = \vec{0}$. \square

Observació 6.2.25. *Amb la definició d'6.2.23 i la proposició 6.2.24 tenim que el punt a és un màxim o mínim relatiu de f si a és un punt crític de f .*

Definició 6.2.26 (Punt de sella d'una funció). Sigui f una funció i a un punt del seu domini. Si a és un punt crític però no és ni màxim ni mínim local direm que a és un punt de sella de f .

Aquesta definició té sentit per l'observació 6.2.25.

6.2.4 Canvis de coordenades diferenciables

Definició 6.2.27 (Homeomorfisme i difeomorfisme). Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $\Phi: U \longleftrightarrow V$ una aplicació bijectiva tal que Φ, Φ^{-1} siguin contínues. Aleshores direm que Φ és un homeomorfisme. Si pensem Φ com

$$\begin{aligned} \Phi: U &\longleftrightarrow V \\ a &\longmapsto (v_1(a), \dots, v_d(a)) \end{aligned}$$

aleshores donat un punt $a \in U$, interpretem $v_1(a), \dots, v_d(a)$ com les noves coordenades del punt a . Amb aquest nou sistema els punts que fan d'eixos de coordenades, que són les famílies de punts definits per

$$\{x \in U \mid v_i(x) = v_j(a) \iff i \neq j, \text{ per a tot } i, j \in \{1, \dots, d\}\},$$

que són tots els punts amb totes les coordenades iguals, excepte la j -èsima.

Si Φ, Φ^{-1} són diferenciables direm que és un canvi de coordenades diferenciable o que és un difeomorfisme.

Proposició 6.2.28. *Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $\Phi: U \longleftrightarrow V$ un difeomorfisme. Aleshores*

$$d(\Phi^{-1}) = (d\Phi)^{-1}.$$

Demostració. Suposem que Φ és diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores per la definició de 6.2.27 tenim que Φ^{-1} existeix i és diferenciable en el punt $\Phi(a) \in V$. Volem veure que $d(\Phi^{-1}) = (d\Phi)^{-1}$.

Considerem la funció $\Phi^{-1}(\Phi)$ i un vector \vec{h} de \mathbb{R}^d . Aleshores el diferencial de $\Phi^{-1}(\Phi)$ en a aplicat a \vec{h} és, per 6.2.15,

$$\text{Id}_U(\vec{h}) = d(\Phi^{-1}(\Phi))(a)(\vec{h}) = d(\Phi^{-1})(\Phi(a))(d\Phi(a)(\vec{h})).$$

Anàlogament, el diferencial de $\Phi(\Phi^{-1})$ en $\Phi(a)$ aplicat a \vec{h} és

$$\text{Id}_V(\vec{h}) = d(\Phi(\Phi^{-1}))(\Phi(a))(\vec{h}) = d(\Phi)(a)(d\Phi^{-1}(\Phi(a))(\vec{h})),$$

i amb això tenim que $d(\Phi^{-1})$ és la inversa de $d\Phi$ pels dos costats, i per tant $d(\Phi^{-1}) = (d\Phi)^{-1}$, com volíem demostrar. \square

Corol·lari 6.2.29. *Sigui Φ un difeomorfisme diferenciable en un punt $a \in U$. Aleshores*

$$\det(d\Phi(a)) \neq 0.$$

Definició 6.2.30 (Derivades parcials d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a = (a_1, \dots, a_d)$ un punt de U i f una funció definida per

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ a &\longmapsto (f_1(a), \dots, f_m(a)). \end{aligned}$$

Aleshores, donat un $t \in \mathbb{R}$, direm que la derivada parcial de f respecte la seva i -èsima coordenada és

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_d) - f(a)}{t}.$$

Notem que això és equivalent a derivar respecte la i -èsima variable prenent les altres variables com a constants.

Proposició 6.2.31. *Sigui $U, V \subset \mathbb{R}^d$ dos oberts i $\Phi: U \rightarrow V$ un difeomorfisme tal que donat un punt $a \in U$, $\Phi(a) = (\Phi_1(a), \dots, \Phi_d(a)) = (v_1, \dots, v_d)$. Aleshores, donada una funció $f: U \rightarrow V$,*

$$\frac{\partial f}{\partial v_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v_i}.$$

Demostració. \square

6.3 Teoremes de la funció implícita i inversa

6.3.1 Dependència i independència funcional

Definició 6.3.1 (Dependència funcional). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció. Donades $v_1, \dots, v_k: U \rightarrow \mathbb{R}$ k funcions, direm que f depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k si existeix una funció $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(x) = h(v_1(x), \dots, v_k(x)), \quad \text{per a tot } x \in U.$$

Proposició 6.3.2. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció i v_1, \dots, v_d d funcions escalars sobre U que defineixen un sistema de coordenades que anomenarem $\Phi(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$. Aleshores, donat un $k < d$ els següents enuncisats són equivalents:*

1. f depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k per a tot $x \in U$.
2. $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ per a tot $x \in U$.
3. La matriu que té per files $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ i $\nabla f(x)$ té rang k per a tot $x \in U$.
4. $\frac{\partial f}{\partial v_{k+1}} = \dots = \frac{\partial f}{\partial v_d} = 0$

Teorema 6.3.3. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ $k < d$ funcions escalars definides en U . Aleshores, donat un punt $a \in U$ i un real $\varepsilon > 0$, les funcions v_1, \dots, v_k formen un sistema de coordenades en $B(\varepsilon, a) \subset U$ si i només si els seus gradients en a , $\nabla v_1(a), \dots, \nabla v_k(a)$, són linealment independents.*

Demostració. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ k funcions escalars definides en U que formen un sistema de coordenades en $B(\varepsilon, a) \subset U$. Considerem les $d - k$ funcions escalars definides en U v_{k+1}, \dots, v_d tal que v_1, \dots, v_d formen un sistema de coordenades de U . Per la proposició 6.3.2 tenim que aquestes d funcions són funcionalment independents, el que ens diu que el determinant de la matriu composta per els seus gradients en un punt x , $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_d(x)$ té determinant no nul per a tot $x \in U$. Per tant, tenim que $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_d(x)$ són linealment independents per a tot $x \in U$ i, en particular, que $\nabla v_1(a), \dots, \nabla v_k(a)$ són linealment independents. \square

6.3.2 Varietats

Definició 6.3.4 (Varietat). Sigui, amb $m < d$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts, $M \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunt i $r > 0$ un radi. Aleshores, si per a tot punt $p \in M$, existeix un homeomorfisme $H: U \rightarrow S \cap B(p, r)$ direm que M és una varietat de dimensió m de \mathbb{R}^d .

Definició 6.3.5 (Varietat regular). Sigui, amb $m < d$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts amb $(0, \dots, 0) = 0 \in U$. Aleshores, donat un conjunt $M \subseteq \mathbb{R}^d$, direm que M és una varietat regular de dimensió m o una varietat diferenciable de classe \mathcal{C}^1 i de dimensió m si per a tot punt $p \in M$ existeix un homeomorfisme $H: U \rightarrow B(p, r) \cap S$ tal que $H(0) = p$ i el diferencial de H en $t \in U$, $dH(t)$, tingui rang m per a tot $t \in U$.

Si $m = 1$ tindrem un arc regular, i si $m = 2$ parlarem de superfície regular.

Observació 6.3.6. *Un cas particular d'aquesta definició és el dels gràfics. En aquest cas tenim que si*

$$\begin{aligned} H: U &\longleftrightarrow B(p, r) \cap S \\ t &\longmapsto (h_1(t), \dots, h_d(t)) \end{aligned}$$

aleshores m de les components de H fan de paràmetres; suposem que són els m primers, així H seria de la forma

$$H(t_1, \dots, t_m) = (t_1, \dots, t_m, h_{m+1}(t_1, \dots, t_m), \dots, h_d(t_1, \dots, t_m)).$$

Definició 6.3.7 (Espai tangent en un punt). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una varietat regular de dimensió m . Això vol dir que per a tot punt $t \in M$ existeix un homeomorfisme $H: U \rightarrow S \cap B(p, r)$ amb $H(0) = p$. Aleshores definim l'espai tangent a M en p com

$$T_p(M) = \{\vec{h} \text{ un vector de } \mathbb{R}^d : dH(0)(x) = \vec{h}, \text{ per a algun } x \in \mathbb{R}^d\},$$

això és l'imatge de $dH(0)$.

Proposició 6.3.8. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un obert, M una varietat regular de dimensió m d'un obert $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $p \in M$ un punt i

$$\begin{aligned} H: U &\longleftrightarrow B(p, r) \cap S \\ t &\longmapsto (h_1(t), \dots, h_d(t)) \end{aligned}$$

un homeomorfisme tal que $H(0) = p$. Aleshores l'espai tangent a M en un punt $p \in M$, $T_p(M)$, té dimensió m i la seva base és

$$\left(\left(\frac{\partial h_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial h_1}{\partial t_d}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_d} \right) \right).$$

Demostració. Considerem la 6.2.12 de H en 0. Per hipòtesi, aquesta té rang m . Aleshores, per la definició d'espai tangent en p tenim

$$T_p(M) = \{\vec{h} \text{ un vector de } \mathbb{R}^d \mid dH(0)(x) = \vec{h}, \text{ per a algun } x \in \mathbb{R}^d\},$$

per tant, els elements de $T_p(M)$ venen donades pel sistema lineal

$$\begin{bmatrix} D_1 h_1(0) & D_2 h_1(0) & \cdots & D_m h_1(0) \\ D_1 h_2(0) & D_2 h_2(0) & \cdots & D_m h_2(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 h_d(0) & D_2 h_d(0) & \cdots & D_m h_d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_d \end{bmatrix}.$$

Per tant, $T_p(M)$ està generat per les columnes de $dH(0)$, i la seva base és

$$(D_1 H(0), \dots, D_d H(0)),$$

que és equivalent a

$$\left(\left(\frac{\partial h_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial h_1}{\partial t_d}, \dots, \frac{\partial h_d}{\partial t_d} \right) \right).$$

Amb això també veiem que $T_p(M)$ té dimensió m . □

Proposició 6.3.9. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ $k < d$ funcions escalars definides en U funcionalment independents en cada punt de U de forma que els conjunts de nivell arc-connexos

$$M = \{x \in U \mid v_1(x) = c_1, \dots, v_k(x) = c_k\}$$

siguin varietats regulars de dimensió $m = d - k$. Aleshores, donada una funció $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k si i només si $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ per a tot $x \in U$.

Demostració. La implicació cap a la dreta (\implies) està vista a la proposició 6.3.2. Fem l'altre implicació (\impliedby). Per l'observació 6.2.20, el subespai generat pels gradients $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ és ortogonal a l'espai tangent $T_x(M)$. Per tant, per a tot vector \vec{u} de $T_x(M)$ tindrem $D_{\vec{u}}f(x) = 0$, el que significa que $f(x)$ serà constant en M , és a dir, $f(x) = (k_1, \dots, k_m)$ per a tot $x \in U$ tal que $f(x) \in M$. Aleshores existeix una funció $H: U \rightarrow M$ tal que

$$f(x) = H(v_1(x), \dots, v_k(x)). \quad \square$$

6.3.3 Teorema de la funció inversa

Proposició 6.3.10. *Siguin $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts i $f: U \leftrightarrow V$ un homeomorfisme diferenciable en un punt $a \in U$, amb inversa $g = f^{-1}$. Aleshores, g és diferenciable en $f(a)$ si i només si la Jacobiana de f en a té determinant diferent de zero.*

Demostració. Demostrem la implicació cap a la dreta (\implies). En un entorn de a , f es comporta com un difeomorfisme per la definició de 6.2.27. Per tant, amb el corollari 6.2.29 queda demostrat.

Demostrem ara l'altre implicació (\impliedby). Denotem $x = a + \vec{h}$, on \vec{h} és un vector de \mathbb{R}^d . Per tant tenim, que amb un cert vector \vec{k} de \mathbb{R}^d ,

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + \vec{k},$$

i com que per la definició de 6.2.27 f és un homeomorfisme tenim que $\vec{h} \rightarrow 0$ si i només si $\vec{k} \rightarrow 0$. Per tant

$$\vec{k} = f(a + \vec{h}) - f(a)$$

i per la definició de 6.2.3 quan $\vec{k} \rightarrow 0$

$$\vec{k} = f(a + \vec{h}) - f(a) = df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h}).$$

Aplicant $df(a)^{-1}$ als costats de la igualtat tenim

$$df(a)^{-1}(\vec{k}) = df(a)^{-1}(df(a)(\vec{h}) + o(\vec{h})),$$

i com que $df(a)^{-1}$ és lineal per la definició de 6.2.3 tenim que

$$df(a)^{-1}(\vec{k}) = df(a)^{-1}(df(a)(\vec{h})) + df(a)^{-1}(o(\vec{h})),$$

i aleshores

$$\vec{h} = df(a)^{-1}(\vec{k}) - df(a)^{-1}(o(\vec{h})),$$

que és equivalent a, amb $b = f(a)$,

$$g(b + \vec{k}) - g(b) = df(a)^{-1}(\vec{k}) - df(a)^{-1}(o(\vec{h})).$$

Ara en veure que $df(a)^{-1}(o(\vec{h}))$ és com $o(\vec{k})$ haurem acabat.

Això ho podem veure fent

$$|df(a)^{-1}(\vec{k})| + |df(a)^{-1}(o(\vec{h}))| \leq |df(a)^{-1}||\vec{k}| + |df(a)^{-1}||o(\vec{h})|.$$

I per tant, quan $\vec{h} \rightarrow 0$ tenim $o(\vec{h}) \rightarrow 0$ i $\vec{k} \rightarrow 0$, i veiem que $df(a)^{-1}(o(\vec{h}))$ ha de ser com $o(\vec{k})$. \square

Lema 6.3.11. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció de classe \mathcal{C}^1 amb diferencial de f en un punt $a \in U$ de norma m , $df(a)$, invertible amb inversa $df(a)^{-1}$. Aleshores existeix una bola tancada centrada en a de radi $r > 0$, $\overline{B}(a, r)$, que, per a tot $x, y \in \overline{B}(a, r)$ compleix*

1. $\det(df(x)) \neq 0$
2. $|df(x) - df(a)| \leq \frac{m}{2}$
3. $\frac{m}{2}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{3m}{2}|x - y|$

Demostració. Observem que el punt (1) és cert ja que si r és prou petita, per la proposició 6.2.5, f és contínua.

Per veure el punt (2) tenim que pel 5.2.11 existeix $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|df(x) - df(a)| \leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right|,$$

i de nou, per a r prou petita, com que f és contínua, això és arbitràriament petit, i tenim $|df(x) - df(a)| \leq \frac{m}{2}$.

Per tant, de moment tenim que, amb r prou petit, existeix una bola tancada $\overline{B}(a, r)$ que compleix els punts (1) i (2); en veure que 2 \implies 3 haurem acabat aquesta part.

Considerem l'aplicació $\hat{f}(x) = f(x) - df(a)(x)$ amb diferencial $d\hat{f} = df - df(a)$. Per el punt (2) i el 5.2.12 tenim, per a $x, y \in \overline{B}(a, r)$,

$$|f(x) - f(y) - df(a)(x - y)| = |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \frac{m}{2}|x - y|.$$

Notem que, per a una funció T amb inversa T^{-1} per la definició de 5.1.3 tenim que existeix $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$|T(u)| \leq K|u|,$$

per tant

$$|T^{-1}(u)| \leq K|u|.$$

Amb això veiem que existeix una m tal que $|df(a)(x - y)| \leq m|x - y|$, i aleshores

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)| - |df(a)(x - y)|| &\leq |f(x) - f(y) - df(a)(x - y)| \leq \\ &\leq \frac{m}{2}|x - y| \leq \frac{1}{2}|df(a)(x - y)|. \end{aligned}$$

amb el que obtenim

$$\frac{1}{2}|df(a)(x - y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2}|df(a)(x - y)|,$$

i per tant

$$\frac{m}{2}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{3m}{2}|x - y|. \quad \square$$

Teorema 6.3.12 (Teorema de la funció inversa). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció de classe \mathcal{C}^1 amb diferencial de f en un punt $a \in U$, $df(a)$, invertible. Aleshores existeix un obert $W \subset U$ que conté a tal que, la restricció de f en W sigui un difeomorfisme.*

Demostració. Sigui $df(a)^{-1}$ la inversa del diferencial de f en a , $df(a)$, i $M = \frac{1}{m} = |df(a)^{-1}|$ la seva norma. Per la definició de 5.1.3 tenim que per a qualsevol vector \vec{u} de \mathbb{R}^d ,

$$|df(a)(\vec{u})| \leq m|\vec{u}|.$$

Pel lema 6.3.11 tenim que existeix una bola tancada centrada en a de radi $r > 0$, $\overline{B}(a, r)$, que, per a tot $x, y \in \overline{B}(a, r)$ compleix

1. $\det(df(x)) \neq 0$
2. $|df(x) - df(a)| \leq \frac{m}{2}$
3. $\frac{m}{2}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq \frac{3m}{2}|x - y|$

Considerem S , la frontera de $\overline{B}(a, r)$, que és compacte. Per tant, el conjunt

$$S' = \{f(x) \mid \text{per a tot } x \in S\},$$

que és la imatge de S respecte f també és compacte i no conté $f(a)$, ja que $r > 0$. Aleshores considerem

$$d = \inf_{x \in S'} |f(a) - x| > 0$$

com la distància mínima de la imatge de a respecte f al conjunt S' , i definim la bola oberta centrada en $f(a)$ de radi $\frac{d}{2}$, $B(f(a), \frac{d}{2})$, i així $|y - f(a)| < |y - f(x)|$ per a tot $x \in S$. Ara considerem l'obert

$$W = \{x \in \overline{B}(a, r) \mid f(x) \in B(f(a), \frac{d}{2})\}.$$

Pel punt (3) veiem que la restricció de f en $\overline{B}(a, r)$ és injectiva i, per tant, la restricció de f en W també és injectiva. Ara només ens queda veure que la restricció de f en W és exhaustiva i ja haurem acabat. Per a això hem de veure que per a tot $p \in B(f(a), \frac{d}{2})$ existeix un $q \in \overline{B}(a, r)$ tal que $f(q) = p$.

Si entenem f com $f(a) = (f_1(a), \dots, f_d(a))$ i un punt $p \in B(f(a), \frac{d}{2})$ com $p = (p_1, \dots, p_d)$, podem considerar la funció h tal que

$$h(x) = |p - f(x)| = \sum_{i=1}^d (p_i - f_i(x))^2.$$

Aleshores h té un mínim absolut en el compacte $\overline{B}(a, r)$, que s'assoleix quan $x = q \in \overline{B}(a, r)$. Per tant, per la proposició 6.2.24, $D_j h(q) = 0$, per a tot $j \in \{1, \dots, d\}$, que és equivalent a dir

$$\sum_{i=1}^d D_j f_i(p)(p_i - f_i(q)) = 0, \quad \text{per a tot } j \in \{1, \dots, d\}.$$

Així hem vist que la restricció de f en W és exhaustiva, i per tant bijectiva, i ja teníem que era contínua. Podem veure de nou pel punt (3) del lema 6.3.11 que la seva inversa també és contínua. Amb tot això en tenim prou per dir que la restricció de f en W és un homeomorfisme diferenciable en un punt a però, com que, per hipòtesi, tenim $\det(df(a)) \neq 0$, amb la proposició 6.3.10 queda demostrat el teorema. \square

Corol·lari 6.3.13. Una aplicació $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 és un difeomorfisme si i només si f és injectiva i $\det(df(a)) \neq 0$ per a tot $x \in U$.

Proposició 6.3.14. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ un sistema de k funcions escalars definides en U . Aleshores, els seus gradients són linealment independents en un punt $a \in U$ si i només si aquest sistema de k funcions escalars formen part d'un sistema de coordenades local en a .

Demostració. La matriu formada pels gradients de v_1, \dots, v_k en a té un menor d'ordre k no nul. Per tant, podem expandir aquest sistema de k funcions amb $d - k$ funcions escalars definides en U de classe \mathcal{C}^1 , v_{k+1}, \dots, v_d amb gradients linealment independents en a , i aquestes d funcions, v_1, \dots, v_d , formen un sistema de coordenades local en a . \square

Corol·lari 6.3.15. Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ un sistema de k funcions escalars definides en U . Aleshores una funció f definida en un entorn d'un punt a depèn funcionalment de v_1, \dots, v_k en un entorn del punt a si i només si $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla v_1(x), \dots, \nabla v_k(x)$ per a tot x en un entorn del punt a .

6.3.4 Teorema de la funció implícita

Notació 6.3.16. Podem interpretar \mathbb{R}^d com $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, on $d = k + m$. Per tant, denotarem un punt $a = (a_1, \dots, a_d)$ de \mathbb{R}^d com $a = (a'; a'')$, on a' correspon a (a_1, \dots, a_k) i a'' a (a_{k+1}, \dots, a_d) .

També entenem que $a' \in \mathbb{R}^k$ i $a'' \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 6.3.17 (Teorema de la funció implícita). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a = (a'; a'') \in U$ un punt, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$ un sistema de $k = d - m$ funcions escalars definides en U tals que $v_1(a) = \dots = v_k(a) = 0$ i els seus gradients en a , $\nabla v_1(a), \dots, \nabla v_k(a)$ són linealment independents i M un conjunt definit per $M = \{x \in U \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}$. Aleshores hi ha un obert $W \subset \mathbb{R}^d$ que conté a , un obert $U'' \subset \mathbb{R}^m$ que conté a'' i una única funció $h: U'' \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que

$$\begin{aligned} M &= \{x \in U \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\} = \\ &= \{x = (x'; x'') \in W \mid x' = h(x''), x'' \in U''\}. \end{aligned}$$

Demostració. Per començar definirem un obert $W \subseteq \mathbb{R}^d$, un obert $V \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $(0, \dots, 0) \in V$ i un difeomorfisme Φ tals que

$$\begin{aligned} \Phi: W &\longleftrightarrow V \\ x &= (x_1, \dots, x_d) \longmapsto (v_1(x), \dots, v_k(x), x_{k+1}, \dots, x_d), \end{aligned}$$

així $(v_1(x), \dots, v_k(x), x_{k+1}, \dots, x_d)$ forma un sistema de coordenades en W .

Observem que podem considerar $a = (0, \dots, 0)$ ja que si $(v_1(a), \dots, v_k(a)) = (c_1, \dots, c_k)$ podem treballar amb les funcions $v'_1(x) = v_1(x) - c_1, \dots, v'_k(x) = v_k(x) - c_k$ que compleixen $v'_1(a) = \dots = v'_k(a) = 0$.

Com que Φ és un difeomorfisme, per la definició de 6.2.27 és bijectiva, prenem la seva inversa

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}: V &\longleftrightarrow W \\ y &= (y_1, \dots, y_d) \longmapsto (u_1(y), \dots, u_k(y), y_{k+1}, \dots, y_d), \end{aligned}$$

i, de nou, com que Φ és un difeomorfisme per la definició de 6.2.27 tenim que $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{C}^1$.

Aleshores, per a tot $x \in M$ tenim $\Phi(x) = (0'; x'')$. Definim un conjunt

$$U'' = \{y'' \in \mathbb{R}^m \mid (0; y'') \in V\},$$

i com que Φ és una bijecció, ja que és un difeomorfisme, tenim

$$U'' = \{x'' \in \mathbb{R}^m \mid \text{Existeix } x' \in \mathbb{R}^k \text{ tal que } (x'; x'') \in M \cap W\}.$$

Aleshores U'' és un obert de \mathbb{R}^d i

$$M = \{(x'; x'') \in W \mid (u_1(0; x''), \dots, u_k(0; x''); y'') \text{ amb } y'' \in U''\},$$

i la funció que volíem demostrar que existeix és

$$h(x'') = (u_1(0; x''), \dots, u_k(0; x'')).$$

□

6.4 Extrems relatiu

6.4.1 El mètode de multiplicadors de Lagrange

Teorema 6.4.1 (Multiplicadors de Lagrange). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, S un conjunt definit per*

$$S = \{x \in U \mid g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x)) = 0\},$$

on g_1, \dots, g_k són $k < d$ funcions escalars definides en U de classe \mathcal{C}^1 .

Considerem la funció escalar $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a \in S$ sigui un màxim o un mínim relatiu de f en S i les funcions g_1, \dots, g_k siguin funcionalment independents en a . Aleshores existeixen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ reals tals que

$$D_i f(a) + \sum_{j=1}^k \lambda_j D_i g_j(a) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Demostració. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, aleshores considerem el següent sistema d'equacions lineals

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j D_i g_j(a) = -D_i f(a) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (6.4)$$

Com que g_1, \dots, g_k són funcionalment independents en a , la matriu formada pels gradients de g_1, \dots, g_k en a té rang k (proposició 6.3.2) el sistema d'equacions lineals (6.4) té una única solució. Ara només ens cal veure que aquests mateixos reals $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ també són solució de les $m = d - k$ equacions restants.

Per fer això ens caldrà el 6.3.17. Com que $k < d$, amb la notació introduïda a 6.3.16, denotem el punt a amb $a = (a'; a'')$, on $a' = (a_1, \dots, a_k)$ i $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_d)$ i entenem $a' \in \mathbb{R}^k, a'' \in \mathbb{R}^m$. Aleshores definim una funció $g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))$, que compleix $g(a', a'') = 0$ i $g \in \mathcal{C}^1$. Això, junt amb

que per hipòtesi les funcions v_1, \dots, v_k són funcionalment independents en a i, per la proposició 6.3.2, la matriu

$$\begin{bmatrix} D_1 g_1(a) & \cdots & D_k g_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_k(a) & \cdots & D_k g_k(a) \end{bmatrix}$$

té determinant diferent de zero, complim les condicions del 6.3.17 i l'apliquem. Per tant, existeix un obert $U'' \subset \mathbb{R}^m$ que conté a'' i una única funció $h: U'' \rightarrow \mathbb{R}^k$, $h \in \mathcal{C}^1$ amb $h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$, tal que $h(a'') = a'$ i que per a tot $y'' \in U''$ compleix $g(h(y''); y'') = 0$. Això significa que el sistema d'equacions

$$g_i(x_1, \dots, x_d) = 0, \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, d\},$$

té una única solució de la forma $a' = h(a'')$, per tant definim les funcions, definides en U'' ,

$$F(y'') = f(h(y''); y'')$$

i, per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$

$$G_i(y'') = g_i(h(y''); y'').$$

Degut a que $G_1 = \dots = G_k = 0$, les seves derivades també són 0. \square

6.4.2 Teorema del rang constant

No fer molt cas d'aquesta part. La farà bé quan sàpiga geometria diferencial. La part important d'aquí és l'últim corollari que ens diu que els difeomorfismes “conserveu” els punts crítics.

Definició 6.4.2 (Subvarietat regular). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $M \subseteq U$ un conjunt. Direm que M és una subvarietat regular de dimensió m si per a tot punt $p \in M$ existeix una bola centrada en p de radi $r > 0$, $B(p, r) \subseteq U$, i $k = d - m$ funcions escalars, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$, definides en U amb gradients linealment independents tals que

$$M \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}.$$

Proposició 6.4.3. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $M \subseteq U$ una subvarietat regular de dimensió m de \mathbb{R}^d . Aleshores, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *Per a tot punt $p \in M$ existeix una bola centrada en p de radi $r > 0$, $B(p, r) \subseteq U$, i $k = d - m$ funcions escalars, $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{C}^1$, definides en U amb gradients linealment independents tals que*

$$M \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}.$$

2. *Per a tot punt $p \in M$ existeix un obert $V \subseteq U$ que conté p i un sistema de coordenades u_1, \dots, u_d definit en V tal que*

$$M \cap V = \{x \in V \mid u_{k+1}(x) = \dots = u_d(x) = 0\}.$$

3. *Per a tot punt $p \in M$ existeixen un obert $B \subseteq U$ que conté p , un obert $W \subseteq \mathbb{R}^m$ i un homeomorfisme $\Phi: W \rightarrow M \cap B$.*

Demostració. no □

Teorema 6.4.4 (Teorema del rang constant). *Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un obert i $H: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció de classe \mathcal{C}^1 , amb $\text{rang}(dH(t)) = n$ per a tot $t \in U$. Aleshores el conjunt*

$$\{y \in \mathbb{R}^d \mid y = H(x) \text{ per algun } x \in U\}$$

és una subvarietat de dimensió n .

Demostració. Considerem $H(x) = (h_1(x), \dots, h_d(x))$ i fixem un punt $a \in U$ on es compleixin les condicions de la hipòtesi. Per la proposició 6.3.2, hi haurà n components de H tals que els seus gradients siguin linealment independents en a . Existeix una permutació $\sigma \in S_d$ tal que aquestes n components de H siguin $h_{\sigma(1)} \dots, h_{\sigma(n)}$.

Per continuïtat, els gradients $\nabla h_{\sigma(1)}(x), \dots, \nabla h_{\sigma(n)}(x)$ són linealment independents per a tot x en un entorn obert de a , que denotarem per $V \subset U$. Per tant, podem expandir-les a un sistema de coordenades de V , v_1, \dots, v_m , on $v_i = h_{\sigma(i)}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Com que $\text{rang}(dH(t)) = n$ per a tot $t \in V$, per la proposició 6.3.2, els gradients $\nabla h_{\sigma(n+1)}, \dots, \nabla h_{\sigma(d)}$ depenen linealment dels gradients $\nabla v_1, \dots, \nabla v_n$ en V , per tant, pel corol·lari 6.3.15, per a cada $i \in \{n+1, \dots, d\}$, existeix una funció φ_i que compleix $h_{\sigma(i)}(x) = \varphi_i(v_1(x), \dots, v_n(x))$ i per tant, si denotem $v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$,

$$\begin{aligned} H(x) &= G(v_1(x), \dots, v_n(x)) \\ &= (v_1(x), \dots, v_n(x), \varphi_{n+1}(v(x)), \dots, \varphi_d(v(x))) \end{aligned}$$

i es compleix la definició de 6.4.2 per la proposició 6.4.3, ja que, per la definició de 6.2.27, G és un homeomorfisme definit en V . □

Proposició 6.4.5. *Sigui $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ dos oberts, $\Phi: U \longleftrightarrow V$ un difeomorfisme de classe \mathcal{C}^1 i $M \subseteq U$ una varietat regular de dimensió m de U . Aleshores la imatge de M per Φ és una subvarietat regular de dimensió m de V .*

Demostració. No fer-ne molt cas. Per la definició de 6.3.5, per a cada punt $p \in M$ existeixen $k = d - m$ equacions escalars, v_1, \dots, v_k definides en U amb gradients linealment independents i una bola de radi $r > 0$ centrada en p , $B(p, r)$, tals que

$$M \cap B(p, r) = \{x \in B(p, r) \mid v_1(x) = \dots = v_k(x) = 0\}.$$

Aleshores definim, per a tot $j \in \{1, \dots, k\}$, $u_j(x) = \Phi^{-1}(v_j(x))$. Aleshores tenim que si la imatge de M per Φ és $N \subset V$, per a tot punt $q \in N$ hi ha una bola de radi $r > 0$, $B(q, r)$, tal que

$$N \cap B(q, r) = \{y \in B(q, r) \mid u_1(x) = \dots = u_k(x) = 0\},$$

i tenim que u_1, \dots, u_d tenen gradients linealment independents, ja que, per 6.2.15, $\nabla v_j(x) = (d\Phi(x))^t(\nabla u_j(\Phi(x)))$, i com que Φ defineix un sistema de coordenades, per la proposició 6.3.2 els gradients de u_1, \dots, u_d són linealment independents, i això compleix la definició de 6.4.2. □

Corol·lari 6.4.6. $d\Phi(a)(T_a(M)) = T_{\Phi(a)}(\Phi(M))$.

6.4.3 Derivades d'ordre superior

Fixem-nos en que en derivar una funció f obtenim una altre funció, i que aquesta, sota certes condicions, és derivable. En aquest capítol estudiarem algunes de les propietats d'aquest fet.

Definició 6.4.7 (n -èsima derivada d'una funció). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ n vectors de \mathbb{R}^d (no necessàriament diferents) i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en un punt $a \in U$. Si $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1}$ és diferenciable en a i prenem la seva derivada respecte \vec{v}_2 diem que

$$d^2 f(a)(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1} \right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{v}_2 \partial \vec{v}_1}(a) = D_{\vec{v}_2, \vec{v}_1} f = D_{\vec{v}_2}(D_{\vec{v}_1} f)(a)$$

és la derivada de segon ordre de f o la segona derivada de f .

Si la segona derivada de f també és derivable podem parlar de la tercera derivada de f , que és la segona derivada de $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1}$. Si iterem la suposició podem definir la n -èsima derivada de f o una derivada d'ordre n de f . També direm que f és n -vegades diferenciable en a . Ho denotarem amb

$$d^n f(a)(\vec{v}_n \dots \vec{v}_1) = \frac{\partial^n f}{\partial \vec{v}_n \dots \partial \vec{v}_1} = D_{\vec{v}_n, \dots, \vec{v}_1} f(a).$$

Teorema 6.4.8. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció 2-vegades diferenciable en $a \in U$, aleshores

$$D_{\vec{v}, \vec{u}} f(a) = D_{\vec{u}, \vec{v}} f(a).$$

Demostració. Notem que podem dir $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, on f_1, \dots, f_m són funcions escalars definides en U , i per la proposició 6.2.6 només cal que fem la demostració pel cas $m = 1$, ja que implicarà el general. També observem que podem donar un canvi de variables on els vectors \vec{v}, \vec{u} siguin els nous eixos de coordenades, \vec{e}_1, \vec{e}_2 respectivament. En aquesta base tindriem que volem demostrar $D_{1,2} f(a) = D_{2,1} f(a)$, i com que això només afecta a una component del punt, podem considerar $d = 2$, i la demostració serà suficient per veure cas general. Per tant, ho demostrem per $m = 1, d = 2$. Aprofitant el canvi de coordenades també suposarem $a = (0, 0)$. Per tant, només hem de demostrar que $D_{2,1} f(0, 0) = D_{1,2} f(0, 0)$.

Considerem, amb un escalar $h > 0$, la següent diferència:

$$Q(h) = f(h, h) - f(h, 0) - (f(0, h) - f(0, 0)) \quad (6.5)$$

Si fem $A(t) = f(t, h) - f(t, 0)$ tenim $Q(h) = A(h) - A(0)$, i pel 5.2.12 existeix un escalar $0 < \xi < h$ tal que

$$A(h) - A(0) = hA'(\xi) = h(D_1 f(\xi, h) - D_1 f(\xi, 0)) \quad (6.6)$$

i com que, per hipòtesi, $D_1 f$ és diferenciable en $(0, 0)$, per l'observació 6.2.14 podem escriure,

$$D_1 f(x, y) = D_1 f(0, 0) + xD_{1,1} f(0, 0) + yD_{2,1} f(0, 0) + o(|x, y|).$$

Ho apliquem a (6.6) i obtenim

$$\begin{aligned} hA'(\xi) &= h(D_1 f(0, 0) + \xi D_{1,1} f(0, 0) + \\ &\quad + h D_{2,1} f(0, 0) - D_1 f(0, 0) - \xi D_{1,1} f(0, 0) + o(h)) \end{aligned}$$

simplifiquem, i per la definició de $Q(h)$, (6.5),

$$hA'(c) = h^2 D_{2,1}f(0,0) + o(h^2) = Q(h).$$

i tenim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h)}{h^2} = D_{2,1}f(0,0).$$

Repetint el mateix argument amb

$$Q(h) = f(h, h) - f(0, h) - (f(h, 0) - f(0, 0))$$

obtenim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h)}{h^2} = D_{1,2}f(0,0),$$

i per tant

$$D_{2,1}f(0,0) = D_{1,2}f(0,0). \quad \square$$

Nota 6.4.9. *Sospito que una demostració “més general” seria similar a la del 6.2.9, per si algun valent no ha quedat satisfet.*

Corol·lari 6.4.10. *$d^2f(a)$ és una aplicació bilineal simètrica. De fet, si generalitzem la proposició iterant-la, tenim que $d^n f(a)$ és una aplicació n -lineal simètrica.*

6.4.4 Fórmula de Taylor en múltiples variables

Aquesta secció la farem considerant només funcions escalars (amb $m = 1$ en la notació que hem estat utilitzant). En el cas de voler fer el desenvolupament de Taylor d'una funció f amb $m > 1$ només pensar f com un vector de m funcions escalars, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, i per tant el problema queda reduït a calcular m desenvolupaments de Taylor (donat que es satisfacin certes condicions que estudiarem més endavant) i posar-los en forma de vector.

Notació 6.4.11. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció n -vegades diferenciable en un punt $a \in U$ i un altre punt de U , $t = (t_1, \dots, t_d)$. Introduïm la següent notació:

$$f^{(k)}[a, t] = \sum_{i_k=1}^d \cdots \sum_{i_1=1}^d D_{i_k, \dots, i_1} f(a) t_{i_1} \cdots t_{i_k}.$$

Teorema 6.4.12 (Fórmula de Taylor en múltiples variables). *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció n -vegades diferenciable en un punt $a \in U$ i $b \in U$ un altre punt. Aleshores existeix un punt $z \in U$ tal que, per a algun $0 < \xi < 1$, $z = a + (b - \xi a)$ (això és que el punt z es troba en el segment que uneix els punts a i b) tal que*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}[a, b-a] + \frac{1}{n!} f^{(n)}[z, b-a].$$

Demostració. Com que, per hipòtesi, U és obert, per la definició de 5.3.1 sabem que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que, per a tot $-\varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, tenim que $a + t(b - a) \in S$. Per tant, definim una funció g com

$$\begin{aligned} g: (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + t(b - a)) \end{aligned}$$

Aleshores $f(b) - f(a) = g(1) - g(0)$. Aleshores, amb $\xi \in (0, 1)$, pel 5.2.14 tenim

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{n!} g^{(n)}(\xi). \quad (6.7)$$

Si pensem, amb $h(\xi) = a + \xi(b - a)$, que $g(\xi) = f(p(\xi))$, ha de ser $p(\xi) = (p_1(\xi), \dots, p_d(\xi))$, i si denotem $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$, tenim, amb $i \in \{1, \dots, d\}$, que $\frac{\partial p}{\partial x_i}(\xi) = b_i - a_i$. Aplicant er 6.2.15 veiem que g' està definida en $(-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$ i

$$g'(\xi) = \sum_{i=1}^d D_i f(p(\xi))(b_i - a_i) = f^{(1)}[p(\xi), b - a],$$

i aplicant la regla de la cadena una segona vegada,

$$g''(\xi) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d D_{j,i} f(p(\xi))(b_i - a_i)(b_j - a_j) = f^{(2)}[p(\xi), b - a].$$

Si ho iterem n vegades obtindrem que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}[p(\xi), b - a],$$

i per tant, recordant (6.7), tenim

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}[a, b - a] + \frac{1}{n!} f^{(n)}[z, b - a]$$

amb $z = p(\xi)$. □

6.4.5 Extrems lliures

En aquest apartat utilitzarem el que vam veure a l'observació 6.4.10 per classificar els extrems lliures d'una funció.

Això ens servirà per a classificar els punts crítics d'una funció escalar en un conjunt del seu domini, excloent-ne la frontera. Per exemple, en el cas d'utilitzar el 6.4.1 per obtenir un conjunt de punts crítics en el domini restringit de la funció. Més tard veurem com classificar els que es troben a la frontera.

Proposició 6.4.13. *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert i $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una funció 2-vegades diferenciable en un punt $a \in U$ amb segones derivades contínues, i a és un punt crític de f . Aleshores*

1. $d^2 f(a)$ és definida estrictament positiva $\implies a$ és un mínim relatiu.

2. $d^2 f(a)$ és definida estrictament negativa $\implies a$ és un màxim relatiu.

3. $d^2 f(a)$ és definida positiva $\iff a$ és un mínim relatiu.

4. $d^2 f(a)$ és definida negativa $\iff a$ és un màxim relatiu.

Demostració. Comencem demostrant dels punts (1) i (2), que són demostracions anàlogues. Suposem que $d^2 f(a)$ és definida positiva, i considerem el punt $t \in U$, $t = (t_1, \dots, t_d)$ i la funció

$$Q(t) = \frac{1}{2} f^{(2)}[a, t] = \sum_{j=0}^d \sum_{i=0}^d D_{j,i} f(a) t_i t_j.$$

Per hipòtesi, Q és contínua per a tot punt $t \in U$. També tenim, per la definició de 6.4.7, que $Q(t)$ és definida positiva per a tot $t \neq (0, \dots, 0)$.

Definim ara la bola tancada de radi 1 centrada en a , $\bar{B}(a, 1) \subset U$ i la seva frontera, $S = \text{Fr}(\bar{B}(a, 1))$. Com que S és compacte, pel 5.2.15 Q té un mínim relatiu en S , suposem que en aquest punt Q val m . Com que Q és definida estrictament positiva per a tot punt de S , $m > 0$.

Sabent que Q és una forma bilineal simètrica, tenim que, per a tot $c \in \mathbb{R}$, $Q(ct) = c^2 Q(t)$. Si considerem $c = \frac{1}{|t|}$, per a $t \neq (0, \dots, 0)$, tenim que $ct \in S$, i per tant $Q(ct) \geq m$, el que significa $Q(t) \geq m|t|^2$.

Pel 6.4.12 i la definició de 6.2.18 tenim

$$f(a+t) - f(a) = \langle \nabla f(a), t \rangle + \frac{1}{2} f^{(2)}[z, t],$$

per a algun $z = a + t + (a - \xi(a+t))$, amb $0 < \xi < 1$. Però com que a és un punt crític de f (observació 6.2.25), tenim $\nabla f(a) = 0$, i per tant

$$f(a+t) - f(a) = \frac{1}{2} f^{(2)}[z, t],$$

i si escrivim $|t^2| o(t) = \frac{1}{2} f^{(2)}[z, t] - \frac{1}{2} f^{(2)}[a, t]$ tenim

$$f(a+t) - f(a) = \frac{1}{2} f^{(2)}[a, t] + |t^2| o(t).$$

Per tant

$$f(a+t) - f(a) = Q(t) + |t|^2 o(t) \geq m|t|^2 + |t|^2 o(t). \quad (6.8)$$

Com que $o(t) \rightarrow 0$ és si i només si $t \rightarrow 0$, existeix un $\varepsilon > 0$ tal que, amb $0 < |t| < \varepsilon$ tenim $o(t) < \frac{m}{2}$, i $0 \leq |t|^2 o(t) < \frac{m}{2} |t|^2$, i així

$$f(a+t) - f(a) > m|t|^2 - \frac{m}{2} |t|^2 = \frac{m}{2} |t|^2 > 0,$$

i, com que això no depèn de t , per la definició d'6.2.23 tenim que a és un mínim relatiu. Ara només ens queda demostrar (3) i (4), de nou, només ens caldrà demostrar-ne una, ja que l'altre demostració serà anàloga. Suposem doncs que a és un mínim relatiu.

Seguint l'argument sobre la fórmula de Taylor per a múltiples variables que hem fet a la primera meitat d'aquesta demostració arribem a la desigualtat (6.8) i tenim

$$f(a+t) - f(a) \leq m|t|^2 + |t|^2 o(t).$$

Aleshores

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{|t|^2} \leq m + o(t).$$

Per la definició d'6.2.23 tenim $f(a+t) - f(a) \geq 0$, i per tant, quan $t \rightarrow 0$, aleshores $o(t) \rightarrow 0$ i

$$0 \leq \frac{f(a+t) - f(a)}{|t|^2} \leq m,$$

i ja hem acabat. □

Càlcul integral

7.1 La integral Riemann

7.1.1 Funcions integrables Riemann

Definició 7.1.1 (Rectangle). Siguin $[a_1, b_1], \dots, [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}$ d intervals tancats. Direm que $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ és un rectangle de \mathbb{R}^d .

Definició 7.1.2 (Partició d'un rectangle i finor d'una partició). Siguin $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ un rectangle de \mathbb{R}^d i P_i una partició de $[a_i, b_i]$ per a tot $i \in \{1, \dots, d\}$. Aleshores $P = P_1 \times \dots \times P_d$ és una partició de \mathfrak{R} .

Si $P_i = \{t_{i,0}, \dots, t_{i,n}\}$, amb $a_i = t_{i,0} < \dots < t_{i,n} = b_i$, direm que els rectangles definits per $[t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1}] \times \dots \times [t_{d,i_d}, t_{d,i_d+1}] \subset \mathfrak{R}$, amb $0 \leq i_j \leq d-1$ per a tot $j \in \{1, \dots, d\}$, són subrectangles de \mathfrak{R} .

Sigui Q una altre partició de \mathfrak{R} . Direm que Q és més fina que P si $P \subset Q$.

Definició 7.1.3 (Suma superior i inferior). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, P una partició i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Per a cada subrectangle de \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_i , amb $i \in I$, on I és el conjunt d'índexs que denoten els subrectangles de \mathfrak{R} definits per P , definim la suma superior de f per P com

$$S(f, P) = \sum_{i \in I} \sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|,$$

i la suma inferior de f per P com

$$s(f, P) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|.$$

Proposició 7.1.4. Siguin P i Q dues particions d'un rectangle $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores, si Q és més fina que P

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \quad i \quad S(f, Q) \leq S(f, P).$$

Demostració. Demostrarem només la primera desigualtat, ja que la segona té una demostració anàloga. Comencem notant que podem fer la demostració suposant $P = P_1 \times \dots \times P_d$, on $P_i = t_{i,0} < \dots < t_{i,n}$ és una partició de

$[a_i, b_i]$ i $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_d$, on, per a tot $j \in \{1, \dots, d\} \setminus k$, $P_j = Q_j$, i $Q_k = t_{k,0} < \cdots < t_{k,l} < q < t_{k,l+1} < \cdots < t_{k,n}$, per algun $l \in \{0, \dots, n-1\}$. Suposarem $l = 0, k = 1$ per simplificar la notació. Aleshores, per la definició de 7.1.3 tenim

$$s(f, P) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|,$$

on I és el conjunt d'índexs dels subrectangles de \mathfrak{R} definits per P .

Observem que tots els subrectangles de \mathfrak{R} són els mateixos respecte les particions P i Q , excepte els que s'obtenen fent $\{t_{1,0}, q, t_{1,1}\} \times Q_2 \times \cdots \times Q_d$. Per tant, els únics termes del sumatori que canvien són, amb un nou conjunt d'índexs J , per a tot $j \in J$,

$$\inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) |\mathfrak{R}_j|.$$

Ara considerem el conjunt d'índex dels rectangles definits per $\{t_{1,0}, t_{1,1}\} \times Q_2 \times \cdots \times Q_d$, $I' \subset I$, i tenim

$$\sum_{i' \in I'} \inf_{x \in \mathfrak{R}_{i'}} f(x) |\mathfrak{R}_{i'}| \leq \sum_{j \in J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) |\mathfrak{R}_j|.$$

I per tant

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| &= \sum_{i \in I \setminus I'} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| + \sum_{i' \in I'} \inf_{x \in \mathfrak{R}_{i'}} f(x) |\mathfrak{R}_{i'}| \leq \\ &\leq \sum_{j \in J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) |\mathfrak{R}_j| + \sum_{i \in I \setminus J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = \sum_{i \in I \cup J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i|. \end{aligned}$$

però, per la definició de 7.1.3,

$$\sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = s(f, P) \quad \text{i} \quad \sum_{i \in I \cup J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = s(f, Q),$$

i per tant trobem

$$s(f, P) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| \leq \sum_{i \in I \cup J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) |\mathfrak{R}_i| = s(f, Q). \quad \square$$

Proposició 7.1.5. *Siguin P, Q dues particions arbitràries d'un rectangle $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una funció acotada. Aleshores*

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Demostració. Considerem la partició definida per $P \cup Q$. Com que $Q \subseteq P \cup Q$ i $Q \subseteq P \cup Q$, $P \cup Q$ és més fina que P i Q . Per tant, per la proposició 7.1.4, tenim

$$s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q). \quad \square$$

Definició 7.1.6 (Integral superior i inferior). *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores definim la integral superior de f en \mathfrak{R} com*

$$\int_{\mathfrak{R}^+} f = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P)$$

i la integral inferior de f en \mathfrak{R} com

$$\int_{\mathfrak{R}^-} f = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P),$$

on \mathcal{P} és el conjunt de particions de \mathfrak{R} .

Proposició 7.1.7. *Siguin R un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores*

$$\int_{\mathfrak{R}^-} f \leq \int_{\mathfrak{R}^+} f.$$

Demostració. Sigui \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} . Com que, per la proposició 7.1.5, tenim $s(f, P) \leq S(f, Q)$ per a $P, Q \in \mathcal{P}$ arbitraris, ha de ser

$$\int_{\mathfrak{R}^-} f = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) = \int_{\mathfrak{R}^+} f. \quad \square$$

Definició 7.1.8 (Funció integrable Riemann). *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Direm que f és integrable Riemann si $\int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}^+} f$.*

També direm que $\int_{\mathfrak{R}} f = \int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}^+} f$ és la integral Riemann de f en \mathfrak{R} .

Teorema 7.1.9 (Criteri d'integrabilitat Riemann). *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d , $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ la família de subrectangles de \mathfrak{R} definits per P i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P tal que*

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i| < \varepsilon.$$

Demostració. Comencem demostrant que la condició és necessària (\implies). Sigui \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} . Per la definició de 7.1.8 i la definició de 7.1.6 tenim

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} s(f, P) = \int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}} f = \int_{\mathfrak{R}^+} f = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f, P),$$

per tant, existeixen un $\varepsilon > 0$ i unes particions $P, Q \in \mathcal{P}$ tals que

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathfrak{R}} f < s(f, P),$$

i

$$S(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\mathfrak{R}} f.$$

Per la proposició 7.1.4 tenim $s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$, per tant ha de ser $S(f, P \cup Q) - s(f, P \cup Q) < \varepsilon$, com calia veure.

Per demostrar que la condició és suficient (\impliedby) veiem que, per hipòtesi,

$$0 \leq \int_{\mathfrak{R}^+} f - \int_{\mathfrak{R}^-} f \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

i quan $\varepsilon \rightarrow 0$ ha de ser, per la definició de 7.1.8,

$$\int_{\mathfrak{R}^+} f = \int_{\mathfrak{R}^-} f = \int_{\mathfrak{R}} f. \quad \square$$

Notació 7.1.10 (Límit d'una partició). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} . Quan vulguem parlar d'una partició de \mathfrak{R} que es fa fina ho denotarem amb

$$\lim_{P \in \mathcal{P}},$$

que es refereix a definir una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$\max_{i \in I} \max_{x, y \in \mathfrak{R}_i} |x - y| \rightarrow 0$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per P .

Corollari 7.1.11. *Si \mathcal{P} és el conjunt de particions de \mathfrak{R} , aleshores f és integrable Riemann si i només si*

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) - s(f, P) = 0.$$

Teorema 7.1.12. *Siguin \mathfrak{R} un rectangle de \mathbb{R}^d i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i contínua. Aleshores f és integrable Riemann en \mathfrak{R} .*

Demostració. Pel 5.3.3, f és uniformement contínua en \mathfrak{R} , per tant, per la definició de 5.3.2, donat un $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|\mathfrak{R}|} \text{ si } |x - y| < \delta.$$

Sigui $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$\max_{i \in I} \max_{x, y \in \mathfrak{R}_i} |x - y| < \delta,$$

això és que els diàmetres dels subrectangles definits per la partició P estiguin fitats per δ .

Considerem

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i|. \quad (7.1)$$

Com que, per hipòtesi, f és contínua en cada \mathfrak{R}_i , pel 5.2.15 tenim que els màxims i mínims de f en cada \mathfrak{R}_i són accessibles. Denotem doncs amb M_i, m_i els punts de \mathfrak{R}_i tals que $f(M_i) = \max_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x)$ i $f(m_i) = \min_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x)$. Per (7.1) tindrem $|M_i - m_i| < \delta$, i com que f és contínuament uniforme en cada \mathfrak{R}_i , $f(M_i) - f(m_i) < \frac{\varepsilon}{|\mathfrak{R}|}$, i per tant tenim

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i| \leq \frac{\varepsilon}{|\mathfrak{R}|} \sum_{i \in \mathfrak{R}_i} |\mathfrak{R}_i| = \varepsilon,$$

i això completa la prova. □

7.1.2 La integral com a límit de sumes

Definició 7.1.13 (Suma de Riemann). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada i P una partició de \mathfrak{R} . Aleshores definim la suma de Riemann de f associada a P com

$$\Sigma(f, P) = \sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i|,$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per P i ξ_i és un punt qualsevol de \mathfrak{R}_i , per a tot $i \in I$.

Observació 7.1.14.

$$s(f, P) \leq \Sigma(f, P) \leq S(f, P).$$

Proposició 7.1.15. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann si i només si existeix un $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} \Sigma(f, P) = L.$$

Demostració. Pel corollari 7.1.11 tenim

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) = \lim_{P \in \mathcal{P}} s(f, P),$$

i per l'observació 7.1.14 i el 5.2.16 ha de ser

$$\lim_{P \in \mathcal{P}} S(f, P) = \lim_{P \in \mathcal{P}} \Sigma(f, P) = \lim_{P \in \mathcal{P}} s(f, P),$$

i amb això es veu que ha de existir un real L tal que $\lim_{P \in \mathcal{P}} \Sigma(f, P) = L$. \square

Notació 7.1.16. Seguint el resultat de la proposició 7.1.15 denotarem

$$\int_{\mathfrak{R}} f(x) dx = \Sigma(f, P_n) = \sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i| = L.$$

on \int es refereix al sumatori infinit, $f(\xi_i)$ es transforma en $f(x)$ i $|\mathfrak{R}_i|$ s'escriu dx , tot quan fem la partició “infinitament més fina”, amb el límit $\lim_{P \in \mathcal{P}} P$.

7.1.3 Propietats de la integral Riemann definida

Proposició 7.1.17. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f, g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions integrables Riemann. Aleshores són certs els següents enunciats:

1. Sigui λ, μ dos escalars. Aleshores

$$\int_{\mathfrak{R}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\mathfrak{R}} f + \mu \int_{\mathfrak{R}} g.$$

2. La funció producte fg també és integrable Riemann.

3. *Sigui C un escalar. Si $f(x) \leq Cg(x)$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, aleshores*

$$\int_{\mathfrak{R}} f \leq C \int_{\mathfrak{R}} g.$$

Demostració. Sigui \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} .

Comencem demostrant el punt (1), Per la proposició 7.1.15 i la definició de 7.1.13 tenim

$$\sum_{i \in I} (\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)) |\mathfrak{R}_i|,$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició $P \in \mathcal{P}$ i ξ_i és un punt qualsevol de \mathfrak{R}_i per a tot $i \in I$. Això ho podem reescriure com

$$\lambda \sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i| + \mu \sum_{i \in I} g(\xi_i) |\mathfrak{R}_i|$$

i per tant

$$\int_{\mathfrak{R}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\mathfrak{R}} f + \mu \int_{\mathfrak{R}} g,$$

com volíem demostrar.

Demostrem ara el punt (2) (En veritat la demostraré quan em doni la gana, i resulta que això no és ara).

Podem veure el punt (3) a partir del punt (1), ja que si $f(x) \leq Cg(x)$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, amb ξ_i qualsevol punt de \mathfrak{R}_i per tot $i \in I$, on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} , tenim

$$\sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i| \leq C \sum_{i \in I} g(\xi_i) |\mathfrak{R}_i|,$$

i ja hem acabat. □

Teorema 7.1.18. *Siguin $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, \mathcal{S} un conjunt de rectangles disjunts de \mathfrak{R} tals que $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = \mathfrak{R}$ i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann en \mathfrak{R} si i només si f és integrable Riemann en cada $S \in \mathcal{S}$, i*

$$\int_{\mathfrak{R}} f = \sum_{S \in \mathcal{S}} \int_S f.$$

Demostració. Comencem demostrant la doble implicació (\iff). Suposem que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} . Com que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} , per la proposició 7.1.15 i la definició de 7.1.13. Tenim que, sent \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} , existeix un real L tal que

$$\sum_{i \in I} f(\xi_i) |\mathfrak{R}_i| = L,$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició $P \in \mathcal{P}$. Considerem ara el conjunt de particions de S , per a tot $S \in \mathcal{S}$, que denotarem com \mathcal{P}_S . Com que $S \subset \mathfrak{R}$ per a tot $S \in \mathcal{S}$, per la definició de 7.1.2, tenim que

$$\lim_{P_S \in \mathcal{P}_S} P_S \subset \lim_{P \in \mathcal{P}} P,$$

per a tot $S \in \mathcal{S}$; i com que $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = \mathfrak{R}$ tenim que

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} \lim_{P_S \in \mathcal{P}_S} P_S = \lim_{P \in \mathcal{P}} P.$$

Per tant, si I_S és el conjunt d'índexs dels subrectangles $\mathfrak{R}_{S,i}$ de S definits per una partició P_S , per a tot $S \in \mathcal{S}$, com que, per hipòtesi, els rectangles $S \in \mathcal{S}$ són disjunts, tenim

$$\sum_{i \in I} f(x) |\mathfrak{R}_i| = \sum_{S \in \mathcal{S}} \sum_{i \in I_S} f(x) |\mathfrak{R}_{S,i}| = L,$$

i, de nou, per la proposició 7.1.15 tenim que f és integrable en cada $S \in \mathcal{S}$, com volíem veure.

Aquesta demostració també ens serveix per veure que

$$\int_{\mathfrak{R}} f = \sum_{S \in \mathcal{S}} \int_S f,$$

per la definició de 7.1.13. □

Teorema 7.1.19. *Siguin $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció integrable Riemann amb $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$. Aleshores la funció $|f|$ és integrable Riemann i*

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} f \right| \leq \int_{\mathfrak{R}} |f| \leq M |\mathfrak{R}|.$$

Demostració. Sigui $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles definits per una partició de \mathfrak{R} . Aleshores

$$\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) = \sup_{x, y \in \mathfrak{R}_i} |f(x) - f(y)|, \quad \text{per a tot } i \in I,$$

i

$$\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} |f(x)| - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} |f(x)| = \sup_{x, y \in \mathfrak{R}_i} ||f(x)| - |f(y)||, \quad \text{per a tot } i \in I.$$

Per tant, per la definició de 7.1.3, si P és una partició de \mathfrak{R} tenim

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P)$$

Com que, per hipòtesi, f és integrable Riemann, pel 7.1.9 tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

el que significa que

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

I pel mateix criteri d'integrabilitat Riemann $|f|$ també és integrable Riemann.

Per veure les desigualtats de l'enunciat, amb \mathcal{P} el conjunt de particions de \mathfrak{R} i $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles definits per una partició $\lim_{P \in \mathcal{P}}$ de \mathfrak{R} , tenim

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} f \right| = \lim_{P \in \mathcal{P}} \left| \sum_{i \in I} f(x) |\mathfrak{R}_i| \right| \leq \lim_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i \in I} |f(x)| |\mathfrak{R}_i| = \int_{\mathfrak{R}} |f|.$$

Com que, per hipòtesi, $|f(x)| \leq M$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, tenim

$$\int_{\mathfrak{R}} |f| \leq \int_{\mathfrak{R}} M = M|\mathfrak{R}|. \quad \square$$

Corol·lari 7.1.20. Si $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$, $\int_{\mathfrak{R}} f \geq 0$.

Proposició 7.1.21. Siguin $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i acotada tal que $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$ i $\int_{\mathfrak{R}} f = 0$. Aleshores $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathfrak{R}$.

Demostració. Observem que la proposició té sentit pel Teorema 7.1.12.

Farem aquesta demostració per reducció a l'absurd. Suposem que existeix un punt $c \in \mathfrak{R}$ tal que $f(c) > 0$. Com que, per hipòtesi, f és contínua en un rectangle \mathfrak{R} , acotat per la definició de 7.1.1, pel 5.3.3 f és uniformement contínua en \mathfrak{R} , per tant, per la definició de 5.3.2, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tals que

$$\text{si } |x - c| < \delta \text{ aleshores } |f(x) - f(c)| < \varepsilon = \frac{f(c)}{2}.$$

Per tant, si definim un rectangle S inscrit en la bola de radi δ centrada en el punt c , $B(c, \delta)$, tenim

$$\int_{\mathfrak{R}} f \geq \int_S f \geq \frac{f(c)}{2}|S| > 0,$$

però això contradiu la hipòtesi de que $\int_{\mathfrak{R}} f = 0$, per tant la proposició queda demostrada per reducció a l'absurd. \square

7.2 Les funcions integrables Riemann

7.2.1 Caracterització de les funcions integrables Riemann

Definició 7.2.1 (Oscil·lació d'una funció en un punt). Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $a \in U$ un punt, $B(a, \delta) \subseteq U$ una bola oberta centrada en a de radi $\delta > 0$ i $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció. Aleshores definim l'aplicació

$$\omega_f(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x, y \in B(a, \delta)} |f(x) - f(y)|$$

com l'oscil·lació de la funció f en el punt a .

Proposició 7.2.2. Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció definida en un punt $a \in U$. Aleshores f és contínua en a si i només si $\omega_f(a) = 0$, on $\omega_f(a)$ és la oscil·lació de f en a .

Demostració. Suposem que $\omega_f(a) = 0$. Observem que quan $\delta \rightarrow 0$, per a tot $x, y \in B(a, \delta)$ tenim $x \rightarrow a$ i $y \rightarrow a$, i com que $\omega_f(a) = 0$, podem escriure

$$\begin{aligned} \omega_f(a) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x, y \in B(a, \delta)} |f(x) - f(y)| \\ &= \lim_{x, y \rightarrow a} |f(x) - f(y)| = 0 \end{aligned}$$

i per tant tenim $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow a} f(y)$, i equivalentment

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

que és la definició de 5.2.4. \square

Definició 7.2.3 (Conjunt de discontinuïtats d'una funció). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un obert, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció, τ un escalar positiu i $\omega_f(x)$ l'oscil·lació de f en un punt $x \in U$. Aleshores denotem el conjunt

$$D_\tau = \{x \in U \mid \omega_f(x) \geq \tau\}$$

com el conjunt de desigualtats majors que τ d'una funció.

Observació 7.2.4. D_τ és compacte.

Definició 7.2.5 (Contingut exterior de Jordan). Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle, $A \subseteq \mathfrak{R}$ un conjunt, 1_A la funció indicatriu de A i $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ el conjunt de subrectangles definits per una partició de \mathfrak{R} amb la condició de que $\mathfrak{R}_i \cap A \neq \emptyset$ per a tot $i \in I$. Aleshores definim

$$c(A) = \sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} 1_A(x) |\mathfrak{R}_i|$$

com el contingut exterior de Jordan de A .

Nota 7.2.6. La condició sobre \mathfrak{R}_i pot dir-se com que els \mathfrak{R}_i cobreixen A .

Observació 7.2.7. Sigui $\{A_i\}_{i \in I}$ un conjunt finit de conjunts amb $c(A_i) = 0$ per a tot $i \in I$ i $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Aleshores $c(A) = 0$.

Teorema 7.2.8. Sigui $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle i $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció acotada. Aleshores f és integrable Riemann en \mathfrak{R} si i només si el contingut exterior de Jordan del conjunt de desigualtats majors que $\tau > 0$ de f en \mathfrak{R} és zero, és a dir, $c(D_\tau) = 0$ per a tot $\tau > 0$.

Demostració. Comencem amb la implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem doncs que $D_\tau = \emptyset$ per a tot $\tau > 0$. Per la definició de 7.2.5 això és

$$\sum_{i \in I} \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} 1_{D_\tau}(x) |\mathfrak{R}_i| = 0$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles de \mathfrak{R} definits per una partició del conjunt \mathcal{P} de particions de \mathfrak{R} . Considerem el conjunt de subrectangles $\{\mathfrak{R}_j\}_{j \in J}$ tals que $\mathfrak{R}_j \cap D_\tau \neq \emptyset$. Ara bé, per la proposició 7.2.2 tenim que f és contínua, i pel Teorema 7.1.12 veiem que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} .

Comprovem ara la implicació cap a la dreta (\Rightarrow). Suposem doncs que f és integrable Riemann en \mathfrak{R} i fixem $\varepsilon > 0$. Pel 7.1.9 tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició P de \mathfrak{R} tal que

$$\sum_{i \in I} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_i} f(x) \right) |\mathfrak{R}_i| < \varepsilon$$

on $\{\mathfrak{R}_i\}_{i \in I}$ és el conjunt de subrectangles definits per P . Sigui J el conjunt de subrectangles $\{\mathfrak{R}_j\}_{j \in J}$ tals que $\mathfrak{R}_j \cap D_\tau \neq \emptyset$. Tindrem

$$\sup_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) \geq \tau$$

per a tot $j \in J$, i per tant, amb $\mathfrak{R}' = \bigcup_{j \in J} \mathfrak{R}_j$, per la definició de 7.2.5

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) \right) |\mathfrak{R}_j| &\geq \sum_{j \in J} \tau |\mathfrak{R}_j| \\ &= \tau \sum_{j \in J} |\mathfrak{R}_j| \\ &\geq \tau \sum_{j \in J} \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} 1_{\mathfrak{R}'}(x) |\mathfrak{R}_j| \\ &= \tau c(D_\tau) \end{aligned}$$

Ara bé, com que f és integrable, pel 7.1.9 tenim que

$$\sum_{j \in J} \left(\sup_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) - \inf_{x \in \mathfrak{R}_j} f(x) \right) |\mathfrak{R}_j| < \varepsilon$$

per a tota $\varepsilon > 0$, i per tant quan $\varepsilon \rightarrow 0$ ha de ser $D_\tau = 0$, com volíem veure. \square

7.2.2 Integració sobre conjunts generals

Nota 7.2.9. Tota la teoria de l'integració Riemann que hem vist ha estat sobre rectangles. Ara tractem de generalitzar-la desfent-nos d'aquesta limitació.

CAPÍTOL 8

Càlcul vectorial

sona divertit

Bibliografia

- [1] Joaquim Bruna. «Aspectes mètrics, geomètrics i topològics de l'espai euclidià. Funcions de vàries variables, corbes i superfícies». 2017.
- [2] Joaquim Bruna. «Càlcul Diferencial en varies variables». 2017.
- [3] Joaquim Bruna. «Càlcul Integral en vàries variables». 2017.
- [4] Joaquim Bruna. «Anàlisi Vectorial». 2017.
- [5] T. Apostol. *Mathematical analysis*. Anglès. Addison-Wesley, 1974. ISBN: 0201002884.
- [6] J.E. Marsden i A.J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Castellà. 5a ed. Addison-Wesley, 2004. ISBN: 9788478290697.
- [7] Wendell Helms Fleming. *Functions of Several Variables*. Anglès. 1977. ISBN: 978-1-4684-9461-7.
- [8] David M. Bressoud. *Second Year Calculus. From celestial mechanics to special relativity*. Anglès. Springer, 1991. ISBN: 978-1-4612-0959-1.

Els apunts que he seguit per escriure la majoria d'aquesta part són els escrits pel professor de l'assignatura; [1, 2, 3, 4]. De moment no han estat publicats però en té pensat fer-ne un llibre. Es poden trobar al campus virtual.

El llibre [5] és molt útil per tenir una visió més organitzada i pautaada del curs. També tracta temes més avançats als de l'assignatura.

La bibliografia del curs inclou els textos [6, 7, 8].

Part V

Anàlisi matemàtica

Sèries

9.1 Sèries numèriques

9.1.1 Convergència d'una sèrie numèrica

Definició 9.1.1 (Sèrie numèrica). Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de nombres reals. Aleshores direm que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

és una sèrie numèrica o la sèrie de (a_n) .

Definició 9.1.2 (Sèrie convergent). Sigui $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica i

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

una successió tals que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$$

on L és un nombre real. Aleshores direm que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie convergent amb valor L .

Si L no és un nombre real direm que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie divergent.

Exemple 9.1.3 (Sèries geomètriques). Sigui $r \neq 0$ un nombre real. Volem estudiar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n. \quad (9.1)$$

Solució. Observem que si $r = 1$, per la definició de 5.2.3, el límit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N 1^n = N$$

és divergent, i per la definició de 9.1.2 tenim que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

és divergent.

Estudiem ara el cas $r \neq 1$. Tenim que $\sum_{n=0}^N r^n = r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^N$, i per tant

$$\begin{aligned} (1-r) \sum_{n=0}^N r^n &= (1-r)(r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^N) \\ &= r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^N - (r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^{N+1}) \\ &= 1 - r^{N+1} \end{aligned}$$

i trobem

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

Per tant tenim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } -1 < r < 1 \\ +\infty & \text{si } r \geq 1 \\ \text{no existeix} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

i per la definició de 9.1.2 trobem que (9.1) és convergent si i només si r pertany a l'interval $(-1, 1)$, i si r pertany a l'interval $(-1, 1)$ aleshores es compleix

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}. \quad \diamond$$

Teorema 9.1.4 (Condicció de Cauchy). *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 natural tal que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim*

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| < \varepsilon.$$

Demostració. Suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Per la definició de 9.1.2 això és que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = L$$

on L és un nombre real.

Per la definició de 5.2.3 tenim que per a tot $\delta_1 > 0$ real existeix un N tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L \right| < \delta_1$$

i de nou per la definició de 5.2.3 tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un $\delta_2 > 0$ real tal que $\delta_1 - \delta_2 < \varepsilon$ i que existeix un M natural satisfent

$$\left| \sum_{n=1}^M a_n - L \right| < \delta_2.$$

Per tant trobem

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L \right| - \left| \sum_{n=1}^M a_n - L \right| < \delta_1 - \delta_2$$

i per la desigualtat triangular tenim que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^M a_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - \sum_{n=1}^M a_n \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L - \sum_{n=1}^M a_n + L \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{N-1} a_n - L \right| - \left| \sum_{n=1}^M a_n - L \right| \\ &< \delta_1 - \delta_2 < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Corol·lari 9.1.5. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent. Aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Demostració. Per la 9.1.4 tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 natural tal que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| < \varepsilon.$$

En particular, si triem $M = N + 1$, tenim $|a_n| < \varepsilon$ per a tot $n > n_0$, i per la definició de 5.2.3 veiem que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.6 (Sèrie harmònica). *Si α un nombre real. Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \quad (9.2)$$

Solució. Observem que si $\alpha \leq 0$ tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$$

i pel corol·lari 9.1.5 tenim que la sèrie és divergent.

Suposem que $0 < \alpha \leq 1$. Definim la successió

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

i tenim que

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^{N\alpha}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{N\alpha}} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{2^{(n+1)\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Ara bé, tenim que $1 - \alpha \geq 0$, i per tant trobem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n(1-\alpha)} = \infty,$$

i tenim que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2^N} = \infty$ i per la definició de 9.1.2 trobem que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és divergent.

Veiem ara el cas $\alpha > 1$. Definim de nou la successió

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}.$$

Tenim que

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^{N\alpha}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{N\alpha}} \\ &= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n}{2^{n\alpha}} \\ &= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \sum_{n=0}^{N-1} 2^{(1-\alpha)n} \\ &= \frac{1}{2^{N\alpha}} + \frac{1 - 2^{(1-\alpha)N}}{1 - 2^{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

i tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{N\alpha}} + \frac{1 - 2^{(1-\alpha)N}}{1 - 2^{1-\alpha}} = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}.$$

Per tant tenim que la successió (S_N) està fitada, i degut a que $S_{N+1} = S_N + \frac{1}{(N+1)^\alpha}$ tenim que és creixen i pel 5.2.15 tenim que és convergent. Per tant per la definició de 9.1.2 tenim que la sèrie (9.2) és convergent.

Per tant tenim que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

és convergent si i només si $\alpha > 1$. ◇

9.1.2 Sèries de termes positius

Definició 9.1.7 (Sèrie de termes positius). Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica tal que $a_n > 0$ per a tot n natural. Aleshores direm que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és una sèrie de termes positius.

Notació 9.1.8. Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius. Aleshores escriurem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.

Lema 9.1.9. Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ una sèrie de termes positius convergent, K un nombre real i n_0 un natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà $a_n \leq Kb_n$. Aleshores tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^N a_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + K \sum_{n=n_0}^N b_n \end{aligned}$$

i per la definició de 9.1.2 tenim que la sèrie $K \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ és convergent i, de nou per la definició de 9.1.2, tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent, com volíem veure. \square

Teorema 9.1.10 (Criteri de comparació). Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries de termes positius i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

tals que

1. $L \neq 0$ i $L \neq \infty$. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent.
2. $L = 0$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.
3. $L = \infty$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Suposem que $L \neq 0$ ó $L \neq \infty$. Observem que $L > 0$. Per tant prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 0$. Per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon.$$

Per tant tenim que per a tot $n > n_0$

$$l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon.$$

Suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. Aleshores tenim

$$b_n(l - \varepsilon) < a_n < b_n(l + \varepsilon),$$

i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Suposem ara que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Aleshores tenim

$$\frac{a_n}{L - \varepsilon} < b_n < \frac{a_n}{L + \varepsilon},$$

i pe lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L = 0$ i que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. Per la definició de 5.2.3 tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un natural n_0 tal que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon,$$

i això és equivalent a

$$a_n < \varepsilon b_n$$

i pel lema 9.1.9 trobem que la sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (3). Suposem doncs que $L = \infty$ i que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. Tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0,$$

i per tant pel punt (2) tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és convergent. \square

Exemple 9.1.11. *Considerem la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 3^{-n}.$$

Volem estudiar si aquesta sèrie és convergent o divergent.

Solució. Definim

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 3^{-n} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{3^n}$$

Observem que per a tot n natural tenim $a_n > 0$ i $b_n > 0$, i per la definició de 9.1.7 tenim que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són sèries de termes positius.

Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 3^{-n}}{3^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 1. \end{aligned}$$

Ara bé, per l'exercici 9.1.3 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ és convergent, ja que $-1 < \frac{1}{3} < 1$, i pel 9.1.10 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. \diamond

9.1.3 Criteris de convergència

Proposició 9.1.12 (Criteri de l'arrel). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

tal que

1. $L < 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

2. $L > 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Suposem doncs que $L < 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon,$$

i per tant

$$a_n < (L + \varepsilon)^n.$$

Ara bé, tenim que $L + \varepsilon < 1$, per tant per l'exercici 9.1.3 tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$ és convergent, i per tant pel lema 9.1.9 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon,$$

i per tant

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}.$$

Ara bé, tenim que $L - \varepsilon > 1$, per tant per l'exercici 9.1.3 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} (L - \varepsilon)^n$ és divergent, i per tant pel lema 9.1.9 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent. \square

Exemple 9.1.13. Siguin $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$ dos reals. Considerem la sèrie numèrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \alpha^n.$$

Volem estudiar la convergència d'aquesta sèrie en funció dels valors de α i β .

Solució. Definim

$$a_n = n^{\beta} \alpha^n.$$

Observem primer que $a_n > 0$ per a tot n natural. Per tant per la definició de 9.1.7 tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie de termes positius. Veiem també que si $\alpha = 1$ tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta},$$

i com que $\beta \geq 0$ la sèrie és divergent.

Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\beta} \alpha^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\beta}} \sqrt[n]{\alpha^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\beta}} \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Per tant, pel 9.1.12 tenim que la sèrie és convergent quan $\alpha > 1$ i divergent quan $\alpha \leq 1$. \diamond

Proposició 9.1.14 (Criteri del quocient). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

tal que

1. $L < 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*
2. $L > 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.*

Demostració. Comencem veient el punt (1). Suposem doncs que $L < 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Aleshores per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon,$$

i per tant

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon)a_n$$

i trobem

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< (L + \varepsilon)a_n \\ &< (L + \varepsilon)^2 a_{n-1} \\ &\vdots \\ &< (L + \varepsilon)^{n-n_0+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Ara bé, com que $L + \varepsilon < 1$ tenim per l'exemple 9.1.3 que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} (L + \varepsilon)^n$ és convergent, i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Aleshores per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un n_0 natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

i per tant

$$(L - \varepsilon)a_n < a_{n+1}$$

i trobem

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> (L - \varepsilon)a_n \\ &> (L - \varepsilon)^2 a_{n-1} \\ &\vdots \\ &> (L - \varepsilon)^{n-n_0+1} a_{n_0}. \end{aligned}$$

Ara bé, com que $L - \varepsilon > 1$ tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L - \varepsilon)^n = \infty,$$

i per tant trobem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

i tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent, com volíem veure. \square

Lema 9.1.15. *Siguin x i α dos nombres reals no negatius. Aleshores*

$$1 - \frac{\alpha}{x} \leq \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\alpha}.$$

Demostració. :(\square

Proposició 9.1.16 (Criteri de Raabe). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$$

tal que

1. $L > 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.
2. $L < 1$. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.

Demostració. Comencem veient el cas (1). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Aleshores per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un n_0 natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$L - \varepsilon < n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

i per tant

$$a_{n+1} < a_n \left(1 - \frac{L - \varepsilon}{n}\right).$$

Aleshores, pel lema 9.1.15 trobem que

$$a_{n+1} < a_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{L-\varepsilon}$$

i tenim

$$a_{n+1} < a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{L-\varepsilon}. \quad (9.3)$$

Podem aplicar la desigualtat (9.3) recursivament per obtenir

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{L-\varepsilon} \\ &< a_{n-1} \left(\frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1} \right)^{L-\varepsilon} \\ &\vdots \\ &< a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n_0+1} \frac{n_0+1}{n_0+2} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n+1} \right)^{L-\varepsilon} \end{aligned}$$

i per tant trobem

$$a_{n+1} < a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n+1} \right)^{L-\varepsilon},$$

i com que $L - \varepsilon > 1$ trobem per l'exemple 9.1.6 que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{L-\varepsilon}$$

és convergent, i pel lema 9.1.9 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (2). Suposem doncs que $L < 1$. □

Exemple 9.1.17. *Sigui $\alpha > 0$ un nombre real. Considerem la sèrie numèrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}. \quad (9.4)$$

Volem estudiar la convergència d'aquesta sèrie en funció del valor de α .

Solució. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\alpha^n n!}{n^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}(n+1)!n^n}{\alpha^n n! (n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n+1)!n^n}{(n+1)!(n+1)^n} \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{\alpha}{e} \end{aligned}$$

Per tant, si $\alpha > e$ tenim que $\frac{\alpha}{e} > 1$, i pel 9.1.14 trobem que la sèrie és divergent.

Si $\alpha < e$ aleshores $\frac{\alpha}{e} < 1$ i pel 9.1.14 trobem que la sèrie és convergent.

Estudiem el cas $\alpha = e$. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n! (n+1)^{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - e \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)!(n+1)^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^2) = -\infty \end{aligned}$$

i pel 9.1.16 trobem que la sèrie (9.4) és divergent quan $\alpha = e$.

Per tant la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n n!}{n^n}$$

és convergent si i només si $\alpha < e$. \diamond

Proposició 9.1.18 (Criteri de condensació). *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius amb $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decreixent. Aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent si i només si la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ és convergent.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent i definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{i} \quad T_N = \sum_{n=0}^N 2^n a_{2^n}.$$

Per la definició de 9.1.2 tenim que existeix un real C tal que per a tot N natural

$$S_N \leq \frac{C}{2} \tag{9.5}$$

Aleshores tenim que la successió T_N és creixent, ja que $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de termes positius creixent i (a_n) és, per hipòtesi, una successió de termes positius.

Veiem ara que $T(N)$ està fitada. Tenim que

$$\begin{aligned} T_N &= 2a_2 + 4a_4 + 8a_6 + \cdots + 2^N a_{2^N} \\ &= 2(a_2 + 2a_4 + 4a_6 + \cdots + 2^{N-1} a_{2^N}) \\ &\leq 2(a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{N-1}} + \cdots + a_{2^N})) \\ &= 2S_{2^N} \leq C \end{aligned} \tag{9.5}$$

i per tant la successió T_N és creixent i està fitada, i per tant és convergent, i per la definició de 9.1.2 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

és convergent.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

és convergent. Definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{i} \quad T_N = \sum_{n=0}^N 2^n a_{2^n},$$

i com que, per hipòtesi, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ és convergent tenim que existeix un real C tal que per a tot N es satisfà

$$T(N) \leq C \tag{9.6}$$

Aleshores, com que per hipòtesi la successió a_n és decreixent, tenim que

$$\begin{aligned} S_N &= a_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_7) + \dots + a_N \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 8a_8 + \dots + 2^N a_N \\ &= a_1 + T(N) \leq a_1 + C. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Per tant tenim que la successió (S_N) és acotada, i com que per hipòtesi la successió (a_n) és una successió de termes positius trobem que la sèrie S_N és creixent, i per tant convergent, i per la definició de 9.1.2 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

és convergent, com volíem veure. \square

Proposició 9.1.19 (Criteri logarítmic). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = L$$

tal que

1. $L > 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*
2. $L < 1$. *Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent.*

Demostració. Comencem veient el punt (2). Suposem doncs que $L > 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$. Aleshores per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant per a tot $n > n_0$ tenim

$$L - \varepsilon < \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)},$$

i per tant

$$(L - \varepsilon) \log(n) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

o, equivalentment,

$$\log(n^{L-\varepsilon}) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

i tenim que

$$n^{L-\varepsilon} < \frac{1}{a_n}.$$

Per tant,

$$a_n > \frac{1}{n^{L-\varepsilon}}$$

Ara bé, com que per hipòtesi $L - \varepsilon > 1$, per l'exercici 9.1.6 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{L-\varepsilon}}$$

és convergent, i pel lemma 9.1.9 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.

Veiem ara el punt (1). Suposem doncs que $L < 1$. Prenem un $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$. Per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - L \right| < \varepsilon,$$

i per tant trobem que

$$\frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} < \varepsilon + L,$$

o equivalentment,

$$\log\left(\frac{1}{a_n}\right) < (\varepsilon + L) \log(n)$$

i tenim que

$$\log\left(\frac{1}{a_n}\right) < \log(n^{\varepsilon+L})$$

i per tant

$$\frac{1}{a_n} < n^{\varepsilon+L}$$

i trobem

$$a_n > \frac{1}{n^{\varepsilon+L}}. \quad (9.7)$$

Ara bé, com que per hipòtesi $L + \varepsilon < 1$, per l'exemple 9.1.6 que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{L+\varepsilon}}$$

és divergent, i pel lema 9.1.9 i (9.7) tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és divergent. \square

Exemple 9.1.20. *Sigui α un real. Volem estudiar per a quins valors de $\alpha > 0$ la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{\log(n)}} \quad (9.8)$$

és convergent.

Solució. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\alpha^{\log(n)})}{\log(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n) \log(\alpha)}{\log(n)} \\ &= \log(\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log(n)} = \log(\alpha). \end{aligned}$$

Per tant, pel 9.1.19 trobem que si $\alpha > e$ la sèrie (9.8) és convergent, i si $\alpha < e$ la sèrie (9.8) és convergent. Estudiem el cas $\alpha = e$. Això és la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\log(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

i per l'exercici 9.1.6 trobem que és divergent.

Per tant, la sèrie (9.8) és convergent quan $\alpha > e$ i divergent quan $\alpha \leq e$. \diamond

Lema 9.1.21 (Criteri de la integral). *Sigui $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ una funció decreixent. Aleshores la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és convergent si i només si existeix un real $C > 0$ tal que per a tot N natural es satisfà $\int_1^N f(x)dx \leq C$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és convergent. Com que, per hipòtesi, la sèrie és de termes positius, per la definició de 9.1.2 tenim que existeix un real C tal que per a tot N natural es satisfà

$$\sum_{n=1}^N f(n) \leq C.$$

Considerem la integral

$$\int_1^N f(x)dx.$$

Com que per hipòtesi la funció f és decreixent trobem que

$$\begin{aligned} \int_1^N f(x)dx &\leq (2-1)f(1) + (3-2)f(2) + \cdots + (N-(N-1))f(N-1) \\ &= f(1) + 1f(2) + \cdots + 1f(N-1) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq C, \end{aligned}$$

i hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que existeix un real $C > 0$ tal que per a tot N natural es satisfà

$$\int_1^N f(x)dx \leq C.$$

Tenim doncs que per a tot N natural

$$\begin{aligned} C &\geq \int_1^N f(x)dx \\ &\geq (1-0)f(1) + (2-1)f(2) + \cdots + (N+1-N)f(N) \\ &= f(1) + 1f(2) + \cdots + 1f(N) \\ &= \sum_{n=1}^N f(n), \end{aligned}$$

i per la definició de 9.1.2 trobem que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ és convergent. \square

9.1.4 Sèries alternades

Definició 9.1.22 (Sèrie alternada). Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sèrie de termes positius. Aleshores direm que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

és la sèrie alternada de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 9.1.23 (Criteri de Leibniz). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sèrie de termes positius decreixent amb*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Aleshores la sèrie alternada de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent.

Demostració. Definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \quad (9.9)$$

i considerem les parcials

$$S_{2N+1} = \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n a_n \quad \text{i} \quad S_{2N} = \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n a_n.$$

Tenim que

$$S_{2(N+1)+1} = S_{2N+1} - a_{2N+2} + a_{2N+3},$$

i com que, per hipòtesi, la successió (a_n) és decreixent trobem que

$$S_{2(N+1)+1} \leq S_{2N+1},$$

i per tant la successió $(S_{2N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ és decreixent. També tenim que

$$S_{2(N+1)} = S_{2N} + a_{2N+1} - a_{2N+2},$$

i de nou, com que la successió (a_n) és decreixent trobem que

$$S_{2(N+1)} \geq S_{2N},$$

i per tant la successió $(S_{2N})_{N \in \mathbb{N}}$ és creixent.

Ara bé, com que per hipòtesi la successió (a_n) és de termes positius tenim que

$$S_{2N+1} - S_{2N} = a_{2N+1} \geq 0,$$

i per tant $S_{2N+1} < S_{2N}$. Així trobem que

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= S_2 \\ &\leq S_{2N} \\ &< S_{2N+1} \\ &\leq S_1 = a_1, \end{aligned} \quad (9.9)$$

i tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_{2N+1} - S_{2N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_{2N+1},$$

i com que per hipòtesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N}. \quad (9.10)$$

Per tant tenim que (S_{2N+1}) és una successió superiorment acotada i creixent, i per tant convergent, i (S_{2N}) és una successió inferiorment acotada i decreixent, i per tant convergent. També tenim per (9.10) que tenen el mateix límit, i per tant la successió (S_N) és convergent, i per la definició de 9.1.2 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ és convergent, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.24 (Sèrie harmònica alternada). *Sigui α un real. Volem estudiar per a quins valors de α la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad (9.11)$$

és convergent.

Solució. Si $\alpha \leq 0$ tenim que el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

és divergent, i pel corollari 9.1.5 trobem que la sèrie és divergent.

Estudiem ara el cas $\alpha > 0$. Si denotem

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

tenim que la successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és decreixent, i pel 9.1.23 trobem que la sèrie és convergent.

Per tant tenim que si $\alpha > 0$ la sèrie (9.11) és convergent, i si $\alpha \leq 0$ la sèrie és divergent. \diamond

9.1.5 Convergència absoluta d'una sèrie

Definició 9.1.25 (Convergència absoluta). *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie numèrica tal que la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

sigui convergent. Aleshores direm que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent.

Proposició 9.1.26. *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent.*

Demostració. Com que, per hipòtesi, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és convergent tenim per la 9.1.4 que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un n_0 natural tal que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M |a_n| \right| < \varepsilon. \quad (9.12)$$

Ara bé, com que $|a_n|$ és no negatiu per a tot n natural trobem que

$$\left| \sum_{n=N}^N |a_n| \right| = \sum_{n=N}^N |a_n|,$$

i per la desigualtat triangular tenim que

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| \leq \sum_{n=N}^M |a_n|$$

i per (9.12) trobem que per a tot N i M naturals amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n \right| < \varepsilon,$$

i per la 9.1.4 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent. \square

Exemple 9.1.27. *Volem estudiar la convergència de la sèrie numèrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^3}. \quad (9.13)$$

Solució. Observem que no tots els termes de la sèrie (9.13) són positius. Per tant no podem aplicar els criteris de convergència de sèries de termes positius.

Estudiem la convergència absoluta de la sèrie. Per la definició de 9.1.25 això és estudiar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right|, \quad (9.14)$$

que podem reescriure com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^3}.$$

Observem que $|\sin(n)| \leq 1$. Per tant trobem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^3} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Ara bé, tenim per l'exemple 9.1.6 que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

és convergent, i pel lema 9.1.9 trobem que la sèrie (9.14) és convergent.

Per tant, per la definició de 9.1.25 trobem que la sèrie (9.13) és absolutament convergent, i per la proposició 9.1.26 trobem que la sèrie (9.13) és convergent. \diamond

Exemple 9.1.28. *Volem estudiar la convergència i la convergència absoluta de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad (9.15)$$

Solució. Tenim per l'exemple 9.1.24 que la sèrie (9.15) és convergent, i per l'exemple 9.1.6 trobem que la sèrie (9.15) no és absolutament convergent. \diamond

9.1.6 Sèries del producte de successions

Lema 9.1.29 (Fórmula de sumació parcial d'Abel). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dues sèries numèriques i*

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Aleshores per a tot naturals N i M amb $N \leq M$ tenim que

$$\sum_{n=N}^M a_n b_n = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^M a_n b_n &= \sum_{n=N}^M (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=N}^M A_n b_n - \sum_{n=N}^M A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=N}^M A_n b_n - \sum_{n=N-1}^{M-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n b_n - \sum_{n=N-1}^{M-1} A_n b_{n+1} \\ &= A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 9.1.30 (Teorema de Dirichlet). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió numèrica tal que existeix un real C tal que $\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq C$ per a tot N natural i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió numèrica monòtona amb $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Aleshores la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

és convergent.

Demostració. Definim

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Per la 9.1.29 tenim que per a tot naturals N i M amb $N < M$

$$\sum_{n=N}^M a_n b_n = A_M b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}),$$

i per la desigualtat triangular tenim que

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq |A_M b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left| \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right|. \quad (9.16)$$

Ara bé, com que per hipòtesi tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

per la definició de 5.2.3 trobem que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ tenim

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Per tant, per a tot $N > n_0$ tenim que

$$\begin{aligned} |A_M b_M| &= |b_M| |A_M| \\ &\leq |b_M| \left| \sum_{n=0}^M a_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4C} C = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

també tenim

$$\begin{aligned} |A_{M-1} b_M| &= |b_M| |A_{M-1}| \\ &\leq |b_M| \left| \sum_{n=0}^{M-1} a_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4C} C = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{M-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| &\leq \sum_{n=N}^{M-1} |A_n| |b_n - b_{n+1}| \\ &\leq \sum_{n=N}^{M-1} C |b_n - b_{n+1}| \\ &= C \sum_{n=N}^{M-1} |b_n - b_{n+1}| \\ &= C |b_N - b_M| \\ &\leq C (|b_N| + |b_M|) \\ &\leq C \left(\frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{4C} \right) = \frac{2\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Per (9.16) trobem

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2\varepsilon}{4},$$

i per tant tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un natural n_0 tal que per a tot natural N i M amb $N, M \geq n_0$ i $N \leq M$ tenim

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n b_n \right| \leq \varepsilon,$$

i per la 9.1.4 tenim que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

és convergent, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.31. *Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}.$$

Solució. Tenim que

$$e^{ni} = \cos(n) + i \sin(n).$$

Per tant tenim que per a tot N natural

$$\sum_{n=0}^N e^{ni} = \sum_{n=0}^N \cos(n) + i \sum_{n=0}^N \sin(n).$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \sin(n) \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^N e^{ni} \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^N (e^i)^n \right| \\ &= \left| \frac{1 - (e^i)^{N+1}}{1 - e^i} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^i - e^i e^{Ni}}{e^i - 1} \right| \\ &= |e^i| \left| \frac{1 - e^{Ni}}{e^i - 1} \right| \\ &\leq \left| \frac{1 + e^i}{e^i - 1} \right| \\ &\leq \frac{1 + |e^i|}{|e^i - 1|} < C \end{aligned} \tag{9.1.3}$$

per a cert C real. També tenim que la successió $(n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ és monòtonament decreixent amb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

i pel 9.1.30 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

és convergent. \diamond

Teorema 9.1.32 (Criteri d'Abel). *Siuguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió numèrica monòtona i convergent. Aleshores la sèrie*

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n$$

és convergent.

Demostració. Definim

$$A_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

Aleshores tenim que

$$a_n = A_n - A_{n-1} \quad (9.17)$$

i per tant

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n b_n &= A_0 b_0 + \sum_{n=1}^N (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_0 b_0 + (A_1 - A_0) b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + \cdots + (A_N - A_{N-1}) b_N \\ &= A_0 (b_0 - b_1) + A_1 (b_1 - b_2) + \cdots + A_{N-1} (b_{N-1} - b_N) + A_N b_N \\ &= A_N b_N + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Per hipòtesi tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent, i per la definició de 9.1.2 tenim que existeix un real L tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = L. \quad (9.18)$$

També tenim, per hipòtesi, que la successió (b_n) és convergent, i per tant existeix un real b tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b. \quad (9.19)$$

Estudiem la convergència absoluta de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$. Com que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent tenim que existeix un real $C > 0$ tal que per a tot N natural es satisfà

$$|A_N| \leq C. \quad (9.20)$$

Per tant, com que la successió (b_n) és monòtona, trobem que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |A_n (b_n - b_{n+1})| &\leq \sum_{n=0}^N |C (b_n - b_{n+1})| \\ &\leq C \sum_{n=0}^N |b_n - b_{n+1}| \\ &= C |b_0 - b_{N+1}|, \end{aligned} \quad (9.20)$$

i per (9.19) tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C |b_0 - b_{N+1}| = C |b_0 - b|,$$

i per tant la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ és absolutament convergent, i per la proposició 9.1.26 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ és convergent.

Ara bé, per (9.18) i (9.19) trobem que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N b_N = Lb,$$

i per tant tenim que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(A_N b_N + \sum_{n=0}^N A_n(b_n - b_{n+1}) \right) = Lb + C|b_0 - b|$$

i per tant

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n b_n = Lb + C|b_0 - b|$$

és convergent, i per la definició de 9.1.2 trobem que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ és convergent, com volíem veure. \square

Exemple 9.1.33. *Volem estudiar la convergència de la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (9.21)$$

Solució. Tenim que la successió

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

és monòtona i convergent, i per l'exercici 9.1.24 trobem que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

és convergent. Per tant pel 9.1.32 tenim que la sèrie (9.21) és convergent. \diamond

9.1.7 Reordenació de sèries

Definició 9.1.34 (Reordenada d'una sèrie). Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries tals que existeix una permutació σ de \mathbb{N} tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)}.$$

Aleshores direm que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ és una reordenada de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Lema 9.1.35. *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Demostració. Fixem un natural N i considerem

$$M = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$$

i com que, per la definició de 9.1.7, tenim que $a_n \geq 0$ per a tot n natural trobem que

$$\sum_{n=0}^N a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^M a_n,$$

i per la definició de 9.1.2 trobem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad \square$$

Corol·lari 9.1.36. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie de termes positius convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Proposició 9.1.37. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ és absolutament convergent.*

Demostració. Per la definició de 9.1.25 tenim que la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

és convergent, i pel corol·lari 9.1.36 trobem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

i per tant tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ és absolutament convergent. \square

Notació 9.1.38. Definim

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Observació 9.1.39. *Tenim que*

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{i} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Lema 9.1.40. *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie absolutament convergent i σ una permutació de \mathbb{N} . Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 9.1.37.

Per la definició de 9.1.25 tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent si i només si les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són convergents. Per tant trobem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \quad (9.1.39)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- \end{aligned} \quad (9.1.36)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma(n)}^-) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}, \quad (9.1.39)$$

com volíem veure. \square

Lema 9.1.41. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent però no absolutament convergent. Aleshores les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són divergents.*

Demostració. Per l'observació 9.1.39 tenim que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-), \quad (9.22)$$

i per tant

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (9.23)$$

Suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ és convergent. Aleshores per (9.23) tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ és convergent.

Ara bé, per la definició de 9.1.25 tenim que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són absolutament convergents, i per (9.22) tenim que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent, però això contradiu l'hipòtesi que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ no és absolutament convergent. Per tant ha de ser que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ és divergent. El cas en que suposem que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ és convergent és anàleg. \square

Teorema 9.1.42 (Teorema de la reordenació de sèries de Riemann). *Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent però no absolutament convergent i L un nombre real. Aleshores existeix una permutació σ de \mathbb{N} tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Demostració. Prenem un α real. Tenim per hipòtesi que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent però no absolutament convergent, i pel lema 9.1.41 trobem que les sèries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ són divergents.

Definim

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n^+ \quad \text{i} \quad T_N = \sum_{n=0}^N a_n^-.$$

Tenim que S_N no està fitada superiorment i T_N no està fitada inferiorment. Per tant tenim que existeix un mínim natural n_1 tal que

$$S_{n_1} \geq \alpha,$$

i tenim que

$$\begin{aligned} \alpha &\leq S_{n_1} \\ &= S_{n_1-1} + a_{n_1}^+ \\ &< \alpha + a_{n_1}^+, \end{aligned}$$

i per tant

$$\alpha < \alpha + a_{n_1}^+.$$

També tenim que existeix un mínim natural m_1 tal que

$$S_{n_1} + T_{m_1} \leq \alpha,$$

i tenim que

$$\begin{aligned} \alpha &\geq S_{n_1} - T_{m_1} \\ &= S_{n_1} - T_{m_1-1} - a_{m_1}^- \\ &> \alpha - a_{m_1}^-, \end{aligned}$$

i per tant

$$\alpha > \alpha - a_{m_1}^-.$$

Definim doncs per a tot i natural

$$n_i = \min_{n > n_{i-1}} \{S_n - T_{m_{i-1}} \geq \alpha\} \quad \text{i} \quad m_i = \min_{m > m_{i-1}} \{S_{n_i} - T_m \leq \alpha\},$$

i trobem que

$$\begin{aligned} \alpha &\geq S_{n_i} - T_{m_i} \\ &= S_{n_i} - T_{m_i-1} - a_{m_i}^- \\ &\geq \alpha - a_{m_i}^-. \end{aligned}$$

Ara bé, tenim per hipòtesi que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és convergent, i pel corollari 9.1.5 tenim que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, i per tant $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^- = 0$, i pel 5.2.16 trobem que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{n_i} - T_{m_i} = \alpha. \quad \square$$

Teorema 9.1.43 (Teorema de Cauchy). *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dues sèries absolutament convergents i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió tal que per a tot (i, j) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existeix un únic n tal que $c_n = a_i b_j$ i tal que per a tot n de \mathbb{N} existeix un únic (i, j) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $c_n = a_i b_j$. Aleshores tenim que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Demostració.

□

9.2 Successions de funcions

9.2.1 Convergència d'una successió de funcions

Definició 9.2.1 (Successió de funcions). Sigui I un interval de \mathbb{R} i $f_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funció real per a tot i natural. Aleshores direm que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de funcions definides en I .

Definició 9.2.2 (Convergència puntual). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions definides en un interval I tal que existeix una funció f de I a \mathbb{R} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

per a tot x de I . Aleshores direm que la successió (f_n) convergeix puntualment a la funció f .

Exemple 9.2.3. *Volem estudiar la convergència puntual de la successió de funcions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida per*

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}$$

en l'interval $[1, 2]$.

Solució. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{x^2}{x} = x, \end{aligned}$$

i per la definició de 9.3.2 trobem que la successió (f_n) convergeix puntualment a la funció $f(x) = x$. \diamond

9.2.2 Convergència uniforme

Definició 9.2.4 (Convergència uniforme). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions definides en un interval I que convergeix puntualment a una funció f tal que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un n_0 natural tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a f i ho denotarem com $f_n \rightrightarrows f$.

Observació 9.2.5. *Una successió de funcions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sobre un interval I convergeix uniformement a una funció f si i només si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Demostració. Per la definició de 5.2.3. □

Exemple 9.2.6. Volem estudiar la convergència uniforme de la successió de funcions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida per

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}$$

en l'interval $[1, 2]$.

Demostració. Per l'exercici 9.2.3 tenim que la successió de funcions (f_n) convergeix puntualment a la funció $f(x) = x$ en l'interval $[1, 2]$. Considerem el límit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 2]} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} - x \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{nx^2 + 1 - nx^2 - x}{nx + 1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{1 - x}{nx + 1} \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, 2]} \frac{1 + |x|}{nx + 1} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n + 1} = 0, \end{aligned}$$

i per l'observació 9.2.5 trobem que la successió de funcions (f_n) convergeix uniformement a $f(x)$ en l'interval $[1, 2]$. □

Proposició 9.2.7. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions que convergeixen uniformement a una funció f . Aleshores la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix puntualment a f .*

Demostració. □

Teorema 9.2.8 (Condicció de Cauchy). *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I . Aleshores la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a una funció f de I si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix un n_0 natural tal que per a tots enters n i m amb $n_0 < m < n$ es satisfà*

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Demostració. □

9.2.3 Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat

Teorema 9.2.9. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues sobre un interval I tal que $f_n \Rightarrow f$. Aleshores f és contínua.*

Demostració. □

Teorema 9.2.10. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre un interval I tal que $f_n \Rightarrow f$. Aleshores f és integrable Riemann.*

Demostració.

□

Teorema 9.2.11. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre un interval I tal que $f_n \rightrightarrows f$. Aleshores*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Demostració.

□

Teorema 9.2.12. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions derivables sobre un interval I que convergeix uniformement a una funció f tal que la successió $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a una funció g . Aleshores tenim que f és derivable i que $f'(x) = g(x)$.*

Demostració.

□

9.3 Sèries de funcions

9.3.1 Convergència d'una sèrie de funcions

Definició 9.3.1 (Sèrie de funcions). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I . Aleshores definim, per a tot x de I ,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

com la sèrie de funcions de la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definició 9.3.2 (Convergència puntual). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I i

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

tal que la successió de funcions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigui puntualment convergent en I . Aleshores direm que la sèrie de funcions de la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent puntualment en I .

Exemple 9.3.3. *Exemple de convergència puntual d'una sèrie de funcions.*

Solució.

◇

Definició 9.3.4 (Convergència uniforme). Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I i

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

tal que la successió de funcions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigui uniformement convergent en I . Aleshores direm que la sèrie de funcions de la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent uniformement en I .

Exemple 9.3.5. *Exemple de convergència uniforme d'una sèrie de funcions.*

Solució.

◇

Teorema 9.3.6 (Condicció de Cauchy). *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I . Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ és convergent si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ real existeixen enters N i M amb $N < M$ tals que*

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{n=N}^M f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

Demostració.

□

9.3.2 Continuïtat, integrabilitat i derivabilitat

Teorema 9.3.7. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues sobre un interval I tals que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeixi uniformement a una funció F en I . Aleshores F és contínua en I .*

Demostració.

□

Teorema 9.3.8. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre un interval I tals que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeixi uniformement a una funció F en I . Aleshores F és integrable Riemann en I .*

Demostració.

□

Teorema 9.3.9. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions integrables Riemann sobre un interval I tal que la sèrie de funcions de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigui uniformement convergent en I . Aleshores*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx.$$

Demostració.

□

Teorema 9.3.10. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions derivables sobre un interval I acotat tal que la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ convergeixi uniformement en I i existeix un $x_0 \in I$ tal que la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ sigui convergent. Aleshores tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ és derivable i*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Demostració.

□

9.3.3 Convergència d'una sèrie de funcions

Proposició 9.3.11. *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I tal que la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ convergeixi uniformement en I . Aleshores la successió de funcions (f_n) convergeix uniformement a 0.*

Demostració.

□

Teorema 9.3.12 (Criteri M de Weierstrass). *Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions sobre un interval I i $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de termes no negatius tals que per a tot n natural tenim*

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leq M_n$$

i la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ és convergent. Aleshores la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ és uniformement convergent en I .

Demostració. □

Exemple 9.3.13. *Volem estudiar la convergència de la sèrie de funcions*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

en tot \mathbb{R} .

Solució. Observem que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3},$$

i per l'exemple 9.1.6 tenim que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

és convergent. Per tant pel 9.3.12 tenim que la sèrie de funcions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

és convergent en tot \mathbb{R} . ◇

Teorema 9.3.14 (Criteri de Dirichlet). *Siguin $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dues successions de funcions sobre un interval I tals que $g_n(x)$ és monòtona per a tot n natural, la successió de funcions (g_n) convergeix uniformement a 0 i existeix un real M tal que*

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{n=0}^N g_n(x) \right| \leq M \quad \text{per a tot } N \text{ natural.}$$

Aleshores la sèrie de funcions

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$$

és uniformement convergent en I .

Demostració. □

Exemple 9.3.15. *Exemple del criteri de Dirichlet.*

Solució.

◇

Teorema 9.3.16 (Criteri d'Abel). *Siguin $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dues sèries de funcions sobre un interval I tals que g_n és monòtona per a tot n natural, existeix un real L tal que per a tot n natural*

$$\sup_{x \in I} |g_n(x)| \leq L$$

i tal que la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sigui uniformement convergent en I . Aleshores la sèrie de funcions

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$$

és absolutament convergent en I .

Demostració.

□

Exemple 9.3.17. *Exemple del criteri d'Abel.*

Solució.

◇

9.3.4 Sèries de potències

Definició 9.3.18 (Sèries de potències). *Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de reals i x_0 un nombre real. Aleshores direm que la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

és una sèrie de funcions amb terme general a_n al voltant de x_0 .

Observació 9.3.19. *Les sèries de potències són sèries de funcions.*

Proposició 9.3.20. *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una sèrie de potències tal que existeix un real x_1 tal que la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$$

és convergent. Aleshores la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ és convergent per a tot x tal que

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|.$$

Demostració.

□

Lema 9.3.21. *Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió creixent de nombres reals. Aleshores el límit de (a_n) existeix i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Demostració.

□

Corol·lari 9.3.22. *Segui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió decreixent de nombres reals. Aleshores el límit de (a_n) existeix i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Definició 9.3.23 (Límit superior i inferior). *Siguin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de nombres reals i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dues successions satisfent*

$$b_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{i} \quad c_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{a_k \mid k \leq n\}.$$

Aleshores definim

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{i} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

com el límit superior i límit inferior de (a_n) .

Aquesta definició té sentit pel lema 9.3.21 i el corol·lari 9.3.22.

Teorema 9.3.24. *Segui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una sèrie de potències i R un real tal que*

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Aleshores

1. *la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ és absolutament convergent per a tot x satisfent $|x-x_0| < R$.*
2. *per a tot real $r < R$ la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ convergeix uniformement per a tot x satisfent $|x-x_0| \leq r$.*
3. *La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ és divergent per a tot x satisfent $|x-x_0| > R$.*

Demostració.

□

Proposició 9.3.25. *Segui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una sèrie de potències i R un real tal que*

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Aleshores

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Demostració.

□

Definició 9.3.26. *Segui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una sèrie de potències tal que existeix un real R satisfent*

1. *la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ és absolutament convergent per a tot x satisfent $|x-x_0| < R$.*
2. *per a tot real $r < R$ la sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ convergeix uniformement per a tot x satisfent $|x-x_0| \leq r$.*
3. *La sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ és divergent per a tot x satisfent $|x-x_0| > R$.*

Aleshores direm que R és el radi de convergència de la sèrie de potències.

Teorema 9.3.27 (Teorema d'Abel). *Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una sèrie de potències i L un real tal que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n L^n$ és convergent. Aleshores la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ és uniformement convergent per a tot x en l'interval $[x_0, x_0 + L]$.*

Demostració. □

Exemple 9.3.28. *Volem estudiar per a quins valor de x la sèrie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$$

és convergent.

Solució. ◇

Exemple 9.3.29. *Volem calcular la suma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Solució. ◇

Exemple 9.3.30. *Volem calcular la suma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n(2n+1)}.$$

Solució. ◇

9.3.5 Teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass

Definició 9.3.31 (Suport d'una funció). Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores definim

$$\text{Supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

com el suport de f .

Definició 9.3.32 (Suport compacte). Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que $\text{Supp}(f)$ sigui un compacte. Aleshores direm que f té suport compacte.

Definició 9.3.33 (Convolució). Siguin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions amb suport compacte. Aleshores definim

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

com la convolució de f amb g .

Definició 9.3.34 (Aproximació de la unitat). Sigui $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ una successió de funcions amb suport compacte tal que

1. $\phi_\varepsilon \geq 0$.

2. $\int_{\mathbb{R}} \phi_{\varepsilon}(x) dx = 1.$

3. per a tot $\delta > 0$ tenim que (ϕ_{ε}) convergeix uniformement a 0 quan ε tendeix a 0 en l'interval $(-\delta, \delta)$.

Aleshores direm que (ϕ_{ε}) és una aproximació de la unitat.

Lema 9.3.35. *Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua amb suport compacte i $(\phi_{\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ una aproximació de la unitat. Aleshores $f * \phi_{\varepsilon}$ convergeix uniformement a f quan ε tendeix a 0.*

Demostració.

□

Teorema 9.3.36 (Teorema d'aproximació polinòmica de Weierstrass). *Sigui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores existeix una successió de polinomis $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que convergeix uniformement a f en l'interval $[a, b]$.*

Demostració.

□

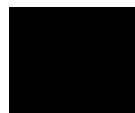
Corollari 9.3.37. *Sigui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que per a tot n natural es satisfà*

$$\int_a^b f(x) x^n dx = 0.$$

Aleshores $f(x) = 0$.

Demostració.

□



Integrals impròpies

10.1 Integral impròpia de Riemann

10.1.1 Funcions localment integrables

Definició 10.1.1 (Funció localment integrable). Sigui $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ amb $b \in \mathbb{R} \cup \infty$ una funció tal que f és integrable Riemann per en $[a, x]$ per a tot $x < b$. Aleshores direm que f és localment integrable en un interval $[a, b)$.

Definició 10.1.2 (Integral impròpia). Sigui f una funció localment integrable en un interval $[a, b)$ tal que existeix el límit

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Aleshores denotarem

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt,$$

i direm que $\int_a^b f(t) dt$ és la integral impròpia de f , i que la integral impròpia de f és divergent.

Si el límit

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

no existeix direm que la integral impròpia de f és divergent.

Exemple 10.1.3. *Volem estudiar la convergència de la integral impròpia*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

segons els valors de α real.

Solució.



Exemple 10.1.4. *Volem estudiar la convergència de la integral impròpia*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

segons els valors de α real.

Solució.

◇

10.1.2 Integrals impròpies de funcions positives

Lema 10.1.5. *Siguin f i g dues funcions positives localment integrables en un interval $[a, b)$ tals que existeixen dos reals $C > 0$ i $x_0 < b$ satisfent, per a tot x en $[x_0, b)$, que*

$$f(x) \leq Cg(x)$$

i tals que la integral impròpia de g és convergent. Aleshores la integral impròpia de f és convergent.

Demostració.

□

Teorema 10.1.6 (Criteri de comparació). *Siguin f i g dues funcions positives localment integrables en un interval $[a, b)$ i*

$$L = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tals que

1. $L \neq 0$ i $L \neq \infty$. Aleshores $\int_a^b f(x)dx$ és convergent si i només si $\int_a^b g(x)dx$ és convergent.
2. $L = 0$ i $\int_a^b g(x)dx$ és convergent. Aleshores $\int_a^b f(x)dx$ és convergent.
3. $L = \infty$ i $\int_a^b f(x)dx$ és convergent. Aleshores $\int_a^b g(x)dx$ és convergent.

Demostració.

□

Exemple 10.1.7. *Exemple de criteri de comparació d'integrals impròpies.*

Solució.

◇

Teorema 10.1.8 (Criteri de la integral). *Sigui $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ una funció decreixent. Aleshores la integral impròpia $\int_1^\infty f(x)dx$ és convergent si i només si la sèrie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ és convergent.*

Demostració. És conseqüència del lema 9.1.21 i la definició d'10.1.2.

□

Exemple 10.1.9. *Volem veure per a quins valors de $\alpha > 0$ real la integral*

$$\int_0^\infty \alpha^x dx \tag{10.1}$$

és convergent.

Solució.

◇

10.1.3 Convergència d'una integral impròpia

Teorema 10.1.10 (Condicció de Cauchy). *Sigui $\int_a^b f(x)dx$ una funció localment integrable en $[a, b)$. Aleshores la integral $\int_a^b f(x)dx$ és convergent si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un x_0 real tal que per a tot N i M reals amb $N, M \geq x_0$ i $N \leq M < b$ tenim*

$$\left| \int_N^M f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Demostració.

□

Definició 10.1.11 (Convergència absoluta). *Sigui $\int_a^b f(x)dx$ una funció localment integrable en $[a, b)$ tal que la integral*

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

és convergent. Aleshores direm que la integral $\int_a^b f(x)dx$ és absolutament convergent.

Proposició 10.1.12. *Sigui $\int_a^b f(x)dx$ una integral absolutament convergent. Aleshores la integral $\int_a^b f(x)dx$ és convergent.*

Demostració.

□

Exemple 10.1.13. *Siguin α i β dos reals no negatius i $p(x)$ un polinomi. Volem estudiar la convergència de la integral*

$$\int_0^\infty p(x)e^{\alpha x^\beta} dx.$$

Solució.

◇

Teorema 10.1.14 (Criteri de Dirichlet). *Siguin f i g dues funcions localment integrables de classe \mathcal{C}^1 satisfent que existeix un real C tal que $\int_a^x |f(x)|dx < C$ per a tot $x \in [a, b)$ i que g és una funció decreixent amb*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Aleshores la integral

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

és convergent.

Demostració.

□

Exemple 10.1.15. *Sigui $\alpha > 0$ un real. Volem estudiar la convergència de la integral*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx.$$

Solució.

◇

Teorema 10.1.16 (Criteri d'Abel). *Siguin f i g dues funcions localment integrables satisfent que f és monòtona i acotada i que la integral*

$$\int_a^b g(x) dx$$

és convergent. Aleshores la integral

$$\int_a^b f(x)g(x) dx$$

és convergent.

Demostració.

□

Exemple 10.1.17. *Volem estudiar la convergència de la integral*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{e^x} dx.$$

Solució.

◇

10.2 Aplicacions de les integrals impròpies

10.2.1 Integrals dependents d'un paràmetre

Teorema 10.2.1. *Sigui $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que f és derivable respecte la segona variable i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ és contínua en $[a, b] \times [c, d]$. Aleshores la funció*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

és derivable en l'interval (c, d) i

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Demostració.

□

Exemple 10.2.2 (Integral de Gauss). *Volem calcular el valor de la integral*

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Solució. $\sqrt{\pi}$.

◇

Teorema 10.2.3. *Siguin $f: [a, b] \times [c, d]$ una funció contínua tal que la seva derivada respecte la segona variable existeix i és contínua en $[a, b] \times [c, d]$ i y_0 un real en $[c, d]$ tal que existeixi un $\delta > 0$ satisfent que la integral*

$$\int_a^b \sup_{y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| dx$$

és convergent. Aleshores la funció

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

és derivable en y_0 i

$$F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx.$$

Demostració.

□

Exemple 10.2.4. Volem calcular

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

per $t > 0$.

Solució. $\frac{\pi}{2} - \arctan(t)$.

◇

Exemple 10.2.5. Volem calcular

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\log(x)} dx.$$

Solució. $\log(3)$.

◇

10.2.2 La funció Gamma d'Euler

Definició 10.2.6 (Gamma d'Euler). Sigui x un real positiu. Aleshores definim

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

com la funció Gamma d'Euler.

Teorema 10.2.7. La funció Gamma d'Euler és convergent.

Demostració.

□

Lema 10.2.8. Sigui $x > 0$ un real. Aleshores

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Demostració.

□

Observació 10.2.9. Es satisfà

$$\Gamma(1) = 1.$$

Demostració. Per la definició de 10.2.6 tenim que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left. \frac{e^{-t}}{-1} \right|_0^\infty = 1.$$

□

Lema 10.2.10. *Sigui n un natural. Aleshores*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Demostració. És conseqüència del lema 10.2.8 i l'observació 10.2.9. □

Teorema 10.2.11. *Es satisfà*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}} = 1.$$

Demostració. □

Corol·lari 10.2.12 (Fórmula d'Stirling). *Es satisfà*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Exemple 10.2.13. *Volem calcular*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Solució. $\sqrt{\pi}$. ◇

Sèries de Fourier

11.1 Funcions periòdiques

11.1.1 Funcions periòdiques complexes

Definició 11.1.1 (Funció T -periòdica). Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció tal que existeix un $T > 0$ real satisfent

$$T = \min_{T \in \mathbb{R}^+} \{f(x+T) = f(x) \text{ per a tot } x \in \mathbb{R}\}.$$

Aleshores direm que f és una funció T -periòdica.

Exemple 11.1.2. *Volem veure que les funcions*

$$f(t) = \sin(2\pi\omega t), \quad g(t) = \cos(2\pi\omega t) \quad \text{i} \quad h(t) = e^{2\pi i\omega t}$$

són funcions $\frac{1}{\omega}$ -periòdiques.

Solució.

◇

Lema 11.1.3. *Sigui f una funció T periòdica. Aleshores $f(x+T') = f(x)$ per a tot x real si i només si existeix un enter K tal que $T' = KT$.*

Demostració.

□

Proposició 11.1.4. *Sigui f una funció T -periòdica i integrable. Aleshores per a tot a real es satisfà*

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

Demostració.

□

Lema 11.1.5. *Sigui f una funció T -periòdica i contínua. Aleshores $|f|$ està acotada.*

Demostració.

□

Lema 11.1.6. *Sigui f una funció T -periòdica. Aleshores no existeix cap sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ convergeixi uniformement a f en \mathbb{R} .*

Demostració. □

11.1.2 Funcions contínues a trossos

Definició 11.1.7 (Funció contínua a trossos). Sigui $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una funció tal que el conjunt

$$\{x \in [0, 1] \mid f \text{ té una discontinuïtat salt finit en } x\}$$

és finit. Aleshores direm que f és contínua a trossos.

Denotarem

$$\mathcal{C} = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ és contínua a trossos}\}.$$

Observació 11.1.8. *Si f pertany a \mathcal{C} aleshores f és integrable Riemann.*

Demostració. □

Definició 11.1.9 (Conjunt d'extensions periòdiques). Denotarem

$$\mathcal{P} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid g \in \mathcal{C} \text{ i } f(x) = g(x - k) \text{ per } x \in [k, k + 1), k \in \mathbb{Z}\}$$

com el conjunt d'extensions periòdiques. Direm que els elements de \mathcal{P} són extensions periòdiques.

Lema 11.1.10. *Siguin f i g dues extensions periòdiques i λ un nombre complex. Aleshores el conjunt \mathcal{P} amb les operacions*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{i} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

és un espai vectorial.

Demostració. □

Teorema 11.1.11. *Sigui E un \mathcal{P} -espai vectorial amb el producte escalar*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx. \tag{11.1}$$

Aleshores E amb la norma (11.1) és un espai vectorial euclidià.

Demostració. □

Exemple 11.1.12. *Volem veure que el conjunt*

$$\{e_n(x) = e^{2\pi i n x} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

és un conjunt ortonormal de \mathcal{P} .

Solució. ◇

11.2 Sèries de Fourier

11.2.1 Coeficients de Fourier

Definició 11.2.1 (Coeficients de Fourier). Sigui f una extensió periòdica. Definim

$$\widehat{f}(n) = \langle f(x), e^{2\pi i n x} \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

com l' n -èsim coeficient de Fourier de f .

Proposició 11.2.2. *Siguin f i g dues extensions periòdiques i λ i μ dos nombres complexos. Aleshores*

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(n) = \lambda \widehat{f}(n) + \mu \widehat{g}(n).$$

Demostració. □

Proposició 11.2.3. *Sigui f una extensió periòdica, τ un nombre de $(0, 1)$ i f_τ una funció definida com $f_\tau(x) = f(x - \tau)$. Aleshores*

$$\widehat{f_\tau}(n) = e^{-2\pi i n \tau} \widehat{f}(n).$$

Demostració. □

Proposició 11.2.4. *Sigui f una extensió periòdica derivable. Aleshores*

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \widehat{f}(n).$$

Demostració. □

Proposició 11.2.5. *Siguin f i g dues extensions periòdiques. Aleshores*

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n).$$

Demostració. □

Definició 11.2.6 (Sèrie de Fourier). Sigui f una extensió periòdica. Aleshores definim

$$S(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

com la sèrie de Fourier de f .

Exemple 11.2.7. *Volem trobar la sèrie de Fourier de l'extensió periòdica de la funció*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Solució. $S(f)(x) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2\pi n x)$. ◇

Proposició 11.2.8. *Siguin f i g dues extensions periòdiques i λ i μ dos nombres complexos. Aleshores*

$$S(\lambda f + \mu g)(n) = \lambda S(f)(n) + \mu S(g)(n).$$

Demostració. □

11.2.2 Paritat d'una funció

Definició 11.2.9 (Paritat d'una funció). Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció tal que per a tot x real es satisfà

1. $f(x) = f(-x)$. Aleshores direm que f és una funció parell.
2. $f(x) = -f(-x)$. Aleshores direm que f és una funció senar.

Exemple 11.2.10. Volem veure que la funció

$$f(x) = \sin(x)$$

és senar i que la funció

$$g(x) = \cos(x)$$

és parell.

Solució.

◇

Proposició 11.2.11. *Siguin f una funció parell i g una funció senar. Aleshores les funcions f^2 i g^2 són parells i la funció fg és senar.*

Demostració.

□

Proposició 11.2.12. *Siguin f una funció parell i g una funció senar tals que f i g són integrables en l'interval $[-a, a]$. Aleshores*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \quad i \quad \int_{-a}^a g(x)dx = 0.$$

Demostració.

□

Lema 11.2.13. *Sigui f una extensió periòdica tal que*

1. f és parell. Aleshores \widehat{f} és parell.
2. f és senar. Aleshores \widehat{f} és senar.

Demostració.

□

11.2.3 Sèries de Fourier en termes de sinus i cosinus

Proposició 11.2.14. *Sigui f una extensió periòdica parell. Aleshores*

$$S(f)(x) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi nx),$$

on

$$A_n = \int_0^1 f(x) \cos(2\pi nx) dx.$$

Demostració.

□

Proposició 11.2.15. *Sigui f una extensió periòdica senar. Aleshores*

$$S(f)(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nx),$$

on

$$B_n = \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx.$$

Demostració.

□

Teorema 11.2.16. *Sigui f una extensió periòdica. Aleshores*

$$S(f)(x) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi nx) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi nx),$$

on

$$A_n = \int_0^1 f(x) \cos(2\pi nx) dx \quad i \quad B_n = \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx.$$

Demostració.

□

11.3 Transformació de Fourier

11.3.1 Convolució de funcions 1-periòdiques

Definició 11.3.1 (Convolució de dues extensions periòdiques). Siguin f i g dues extensions periòdiques. Aleshores definim

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)dt$$

com la convolució de f amb g .

Definició 11.3.2 (Aproximació de la unitat en extensions periòdiques). Sigui $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ una successió de funcions tals que ϕ_ε és una extensió periòdica satisfent

1. $\phi_\varepsilon \geq 0$.
2. $\int_0^1 \phi_\varepsilon(x) dx = 1$.
3. per a tot $\delta > 0$ tenim que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in [\delta, 1-\delta]} |\phi_\varepsilon| = 0.$$

Aleshores direm que (ϕ_ε) és una aproximació de la unitat.

Teorema 11.3.3. *Sigui f una extensió periòdica contínua i $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ una aproximació de la unitat en extensions periòdiques. Aleshores $f * \phi_\varepsilon$ convergeix uniformement a f en \mathbb{R} quan ε tendeix a 0.*

Demostració. Per la definició d'11.3.2 trobem que

$$\int_0^1 \phi_\varepsilon(x) dx = 1,$$

i per 11.1.4 tenim que

$$\int_0^1 \phi_\varepsilon(x-t) dt = 1,$$

i per tant

$$f(x) = \int_0^1 f(x) \phi_\varepsilon(x-t) dt.$$

Considerem

$$\sup_{x \in [0,1]} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)|.$$

Tenim qe

$$\sup_{x \in [0,1]} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 f(t) \phi_\varepsilon(x-t) dt - f(x) \right| \quad (11.3.1)$$

$$= \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 f(t) \phi_\varepsilon(x-t) dt - \int_0^1 f(x) \phi_\varepsilon(x-t) dt \right|$$

$$= \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 (f(t) - f(x)) \phi_\varepsilon(x-t) dt \right|$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt \quad (7.1.19)$$

$$= \sup_{x \in [0,1]} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt. \quad (11.1.4)$$

Tenim per hipòtesi que f és contínua, i per la definició de 5.2.4 trobem que per a tot $\eta > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que per a tot t satisfent $|x-t| > \delta$ tenim

$$|f(x) - f(t)| \leq \frac{\eta}{2}.$$

Per tant, amb $I = [x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ i $J = [0, 1]$,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in J} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt = \\ &= \sup_{x \in J} \left(\int_{\substack{t \in I \\ |x-t| < \delta}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt + \int_{\substack{t \in I \\ |x-t| > \delta}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt \right) \\ &\leq \sup_{x \in J} \left(\frac{\eta}{2} \int_{\substack{t \in I \\ |x-t| < \delta}} \phi_\varepsilon(x-t) dt + \int_{\substack{t \in I \\ |x-t| > \delta}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt \right) \\ &< \sup_{x \in J} \left(\frac{\eta}{2} + \int_{\substack{t \in I \\ |x-t| > \delta}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt \right), \end{aligned}$$

i, amb $y = x - t$ tenim que

$$\int_{\substack{t \in I \\ |x-t| > \delta}} |f(t) - f(x)| \phi_\varepsilon(x-t) dt = \int_{\substack{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ |y| > \delta}} |f(x-y) - f(x)| \phi_\varepsilon(y) dy$$

□

11.3.2 Polinomis trigonomètrics

Definició 11.3.4.

Bibliografia

- [1] Alejandro Molero Casanova. «Anàlisi Matemàtica». 2018.
- [2] *Lectures 7 and 8: The Riemann series theorem*. 18 de des. de 2018. URL: <https://math.uchicago.edu/~j.e.hickman/163%20Lecture%20notes/Lecture%207%20and%208.pdf>.
- [3] *Differentiating under the integral sign*. 18 de des. de 2018. URL: <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/diffunderint.pdf>.
- [4] Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil i Luis A. Tristán Vega. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables*. Castellà. Ediciones Paraninfo, 2005. ISBN: 978-8497323895.
- [5] Joaquín M. Ortega Aramburu. *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2002. ISBN: 84-490-2271-1.
- [6] Carles Perelló Valls. *Càlcul infinitesimal: amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana, S.A., 1994. ISBN: 84-7739-518-7.
- [7] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Anglès. McGraw-Hill Education, 1976. ISBN: 978-0070542358.
- [8] Georgi P. Tolstov. *Fourier Series*. Anglès. Dover Publications, 1976. ISBN: 9780486633176.

Els apunts estan escrits seguint la teoria donada a classe i complementats amb [1]. La secció de reordenació de sèries està fortament inspirada també en [2]. He copiat un exemple de [3].

La bibliografia del curs inclou els textos [4, 5, 6, 7, 8].

Part VI

Estructures algébriques

Teoria de grups

12.1 Grups

12.1.1 Propietats bàsiques dels grups

Definició 12.1.1 (Grup). Sigui $G \neq \emptyset$ un conjunt i $*$: $G \times G \rightarrow G$ una operació que satisfà

1. Per a tot $x, y, z \in G$

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

2. Existeix un $e \in G$ tal que per a tot $x \in G$

$$x * e = e * x = x.$$

3. Per a cada $x \in G$ existeix x' tal que

$$x * x' = x' * x = e.$$

Aleshores G és un grup amb la l'operació $*$. També direm $*$ dota al conjunt G d'estructura de grup.

Proposició 12.1.2. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i $e \in G$ tal que $x * e = e * x = x$ per a tot $x \in G$. Aleshores e és únic.*

Demostració. Suposem que existeix un altre element de G amb aquesta propietat, diguem-ne $\hat{e} \in G$. Aleshores hauria de ser

$$e * \hat{e} = e,$$

però per hipòtesi

$$e * \hat{e} = \hat{e}.$$

Per tant, ha de ser $e = \hat{e}$. □

Definició 12.1.3 (Element neutre d'un grup). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i e un element de G tal que $x * e = e * x = x$ per a tot $x \in G$. Aleshores direm que e és l'element neutre de G .

Aquesta definició té sentit per la proposició 12.1.2.

Notació 12.1.4. Donat un grup G amb l'operació $*$ escriurem

$$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * x_2 * x_3.$$

També denotarem

$$x^n = x * \overset{n}{\dots} * x.$$

Si denotem la conjugació del grup per $+$ usarem la notació additiva i escriurem

$$x_1 + \dots + x_n$$

per referir-nos a la conjugació de $+$ amb si mateix n vegades.

També denotarem

$$nx = x + \overset{n}{\dots} + x.$$

Proposició 12.1.5. Sigui G un grup amb l'operació $*$ i a, b, c tres elements de G . Aleshores

$$1. \ a * c = b * c \implies a = b.$$

$$2. \ c * a = c * b \implies a = b.$$

Demostració. Farem només la demostració del punt (1) ja que l'altre és anàloga.

Com que per hipòtesi G és un grup, per la definició de 12.1.1 tenim que existeix c' tal que $c * c' = e$, on e és l'element neutre de G , i tenim

$$a * c * c' = b * c * c',$$

el que significa que

$$a * e = b * e,$$

i ens queda $a = b$. □

Proposició 12.1.6. Sigui G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e i a un element de G . Aleshores existeix un únic $a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = e.$$

Demostració. Notem que existeix un $a' \in G$ que satisfà l'equació per la definició de 12.1.1, i per tant la proposició té sentit.

Suposem doncs que existeix $a'' \in G$ tal que

$$a * a'' = a'' * a = e.$$

Però aleshores tenim

$$a * a'' = e = a * a',$$

i per la proposició 12.1.5 ha de ser $a' = a''$, com volíem demostrar. □

Definició 12.1.7 (Invers d'un element). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e i a un element de G . Per la definició de grup tenim que existeix un $a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = e.$$

Aleshores direm que a' és l'invers de a en G , i el denotarem per a^{-1} .

Aquesta definició té sentit per la proposició 12.1.6 i la notació introduïda en 12.1.4.

Proposició 12.1.8. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e . Aleshores*

$$e^{-1} = e.$$

Demostració. Per la definició de 12.1.1 tenim que

$$e * e^{-1} = e^{-1} * e = e,$$

i per ha de ser $e^{-1} = e$. □

Proposició 12.1.9. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i a un element de G . Aleshores*

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Com que $(a^{-1})^{-1}$ és l'invers de a^{-1} tenim

$$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$$

però també tenim que

$$a * a^{-1} = e.$$

Per tant és

$$a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1},$$

i per la proposició 12.1.5 ha de ser

$$a = (a^{-1})^{-1}. \quad \square$$

Proposició 12.1.10. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i a, b dos elements de G . Aleshores*

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Considerem

$$\begin{aligned} (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= b^{-1} * a^{-1} * a * b \\ &= b^{-1} * e * b \\ &= b^{-1} * b = e. \end{aligned}$$

i de manera anàloga trobem

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e.$$

Així doncs, per la proposició 12.1.6 tenim que $a * b$ és la inversa de $b^{-1} * a^{-1}$, és a dir

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}. \quad \square$$

Lema 12.1.11. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i a, b dos elements de G . Aleshores existeixen $x, y \in G$ únics tals que*

$$b * x = a \quad i \quad y * b = a.$$

Demostració. Fem només una de les demostracions, ja que l'altre és anàloga. Com que per hipòtesi G és un grup, per la definició de 12.1.1 tenim que existeix $b^{-1} \in G$ tal que $b^{-1} * b = e$, on e és l'element neutre de G . Per tant considerem

$$b^{-1} * (b * x) = b^{-1} * a$$

i per la definició de 12.1.1 tenim que això és equivalent a

$$(b^{-1} * b) * x = b^{-1} * a,$$

i de nou per la definició de grup, i per la definició de 12.1.3,

$$e * x = x = b^{-1} * a;$$

i la unicitat ve donada per la proposició 12.1.2. □

Teorema 12.1.12. *Siguin G un conjunt i $*$: $G \times G \rightarrow G$ una operació binària que satisfà $x * (y * z) = (x * y) * z$ per a tot $x, y, z \in G$. Aleshores els següents enunciats són equivalents:*

1. G és un grup amb l'operació $*$.
2. $G \neq \emptyset$ i per a tot $a, b \in G$ existeix uns únics $x, y \in G$ tals que

$$b * x = a \quad i \quad y * b = a.$$

3. Existeix $e \in G$ tal que per a tot $x \in G$ tenim $x * e = x$ i existeix un $x^{-1} \in G$ tal que $x * x^{-1} = e$.

Demostració. Comencem demostrant (1) \implies (2). Suposem que G és un grup amb l'operació. Veiem que G no és buit per la definició de 12.1.1, i la segona part és el lema 12.1.11.

Demostrem ara (2) \implies (3). La primera part es pot veure fixant $x \in G$. Pel punt (2) tenim que per a cada $a \in G$ existeix un únic $b \in G$ tal que

$$a * b = x,$$

i podem fer

$$a * b * e = x * e$$

i substituint ens queda

$$x * e = x.$$

Per veure la segona part notem que pel punt (2) tenim que per a tot $x \in G$ existeix un $a \in G$ tal que

$$x * a = e,$$

i aleshores $a = x^{-1}$.

Ara només ens queda veure (3) \implies (1). Tenim que per a tot $x \in G$ existeix un x^{-1} tal que $x * x^{-1} = e$, i de la mateixa manera, existeix un $y \in G$ tal que $x^{-1} * y = e$. Per tant

$$\begin{aligned} e &= x^{-1} * y \\ &= x^{-1} * e * y \\ &= x^{-1} * x * x^{-1} * y \\ &= x^{-1} * x * e = x^{-1} * x. \end{aligned}$$

Així tenim que per a tot $x \in G$ es compleix $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, d'on podem veure que $e * x = x * e$, i com que, per hipòtesi, l'operació $*$ satisfà $x * (y * z) = (x * y) * z$ per a tot $x, y, z \in G$ es compleix la definició de 12.1.1 i tenim que G és un grup amb l'operació $*$.

Així tenim (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1), com volíem veure. \square

12.1.2 Subgrups i subgrups normals

Definició 12.1.13 (Subgrup). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i $H \subseteq G$ un subconjunt de G tal que H sigui un grup amb l'operació $*$. Aleshores diem que H és un subgrup de G .

També ho denotarem com $H \leq G$.

Observació 12.1.14. $e \in H$.

Proposició 12.1.15. Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subconjunt de G . Aleshores H és un subgrup de G si i només si per a tot $x, y \in H$ tenim que $x * y^{-1} \in H$.

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Demostrem primer que la condició és necessària (\implies). Això ho podem veure per la definició de 12.1.1, ja que tenim que y^{-1} existeix i pertany a H , i per tant $x * y^{-1}$ també pertany a H .

Demostrem ara que la condició és suficient (\impliedby). Tenim que per a tot $x \in H$ es compleix

$$x * x^{-1} = e,$$

i per tant $e \in H$. També tenim que per a tot $x \in H$ es compleix

$$e * x^{-1} = x^{-1},$$

i per tant $x^{-1} \in H$.

Ara només ens queda veure que $*$ és tancat en H ; és a dir, que per a tot $x, y \in H$ tenim $x * y \in H$. Com que ja hem vist que y^{-1} existeix i pertany a H , per la proposició 12.1.9 tenim

$$x * y^{-1} = x * y$$

i per hipòtesi $x * y \in H$.

Per tant, per la definició de 12.1.1 tenim que H és un grup amb l'operació $*$, i com que per hipòtesi $H \subseteq G$ per la definició de 12.1.13 tenim que H és un subgrup de G . \square

Proposició 12.1.16. Sigui G un grup, $\{H_i\}_{i \in I}$ una família de subgrups de G i $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Aleshores H és un subgrup de G .

Demostració. Ho demostrarem amb la proposició 12.1.15. Sigui $*$ l'operació de G i e l'element neutre de G . Tenim $H \subseteq G$ i $H \neq \emptyset$, ja que per l'observació 12.1.14 tenim que $e \in H$. Comprovem ara que per a tot $x, y \in H$ tenim $x * y^{-1} \in H$. Tenim que si $x, y \in H$, per la definició de H , $x, y \in H_{i \in I}$; i com que $H_{i \in I}$ és un subgrup de G , $x * y^{-1} \in H_{i \in I}$ per la proposició 12.1.15, i per tant $x * y^{-1} \in H$, com volíem veure. \square

Proposició 12.1.17. *Sigui G un grup, $S \neq \emptyset$ un subconjunt de G ,*

$$\{H_i\}_{i \in I} = \{H \subseteq G \mid S \leq H\}$$

una família de subgrups de G i

$$H = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Aleshores H i és un subgrup de G .

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Comprovem que $H \neq \emptyset$. En tenim prou amb veure que $e \in H$. Per veure que H és un subgrup de G ho podem fer per la proposició 12.1.16. \square

Definició 12.1.18 (Mínim subgrup generat per un conjunt). *Sigui G un grup, S un subconjunt de G ,*

$$\{H_i\}_{i \in I} = \{H \subseteq G \mid S \leq H\}$$

una família de subgrups de G i

$$H = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Aleshores direm que el subgrup $H \leq G$ és el mínim subgrup generat per S i ho denotarem amb $\langle S \rangle$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 12.1.17.

Proposició 12.1.19. *Sigui G un grup i g un element de G . Aleshores*

$$\langle \{g\} \rangle = \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Ho demostrarem per doble inclusió.

Comencem veient que

$$\{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subseteq \langle \{g\} \rangle.$$

Per la definició de 12.1.18 tenim que existeix una família de subconjunts de G que denotarem per $\{H_i\}_{i \in I}$, amb

$$\{g\} \subseteq H = \bigcap_{i \in I} H_i.$$

Com que $\{H_i\}_{i \in I}$ són subgrups de G tenim que, donat que $g \in H_i$, $g^n \in H_i$ per a tot $i \in I$ i tot $n \in \mathbb{Z}$ per la definició de 12.1.1, i per tant $g^n \in H$, el que és equivalent a dir que $g^n \in \langle g \rangle$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$

Ara veiem que

$$\langle \{g\} \rangle \subseteq \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Denotarem $H_g = \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Hem de veure que H_g és un grup amb l'operació $*$.

Observem que per a tot $g^i, g^j \in H_g$ es satisfà $g^i * g^{-j} = g^{i-j} \in H_g$, i per tant $H_g \leq G$. Ara bé, com que $\{g\} \subseteq H_g$, tenim que $H_g \in \{H_i\}_{i \in I}$, és a dir, que H_g pertany a la família de subconjunts de G que contenen $\{g\}$; el que significa que $\langle \{g\} \rangle \leq H_g$, i per tant

$$\langle \{g\} \rangle \subseteq \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}. \quad \square$$

Definició 12.1.20 (Ordre d'un grup). Sigui G un grup. Direm que $|G|$ és l'ordre del grup. Si $|G|$ és finit direm que G és un grup d'ordre finit, i si $|G|$ no és finit direm que G és un grup d'ordre infinit.

Proposició 12.1.21. *Siguin G un grup amb element neutre e i g un element de G . Aleshores*

$$|\langle \{g\} \rangle| = n \iff n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e\}.$$

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Comencem amb la implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem doncs que $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e\}$. Pel 3.2.29 tenim que per a tot $t \in \mathbb{Z}$ existeixen uns únics $Q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, amb $r < n$ tals que $t = Qn + r$. Per tant

$$\begin{aligned} g^t &= g^{Qn+r} \\ &= g^{Qn} * g^r \\ &= (g^n)^Q * g^r \\ &= e^Q * g^r = g^r. \end{aligned}$$

Per tant, com que $0 \leq r < n$, $|\langle \{g\} \rangle| \leq n$.

Fem ara la implicació cap a la dreta (\Rightarrow). Suposem doncs que $|\langle \{g\} \rangle| = n$. Com que el grup és finit per a cada $i \in \mathbb{Z}$ existeix $j \in \mathbb{Z}$ tal que $g^i = g^j$ i, com que $\langle \{g\} \rangle$ és un grup, per la definició de 12.1.1 existeix $g^{-j} \in \langle \{g\} \rangle$ tal que $g^{i-j} = e$.

Sigui doncs $t \in \mathbb{N}$ tal que $g^t = e$. Aleshores, pel 3.2.29 existeixen uns únics $Q, r \in \mathbb{N}$, amb $r < n$ tals que $t = Qn + r$. Per tant

$$\begin{aligned} g^t &= g^{Qn+r} \\ &= g^{Qn} * g^r \\ &= (g^n)^Q * g^r \\ &= e^Q * g^r \\ &= g^r = e. \end{aligned}$$

i per tant $r = 0$, i tenim $t = Qn$, i per tant $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid g^k = e\}$. \square

Definició 12.1.22 (Conjugació entre conjunts sobre grups). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subconjunt de G . Aleshores definim

$$GH = \{g * h \mid g \in G, h \in H\} \quad \text{i} \quad HG = \{h * g \mid g \in G, h \in H\}.$$

Definició 12.1.23 (Subgrup normal). Sigui G un grup i H un subgrup de G . Aleshores direm que H és un subgrup normal de G si per a tot $x \in G$ tenim

$$\{x\}H = H\{x\}.$$

Ho denotarem com $H \trianglelefteq G$.

Proposició 12.1.24. *Sigui G un grup i H un subgrup de G . Aleshores són equivalents*

1. $\{x\}H = H\{x\}$ per a tot $x \in G$.
2. $\{x^{-1}\}H\{x\} = H$ per a tot $x \in G$.
3. $\{x^{-1}\}H\{x\} \subseteq H$ per a tot $x \in G$.

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Comencem demostrant (1) \implies (2). Suposem que H és un subgrup normal de G , per la definició de 12.1.23 tenim $\{x\}H = H\{x\}$ per a tot $x \in G$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned}\{x\}H\{x^{-1}\} &= H\{x\}\{x^{-1}\} \\ &= \{h * x * x^{-1} \mid h \in H\} \\ &= \{h \mid h \in H\} = H.\end{aligned}$$

Continuem demostrant (2) \implies (3). Suposem que $\{x\}H\{x^{-1}\} = H$. Tenim que $\{x\}H\{x^{-1}\} = H \subseteq H$.

Demostrem ara (3) \implies (1). Suposem doncs que $\{x^{-1}\}H\{x\} \subseteq H$ per a tot $x \in G$. Això significa que per a tot $h \in H$ existeix un $h' \in H$ tal que $x * h * x^{-1} = h'$, i aleshores, per la definició de 12.1.1, $x * h = h' * x \in H$, i per tant $x * h \in H\{x\}$ per a tot $x \in G$. Així hem vist que $\{x\}H \subseteq H\{x\}$. Per veure l'altre inclusió es pot donar un argument anàleg, i per tant $\{x\}H = H\{x\}$.

I així hem vist que (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1) i hem acabat. \square

12.1.3 Grups cíclics i grups abelians

Definició 12.1.25 (Grup abelià). Sigui G un grup amb l'operació $+$ tal que per a tot $x, y \in G$ satisfà

$$x + y = y + x.$$

Aleshores direm que G és un grup abelià.

Proposició 12.1.26. *Sigui G un grup amb l'operació $+$. Aleshores G és un grup abelià si i només si per a tot $a, b \in G$ es compleix*

$$-(a + b) = -a - b.$$

Demostració. Que la condició és necessària (\implies) ho podem veure amb la definició de 12.1.25 i la proposició 12.1.10.

Demostrem ara que la condició és suficient (\impliedby). Diem que l'element neutre de G és e . Per la definició de 12.1.1 tenim que

$$(a + b) - (a + b) = e, \tag{12.1}$$

que és equivalent a

$$(a + b) - (a + b) - (-(a + b)) = -(-(a + b)),$$

i aleshores

$$\begin{aligned}a + b &= -(-(a + b)) \\ &= -(-b - a) && \text{(Proposició 12.1.10)} \\ &= -(-(b + a)) && \text{(Hipòtesi (12.1))} \\ &= b + a, && \text{(Proposició 12.1.9)}\end{aligned}$$

i per la definició de 12.1.25, G és un grup abelià. \square

Definició 12.1.27 (Grup cíclic). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i g un element de G . Aleshores diem que el grup $\langle \{g\} \rangle$ amb l'operació $*$ és un grup cíclic i que g és un generador del grup.

Proposició 12.1.28. *Sigui G un grup cíclic. Aleshores G és un grup abelià.*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Com que G és un grup cíclic, per la definició de 12.1.27 tenim que existeix un g tal que $\langle \{g\} \rangle = G$. Sigui a, b dos elements de G , i com que G és un grup cíclic, ha de ser $a = g^m$ i $b = g^n$ per a certs $m, n \in \mathbb{N}$. Ara bé, tenim que $g^m * g^n = g^{m+n}$, ja que

$$\begin{aligned} g^n * g^m &= g^{n+m} \\ &= g^{m+n} = g^m * g^n \end{aligned}$$

i aleshores $a * b = b * a$, i per la definició de 12.1.25 hem acabat. \square

Proposició 12.1.29. *Sigui G un grup cíclic i H un subgrup de G . Aleshores H és un grup cíclic.*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G i e l'element neutre de G . Per l'observació 12.1.14 tenim que $e \in H$. Si $H = \{e\}$ no hi ha res a demostrar. Suposem que $H \neq \{e\}$, aleshores existeix un $g \in G$ tal que $g^n \in H$ per a cert $n \in \mathbb{N}$. Sigui doncs m l'enter més petit tal que $g^m \in H$; volem demostrar que $H = \langle \{g^m\} \rangle$.

Sigui a un element de H . Aleshores com que $a \in H \subseteq G$, $a = g^t$ per a cert $t \in \mathbb{N}$, i pel 3.2.29 existeixen $Q, r \in \mathbb{N}$, amb $r < m$ tals que $t = Qm + r$, i per tant $g^t = g^{Qm+r}$. Aleshores tenim

$$g^r = (g^m)^{-Q} * g^t,$$

i ha de ser $g^r \in H$, ja que $g^m \in H$, i per la definició de 12.1.1 tenim que $(g^m)^{-1} \in H$. Per tant $g^r \in H$. Però ara bé, m era el mínim enter tal que $g^m \in H$, i $r < m$, per tant ha de ser $g^r = e$, és a dir, $r = 0$ i per tant $t = Qm$; el que significa que $H = \{(g^m)^Q \mid Q \in \mathbb{N}\}$ i per la proposició 12.1.19 $H = \langle \{g^m\} \rangle$ i hem acabat. \square

Proposició 12.1.30. *Sigui G un grup cíclic d'ordre n finit i $d \in \mathbb{N}$ un divisor de n . Aleshores existeix un únic subgrup de G d'ordre d .*

Demostració. \square

12.1.4 Grup quocient

Proposició 12.1.31. *Sigui G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G . Aleshores la relació*

$$x \sim y \iff x * y^{-1} \in H \text{ per a tot } x, y \in G$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Sigui e l'element neutre del grup G . Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Sigui $x \in G$. Aleshores $x * x^{-1} = e$, i tenim l'observació 12.1.14.
2. Simètrica: Siguin $x, y \in G$ i suposem que $x \sim y$, això significa que $x * y^{-1} \in H$, i per la definició de 12.1.1 tenim que $(x * y^{-1})^{-1} \in H$, ja que per hipòtesi H és un grup, i per les proposicions 12.1.10 i 12.1.9 tenim que

$$(x * y^{-1})^{-1} = y * x^{-1},$$

i això és $y \sim x$.

3. Transitiva: Siguin $x, y, z \in G$ i suposem que $x \sim y$ i $y \sim z$. Per tant $x * y^{-1} \in H$, i $y * z^{-1} \in H$. Com que per hipòtesi H és un grup, tenim que

$$(x * y^{-1}) * (y * z^{-1}) \in H,$$

que és equivalent a $x * z^{-1} \in H$, i per tant $x \sim z$.

I per la definició de 2.3.2 hem acabat. \square

Proposició 12.1.32. *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i H un subgrup de G i \sim una relació d'equivalència tal que*

$$x \sim y \iff x * y^{-1} \in H \text{ per a tot } x, y \in G.$$

Aleshores el conjunt quocient G/H amb l'operació

$$\begin{aligned} *: G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ [x] * [y] &\longmapsto [x * y] \end{aligned}$$

és un grup si i només si H és un subgrup normal de G .

Demostració. \square

Definició 12.1.33 (Grup quocient). Sigui G un grup amb l'operació $*$ i N un subgrup normal de G . Aleshores direm que el grup G/N amb l'operació

$$\begin{aligned} *: G/N \times G/N &\longrightarrow G/N \\ [x] * [y] &\longmapsto [x * y] \end{aligned}$$

és el grup quocient G mòdul N .

Aquesta definició té sentit per la proposició 12.1.32.

Lema 12.1.34. *Siguin G un grup amb l'operació $*$, H un subgrup de G , x un element de G i*

$$\begin{aligned} f_x: H &\longrightarrow \{x\}H \\ h &\longmapsto x * h \end{aligned}$$

una aplicació. Aleshores f_x és bijectiva.

Demostració. Veiem que aquesta funció és bijectiva trobant la seva inversa:

$$\begin{aligned} f_x^{-1}: \{x\}H &\longrightarrow H \\ y &\longmapsto x^{-1} * y \end{aligned}$$

i comprovant $f_x(f_x^{-1}(h)) = h$ i $f_x^{-1}(f_x(h)) = h$. Per tant f és bijectiva¹. \square

¹de fet, $f_x^{-1} = f_{x^{-1}}$

Observació 12.1.35. $\{x\}G = G$.

Teorema 12.1.36 (Teorema de Lagrange). *Siguin G un grup d'ordre finit i H un subgrup de G . Aleshores $|H|$ divideix $|G|$.*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Fixem $x \in G$ i considerem la funció

$$\begin{aligned} f_x: H &\longrightarrow \{x\}H \\ h &\longmapsto x * h \end{aligned}$$

Pel lema 12.1.34 trobem $|H| = |\{x\}H|$. Tenim que $|G|$ és el resultat de multiplicar el número de classes d'equivalència pel nombre d'elements d'una de les classes, és a dir

$$|G| = |G/H||H|$$

i per tant $|H|$ divideix $|G|$. \square

Corol·lari 12.1.37. *Sigui G un grup d'ordre p primer. Aleshores G és un grup cíclic.*

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Prenem un element $g \in G$ diferent de e i considerem el subgrup de G generat per g . Pel 12.1.36 tenim que l'ordre de $\langle\{g\}\rangle$ divideix l'ordre de G i com que per hipòtesi l'ordre de G és primer i $g^1 \neq e$, ja que g és per hipòtesi diferent de l'element neutre, tenim que $|\langle\{g\}\rangle| = p$, i per tant $\langle\{g\}\rangle = G$ i per la definició de 12.1.27 tenim que G és un grup cíclic. \square

Definició 12.1.38 (L'índex d'un subgrup en un grup). *Siguin G un grup i H un subgrup de G . Aleshores definim*

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$$

com l'índex de H a G .

12.2 Tres Teoremes d'isomorfisme entre grups

12.2.1 Morfismes entre grups

Definició 12.2.1 (Morfisme entre grups). *Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$, G_2 un grup amb l'operació \circ i $f: G_1 \rightarrow G_2$ una aplicació que, per a tot $x, y \in G_1$ satisfà*

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Aleshores diem que f és un morfisme entre grups. Definim també

1. Si f és injectiva direm que f és un monomorfisme entre grups.
2. Si f és exhaustiva direm que f és un epimorfisme entre grups.
3. Si f és bijectiva direm que f és un isomorfisme entre grups. També escriurem $G_1 \cong G_2$ i direm que G_1 i G_2 són grups isomorfs.
4. Si $G_1 = G_2$ direm que f és un endomorfisme entre grups.
5. Si $G_1 = G_2$ i f és bijectiva direm que f és un automorfisme entre grups.

Proposició 12.2.2. *Siguin G_1 un grup amb element neutre e , G_2 un grup amb element neutre e' i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores*

1. $f(e) = e'$.
2. $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ per a tot $x \in G_1$.

Demostració. Siguin $*$ l'operació del grup G_1 i \circ l'operació del grup G_2 . Veiem primer el punt (1). Per la definició de morfisme tenim que per a tot $x \in G_1$

$$f(x) \circ f(e) = f(x * e) \quad (12.2.1)$$

$$= f(x) \quad (12.1.3)$$

$$= f(x) \circ e'$$

i per la proposició 12.1.5 tenim $f(e) = e'$.

Per demostrar el punt (2) en tenim prou en veure que per a tot $x \in G$

$$f(x) \circ f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) \quad (12.2.1)$$

$$= f(e) \quad (12.1.7)$$

$$= f(x^{-1} * x) \quad (12.2.1)$$

$$= f(x^{-1}) \circ f(x)$$

i pel punt (1) d'aquesta proposició $f(x) \circ f(x^{-1}) = f(x^{-1}) \circ f(x) = e'$, i per la proposició 12.1.6 tenim que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, com volíem. \square

Proposició 12.2.3. *Siguin G , H i K tres grups i $f: G \rightarrow H$ i $g: H \rightarrow K$ dos morfismes entre grups. Aleshores $g(f): G \rightarrow K$ és un morfisme entre grups.*

Demostració. Siguin $*$, \circ i $+$ les operacions de G , H i K , respectivament. Per la definició de 12.2.1 tenim que per a tot $g_1, g_2 \in H$ i $h_1, h_2 \in H$ tenim $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$ i $g(h_1 \circ h_2) = g(h_1) + g(h_2)$. Per tant

$$g(f(g_1 * g_2)) = g(f(g_1) \circ f(g_2)) = g(f(g_1)) + g(f(g_2)),$$

i per la definició de 12.2.1 hem acabat. \square

Proposició 12.2.4. *Siguin G_1 i G_2 dos grups tals que*

$$G_1 \cong G_2.$$

Aleshores

1. G_1 és un grup abelià si i només si G_2 és un grup abelià.
2. G_1 és un grup cíclic si i només si G_2 és un grup cíclic.

Demostració. Siguin $*$ l'operació de G_1 i \circ l'operació de G_2 . Per la definició de 12.2.1 tenim que existeix un $f: G_1 \rightarrow G_2$ un isomorfisme entre grups.

Comencem demostrant el punt (1). Suposem doncs que G_1 és un grup abelià. Per la definició de 12.1.25 tenim que per a tot $a, b \in G_1$ es compleix $a * b = b * a$. Aleshores tenim

$$f(a * b) = f(b * a)$$

i per la definició de 12.2.1 tenim que

$$f(a) \circ f(b) = f(b) \circ f(a),$$

i per tant, com que per la definició de 12.2.1 f és un bijectiu, G_2 satisfà la definició de 12.1.25.

Demostrem ara el punt (2). Suposem doncs que G_1 és un grup cíclic. Per la definició de 12.1.27 tenim que $G_1 = \{g^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ per a un cert $g \in G_1$. Per tant, com que f és bijectiva per la definició de 12.2.1 tenim que per a tot $x \in G_2$ es compleix $x = f(g^i)$ per a un cert $i \in \mathbb{Z}$, i per la definició de 12.2.1 tenim que² $f(g^i) = f(g)^i$, i per la definició de 12.1.27 G_2 és un grup cíclic. \square

Definició 12.2.5 (Nucli i imatge d'un morfisme entre grups). Siguin G_1 un grup amb element neutre e , G_2 un grup amb element neutre e' i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores definim el nucli de f com

$$\ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e'\},$$

i la imatge de f com

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\}.$$

Observació 12.2.6. $\ker(f) \subseteq G_1$, $\text{Im}(f) \subseteq G_2$.

Proposició 12.2.7. *Siguin G_1 i G_2 dos grups i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores*

1. $\ker(f)$ és un subgrup normal de G_1 .
2. $\text{Im}(f)$ és un subgrup de G_2 .

Demostració. Aquest enunciat té sentit per l'observació 12.2.6.

Siguin $*$ l'operació de G_1 i \circ l'operació de G_2 i e l'element neutre de G_1 i e' l'element neutre de G_2 . Primer comprovem el punt (1). Comencem veient que $\ker(f)$ és un subgrup de G_1 . Per la proposició 12.1.15 tenim que ens cal amb veure que si $a, b \in \ker(f)$, aleshores $a * b^{-1} \in \ker(f)$. Això és cert ja que si $a, b \in \ker(f)$ aleshores $f(a) = e'$ i $f(b^{-1}) = e'$, i per tant $a * b^{-1} = e * e^{-1} = e$, el que significa que $f(a * b^{-1}) = e'$, i tenim $a * b^{-1} \in \ker(f)$.

Comprovem ara que el subgrup és normal. Per la proposició 12.1.24 en tenim prou en veure que per a tot $x \in \ker(f)$ i $g \in G$, $x * g * x^{-1} \in \ker(f)$. Això ho veiem notant que si $g \in \ker(f)$, $f(g) = e'$, i per tant $f(x * g * x^{-1}) = f(x) \circ e' \circ f(x^{-1})$ i això és $f(x * x^{-1}) = e'$, i per tant $x * g * x^{-1} \in \ker(f)$.

Acabem veient el punt (2). De nou per la proposició 12.1.15 tenim que si per a tot $f(a), f(b) \in \text{Im}(f)$ tenim $f(a) \circ f(b)^{-1} \in \text{Im}(f)$ aleshores $\text{Im}(f)$, és un subgrup de G_2 . Això és cert, ja que per la definició de 12.2.1 i la proposició 12.2.2 tenim $f(a) \circ f(b)^{-1} = f(a * b^{-1})$; i per la definició de grup $a * b^{-1} \in G_1$, i per la definició de 12.2.1 tenim que $f(a) \circ f(b)^{-1} \in \text{Im}(f)$, i per tant $\text{Im}(f)$ és un subgrup de G_2 , com volíem veure. \square

Proposició 12.2.8. *Siguin G_1 un grup amb element neutre e , G_2 un grup, i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores*

²el primer és amb l'operació $*$ i el segon amb l'operació \circ .

1. f és un monomorfisme si i només si $\ker(f) = \{e\}$.
2. f és un epimorfisme si i només si $\text{Im}(f) = G_2$.

Demostració. Siguin $*$ l'operació de G_1 , \circ l'operació de G_2 i e' l'element neutre de G_2 . Comencem fent la demostració del punt (1) per la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que f és un monomorfisme, i per tant injectiva. Per la definició de 12.2.5 tenim que $\ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e'\}$. Suposem $x \in G_1$, és a dir, $f(x) = e'$. Ara bé, com que f és injectiva per la proposició 12.2.2 ha de ser $\ker(f) = \{e\}$.

Demostrem ara la implicació cal a l'esquerra (\impliedby). Suposem doncs que $\ker(f) = \{e\}$. Siguin $x, y \in G_1$ dos elements que satisfacin $f(x) = f(y)$. Com que, per la proposició 12.2.7 $\ker(f)$ és un subgrup de G_1 , tenim que $x * y^{-1} \in G_1$, i per tant

$$\begin{aligned} f(x * y^{-1}) &= f(x) \circ f(y^{-1}) && (12.2.1) \\ &= f(x) \circ f(y)^{-1} && (\text{Proposició 12.2.2}) \\ &= f(y) \circ f(y)^{-1} = e', \end{aligned}$$

i per tant $x * y^{-1} \in \ker(f)$, però per hipòtesi teníem $\ker(f) = \{e\}$, i per tant ha de ser $x * y^{-1} = e$, el que és equivalent a $x = y$, i per tant f és injectiva.

Demostrem ara el punt (2) començant per la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que f és un epimorfisme, i per tant exhaustiva, i per tant per a cada $y \in G_2$ existeix un $x \in G_1$ tal que $f(x) = y$, i per la definició d'12.2.5 tenim que $\text{Im}(f) = G_2$.

Acabem demostrant la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem doncs que $\text{Im}(f) = G_2$ i prenem $y \in G_2$. Aleshores per la definició d'12.2.5 tenim que existeix un $x \in G_1$ tal que $f(x) = y$, i per tant f és exhaustiva. \square

Proposició 12.2.9. *Siguin G_1 i G_2 dos grups i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores*

1. Si $H_1 \leq G_1 \implies \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\} \leq G_2$.
2. Si $H_2 \leq G_2 \implies \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\} \leq G_1$.
3. Si $H_2 \trianglelefteq G_2 \implies \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\} \trianglelefteq G_1$.

Demostració. Siguin $*$ l'operació de G_1 i \circ l'operació de G_2 . Comprovem primer el punt (1). Suposem doncs que H_1 és un subgrup de G_1 . Denotarem $H = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\}$. Siguin $x, y \in H_1$; per la proposició 12.1.15 només ens cal veure que $f(x) \circ f(y)^{-1} \in H$. Això és

$$\begin{aligned} f(x) \circ f(y)^{-1} &= f(x) \circ f(y^{-1}) && (\text{Proposició 12.2.2}) \\ &= f(x * y^{-1}). && (12.2.1) \end{aligned}$$

Ara bé, com que $x, y \in H_1$ i H_1 és un subgrup de G_1 , per la proposició 12.1.15 tenim que $x * y^{-1} \in H_1$, i per tant $f(x * y^{-1}) \in H$, i per la definició de 12.2.1 i la proposició 12.2.2 tenim que $f(x) \circ f(y)^{-1} \in H$, i per tant H és un subgrup de G_2 , com volíem veure.

Comprovem ara el punt (2). Suposem doncs que H_2 és un subgrup de G_2 i denotem $H = \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\}$. Per la proposició 12.1.15 només ens cal

veure que per a tot $x, y \in H$ es satisfà $x * y^{-1} \in H$. Si $x, y \in H$ aleshores tenim que $f(x), f(y) \in H_2$, i com que H_2 és un grup, aleshores per la definició de 12.1.1 ha de ser $f(x) \circ f(y^{-1}) \in H_2$. Aleshores, per la definició de 12.2.1 tenim $f(x) \circ f(y^{-1}) = f(x * y^{-1})$, i per tant $x * y^{-1} \in H$ i així tenim que H és un subgrup de G_1 .

Veiem el punt (3) per acabar. Suposem doncs que H_2 és un subgrup normal de G_2 i definim $H = \{h \in G_1 \mid f(h) \in H_2\}$. Per demostrar-ho prenem $g \in G_1$, $h \in H_1$ tal que $f(h) \in H$ i fem

$$\begin{aligned} f(g) \circ f(h) \circ f(g)^{-1} &= f(g) \circ f(h) \circ f(g^{-1}) && \text{(Proposició 12.2.2)} \\ &= f(g * h * g^{-1}) && \text{(12.2.1)} \end{aligned}$$

Ara bé, com que H_2 és un subgrup normal de G_2 , tenim que, per a tot $g \in G_1$, $f(g * h * g^{-1}) \in H_2$, i per tant $g * h * g^{-1} \in H$, que satisfà la definició de 12.1.23 per la proposició 12.1.24. \square

Teorema 12.2.10 (Teorema de representació de Cayley). *Sigui G un grup amb l'operació $*$. Aleshores G és isomorf a un subgrup de S_G amb l'operació \circ , on S_G és el grup simètric dels elements de G .*

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Definim

$$\varphi: G \longrightarrow S_G \quad (12.2)$$

$$g \longmapsto \sigma_g : G \longrightarrow G \quad (12.3)$$

$$x \longmapsto g * x$$

Tenim que σ_g és bijectiva ja que és una permutació. Comprovarem que φ és un monomorfisme entre grups. Veiem primer que és un morfisme entre grups. Prenem $g, g' \in G$. Per la definició (12.2) tenim que $\varphi(g * g') = \sigma_{g * g'}$. Per veure que $\sigma_{g * g'} = \sigma_g \circ \sigma_{g'}$ observem que per a tot $x \in G$

$$\begin{aligned} \sigma_{g * g'}(x) &= g * g' * x \\ &= g * \sigma_{g'}(x) \\ &= \sigma_g \circ \sigma_{g'}(x), \end{aligned}$$

i per la definició de 12.2.1 tenim que φ és un morfisme entre grups. Veiem ara que φ és un monomorfisme. Per la definició de 12.2.5 tenim que

$$\ker(\varphi) = \{x \in G \mid f(x) = \text{Id}_G\}.$$

Ara bé, $\sigma_g = \text{Id}$ és, per la definició (12.3), equivalent a dir que $g * x = x$ per a tota $x \in G$, i per la definició de 12.1.3 això és si i només si $g = e$, i per tant

$$\ker(\varphi) = \{e\},$$

i per la proposició 12.2.8 tenim que φ és un monomorfisme, com volíem veure.

Per tant, per la proposició 12.2.9 tenim que

$$G \cong \text{Im}(\varphi) \leq S_G. \quad \square$$

Corol·lari 12.2.11. *Si G té ordre $n!$ aleshores $G \cong S_n$.*

12.2.2 Teoremes d'isomorfisme entre grups

Teorema 12.2.12. *Siguin G_1 un grup amb l'operació $*$, G_2 un grup amb l'operació \circ i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un morfisme entre grups. Aleshores $G_1/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$.*

Demostració. Siguin e l'element neutre de G_1 i e' l'element neutre de G_2 . Definim l'aplicació

$$\begin{aligned}\varphi: G_1/\ker(f) &\longleftrightarrow \text{Im}(f) \\ [x] &\longmapsto f(x)\end{aligned}\tag{12.4}$$

Comprovem primer que aquesta aplicació està ben definida:

Suposem que $[x] = [x']$. Això és que $x' \in \{x\}\ker(f)$, i equivalentment $x' = x * h$ per a cert $h \in \ker(f)$. Per tant

$$\begin{aligned}\varphi([x']) &= \varphi([x * h]) && \text{(Definició (12.1.33))} \\ &= f(x * h) && \text{(Definició (12.4))} \\ &= f(x) \circ f(h) && \text{(12.2.1)} \\ &= f(x) \circ e' && \text{(12.2.5)} \\ &= f(x) = \varphi([x]) && \text{(Definició (12.4))}\end{aligned}$$

i per tant φ està ben definida. Veiem ara que φ és un morfisme entre grups. Tenim que

$$\begin{aligned}\varphi([x] * [y]) &= \varphi([x * y]) && \text{(Definició (12.1.33))} \\ &= f(x * y) && \text{(Definició (12.4))} \\ &= f(x) \circ f(y) && \text{(12.2.1)} \\ &= \varphi([x]) \circ \varphi([y]), && \text{(Definició (12.4))}\end{aligned}$$

i per la definició de 12.2.1 φ és un morfisme entre grups. Continuem demostrant que φ és injectiva. Per la definició de 12.2.5 tenim que $\ker(\varphi) = \{[x] \in G/\ker(f) \mid \varphi([x]) = e\}$, i per tant $\ker(\varphi) = \ker(f)$, ja que $f(x) = e$ si i només si $x \in \ker(f)$, i per tant $\ker(\varphi) = [e]$ i per la proposició 12.2.8 φ és injectiva.

Per veure que φ és exhaustiva veiem que si $[x] \in G_1/\ker(f)$, per la definició de 12.1.33 tenim que $x = x' * h$ per a uns certs $x' \in G_2$, $h \in \ker(f)$, i per tant

$$\begin{aligned}\varphi([x]) &= \varphi([x' * h]) \\ &= \varphi([x'] * [h]) && \text{(12.1.33)} \\ &= f(x') \circ f(e) && \text{(12.2.1)} \\ &= f(x') && \text{(12.1.1)} \\ &= f(x * h^{-1}) \\ &= f(x) \circ f(h^{-1}) && \text{(12.2.1)} \\ &= f(x) \circ f(h)^{-1} && \text{(Proposició 12.2.2)} \\ &= f(x) \circ e^{-1} = f(x). && \text{(Proposició 12.1.8)}\end{aligned}$$

Així veiem que $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(f)$. Per tant φ és un isomorfisme, i per la definició d'12.2.1 tenim $G_1/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$, com volíem veure. \square

Teorema 12.2.13 (Primer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin G_1 i G_2 dos grups i $f: G_1 \rightarrow G_2$ un epimorfisme entre grups. Aleshores*

$$1. G_1/\ker(f) \cong G_2.$$

2. *L'aplicació*

$$\begin{aligned} \varphi_1: \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\} &\longleftrightarrow \{K \mid K \leq G_2\} \\ H &\longmapsto \{f(h) \in G_2 \mid h \in H\} \end{aligned} \quad (12.5)$$

és bijectiva.

3. *L'aplicació*

$$\begin{aligned} \varphi_2: \{H \mid \ker(f) \leq H \trianglelefteq G\} &\longleftrightarrow \{K \mid K \trianglelefteq G_2\} \\ H &\longmapsto \{f(h) \in G_2 \mid h \in H\} \end{aligned} \quad (12.6)$$

és bijectiva.

Demostració. Siguin $*$ l'operació de G_1 , e l'element neutre de G_1 i e' l'element neutre de G_2 .

El punt (1) és conseqüència del Teorema 12.2.12, ja que si f és exhaustiva, $\text{Im}(f) = G_2$, i per tant $G_1/\ker(f) \cong G_2$.

Per veure el punt (2) comencem demostrant que φ_1 està ben definida. Siguin $H_1 = H_2 \in \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\}$. Aleshores, per la hipòtesi (12.5) tenim $\varphi_1(H_1) = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\}$ i $\varphi_1(H_2) = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_2\}$, i com que f és una aplicació, i per tant ben definida, $\varphi_1(H_1) = \varphi_1(H_2)$.

Continuem comprovant que φ_1 és bijectiva. Per veure que és injectiva prenem $H_1, H_2 \in \{H \mid \ker(f) \leq H \leq G\}$ tals que $\varphi_1(H_1) = \varphi_1(H_2)$. Això, per la hipòtesi (12.5) és

$$\{f(h) \in G_2 \mid h \in H_1\} = \{f(h) \in G_2 \mid h \in H_2\}.$$

Per tant siguin $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ tals que $f(h_1) = f(h_2)$. Equivalentment, per la proposició 12.1.6 i la definició de 12.1.7 i la proposició 12.1.8 tenim les igualtats $f(h_2^{-1} * h_1) = f(h_1^{-1} * h_2) = e'$, i per la definició de 12.2.5 tenim $h_2^{-1} * h_1, h_1^{-1} * h_2 \in \ker(f)$, i per la hipòtesi (12.5) això és $h_2^{-1} * h_1 \in \ker(f) \subseteq H_2$ i $h_1^{-1} * h_2 \in \ker(f) \subseteq H_1$. Observem que això és que $h_1 \in \{h_2\} \ker(f) \subseteq H_2$ i $h_2 \in \{h_1\} \ker(f) \subseteq H_1$. Això vol dir que $H_1 \subseteq H_2$ i $H_2 \subseteq H_1$, i per doble inclusió això és $H_1 = H_2$, com volíem veure.

Per veure que φ_1 és exhaustiva tenim que per la proposició 12.2.9 i per la hipòtesi (12.5) tenim que donat un conjunt K tal que $K \leq G_2$ aleshores el conjunt $H = \{k \in G_1 \mid f(h) \in K\}$ satisfà $H \leq G_1$, i per la definició de 12.2.5 tenim que es compleix $\ker(f) \leq H \leq G_1$, i per tant $\varphi_1(H) = K$, i per tant φ és exhaustiva i per tant bijectiva.

Es pot demostrar el punt (3) amb el mateix argument que hem donat per demostrar el punt (2). \square

Proposició 12.2.14. *Siguin G un grup i H, K subgrups de G . Aleshores*

$$1. \text{ Si } K \trianglelefteq G, \text{ aleshores } HK \leq G.$$

$$2. \text{ Si } H, K \trianglelefteq G, \text{ aleshores } HK \trianglelefteq G.$$

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Comencem veient el punt (1). Per la proposició 12.1.15 només ens cal comprovar que per a tot $x, y \in HK$ es satisfà $x * y^{-1} \in HK$. Siguin doncs $x, y \in HK$, que podem reescriure com $x = h_1 * k_1$ i $y = h_2 * k_2$. Calculem $x * y^{-1}$:

$$\begin{aligned} x * y^{-1} &= h_1 * k_1 * (h_2 * k_2)^{-1} \\ &= h_1 * k_1 * k_2^{-1} * h_2^{-1} && \text{(Proposició 12.1.10)} \\ &= h_1 * k_1 * h_2^{-1} * k_2^{-1}, && \text{(12.1.23)} \\ &= h_1 * h_2^{-1} * k_1 * k_2^{-1}, && \text{(12.1.23)} \end{aligned}$$

i com que, per la definició de 12.1.1 tenim $h_1 * h_2^{-1} \in H$ i $k_1 * k_2^{-1} \in K$, veiem que $x * y^{-1} \in HK$, com volíem demostrar.

La demostració del punt (2) és anàloga a la del punt (1). \square

Lema 12.2.15. *Siguin G un grup, H un subgrup de G i K un subgrup normal de G . Aleshores $H \cap K \trianglelefteq H$.*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Prenem $x \in H$ i $y \in H \cap K$. Per la proposició 12.1.24 només hem de veure que per a tot $x \in H$ i $y \in H \cap K$, es satisfà $x^{-1} * y * x \in H$. Ara bé, com que K és un grup normal, per la mateixa proposició 12.1.24, com que per hipòtesi $y \in H \cap K$, i en particular $y \in K$, tenim que $x^{-1} * y * x \in K$. Per veure que $x^{-1} * y * x \in H$ tenim prou amb veure que $x, y \in H$, i com que H és un subgrup de G , i per tant un grup, per la definició de 12.1.1 tenim que $x^{-1} * y * x \in H$, i per tant $x^{-1} * y * x \in H \cap K$. \square

Teorema 12.2.16 (Segon Teorema de l'isomorfisme). *Siguin G un grup, H un subgrup de G i K un subgrup normal de G . Aleshores*

$$(HK)/K \cong H/(H \cap K).$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit pel lema 12.2.15.

Sigui $*$ l'operació de G i e l'element neutre de G . Definim

$$\begin{aligned} f: HK &\longrightarrow H/(H \cap K) \\ h * k &\longmapsto [h]. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Demostrarem que f és un epimorfisme; però primer cal veure que f està ben definida. Prenem doncs $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in HK$ amb $h_1, h_2 \in H$ i $k_1, k_2 \in K$ tals que $h_1 * k_1 = h_2 * k_2$, i per tant $h_2^{-1} * h_1 = k_2 * k_1^{-1}$. Ara bé, com que per hipòtesi i per la definició de 12.1.7 tenim que $h_1, h_2^{-1} \in H$ i a la vegada $k_2, k_1^{-1} \in K$, per la definició de 12.1.1 tenim $h_2^{-1} * h_1 \in H$ i $k_2 * k_1^{-1} \in K$ i com que $h_2^{-1} * h_1 = k_2 * k_1^{-1}$ tenim que $[h_2^{-1} * h_1] = [k_2 * k_1^{-1}] = [e]$, i per la definició de 12.1.33 tenim que $[h_1] = [h_2]$ i per tant f està ben definida.

Veiem ara que f és un morfisme entre grups. Prenem $h_1, h_2 \in H$ i $k_1, k_2 \in K$, i per tant $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in HK$, i fem

$$\begin{aligned} f(h_1 * k_1 * h_2 * k_2) &= [h_1 * h_2] && \text{(Definició (12.7))} \\ &= [h_1] * [h_2] && \text{(Definició (12.1.33))} \\ &= f(h_1 * k_1) * f(h_2 * k_2) && \text{(Definició (12.7))} \end{aligned}$$

i per tant f satisfà la definició de 12.2.1.

Continuem veient que f és exhaustiva. Prenem $[h] \in H/(H \cap K)$. Per la definició (12.7) tenim que $f(h * k) = [h]$ per a qualsevol $k \in K$, i per tant f és exhaustiva.

Per tant f és un epimorfisme, i per tant, pel 12.2.13 tenim

$$HK/\ker(f) \cong H/(H \cap K).$$

Ara bé, per la definició de 12.2.5 tenim que $\ker(f) = \{h_1 * k_2 \in HK \mid f(h_1 * k_2) = [e]\}$, i per tant $\ker(f) = K$ i trobem

$$HK/K \cong H/(H \cap K). \quad \square$$

Teorema 12.2.17 (Tercer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin G un grup i H , K dos subgrups normals de G amb $K \subseteq H$. Aleshores*

$$G/H \cong (G/K)/(H/K).$$

Demostració. Definim les aplicacions

$$\begin{aligned} \varphi_1: G &\longrightarrow G/K & \text{i} & & \varphi_2: G/K &\longrightarrow (G/K)/(H/K) \\ g &\longmapsto [g] & & & [g] &\longmapsto \overline{[g]}. \end{aligned}$$

Veiem que φ_1 i φ_2 són morfismes.

Per la proposició 12.2.3 tenim que $\varphi_2(\varphi_1): G \longrightarrow (G/K)/(H/K)$ és un epimorfisme entre grups, i pel 12.2.13 trobem

$$G/\ker(\varphi_2(\varphi_1)) \cong (G/K)/(H/K).$$

Veiem ara que $\ker(\varphi_2(\varphi_1)) = H$. Per la definició de 12.1.33 tenim que $G/K = \{gK \mid g \in G\}$ i $H/K = \{hK \mid h \in H\}$, i per tant

$$(G/K)/(H/K) = \{gKhK \mid g \in G, h \in H\}, \quad (12.8)$$

però com que, per hipòtesi, H i K són subgrups normals de G , per la definició de 12.1.23 podem reescriure (12.8) com

$$(G/K)/(H/K) = \{ghK \mid g \in G, h \in H\}. \quad (12.9)$$

Ara bé, com que per hipòtesi $K \subseteq H$ podem reescriure (12.9) com

$$(G/K)/(H/K) = \{gH \mid g \in G\},$$

i trobem, per la definició de 12.2.5, que $\ker(\varphi_2(\varphi_1)) = H$, i per tant

$$G/H \cong (G/K)/(H/K). \quad \square$$

12.3 Tres Teoremes de Sylow

12.3.1 Accions sobre grups

Definició 12.3.1 (Acció d'un grup sobre un conjunt). *Siguin G un grup amb l'operació $*$ i element neutre e , X un conjunt no buit i*

$$\begin{aligned} \cdot: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

una operació que satisfaci

1. $e \cdot x = x$ per a tot $x \in X$.
2. $(g_1 * g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ per a tot $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$.

Aleshores direm que \cdot és una acció de G sobre X . També direm que X és un G -conjunt amb l'acció \cdot .

Proposició 12.3.2. *Siguin X un G -conjunt amb l'acció \cdot i \sim una relació sobre el conjunt X tal que per a tot $x_1, x_2 \in X$ diem que $x_1 \sim x_2$ si i només si existeix un $g \in G$ tal que $x_1 = g \cdot x_2$. Aleshores la relació \sim és una relació d'equivalència.*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G i e l'element neutre del grup G . Comprovem que \sim satisfà la definició de 2.3.2:

1. Reflexiva: Sigui $x \in X$. Per la definició d'12.3.1 tenim que $x = x \cdot e$, i per tant $x \sim x$.
2. Simètrica: Sigui $x_1, x_2 \in X$ tals que $x_1 \sim x_2$. Per tant existeix $g \in G$ tal que $x_1 = g \cdot x_2$. Per la definició d'12.3.1 tenim que $g \cdot x_2 \in X$, i per tant podem prendre $g^{-2} \cdot (g \cdot x_2)$, que és equivalent a $g^{-2} \cdot (g \cdot x_2) = g^{-2} \cdot x_1$, i així $x_2 = g^{-1} \cdot x_1$, i per tant $x_2 \sim x_1$.
3. Transitiva: Sigui $x_1, x_2, x_3 \in X$ tals que $x_1 \sim x_2$ i $x_2 \sim x_3$. Per tant existeixen $g_1, g_2 \in G$ tals que $x_1 = g_1 \cdot x_2$ i $x_2 = g_2 \cdot x_3$, i per tant $x_1 = g_1 \cdot (g_2 \cdot x_3)$, i per la definició d'12.3.1 això és $x_1 = (g_1 * g_2) \cdot x_3$, i com que G és un grup, $g_1 * g_2 \in G$, i tenim que $x_1 \sim x_3$.

per tant \sim és una relació d'equivalència. \square

Definició 12.3.3 (Òrbita d'un element d'un G -conjunt). Sigui X un G -conjunt amb l'acció \cdot i \sim una relació d'equivalència sobre X tal que per a tot $x_1, x_2 \in X$ diem que $x_1 \sim x_2$ si i només si existeix un $g \in G$ tal que $x_1 = g \cdot x_2$. Aleshores direm que $\mathcal{O}(x) = [x]$ és l'òrbita de x .

Aquesta definició té sentit per la proposició 12.3.2.

Definició 12.3.4 (Estabilitzador d'un element per una acció). Sigui X un G -conjunt amb l'acció \cdot i x un element de X . Aleshores direm que el conjunt

$$\text{St}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

és l'estabilitzador de x per l'acció \cdot .

Proposició 12.3.5. *Siguin X un G -conjunt amb l'acció \cdot i $\text{St}(x)$ l'estabilitzador d'un element x de X per l'acció \cdot . Aleshores $g \in \text{St}(x)$ si i només si $g^{-1} \in \text{St}(x)$.*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Per la definició de 12.3.4 tenim que $g \in \text{St}(x)$ si i només si $g \cdot x = x$. Ara bé, si prenem $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot x$, i per la definició d'12.3.1 tenim que $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} * g) \cdot x$, i per la definició de 12.1.7 tenim que $g^{-1} \cdot x$ i per tant $g^{-1} \in \text{St}(x)$. \square

Proposició 12.3.6. *Siguin X un G -conjunt amb l'acció \cdot i $\text{St}(x)$ l'estabilitzador de x per l'acció \cdot . Aleshores $\text{St}(x)$ és un subgrup de G .*

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Per la proposició 12.1.15 només ens cal veure que per a tot $g_1, g_2 \in \text{St}(x)$ es compleix $g_1 * g_2^{-1} \in \text{St}(x)$.

Prenem doncs $g_1, g_2 \in \text{St}(x)$. Per la proposició 12.3.5 tenim que $g_2^{-1} \in \text{St}(x)$, i per tant, per la definició de 12.3.4 tenim que $(g_1 * g_2^{-1}) \cdot x = x$, i per tant $g_1 * g_2^{-1} \in \text{St}(x)$. \square

Proposició 12.3.7. *Siguin G un grup d'ordre finit, X un G -conjunt finit amb una acció \cdot i $\text{St}(x)$ l'estabilitzador d'un element x de X per l'acció \cdot . Aleshores*

$$|G/\text{St}(x)| = |\mathcal{O}(x)| = [G : \text{St}(x)].$$

Demostració. Sigui $*$ l'operació de G . Considerem

$$\begin{aligned} f: G/\text{St}(x) &\longrightarrow \mathcal{O}(x) \\ [g] &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Volem veure que f és una aplicació bijectiva, per tant mirem si està ben definida:

Siguin $[g_1], [g_2] \in G/\text{St}(x)$ tals que $[g_1] = [g_2]$. Per tant $g_1 = g_2 * g'$ per a cert $g' \in \text{St}(x)$, i per la definició de 12.3.4 tenim $g_1 \cdot x = x$, $(g_2 * g') \cdot x = x$, i per la definició d'12.3.1 això és $g_2 \cdot (g' \cdot x) = x$, i per la proposició 12.3.5 $g_2 \cdot x = x$, i per tant f està ben definida.

Veiem ara que f és injectiva. Prenem $g \cdot x, g' \cdot x \in \mathcal{O}(x)$ tals que $g \cdot x = g' \cdot x$. Això, per la definició d'12.3.1, és equivalent a dir $x = (g^{-1} * g') \cdot x$, i per la definició de 12.3.4 tenim que $g^{-1} * g \in \text{St}(x)$. Per tant, per la definició de 12.1.33 tenim que $[g] = [g']$, i per tant f és injectiva.

Per veure que f és exhaustiva veiem que per a qualsevol $g \cdot x \in \mathcal{O}(x)$, $f([g]) = g \cdot x$, i per tant f és exhaustiva i tenim que $|\text{St}(x)| = |\mathcal{O}(x)|$, ja que per la definició d'2.2.9 tenim que f és una bijecció. \square

12.3.2 Teoremes de Sylow

Definició 12.3.8 (p -subgrup de Sylow). *Siguin G un grup tal que $|G| = p^n m$ amb p primer que no divideix m i P un subgrup de G amb $|P| = p^n$. Aleshores direm que P és un p -subgrup de Sylow de G .*

Lema 12.3.9. *Siguin p un primer i m un enter positiu tal que p no divideixi m . Aleshores per a tot n natural tenim que*

$$\binom{p^n m}{p^n} \quad (12.10)$$

no és divisible per p .

Demostració. Tenim que

$$\binom{p^n m}{p^n} = \frac{p^n m (p^n m - 1) \cdots (p^n m - p^n + 1)}{p^n (p^n - 1) \cdots (p^n - p^n + 1)} = \prod_{i=0}^{p^n-1} \frac{p^n m - i}{p^n - i}. \quad (12.11)$$

Com que, per hipòtesi, p és primer aquesta expressió només serà divisible per p si ho són els elements del numerador. Fixem doncs $i \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ i estudiem l' i -èsim terme del producte de (12.11). Notem primer que si $i = 0$ aquest terme no és divisible per p . Imposem ara també que $i \neq 0$. Si el denominador, $p^n - i$,

és divisible per p tindrem que $p^n m - i = p^k m'$, on m' no és divisible per p , i per tant k serà l'exponent més gran que satisfaci la igualtat. Si aïllem i obtindrem $i = p^k(p^{n-k}m - m')$. Ara bé, tenim doncs que $p^n - i = p^n - p^k(p^{n-k}m - m')$, i això és $p^n - p^k(p^{n-k}m - m') = p^k(p^{n-k}(1 - m) - m')$, i per tant tindrem que l' i -èsim terme del producte de (12.11) serà de la forma

$$\frac{p^n m - i}{p^n - i} = \frac{p^k m'}{p^k(p^{n-k}(1 - m) - m')} = \frac{m'}{p^{n-k}(1 - m) - m'},$$

i així veiem que aquest i -èsim terme del producte no serà divisible per p ; i com que això és cert per a qualsevol $i \in \{0, \dots, p^n + 1\}$ tenim que (12.10) tampoc ho serà, com volíem veure. \square

Teorema 12.3.10 (Primer Teorema de Sylow). *Siguin G un grup tal que $|G| = p^n m$ amb p primer que no divideix m . Aleshores existeix un subconjunt $P \subseteq G$ tal que P sigui un p -subgrup de Sylow de G .*

Demostració. Sigui $\mathcal{P}_{p^n}(G) = \{H \subseteq G \mid |H| = p^n\} = \{H_1, \dots, H_k\}$ el conjunt de subconjunts d'ordre p^n de G . Aleshores tenim que

$$k = |\mathcal{P}_{p^n}(G)| = \binom{p^n m}{p^n},$$

i pel lema 12.3.9 tenim que p no divideix k .

Siguin $*$ l'operació de G i e l'element neutre de G . Definim

$$\begin{aligned} \cdot : G \times \mathcal{P}_{p^n}(G) &\longrightarrow \mathcal{P}_{p^n}(G) \\ (g, X) &\longmapsto \{g\}X. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Veurem que \cdot és una acció de G sobre $\mathcal{P}_{p^n}(G)$. Primer hem de veure que, efectivament, \cdot està ben definida. Prenem $g_1, g_2 \in G$ i $X_1, X_2 \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ tals que $g_1 = g_2$ i $X_1 = X_2$. Per tant tenim $g_1 \cdot X_1 = g_2 \cdot X_2$ ja que $\{g_1\}X_1 = \{g_2\}X_2$. Per veure que $g_1 \cdot X_1 \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ en tenim prou amb veure que, per a tot $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$, si fixem $g \in G$ l'aplicació $g \cdot X$ té inversa, que per la definició de 12.1.7 és $x^{-1} \cdot X$, i per tant $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$.

Comprovem que \cdot satisfà la definició d'12.3.1. Tenim que $e \cdot X = X$ per a tot $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ ja que, per la definició de 12.1.22, $eX = X$.

De nou per la definició de 12.1.22 veiem que per a tot $g_1, g_2 \in G$ i $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ tenim que

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2) \cdot X &= \{g_1 * g_2\}X \\ &= \{g_1\}\{g_2\}X \\ &= \{g_1\}(\{g_2\}X) = g_1 \cdot (g_2 \cdot X). \end{aligned}$$

i per tant \cdot satisfà la definició d'12.3.1.

Veiem ara que existeix almenys un element $X \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ tal que la seva òrbita, $\mathcal{O}(X)$, tingui ordre no divisible per p . Per veure això observem que per la definició de 12.3.3 veiem que $\mathcal{O}(X)$ és un classe d'equivalència, i per tant l'ordre del conjunt \mathcal{P}_{p^n} és la suma dels ordres de les òrbites dels seus elements, $\mathcal{O}(X)$, i si p dividís l'ordre de $\mathcal{O}(X)$ per a tot $X \in \mathcal{P}_{p^n}$ tindríem que p també divideix k , però ja hem vist que això no pot ser. Per tant existeix almenys un element $X \in \mathcal{P}_{p^n}$ tal que $|\mathcal{O}(X)|$ no és divisible per p . Fixem aquest conjunt X .

Prenem l'estabilitzador de X , $\text{St}(X)$. Per la proposició 12.3.7 tenim que $|\text{St}(X)|$ divideix p^n . Prenem també $x_o \in X$ i $g \in \text{St}(X)$. Per la definició de 12.3.4 tenim que $\{g\}X = X$, i per tant $g*x_o \in X$, i equivalentment $g \in X\{x_o^{-1}\}$. Així veiem que $\text{St}(X) \subseteq X\{x_o^{-1}\}$, i per tant tenim que $|\text{St}(X)| \leq |X\{x_o\}|$. Observem que $X\{x_o\} \in \mathcal{P}_{p^n}(G)$ i per tant $|X\{x_o\}| = p^n$. Ara bé, l'ordre de $\text{St}(X)$ divideix p^n , però acabem de veure que $|\text{St}(X)| \leq p^n$. Per tant ha de ser $|\text{St}(X)| = p^n$, i per tant, per la proposició 12.3.6 tenim que $\text{St}(X) \leq G$, i per tant, per la definició de 12.3.8, $\text{St}(X)$ és un p -subgrup de Sylow. \square

Corol·lari 12.3.11 (Teorema de Cauchy per grups). *Siguin G un grup d'ordre finit i p un primer que divideix l'ordre de G . Aleshores existeix un element $g \in G$ tal que l'ordre de g sigui p .*

Demostració. Sigui e l'element neutre de G . Pel 12.3.10 tenim que existeix un p -subgrup de Sylow P de G , que per la definició de 12.3.8 té ordre p^n per a cert $n \in \mathbb{N}$. Ara bé, pel 12.1.36 tenim que per a tot $x \in P$ diferent del neutre el grup cíclic generat per x ha de tenir ordre p^t amb $t \in \{2, \dots, n\}$, i per tant l'element $x^{p^{t-1}}$ té ordre p , ja que

$$\left(x^{p^{t-1}}\right)^p = x^{p^t} = e. \quad \square$$

Lema 12.3.12. *Siguin G un grup d'ordre p^n on p és un primer, X un G -conjunt finit amb una acció \cdot i*

$$X_G = \{x \in X \mid g \cdot x = x \text{ per a tot } g \in G\}$$

un conjunt. Aleshores

$$|X_G| \equiv |X| \pmod{p}.$$

Demostració. Siguin $\mathcal{O}(x_1), \dots, \mathcal{O}(x_r)$ les òrbites dels elements de X . Aleshores, com que per la definició de 12.3.3 aquestes són classes d'equivalència, tenim que

$$X = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{O}(x_i),$$

i com que aquestes òrbites són disjunts per ser classes d'equivalència

$$|X| = \sum_{i=1}^r |\mathcal{O}(x_i)|. \quad (12.13)$$

Ara bé, per les proposicions 12.3.7 i 12.3.6 i el 12.1.36 tenim que l'ordre $|\mathcal{O}(x_i)|$ divideix l'ordre de X , i per tant els únics elements amb òrbites que tinguin un ordre que no sigui divisible per p són els elements del conjunt X_G ; i com que les òrbites d'aquests elements tenen un únic element tenim que

$$|X_G| = \sum_{x \in X_G} |\mathcal{O}(x)|,$$

i per tant, recordant que totes les altres òrbites tenen ordre divisible per p , trobem, amb (12.13), que

$$|X_G| \equiv |X| \pmod{p}. \quad \square$$

Teorema 12.3.13 (Segon Teorema de Sylow). *Siguin G un grup d'ordre finit, p un primer que divideixi l'ordre de G i P_1, P_2 dos p -subgrups de Sylow de G . Aleshores existeix $g \in G$ tal que*

$$\{g\}P_1\{g^{-1}\} = P_2.$$

Demostració. Observem que aquest enunciat té sentit pel 12.3.10.

Definim el conjunt $X = \{\{x\}P_1 \mid x \in G\}$ i

$$\begin{aligned} \cdot: P_2 \times X &\longrightarrow X \\ (y, \{x\}P_1) &\longmapsto \{y\}\{x\}P_1. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Primer veurem que \cdot és una acció. Per veure que \cdot està ben definida prenem $\{x\}P_1, \{x'\}P_1 \in X$ tals que $\{x\}P_1 = \{x'\}P_1$. Aleshores per a tot $y \in P_2$ tindrem $y \cdot \{x\}P_1 = \{y\}\{x\}P_1$ i $y \cdot \{x'\}P_1 = \{y\}\{x'\}P_1$, i com que per hipòtesi $\{x\}P_1 = \{x'\}P_1$, ha de ser $\{y\}\{x\}P_1 = \{y\}\{x'\}P_1$.

Siguin $*$ l'operació de G i e l'element neutre de G . Comprovem que \cdot satisfà la definició d'12.3.1. Veiem que per a tot $y \in P_2$, $\{x\}P_1 \in X$ es compleix que $y \cdot \{x\}P_1 \in X$. Per la definició (12.14) tenim $y \cdot \{x\}P_1 \in X = \{y\}\{x\}P_1 = \{y * x\}P_1$, i com que per hipòtesi G és un grup i $x, y \in G$, per la definició de 12.1.1 tenim que $y * x \in G$, i per tant $y \cdot \{x\}P_1 \in X$.

Tenim que

$$\begin{aligned} e \cdot \{x\}P_1 &= \{e\}\{x\}P_1 \\ &= \{e * x\}P_1 = \{x\}P_1. \end{aligned} \quad (12.1.3)$$

i per últim veiem que per a tot $y, y' \in G$ tenim $(y * y') \cdot P_1 = y \cdot (y' \cdot P_1)$. Això és

$$\begin{aligned} (y * y') \cdot P_1 &= \{y * y'\}P_1 \\ &= \{y\}\{y'\}P_1 \\ &= \{y\}(\{y'\}P_1) = y \cdot (y' \cdot P_1). \end{aligned} \quad (\text{Definició (12.14)})$$

i per la definició d'12.3.1 tenim que X és un G -conjunt.

Definim el conjunt

$$X_{P_2} = \{\{x\}P_1 \in X \mid y \cdot \{x\}P_1 = \{x\}P_1 \text{ per a tot } y \in P_2\}. \quad (12.15)$$

Aleshores pel lema 12.3.12 tenim que

$$|X_{P_2}| \equiv |X| \pmod{p}.$$

Ara bé, per la definició de 12.1.38 i (12.14) tenim que $|X| = [G : P_1]$, i per hipòtesi tenim que $|X| = \frac{p^n m}{p^n} = m$, en particular $|X_{P_2}| \neq 0$. Així veiem que existeix almenys un element que satisfà la definició de X_{P_2} , (12.15); és a dir, existeix almenys un $\{x\}P_1$ tal que $y \cdot \{x\}P_1 = \{x\}P_1$ per a tot $y \in P_2$, i per tant tenim que $\{y\}\{x\}P_1 = \{x\}P_1$, i per tant $\{x^{-1}\}\{y\}\{x\}P_1 \in \{x^{-1}\}\{x\}P_1$, i equivalentment $x^{-1} * y * x \in P_1$ per a tot $y \in P_2$, i per tant $\{x^{-1}\}P_2\{x\} \subseteq P_1$, però, per hipòtesi, al ser els dos p -subgrups de Sylow, per la definició de 12.3.8 trobem $|P_1| = |P_2| = |\{x^{-1}\}P_2\{x\}|$ i tenim que $\{x\}P_1\{x^{-1}\} = P_2$. \square

Corol·lari 12.3.14. *Un grup G finit té un únic p -subgrup de Sylow si i només si aquest és un subgrup normal.*

Teorema 12.3.15 (Tercer Teorema de Sylow). *Siguin G un grup d'ordre $p^n m$ on p és un primer que no divideix m i n_p el número de p -subgrups de Sylow de G . Aleshores $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ i n_p divideix l'ordre de G .*

Demostració. Definim el conjunt

$$X = \{T \subseteq G \mid T \text{ és un } p\text{-subgrup de Sylow de } G\}.$$

Pel 12.3.10 tenim que X és no buit³ i fixem $P \in X$.

Definim

$$\begin{aligned} \cdot : P \times X &\longrightarrow X \\ (g, T) &\longmapsto \{g\}T\{g^{-1}\}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Siguin $*$ l'operació de G i e l'element neutre de G . Anem a veure que \cdot és una acció. Veiem que \cdot està ben definida, ja que si $T \in X$, aleshores per a tot $x \in G$, i en particular per a tot $x \in P$ ja que $P \leq G$, tenim $|\{x\}T\{x^{-1}\}| = |T|$, i per tant $|\{x\}T\{x^{-1}\}| \in X$ per la definició de 12.3.8. Veiem ara que \cdot satisfà les condicions de la definició d'12.3.1. Sigui e l'element neutre de G . Tenim que per a tot $T \in X$

$$\begin{aligned} e \cdot T &= \{e\}T\{e^{-1}\} \\ &= T \end{aligned} \quad (\text{Definició (12.16)})$$

i per a tot $g_1, g_2 \in P$ i $T \in X$

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2) \cdot T &= \{g_1 * g_2\}T\{g_1 * g_2\}^{-1} && (\text{Definició (12.16)}) \\ &= \{g_1 * g_2\}T\{g_2^{-1} * g_1^{-1}\} && (\text{Proposició 12.1.10}) \\ &= \{g_1\}\{g_2\}T\{g_2^{-1}\}\{g_1^{-1}\} \\ &= \{g_1\}(g_2 \cdot T)\{g_1^{-1}\} && (\text{Definició (12.16)}) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot T) && (\text{Definició (12.16)}) \end{aligned}$$

i per tant, per la definició d'12.3.1 X és un P -conjunt amb l'acció \cdot .

Definim el conjunt

$$X_P = \{T \in X \mid g \cdot T = T \text{ per a tot } g \in P\},$$

i per la definició (12.16) tenim que si $T \in X_P$ aleshores per a tot $g \in G$ es compleix $\{g\}T\{g^{-1}\} = T$. Ara bé, això és que $T = P$ per a tot $T \in X_P$, i per tant $|X_P| = 1$. Aleshores pel lema 12.3.12 tenim que

$$|X| \equiv |X_P| \pmod{p},$$

o equivalentment

$$|X| \equiv 1 \pmod{p}.$$

³Tindrem que $|X| = n_p$.

Per veure que $|X|$ divideix l'ordre de G prenem $P \in X$ i tenim, pel 12.3.13 i la definició de 12.3.3, que

$$\mathcal{O}(P) = X,$$

on $\mathcal{O}(P)$ és l'òrbita de P , i per tant

$$|\mathcal{O}(P)| = |X|,$$

i per les proposicions 12.3.6 i 12.3.7 i el 12.1.36 tenim que $|X|$ divideix l'ordre de G . \square

Corol·lari 12.3.16. *Si G té ordre $p^n q^m$ on p, q són primers amb $p < q$ aleshores $n_q = 1$, i pel corol·lari 12.3.14, el p -subgrup de Sylow de G és un subgrup normal de G .*

Teoria d'anells

13.1 Anells

13.1.1 Propietats bàsiques dels anells i subanells

Definició 13.1.1 (Anell). Sigui R un conjunt no buit i

$$+ : R \times R \longrightarrow R \qquad \cdot : R \times R \longrightarrow R$$

dues operacions que satisfan

1. R amb l'operació $+$ és un grup abelià.
2. Existeix un element e de R tal que $x \cdot e = e \cdot x = x$ per a tot $x \in R$.
3. Per a tot $x, y, z \in R$ tenim

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. Per a tot $x, y, z \in R$ tenim

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{i} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Aleshores direm que R és un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . També direm que R és un anell amb element neutre pel producte e .

Si per a tot $x, y \in R$ tenim $x \cdot y = y \cdot x$ direm que R és un anell commutatiu.

Proposició 13.1.2. *Sigui R un anell amb element neutre pel producte e . Aleshores l'element neutre pel producte de R és únic.*

Demostració. Sigui \cdot el producte de R . Suposem que existeix un altre e' tal que $x \cdot e' = e' \cdot x = x$ per a tot $x \in R$. Aleshores tindriem

$$e \cdot e' = e' \cdot e = e$$

a la vegada que

$$e \cdot e' = e' \cdot e = e'$$

i per tant ha de ser $e = e'$ i tenim que aquest és únic. \square

Definició 13.1.3 (Elements neutres d'un anell). Sigui R un anell. Aleshores direm que 0_R és l'element neutre de R per la suma i 1_R és l'element neutre de R pel producte i els denotarem per 0_R i 1_R , respectivament.

Aquesta definició té sentit per la proposició 12.1.2 i la proposició 13.1.2.

Notació 13.1.4. Donat un anell R un anell amb el producte \cdot . Aleshores escriurem

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Això té sentit per la definició d'13.1.1. També, si el context ho permet (quan treballem amb un únic anell R), denotarem $1_R = 1$ i $0_R = 0$.

Proposició 13.1.5. *Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores per a tot $a, b, c \in R$ tenim*

1. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
2. $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$.
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.
4. $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

Demostració. Comprovem el punt (1). Només veurem que $0 \cdot a = 0$ ja que l'altre demostració és anàloga. Com que $0 = 0 + 0$ per la definició de 13.1.3, per la definició d'13.1.1 tenim que

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= (0 + 0) \cdot a \\ &= 0 \cdot a + 0 \cdot a \end{aligned}$$

i per tant, per la definició de 12.1.1

$$0 \cdot a - (0 \cdot a) = 0 \cdot a + 0 \cdot a - (0 \cdot a)$$

d'on veiem

$$0 \cdot a = 0,$$

com volíem veure.

Veiem ara el punt (2). Per la definició d'13.1.1 tenim

$$1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a \quad \text{i} \quad (-1) \cdot a + 1 \cdot a = (-1 + 1) \cdot a$$

i per tant, com que $1 - 1 = -1 + 1 = 0$ per la definició de 13.1.3, tenim que $a + (-1) \cdot a = (-1) \cdot a + a = 0$, però per la proposició 12.1.6 tenim que $(-1) \cdot a = -a$. L'altre igualtat és anàloga.

Continuem veient el punt (3). Pel punt (2) tenim que

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b.$$

Ara bé, pel punt (2) de nou tenim que $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$, i per la proposició 12.1.9 tenim que $-(-1) = 1$ i per tant

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Per veure el punt (4) només veurem que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ ja que l'altre demostració és anàloga. Pel punt (2) tenim que

$$-(a \cdot b) = (-1) \cdot (a \cdot b) \quad \text{i} \quad (-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b.$$

Ara bé, per la definició d'13.1.1

$$(-1) \cdot a \cdot b - (-1) \cdot (a \cdot b) = (-1 - (-1)) \cdot (a \cdot b),$$

i per la proposició 12.1.9 tenim que $-(-1) = 1$ i per tant, per la definició de 12.1.1 tenim $-1 + 1 = 0$ i trobem

$$(-1) \cdot a \cdot b - (-1) \cdot (a \cdot b) = 0 \cdot (a \cdot b) = 0,$$

i podem veure també que

$$(-1) \cdot (a \cdot b) - (-1) \cdot a \cdot b = 0$$

de manera anàloga. Aleshores, per la proposició 12.1.6 tenim que

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b),$$

com volíem veure. □

Proposició 13.1.6. *Siguin R un anell amb el producte \cdot i a un element de R tal que existeixi $b \in R$ que satisfaci*

$$a \cdot b = b \cdot a = 1.$$

Aleshores b és únic.

Demostració. Suposem que existeix un altre element $b' \in R$ tal que

$$a \cdot b' = b' \cdot a = 1.$$

Aleshores tenim

$$a \cdot b = a \cdot b'$$

i per tant

$$b \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot b'$$

i com que per hipòtesi $b \cdot a = 1$ per la definició de 13.1.3 trobem

$$b = b'. \quad \text{□}$$

Definició 13.1.7 (Element invertible). *Siguin R un anell amb el producte \cdot i x un element de R tal que existeixi $x' \in R$ tals que*

$$x \cdot x' = x' \cdot x = 1.$$

Aleshores direm que x és invertible o que x és un element invertible de R .

Definició 13.1.8 (L'invers d'un element). *Siguin R un anell amb el producte \cdot i x un element invertible de R . Aleshores denotarem per x^{-1} l'element de R tal que*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Direm que x^{-1} és l'invers de x .

Aquesta definició té sentit per la proposició 13.1.6.

Definició 13.1.9 (Subanell). Sigui R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i $S \subseteq R$ un subconjunt amb $1 \in S$ tal que per a tot $a, b \in S$ tenim $a \cdot b, a + b \in S$ i S un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores direm que S és un subanell de R .

Ho denotarem amb $S \leq R$.

13.1.2 Ideals i ideals principals

Definició 13.1.10 (Ideal). Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I un subconjunt no buit de R tal que I sigui un subgrup del grup R amb la suma $+$ i tal que per a tot $x \in I, r \in R$ tenim $r \cdot x \in I$. Aleshores direm que I és un ideal de R .

Observació 13.1.11. $0 \in I$.

Notació 13.1.12. Si I és un ideal d'un anell R denotarem $I \triangleleft R$.

Proposició 13.1.13. Sigui R un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i I un subconjunt no buit de R . Aleshores tenim que I és un ideal de R si i només si

1. Per a tot $x, y \in I$ tenim $x - y \in I$.
2. Per a tot $r \in R, x \in I$ tenim $r \cdot x \in I$.

Demostració. Veiem que la condició és suficient (\implies). Suposem que I és un ideal de R . Hem de veure que per a tot $x, y \in I, r \in R$ tenim $x - y \in I$ i $r \cdot x \in I$. Per la definició de 12.1.1 tenim que $x - y \in I$, ja que, per la definició d'13.1.10 tenim que I és un grup amb la suma $+$. També trobem $r \cdot x \in I$ per la definició d'13.1.10.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem que per a tot $x, y \in I, r \in R$ tenim $x - y \in I$ i $r \cdot x \in I$. Per la proposició 12.1.15 tenim que I és un subgrup del grup R amb la suma $+$, i per la definició d'13.1.10 tenim que I és un ideal de R . \square

Proposició 13.1.14. Sigui I, J dos ideals d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores els conjunts

1. $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$.
2. $I \cap J$.
3. $IJ = \{x_1 \cdot y_1 + \dots x_n \cdot y_n \mid x_1, \dots, x_n \in I, y_1, \dots, y_n \in J, n \in \mathbb{N}\}$.

són ideals de R .

Demostració. Comencem demostrant el punt (1). Per la proposició 13.1.13 només ens cal veure que per a tot $a, b \in I + J, r \in R$ tenim $a - b \in I + J$ i $r \cdot a \in I + J$. Prenem doncs $a, b \in I + J$. Aleshores tenim $a = a_1 + a_2$ i $b = b_1 + b_2$ per a certs $a_1, b_1 \in I$ i $a_2, b_2 \in J$. Volem veure que $a - b \in I + J$. Això és

$$a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) = a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \quad (13.1.5)$$

$$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \quad (12.1.25)$$

i com que, per hipòtesi, I, J són ideals de R per la proposició 13.1.13 tenim que $a_1 - b_1 \in I$ i $a_2 - b_2 \in J$, i per tant $a - b = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \in I + J$.

Veiem ara que per a tot $r \in R$ es satisfà $r \cdot a \in I + J$. Tenim

$$r \cdot a = r \cdot (a_1 + a_2) \quad (13.1.1)$$

$$= r \cdot a_1 + r \cdot a_2 \quad (13.1.1)$$

i per la proposició 13.1.13 tenim que $r \cdot a_1 \in I$ i $r \cdot a_2 \in J$, i per tant $r \cdot a = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 \in I + J$. Aleshores per la proposició 13.1.13 tenim que $I + J$ és un ideal de l'anell R .

Veiem ara el punt (2). Per la proposició 13.1.13 només ens cal veure que per a tot $a, b \in I \cap J$, $r \in R$ tenim $a - b \in I \cap J$ i $r \cdot a \in I \cap J$. Prenem doncs $a, b \in I \cap J$, i per tant $a, b \in I$ i $a, b \in J$, i per la proposició 13.1.13 tenim que $a - b \in I$ i $a - b \in J$, i tenim que $a - b \in I \cap J$.

Per veure que $r \cdot a \in I \cap J$ per a tot $r \in R$ tenim per la definició d'13.1.10 que $r \cdot a \in I$ i $r \cdot a \in J$, i per tant $r \cdot a \in I \cap J$ i per la proposició 13.1.13 $I \cap J$ és un ideal de R .

Acabem veient el punt (3). Per la proposició 13.1.13 només ens cal veure que per a tot $a, b \in IJ$, $r \in R$ tenim $a - b \in IJ$ i $r \cdot a \in IJ$. Prenem doncs $a, b \in IJ$, i tenim que $a = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$, $b = x'_1 \cdot y'_1 + \dots + x'_m \cdot y'_m$ per a certs $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m \in I$, $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_m \in J$. Per veure que $a - b \in IJ$ fem, per la proposició 13.1.5,

$$\begin{aligned} a - b &= x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n - (x'_1 \cdot y'_1 + \dots + x'_m \cdot y'_m) = \\ &= x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n - x'_1 \cdot y'_1 - \dots - x'_m \cdot y'_m \end{aligned}$$

i com que I és, per hipòtesi, un anell, per les proposicions 13.1.5 i 13.1.13 tenim que $-x'_1, \dots, -x'_m \in I$ i $a - b = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n - x'_1 \cdot y'_1 - \dots - x'_m \cdot y'_m \in IJ$.

Veiem ara que per a tot $r \in R$ es satisfà $r \cdot a \in IJ$. Això és

$$\begin{aligned} r \cdot a &= r \cdot (x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n) \\ &= r \cdot x_1 \cdot y_1 + \dots + r \cdot x_n \cdot y_n \end{aligned} \quad (13.1.5)$$

i com que I és, per hipòtesi, un anell, per les proposicions 13.1.5 i 13.1.13 tenim que $r \cdot x_1, \dots, r \cdot x_n \in I$, i per tant $r \cdot a = r \cdot x_1 \cdot y_1 + \dots + r \cdot x_n \cdot y_n \in IJ$ i per la proposició 13.1.13 tenim que IJ és un ideal de R . \square

Definició 13.1.15 (Ideal principal). Sigui I un ideal d'un anell R amb el producte \cdot tal que $I = \{a\}R = R\{a\} = \{r \cdot a \mid r \in R\}$ per a cert $a \in I$. Aleshores direm que I és un anell principal de R . Ho denotarem amb $I = (a)$.

Notació 13.1.16. Si (a) és un ideal principal d'un anell R denotarem $(a) \leq R$.

13.1.3 Cossos i l'anell quocient

Definició 13.1.17 (Cos). Sigui \mathbb{K} un anell commutatiu amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $1 \neq 0$ tal que $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sigui un grup abelià amb el producte \cdot . Aleshores direm que \mathbb{K} és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot .

Proposició 13.1.18. Sigui \mathbb{K} un anell commutatiu amb $1 \neq 0$. Aleshores tenim que \mathbb{K} és un cos si i només si els únics ideals de \mathbb{K} són (0) i \mathbb{K} .

Demostració. Siguin $+$ la suma de R i \cdot el producte de R . Comencem comprovant que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que \mathbb{K} és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i que I és un ideal de \mathbb{K} amb $I \neq (0)$, i per tant existeix $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ tal que $a \in I$. Com que, per hipòtesi, $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ és un grup amb l'operació \cdot i $a \neq 0$ per la definició de 12.1.7 existeix $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, i per la definició d'13.1.10 trobem que $1 \in I$, i per tant per la proposició 13.1.13 tenim que per a tot $x \in \mathbb{K}$ tenim $x \cdot 1 = x \in I$, i per tant $I = \mathbb{K}$.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem que els únics ideals de \mathbb{K} són (0) i \mathbb{K} . Prenem un element $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ i considerem l'ideal principal (a) , que per hipòtesi ha de ser $(a) = (1) = \mathbb{K}$, i per la definició d'13.1.15 tenim que existeix $a' \in (1)$ tal que $a \cdot a' = 1$, i per tant, per la definició de 12.1.1 tenim que $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ és un grup amb el producte \cdot i per la definició de 13.1.17 tenim que \mathbb{K} és un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot . \square

Proposició 13.1.19. *Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma $+$. Aleshores la relació*

$$x \sim y \iff x - y \in I \quad \text{per a tot } x, y \in R$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Sigui \cdot el producte de R . Comprovem que \sim satisfà la definició de 2.3.2:

1. Reflexiva: Prenem $x \in R$. Per l'observació 13.1.11 tenim que $0 \in I$, i per tant $x - x = 0 \in I$ i veiem que $x \sim x$.
2. Simètrica: Siguin $x_1, x_2 \in I$ tals que $x_1 \sim x_2$. Això és que $x_1 - x_2 \in I$. Per la definició d'13.1.10 tenim que $(-1) \cdot (x_1 - x_2) \in I$, i per la proposició 13.1.5 tenim que $x_2 - x_1 \in I$, és a dir, $x_2 \sim x_1$.
3. Transitiva: Siguin $x_1, x_2, x_3 \in R$ tals que $x_1 \sim x_2$ i $x_2 \sim x_3$. Per la definició d'13.1.10 tenim que $x_3 - x_2 \in I$, i per la proposició 13.1.13 tenim que $x_1 - x_2 - (x_3 - x_2) \in I$. Ara bé, per la proposició 13.1.5 tenim que això és $x_1 - x_3 \in I$, i per tant $x_1 \sim x_3$.

Per tant \sim és una relació d'equivalència. \square

Proposició 13.1.20. *Sigui I un ideal d'un anell R amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores R/I amb la suma $[x] + [y] = [x + y]$ i el producte $[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$ és un anell.*

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 13.1.19.

Per la proposició 12.1.31 tenim que R/I és un grup amb l'operació $+$, i com que

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \\ &= [y + x] \\ &= [y] + [x] \end{aligned} \tag{12.1.25}$$

tenim que R/I és un grup abelià amb la suma $+$. Veiem ara que per a tot $x, y, z \in R/I$ tenim $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$ i $[x] \cdot ([y] + [z]) = [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z]$.

Tenim

$$\begin{aligned} [x] \cdot ([y] \cdot [z]) &= [x] \cdot [y \cdot z] \\ &= [x \cdot (y \cdot z)] \\ &= [(x \cdot y) \cdot z] \\ &= [x \cdot y] \cdot [z] = ([x] \cdot [y]) \cdot [z] \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} [x] \cdot ([y] + [z]) &= [x] \cdot [y + z] \\ &= [x \cdot (y + z)] \\ &= [x \cdot y + x \cdot z] = [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z] \end{aligned}$$

i per la definició d'13.1.1 tenim que R/I és un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot , com volíem veure. \square

Definició 13.1.21 (Anell quocient). Siguin R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ i I un ideal de R . Aleshores direm que R/I és un anell quocient.

Aquesta definició té sentit per la proposició 13.1.20.

13.2 Tres Teoremes d'isomorfisme entre anells

13.2.1 Morfismes entre anells

Definició 13.2.1 (Morfisme entre anells). Siguin R un anell commutatiu amb la suma $+_R$ i el producte $*_R$, S un anell commutatiu amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$ amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ una aplicació tal que

1. $f(x +_R y) = f(x) +_S f(y)$ per a tot $x, y \in R$.
2. $f(x *_R y) = f(x) *_S f(y)$ per a tot $x, y \in R$.
3. $f(1_R) = 1_S$.

Aleshores diem que f és un morfisme entre anells. Definim també

1. Si f és injectiva direm que f és un monomorfisme entre anells.
2. Si f és exhaustiva direm que f és un epimorfisme entre anells.
3. Si f és bijectiva direm que f és un isomorfisme entre anells. També escriurem $R \cong S$.
4. Si $R = S$ direm que f és un endomorfisme entre anells.
5. Si $R = S$ i f és bijectiva direm que f és un automorfisme entre anells.

Observació 13.2.2. Si f és un morfisme entre anells aleshores f és un morfisme entre grups.

Proposició 13.2.3. Siguin R i S dos anells commutatius amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores

1. $f(0_R) = 0_S$.

2. $f(-x) = -f(x)$ per a tot $x \in R$.

Demostració. Siguin $+_R$ la suma de R i $+_S$ la suma de S . Per l'observació 13.2.2 tenim que f és un morfisme entre els grups R amb la suma $+_R$ i S amb la suma $+_S$, i per la proposició 12.2.2 tenim que $f(0_R) = 0_S$ i $f(-x) = -f(x)$ per a tot $x \in R$. \square

Definició 13.2.4 (Nucli i imatge). Siguin R i S dos anells commutatius amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores definim

$$\ker(f) = \{x \in R \mid f(x) = 0_S\}$$

com el nucli de f , i

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in S \mid f(x) = y \text{ per a cert } x \in R\}$$

com la imatge de f .

Observació 13.2.5. $\ker(f) \subseteq R$, $\operatorname{Im}(f) \subseteq S$.

Proposició 13.2.6. Siguin R i S dos anells commutatius amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores

1. $\ker(f) \triangleleft R$.

2. $\operatorname{Im}(f) \leq S$.

Demostració. Aquest enunciat té sentit per l'observació 13.2.6

Siguin $+_R$ la suma de R , $*_R$ el producte de R , $+_S$ la suma de S i $*_S$ el producte de S . Comencem veient el punt (1). Com que, per la proposició 13.2.3, tenim que $f(0_R) = 0_S$ veiem, per la definició de 13.2.4, que $\ker(f) \neq \emptyset$. Prenem doncs $a \in \ker(f)$. Observem que, per la definició de 13.2.1, tenim que $f(r *_R a) = f(r) *_S f(a)$ per a tot $r \in R$, i per tant, com que per la definició de 13.2.4 es compleix $f(a) = 0_S$ tenim que

$$f(r *_R a) = f(r) *_S f(a) = f(r) *_S 0_S = 0_S$$

i per tant $r *_R a \in \ker(f)$ per a tot $r \in R$, $a \in \ker(f)$. Ara bé per la definició d'13.1.10 tenim que $\ker(f)$ és un ideal de R .

Veiem ara el punt (2). Veiem que per a tot $x, y \in \operatorname{Im}(f)$ tenim $x *_S y \in \operatorname{Im}(f)$. Per la definició d'13.2.4 tenim que existeixen $a, b \in R$ tals que $f(a) = x$ i $f(b) = y$. Ara bé, per la definició d'13.1.1 tenim que $a *_R b = c \in R$, i per tant per la definició d'13.2.4 tenim que $f(c) = x *_S y \in \operatorname{Im}(f)$. Veiem ara que $\operatorname{Im}(f)$ és un anell amb la suma $+_S$ i el producte $*_S$. Com que, per l'observació 13.2.2 tenim que f és un morfisme entre grups per la proposició 12.2.7 tenim que $\operatorname{Im}(f)$ és un subgrup del grup S amb la suma $+_S$; i per la definició d'13.1.1 tenim que per a tot $x, y, z \in R$ es satisfà

$$x *_R (y *_R z) = (x *_R y) *_R z \quad \text{i} \quad x *_R (y +_R z) = x *_R y +_R x *_R z,$$

i per la definició de 13.1.9 tenim que $\operatorname{Im}(f)$ és un subanell de S . \square

Proposició 13.2.7. Siguin R , S i D tres anells commutatius amb $1_R \neq 0_R$, $1_S \neq 0_S$ i $1_D \neq 0_D$ i $f: R \rightarrow S$, $g: S \rightarrow D$ dos morfismes entre anells. Aleshores $g \circ f: R \rightarrow D$ és un morfisme entre anells.

Demostració. Siguin $+_R$ la suma de R , $*_R$ el producte de R , $+_S$ la suma de S , $*_S$ el producte de S , $+_D$ la suma de D i $*_D$ el producte de D . Per la definició de 13.2.1 trobem que

$$\begin{aligned} g(f(x +_R y)) &= g(f(x) +_S g(y)) \\ &= g(f(x)) +_D g(f(y)), \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} g(f(x *_R y)) &= g(f(x) *_S g(y)) \\ &= g(f(x)) *_D g(f(y)). \end{aligned}$$

També tenim

$$g(f(1_R)) = g(1_S) = 1_D$$

i per la definició de 13.2.1 tenim que $g \circ f$ és un morfisme entre anells, com volíem veure. \square

Corol·lari 13.2.8. *Si f, g són isomorfismes aleshores $g \circ f$ és isomorfisme.*

Lema 13.2.9. *Siguin R i S dos anells commutatius amb $1_R \neq 0_R$ i $1_S \neq 0_S$ i $f: R \rightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores*

$\ker(f)$ és un ideal de R i $\text{Im}(f)$ és un subanell de S .

Demostració. Siguin $+_R$ la suma de R , $*_R$ el producte de R , $+_S$ la suma de S i $*_S$ el producte de S . Comencem veient que $\ker(f)$ és un ideal de R . Per l'observació 13.2.2 tenim que $\ker(f)$ és un morfisme entre grups, i per la proposició 12.2.7 tenim que $\ker(f)$ és un subgrup del grup R amb la suma $+_R$.

Prenem $x \in \ker(f)$ i $r \in R$. Volem veure que $r *_R x \in \ker(f)$. Tenim

$$f(r *_R x) = f(r) *_S f(x) \quad (13.2.1)$$

$$= f(r) *_S 0_S \quad (13.2.4)$$

$$= 0_S \quad (13.1.3)$$

i per la definició de 13.2.4 tenim que $r *_R x \in \ker(f)$, i per la proposició 13.1.13 tenim que $\ker(f)$ és un ideal de R .

Veiem ara que $\text{Im}(f)$ és un subanell de S . Per l'observació 13.2.2 tenim que $\text{Im}(f)$ és un morfisme entre grups, i per la proposició 12.2.7 tenim que $\text{Im}(f)$ és un subgrup del grup S amb la suma $+_S$.

Prenem $x, y \in \text{Im}(f)$. Volem veure que $x *_S y \in \text{Im}(f)$. Per la definició d'13.2.4 tenim que existeixen $x', y' \in R$ tals que $f(x') = x$ i $f(y') = y$. Ara bé, per la definició d'13.1.1 tenim que $x' *_R y' \in R$, i per tant

$$\begin{aligned} f(x' *_R y') &= f(x') *_S f(y') \\ &= x *_S y \end{aligned} \quad (13.2.1)$$

i per la definició de 12.2.5 trobem que $x *_S y \in \text{Im}(f)$.

També tenim, per la definició de 13.2.1, que $1_S \in \text{Im}(f)$, ja que $f(1_R) = 1_S$, i per tant, per la definició de 13.1.9, tenim que $\text{Im}(f)$ és un subanell de S . \square

13.2.2 Teoremes d'isomorfisme entre anells

Teorema 13.2.10 (Primer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin R i S dos anells i $\varphi: R \longrightarrow S$ un morfisme entre anells. Aleshores*

$$R/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi).$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 13.2.6. □

Teorema 13.2.11 (Segon Teorema de l'isomorfisme). *Siguin R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ i I i J dos ideals de R . Aleshores*

$$(I + J)/I \cong J/(I \cap J).$$

Demostració. □

Lema 13.2.12. *Siguin R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ i I i J dos ideals de R tals que $I \subseteq J$. Aleshores J/I és un ideal de R/I .*

Demostració. □

Teorema 13.2.13 (Tercer Teorema de l'isomorfisme). *Siguin R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ i I i J dos ideals de R tals que $I \subseteq J$. Aleshores*

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit pel lema 13.2.12. □

13.2.3 Característica d'un anell

Definició 13.2.14 (Característica). *Sigui R un anell amb la suma $+$. Direm que R té característica $n > 0$ si*

$$n = \min_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 1 + \overset{m}{\cdots} + 1 = 0 \right\}.$$

Ho denotarem amb $\text{ch}(R) = n$. Si aquest n no existeix diem que R té característica 0 i $\text{ch}(R) = 0$.

Proposició 13.2.15. *Siguin R un anell amb la suma $+$ i*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\longrightarrow R \\ n &\longmapsto 1 + \overset{n}{\cdots} + 1 \end{aligned}$$

una aplicació. Aleshores f és un morfisme entre anells i $\ker(f) = (\text{ch}(R))$.

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 13.2.6.

Sigui \cdot el producte de R . Comencem veient que f és un morfisme entre anells. Veiem que f és un morfisme entre els grup. Tenim que per a tot $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(n + m) &= 1 + \overset{n+m}{\cdots} + 1 \\ &= (1 + \overset{n}{\cdots} + 1) + (1 + \overset{m}{\cdots} + 1) \\ &= f(n) + f(m) \end{aligned}$$

i per la definició de 12.2.1 tenim que f és un morfisme entre grups. Veiem ara que $f(1) = 1$. Tenim que $f(1) = 1 \cdot 1 = 1$ i per tant per la definició de 13.2.1 tenim que f és un morfisme entre anells.

Veiem ara que $\ker(f) = (\text{ch}(n))$. Per la definició de 13.2.4 tenim que $\ker(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$. Per tant

$$\ker(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 0\}$$

i per la definició de 13.2.14 tenim que $n = \text{ch}(R)$, i per tant $\ker(f) = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ara bé, per la definició d'13.1.10 tenim que $\ker(f) = (n)$, com volíem veure. \square

Corol·lari 13.2.16. *Si $\text{ch}(R) = 0$ aleshores existeix un subanell S de R tal que $S \cong \mathbb{Z}$. Si $\text{ch}(R) = n$ aleshores existeix un subanell S de R tal que $S \cong \mathbb{Z}/(n)$.*

13.3 Dominis

13.3.1 Dominis d'integritat, ideals primers i maximals

Definició 13.3.1 (Divisor de 0). Sigui R amb el producte \cdot un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ i $a, b \neq 0$ dos elements de R tals que $a \cdot b = 0$. Aleshores diem que a és un divisor de 0 en R .

Definició 13.3.2 (Dominis d'integritat). Sigui D un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ tal que no existeix cap $a \in D$ tal que a sigui un divisor de 0 en D . Aleshores direm que D és un domini d'integritat.

Proposició 13.3.3. *Sigui D un domini d'integritat amb el producte \cdot i $a \neq 0$ un element de D . Aleshores*

$$a \cdot x = a \cdot y \implies x = y.$$

Demostració. Sigui $+$ la suma de D . Tenim

$$a \cdot x - a \cdot y = 0$$

i per la proposició 13.1.5 tenim que

$$(x - y) \cdot a = 0.$$

Ara bé, com que, per hipòtesi, D és un domini d'integritat i $a \neq 0$ tenim que ha de ser $x - y = 0$, i per tant trobem $x = y$. \square

Definició 13.3.4 (Ideal primer). Sigui I un ideal d'un anell R amb $I \neq R$ tal que si $a \cdot b \in I$ tenim $a \in I$ o $b \in I$. Aleshores direm que I és un ideal primer de R .

Proposició 13.3.5. *Sigui I un ideal d'un anell R amb $I \neq R$. Aleshores*

$$R/I \text{ és un domini d'integritat} \iff I \text{ és un ideal primer de } R.$$

Demostració. Sigui $+$ la suma de R i \cdot el producte de R . Comencem demostrant que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que R/I és un domini d'integritat i prenem $[a], [b] \in R/I$ tals que $[a] \cdot [b] = [0]$. Aleshores per la definició d'13.1.21 tenim que $a \cdot b \in I$. Ara bé, com que per hipòtesi R/I és un domini d'integritat tenim que ha de ser $[a] = [0]$ ó $[b] = [0]$, i per tant trobem que ha de ser $a \in I$ o $b \in I$, i per la definició d'13.3.4 trobem que I és un ideal primer de R .

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que I és un ideal primer de R . Per la proposició 13.1.20 tenim que R/I és un anell commutatiu amb $1 \neq 0$. Prenem doncs $a \in R$, $a \notin I$ i suposem que existeix $b \in R$ tal que $[a] \cdot [b] = [0]$. Això és que $a \cdot b \in I$, i com que per hipòtesi I és un ideal primer, per la definició d'13.3.4 trobem que ha de ser $b \in I$, i per tant $[b] = [0]$ i per la definició de 13.3.2 tenim que R/I és un domini d'integritat. \square

Corol·lari 13.3.6. *Un anell R és un domini d'integritat si i només si (0) és un ideal primer.*

Definició 13.3.7 (Ideal maximal). Sigui M un ideal d'un anell R amb $M \neq R$ tal que per a tot ideal I de R amb $M \subseteq I \subseteq R$ ha de ser $I = M$ o $I = R$. Aleshores direm que M és un ideal maximal de R .

Proposició 13.3.8. *Sigui M un ideal d'un anell R amb $1 \neq 0$. Aleshores*

$$R/M \text{ és un cos} \iff M \text{ és un ideal maximal de } R.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 13.1.20.

Comencem veient la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que R/M és un cos i prenem un ideal I/M de R/M . Aleshores ha de ser $M \subseteq I \subseteq R$. Per la proposició 13.1.18 tenim que els únics ideals de R/M són $([0])$ i R/M , i per tant ha de ser $I = M$ ó $I = R$, i per la definició d'13.3.7 tenim que M és un ideal maximal de R .

Veiem ara la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem doncs que M és un ideal maximal de l'anell R i considerem, per la proposició 13.1.20, l'anell R/M . Per la proposició 13.1.18 tenim que només hem de veure que els únics ideals de R/M són (0) i R . Prenem un ideal I/M de R/M . Aquest ha de ser tal que $M \subseteq I \subseteq R$, i per la definició d'13.3.7 tenim que ha de ser $I = M$ o $I = R$, i per tant I/M ha de ser $([0])$ ó R/M i per la proposició 13.1.20 tenim que R/M és un cos. \square

Corol·lari 13.3.9. *M és maximal $\implies M$ és primer.*

Teorema 13.3.10. *Sigui R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$. Aleshores R és un domini d'integritat si i només si $R \setminus \{0\}$ és un cos.*

Demostració. \square

Proposició 13.3.11. *Sigui $I \neq (0)$ un ideal primer d'un domini d'integritat D . Aleshores I és maximal.*

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Posem $I = (a)$. Per hipòtesi tenim que $a \neq 0$ i que I és un ideal primer. Sigui $b \in D$ tal que $(a) \subseteq (b)$. Aleshores tenim que $a \in (b)$, i per la definició d'13.1.15 tenim que $a = a' \cdot b$ per a cert $a' \in D$. Aleshores, per la definició d'13.3.4, tenim que $a' \in (a)$ ó $b \in (a)$.

Suposem que $a' \in (a)$. Aleshores tenim que $a' = a \cdot \beta$ per a cert $\beta \in D$, i per tant $a = a \cdot \beta \cdot b$, i per la proposició 13.3.3 tenim que $1 = \beta \cdot b$, i per tant $1 \in (b)$, d'on trobem $(b) = R$. Suposem ara que $b \in I$. Aleshores $(a) = (b)$, i per la definició d'13.3.7 tenim que $I = (a)$ és un ideal maximal de D , com volíem veure. \square

13.3.2 Lema de Zorn

Definició 13.3.12 (Relació d'ordre). Sigui A un conjunt no buit i \leq una relació binària en A que satisfaci

1. Reflexiva: $a \leq a$ per a tot $a \in A$.
2. Antisimètrica: $a \leq b$ i $b \leq a$ impliquen $a = b$ per a tot $a, b \in A$.
3. Transitiva: Si $a \leq b$ i $b \leq c$, aleshores $a \leq c$ per a tot $a, b, c \in A$.

Aleshores direm que \leq és una relació d'ordre.

Definició 13.3.13 (Cadena). Sigui \mathcal{C} un conjunt i \leq una relació d'ordre en A tal que per a tot $a, b \in \mathcal{C}$ es satisfà $a \leq b$ ó $b \leq a$. Aleshores direm que \mathcal{C} amb \leq és una cadena.

Proposició 13.3.14. *Siguin Y i $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ dos conjunts tals que per a tot $A, B \in \mathcal{X}$ tenim $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Aleshores \mathcal{X} amb \subseteq és una cadena.*

Demostració. Comprovem que \subseteq satisfà les condicions de la definició de 13.3.12:

1. Reflexiva: Si $A \in \mathcal{X}$ tenim $A = A$, i en particular $A \subseteq A$.
2. Antisimètrica: Si $A, B \in \mathcal{X}$ tals que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ tenim, per doble inclusió, que $A = B$.
3. Transitiva: Si $A, B, C \in \mathcal{X}$ tals que $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ aleshores $A \subseteq C$.

per tant, per les definicions de 13.3.12 i 13.3.13 tenim que \mathcal{X} amb \subseteq és una cadena. \square

Definició 13.3.15 (Cota superior d'una cadena). Sigui \mathcal{C} amb \leq una cadena, a un element de \mathcal{C} i B un subconjunt de \mathcal{C} tal que per a tot $b \in B$ es compleix $b \leq a$. Aleshores direm que a és una cota superior de B .

Si $a \leq b$ implica $b = a$ per a tot $b \in B$ direm que a és maximal per B .

Axioma 13.3.16 (Lema de Zorn). *Sigui A amb \leq una cadena tal que per a tot subconjunt $\mathcal{C} \subseteq A$ la cadena \mathcal{C} té alguna cota superior. Aleshores A té algun element maximal.*

Teorema 13.3.17. *Sigui R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$. Aleshores existeix $M \subseteq R$ tal que M sigui un ideal maximal de R .*

Demostració. Sigui $+$ la suma de R i \cdot el producte de R . Definim el conjunt

$$A = \{I \triangleleft R \mid I \neq R\}.$$

i amb un subconjunt $\mathcal{C} \subseteq A$ considerem, per la proposició 13.3.14, la cadena \mathcal{C} amb \subseteq . Considerem ara el conjunt

$$J = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$$

i veiem que J és un ideal de R , ja que si $x, y \in J$ tenim $x \in J_1$ i $y \in J_2$ per a certs $J_1, J_2 \in \mathcal{C}$. Ara bé, si $J_2 \subseteq J_1$ tenim que $x - y \in J_1$, i per tant $x - y \in J$, i si $J_1 \subseteq J_2$ tenim que $x - y \in J_2$, i per tant $x - y \in J$. Si prenem $x \in J$ i $r \in R$ aleshores $r \cdot x \in J$, ja que tenim $x \in J_1$ per a cert $J_1 \in \mathcal{C}$, i per tant $r \cdot x \in J_1$, i en particular $r \cdot x \in J$. Per tant per la definició d'13.1.10 tenim que J és un ideal de R . Per veure que $J \in A$ hem de comprovar que $J \neq R$. Ho fem per contradicció. Suposem que $J = R$. Aleshores $1 \in J$, i per tant $1 \in I$ per a cert $I \in A$, però això no pot ser ja que si $I \in A$ s'ha de complir $I \neq A$, i per tant $1 \notin I$. Per tant $J \neq R$ i tenim que $J \in A$.

Ara bé, pel 13.3.16 tenim que existeix $M \in \mathcal{C}$ tal que per a tot $I \in \mathcal{C}$ tenim $I \subseteq M$ i per la definició d'13.3.7 tenim que M és un ideal maximal de R . \square

13.3.3 Divisibilitat

Definició 13.3.18 (Divisors i múltiples). Siguin D un domini d'integritat amb el producte \cdot i $a, b \in D$ tals que existeix $c \in D$ tal que $b = a \cdot c$. Aleshores direm que a divideix b o que b és múltiple de a . Ho denotarem amb $a \mid b$.

Observació 13.3.19. $b \mid a \iff (a) \subseteq (b)$.

Proposició 13.3.20. Siguin D un domini d'integritat amb el producte \cdot i a, b, c, c' quatre elements de D amb $a \neq 0$, $b \neq 0$, tals que $a \mid b$ i $b \mid a$, i $a = c \cdot b$ i $b = c' \cdot a$. Aleshores $c' = c^{-1}$.

Demostració. Tenim que $b = c' \cdot c \cdot b$, i per la proposició 13.3.3 tenim que $1 = c' \cdot c$, i per la definició d'13.1.7 tenim que $c' = c^{-1}$. \square

Proposició 13.3.21. Siguin R un anell commutatiu amb el producte \cdot amb $1 \neq 0$ i \sim una relació binària tal que per a tot $x, y \in R$ tenim

$$x \sim y \implies x = u \cdot y \text{ per a algun } u \in R \text{ invertible.}$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les condicions de la definició de 2.3.2:

1. Simètrica: Per a tot $x \in R$ tenim $x = 1 \cdot x$.
2. Reflexiva: Siguin $x, y \in R$ tals que $x \sim y$. Aleshores tenim que existeix $u \in R$ invertible tal que $x = u \cdot y$. Ara bé, com que u és invertible tenim per la definició d'13.1.7 que $y = u^{-1} \cdot x$, i per tant $y \sim x$.
3. Transitiva: Siguin $x, y, z \in R$ tals que $x \sim y$ i $y \sim z$. Aleshores tenim que $x = u \cdot y$ i $y = u' \cdot z$ per a certs $u, u' \in R$ invertibles, i per tant $x = u \cdot u' \cdot z$, i com que $1 = u \cdot u' \cdot u'^{-1} \cdot u^{-1}$ per la definició d'13.1.7 tenim que $x \sim z$.

i per la definició de 2.3.2 tenim que \sim és una relació d'equivalència. \square

Definició 13.3.22 (Elements associats). Siguin R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ i $a, b \in R$ dos elements tals que existeix un element invertible $u \in R$ tal que $a = u \cdot b$. Aleshores direm que a i b són associats i escriurem $a \sim b$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 13.3.21.

Proposició 13.3.23. Siguin D un domini d'integritat, a i b dos elements de D i $X \subseteq D$ un conjunt tal que per a tot $d \in X$ tenim $d \mid a$, $d \mid b$ i per a tot $c \in D$ tal que $c \mid a$, $c \mid b$ es compleix $c \mid d$. Aleshores per a tot $d' \in D$ tenim que $d' \in X$ si i només si $d \sim d'$.

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Comencem amb la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem que $d' \in X$. Hem de veure que $d \sim d'$. Tenim $d \mid d'$ i $d' \mid d$ i per la definició de 13.3.18 trobem que $d \sim d'$.

Fem ara la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem que $d' \sim d$. Hem de veure que $d' \in X$. Per hipòtesi tenim que $d \mid a$ i $d \mid b$. Per tant existeixen $\alpha, \beta \in D$ tals que $a = \alpha d$ i $b = \beta d$, i per la proposició 13.3.20 tenim que si $d' = d \cdot u$ amb $u \in D$ invertible aleshores $d = d' \cdot u^{-1}$. Per tant

$$a = \alpha \cdot d' \cdot u^{-1} \quad \text{i} \quad b = \beta \cdot d' \cdot u^{-1}$$

i per tant $d' \mid a$ i $d' \mid b$. Ara bé, com que per hipòtesi $d \sim d'$, per la definició d'13.3.22 tenim que $d' \in X$. \square

Definició 13.3.24 (Màxim comú divisor). Siguin D un domini d'integritat i $a, b, d \in D$ tres elements tals que $d \mid a$ i $d \mid b$ i tals que per a tot $c \in D$ que satisfaci $c \mid a$ i $c \mid b$ tenim $c \mid d$. Aleshores direm que d és el màxim comú divisor de a i b . Direm que d és un màxim comú divisor de a i b o que $d \sim \text{mcd}(a, b)$. Entendrem que $\text{mcd}(a, b)$ és un element de D .

Aquesta definició té sentit per la proposició 13.3.23.

Proposició 13.3.25. Siguin D un domini d'integritat, a i b dos elements de D i $X \subseteq D$ un conjunt tal que per a tot $m \in X$ tenim $a \mid m$, $b \mid m$ i per a tot $c \in D$ tal que $a \mid c$, $b \mid c$ es compleix $m \mid c$. Aleshores tenim que per a tot $m' \in X$ si i només si $m \sim m'$.

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Comencem amb la implicació cap a la dreta (\implies). Suposem que $m' \in X$. Hem de veure que $m \sim m'$. Tenim $m' \mid m$ i $m \mid m'$ i per la definició de 13.3.18 trobem que $m \sim m'$.

Fem ara la implicació cap a l'esquerra (\impliedby). Suposem que $m' \sim m$. Hem de veure que $m' \in X$. Per hipòtesi tenim que $a \mid m$ i $b \mid m$. Per tant existeixen $\alpha, \beta \in D$ tals que $m = \alpha \cdot a$ i $m = \beta \cdot b$, i per la proposició 13.3.20 tenim que si $m' = u \cdot m$ amb $u \in D$ invertible aleshores $m = m' \cdot u^{-1}$. Per tant

$$m' = \alpha \cdot a \cdot u^{-1} \quad \text{i} \quad m' = \beta \cdot b \cdot u^{-1}$$

i per tant $m' \mid a$ i $m' \mid b$. Ara bé, com que per hipòtesi $m \sim m'$, per la definició d'13.3.22 tenim que $m' \in X$. \square

Definició 13.3.26 (Mínim comú múltiple). Siguin D un domini d'integritat i $a, b, m \in D$ tres elements tals que $a \mid m$ i $b \mid m$ i tals que per a tot $c \in D$ que satisfaci $a \mid c$ i $b \mid c$ tenim $m \mid c$. Aleshores direm que m és el mínim comú múltiple de a i b . Direm que m és un mínim comú múltiple de a i b o que $m \sim \text{mcm}(a, b)$. Entendrem que $\text{mcm}(a, b)$ és un element de D .

Aquesta definició té sentit per la proposició 13.3.25.

Proposició 13.3.27. *Siguin $(a), (b)$ dos ideals principals d'un domini d'integritat D amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores tenim les igualtats*

1. $(a) + (b) = (\text{mcd}(a, b))$.
2. $(a) \cap (b) = (\text{mcm}(a, b))$.
3. $(a)(b) = (a \cdot b)$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la proposició 13.1.14 tenim que $(a) + (b) = \{x + y \mid x \in (a), y \in (b)\}$, i per la definició d'13.1.15 això és

$$(a) + (b) = \{r_1 \cdot a + r_2 \cdot b \mid r_1, r_2 \in R\},$$

que podem reescriure com

$$(a) + (b) = \{x \mid \text{existeixen } m, n \in R \text{ tals que } x = n \cdot m + b \cdot n\}$$

i per tant $(a) + (b) = (\text{mcd}(a, b))$ és un ideal principal de R .

Continuem veient el punt (2). Per la proposició 13.1.14 tenim que

$$(a) \cap (b) = \{x \mid x \in (a), x \in (b)\},$$

que, per la definició d'13.1.15, podem reescriure com

$$(a) \cap (b) = \{x \mid x \text{ divideix } a \text{ i } b\}$$

i per tant $(a) \cap (b) = (\text{mcm}(a, b))$ és un ideal principal de R .

Acabem veient el punt (3). Per la proposició 13.1.14 tenim que

$$(a)(b) = \{x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n \mid x_1, \dots, x_n \in (a), y_1, \dots, y_n \in (b)\},$$

que, per la definició d'13.1.15 i la proposició 13.1.5, podem reescriure com

$$\begin{aligned} (a)(b) &= \{(r_1 \cdot a)(r'_1 \cdot b) + \cdots + (r_n \cdot a)(r'_n \cdot b) \mid r_1, \dots, r_n, r'_1, \dots, r'_n \in R\} \\ &= \{(r_1 \cdot r'_1 + \cdots + r_n \cdot r'_n) \cdot (a \cdot b) \mid r_1, \dots, r_n, r'_1, \dots, r'_n \in R\}, \end{aligned}$$

i si fixem $r_2 = \dots = r_n = 0$ i $r'_1 = 1$ tenim, amb $r_1 = r$ que

$$(a)(b) = \{r \cdot (a \cdot b) \mid r \in R\},$$

i per la definició d'13.1.15 tenim que $(a)(b)$ és un ideal principal de R amb

$$(a)(b) = (a \cdot b). \quad \square$$

Definició 13.3.28 (Primer). *Siguin D un domini d'integritat, $p \neq 0$ un element de D tal que per a tot a, b dos elements de D que satisfacin $p \mid a \cdot b$ tenim $p \mid a$ ó $p \mid b$. Aleshores direm que p és primer.*

Observació 13.3.29. *$a \neq 0$, (a) és un ideal primer si i només si a és primer.*

Definició 13.3.30 (Element irreductible). *Siguin D un domini d'integritat amb el producte \cdot , $a \neq 0$ un element no invertible de D i b, c dos elements de D tals que $a = b \cdot c$. Aleshores direm que a és irreductible si b ó c són invertibles.*

Proposició 13.3.31. *Sigui D un domini d'integritat i p un element primer de D . Aleshores p és irreductible.*

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Suposem que a i b són dos elements de D tals que $p = a \cdot b$. Per la definició de 13.3.28 tenim que ha de ser $p \mid a$ ó $p \mid b$. Si $p \mid a$ tenim que $a = \alpha \cdot p$ per a cert $\alpha \in D$.

Ara bé, per hipòtesi, tenim que $p = a \cdot b$. Per tant $a = \alpha \cdot a \cdot b$, i per la proposició 13.3.3 tenim que $1 = \alpha \cdot b$, i per la definició d'13.1.7 tenim que b és invertible i per la definició d'13.3.30 tenim que p és irreductible.

El cas $p \mid b$ és anàleg. \square

13.3.4 Dominis de factorització única

Definició 13.3.32 (Domini de factorització única). Sigui D un domini d'integritat amb el producte \cdot tal que per a tot element no invertible $a \neq 0$ de D

1. Existeixen p_1, \dots, p_n elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

2. Si existeixen p_1, \dots, p_r i q_1, \dots, q_s elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

aleshores $r = s$ i existeix $\sigma \in S_r$ tal que

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot q_{\sigma(r)},$$

amb $p_i \sim q_{\sigma(i)}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$.

Aleshores direm que D és un domini de factorització única.

Teorema 13.3.33. *Sigui D un domini d'integritat amb i el producte \cdot . Aleshores D és un domini de factorització única si i només si tenim*

1. *Per a tot $a \neq 0$ element no invertible de D existeixen p_1, \dots, p_r elements irreductibles de D tals que*

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

2. *Si a és un element irreductible de D aleshores a és primer.*

Demostració. Comencem demostrant que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que D és un domini de factorització única. El punt (1) és conseqüència de la definició de 13.3.32. Per tant només ens queda veure que tot element irreductible és primer.

Sigui p un element irreductible de D i a, b dos elements no invertibles no nuls de D tals que $p \mid a \cdot b$. Per la definició de 13.3.32 tenim que existeixen $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$ elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \quad \text{i} \quad b = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

i per tant

$$a \cdot b = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

i com que, per hipòtesi, $p \mid a \cdot b$ i la definició de 13.3.32 tenim que

$$a \cdot b = p \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_t$$

per a certs $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ elements irreductibles de D . Per tant tenim

$$a \cdot b = p \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_t = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

i, de nou per la definició de 13.3.32, tenim que $p \sim p_i$ ó $p \sim q_j$ per a certs $i \in \{1, \dots, r\}$, $j \in \{1, \dots, s\}$, i per tant $p \mid a$ ó $p \mid b$, i per la definició de 13.3.28 tenim que p és primer.

Veiem ara que la condició és necessària (\Leftarrow). Suposem doncs que

1. Per a tot a element no invertible de D existeixen p_1, \dots, p_r elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

2. Si a és in element irreductible de D aleshores a és primer.

Sigui a un element no invertible de D . Pel punt (1) tenim que existeixen p_1, \dots, p_r elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r.$$

Suposem que existeixen també q_1, \dots, q_s elements irreductibles de D tals que

$$a = q_1 \cdot \dots \cdot q_s.$$

Aleshores volem veure que $r = s$ i que existeix $\sigma \in S_r$ tal que

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot q_{\sigma(r)},$$

amb $p_i \sim q_{\sigma(i)}$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$.

Tenim que $p_1 \mid a$, i com que pel punt (2) tenim que p_1 és primer, per la definició de 13.3.28 tenim que $p_1 \mid q_j$ per a cert $j \in \{1, \dots, s\}$, i per la definició de 13.3.30 i la definició d'13.3.22 tenim que $p_1 \sim q_j$. Sigui doncs $\sigma \in S_s$ tal que $p_1 \mid q_{\sigma(1)}$. Aleshores tenim

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = u_1 \cdot q_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot q_s$$

per a cert u_1 element invertible de D . Podem iterar aquest argument per a p_2, \dots, p_t , on $t = \min(r, s)$ per obtenir

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_t \cdot p_{t+1} \cdot \dots \cdot p_r = (u_1 \cdot q_1) \cdot \dots \cdot (u_t \cdot q_t) \cdot p_{t+1} \cdot \dots \cdot p_s$$

per a certs u_1, \dots, u_t elements invertibles de D . Ara bé, tenim que $r = s$, ja que si $r > s$ tindríem que p_{s+1}, \dots, p_r són invertibles, i si $s > r$ tindríem que q_{r+1}, \dots, q_s són invertibles, però per la definició d'13.3.30 i la definició d'13.1.7 tenim que això no pot ser, i per tant $r = s$ i per la definició de 13.3.32 tenim que D és un domini de factorització única, com volíem veure. \square

Proposició 13.3.34. *Siguin D un domini de factorització única amb \cdot i el producte \cdot i a, b dos elements no invertibles i no nuls de D tals que existeixen p_1, \dots, p_r tals que*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad i \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$$

per a certs $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r$ enters no negatius. Aleshores

$$\prod_{i=1}^r p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \sim \text{mcd}(a, b) \quad i \quad \prod_{i=1}^r p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} \sim \text{mcm}(a, b).$$

Demostració. Denotem $d = \prod_{i=1}^r p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ i $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

Prenem c un element de D tal que $c \mid a$ i $c \mid b$. Aleshores tenim que

$$c = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$$

per a certs $\gamma_i \leq \min(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$. Ara bé, com que $\gamma_i \leq \min(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$, i per tant $d \mid c$, i per la definició de 13.3.24 tenim que $d \sim \text{mcd}(a, b)$.

Prenem ara c un element de D tal que $a \mid c$ i $b \mid c$. Aleshores tenim que

$$c = q \cdot p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$$

per a cert $q \in D$ i certs $\gamma_i \geq \max(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$. Ara bé, com que $\gamma_i \geq \max(\alpha_i, \beta_i)$ per a tot $i \in \{1, \dots, r\}$, i per tant $m \mid c$, i per la definició de 13.3.26 tenim que $m \sim \text{mcm}(a, b)$. \square

13.3.5 Anells Noetherians

Definició 13.3.35 (Anell Noetherià). Sigui N un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ tal que si

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

són ideals de N existeix n_0 tal que per a tot $i \geq n_0$ tenim $I_i = I_{i+1}$. Aleshores diem que N és Noetherià.

Observació 13.3.36. $\{I_1, I_2, I_3, \dots\}$ amb la relació d'ordre \subseteq és una cadena.

Lema 13.3.37. *Siguin N un domini d'integritat Noetherià amb el producte \cdot i $a \neq 0$ un element no invertible de N . Aleshores existeixen p_1, \dots, p_n elements irreductibles de N tals que*

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Demostració. Ho farem per reducció a l'absurd. Definim el conjunt

$$X = \{a \in N \text{ invertible} \mid a \neq p_1 \cdot \dots \cdot p_n \text{ per a } p_1, \dots, p_n \in N \text{ irreductibles}\}.$$

Volem veure que $X = \emptyset$. Suposem doncs que $X \neq \emptyset$ i prenem $a_1 \in X$. Per la definició d'13.3.30 tenim que a_1 no és irreductible, i per tant existeixen $b_1, c_1 \in N$ no invertibles tals que

$$a_1 = b_1 \cdot c_1$$

i ha de ser $b_1 \in X$ o $c_1 \in X$.

Suposem que $b_1 \in X$, la demostració de l'altre opció és anàloga. Aleshores tenim, per l'observació 13.3.19, que $(a) \subset (b)$. Ara bé, també tindriem que $b_1 = b_2 \cdot c_2$ per a certs b_2, c_2 elements no invertibles de N amb $b_2 \in X$ o $c_2 \in X$, i podem iterar aquest argument per construir

$$(a_1) \subset (b_1) \subset (b_2) \subset (b_3) \subset \dots$$

però això entra en contradicció amb la definició d'13.3.35, i per tant $X = \emptyset$, com volíem veure. \square

13.3.6 Dominis d'ideals principals

Definició 13.3.38 (Domini d'ideals principals). Sigui D un domini d'integritat tal que tot ideal de D és un ideal principal. Aleshores direm que D és un domini d'ideals principals.

Proposició 13.3.39. *Sigui D un domini d'ideals principals. Aleshores un element $a \in D$ és irreductible si i només si (a) és un ideal maximal.*

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Comencem veient que la condició és suficient (\Leftarrow). Suposem doncs que a és un element irreductible de D i prenem $b \in D$ tal que $(a) \subseteq (b) \neq D$. Aleshores, per l'observació 13.3.19 tenim que $b \mid a$, és a dir, existeix $r \in D$ tal que $a = b \cdot r$, i per la definició d'13.3.30 tenim que r ó b són invertibles. Ara bé, com que, per hipòtesi, $(b) \neq D$ tenim que b no és invertible, per tant ha de ser r invertible per la definició d'13.1.7 tenim que $a \cdot r^{-1} = b$, per l'observació 13.3.19 tenim que $(a) = (b)$, i per la definició d'13.3.7 tenim que (a) és un ideal maximal.

Tenim que la condició és necessària (\Rightarrow) per la proposició 13.3.11. \square

Proposició 13.3.40. *Siguin D un domini d'ideals principals i a un element irreductible de D . Aleshores a és primer.*

Demostració. Per la proposició 13.3.39 tenim que (a) és maximal, pel corol·lari 13.3.9 veiem que (a) és primer, i per l'observació 13.3.29 trobem que a és primer, com volíem veure. \square

Teorema 13.3.41. *Sigui D un domini d'ideals principals. Aleshores D és Noetherià.*

Demostració. Siguin I_1, \dots, I_i, \dots ideals de D tals que

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

i

$$\mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

Aleshores tenim que \mathcal{J} és un ideal. També veiem que si $x \in \mathcal{J}$ existeix n tal que $x \in I_n$, i per la definició d'13.1.10 tenim que si $y \in D$ aleshores $x \cdot y \in I_n$.

Ara bé, com que per hipòtesi D és un domini d'ideals principals tenim, per la definició de 13.3.38 que existeix $a \in D$ tal que $\mathcal{I} = (a)$, i per tant existeix n tal que $a \in I_n$, i trobem que

$$\mathcal{I} = (a) \subseteq I_n \subseteq I_{n+k} \subseteq \mathcal{I}$$

per a tot $k \in \mathbb{N}$, i pel 2.1.3 trobem que $I_n = I_{n+k}$ per a tot $k \in \mathbb{N}$, i per la definició d'13.3.35 trobem que D és un anell Noetherià. \square

Teorema 13.3.42. *Sigui D un domini d'ideals principals. Aleshores D és un domini de factorització única.*

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Pel Teorema 13.3.41 tenim que D és un anell Noetherià, i pel lema 13.3.37 tenim que per a tot element no irreductible a de D existeixen p_1, \dots, p_n elements irreductibles de D tals que

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n.$$

També tenim, per la proposició 13.3.40 que si a és un element irreductible de D aleshores a és primer.

Per acabar, pel Teorema 13.3.33 tenim que D és un domini de factorització única. \square

13.3.7 Dominis Euclidiàns

Definició 13.3.43 (Domini Euclidià). Sigui D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $U: D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicació tal que

1. $U(x) \leq U(x \cdot y)$ per a tot $x, y \in D \setminus \{0\}$.
2. Per a tot $x, y \in D$, $y \neq 0$ existeixen $Q, r \in D$ tals que $x = Q \cdot y + r$, amb $r = 0$ ó $U(r) < U(y)$.

Aleshores direm que D és un domini Euclidià amb la norma U .

Proposició 13.3.44. *Sigui D un domini Euclidià amb la norma U . Aleshores*

$$U(1) \leq U(x) \quad \text{per a tot } x \in D \setminus \{0\}.$$

Demostració. Sigui \cdot el producte de D . Per la definició de 13.3.43 tenim que $U(x) \leq U(x \cdot y)$ per a tot $x, y \in D \setminus \{0\}$. Per tant

$$U(1) \leq U(1 \cdot x) = U(x) \quad \text{per a tot } x \in D \setminus \{0\}. \quad \square$$

Proposició 13.3.45. *Sigui D un domini Euclidià amb la norma U . Aleshores*

$$U(u) = U(1) \iff u \text{ és un element invertible de } D.$$

Demostració. Sigui $+$ la suma de D i \cdot el producte de D . Comencem veient l'implicació cap a la dreta (\implies). Suposem doncs que u és un element invertible de D .

Per la proposició 13.3.44 tenim que $U(1) \leq U(u)$ i que $U(u) \leq U(u \cdot u^{-1})$. Ara bé, per la definició de 13.1.8 tenim que $u \cdot u^{-1} = 1$, i per tant

$$U(1) \leq U(u) \leq U(u \cdot u^{-1}) = U(1),$$

i trobem $U(u) = U(1)$.

Veiem ara l'implicació cap a l'esquerra (\Leftarrow). Suposem que $U(u) = U(1)$. Per la definició de 13.3.43 tenim que existeixen Q i r elements de D tals que

$$1 = Q \cdot u + r$$

amb $r = 0$ ó $U(r) < U(u)$. Ara bé, per hipòtesi $U(u) = U(1)$, i per la proposició 13.3.44 trobem que ha de ser $r = 0$. Per tant tenim

$$1 = Q \cdot u$$

i per la definició d'13.1.7 trobem que u és invertible. \square

Teorema 13.3.46. *Sigui D un domini Euclidià. Aleshores D és un domini d'ideals principals.*

Demostració. Siguin $+$ la suma de D , \cdot el producte de D , U una norma de D i I un ideal de D . Si $I = \{0\}$ aleshores $I = (0)$. Suposem doncs que $I \neq (0)$ i prenem $b \in I$ tal que $U(b) \leq U(x)$ per a tot $x \in I$, $x \neq 0$.

Prenem ara $a \in I$. Per la definició de 13.3.43 tenim que existeixen $Q, r \in D$ tals que

$$a = Q \cdot b + r$$

amb $r = 0$ ó $U(r) < U(b)$. I com que, per la definició d'13.1.1 tenim que D és un grup amb l'operació $+$ tenim

$$r = a - Q \cdot b,$$

i per la proposició 13.1.13 tenim que

$$r = a - Q \cdot b \in I$$

i per tant, $r \in I$ amb $r = 0$ ó $U(r) < U(b)$. Ara bé, per hipòtesi tenim que $U(r) \geq U(b)$, per tant ha de ser $r = 0$ i tenim que

$$a = Q \cdot b,$$

d'on trobem que I és un ideal principal, i per la definició de 13.3.38 tenim que D és un domini d'ideals principals. \square

Teorema 13.3.47. *Sigui \mathbb{K} un cos. Aleshores \mathbb{K} és un domini Euclidià.*

Demostració. \square

13.4 Anells de polinomis

13.4.1 Cos de fraccions d'un domini d'integritat

Proposició 13.4.1. *Sigui D un domini d'integritat amb el producte \cdot i \sim definida a $D \times D \setminus \{0\}$ una relació binària tal que per a tot $a, c \in D$, $b, d \in D \setminus \{0\}$*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

Aleshores \sim és una relació d'equivalència.

Demostració. □

Notació 13.4.2. Denotarem el conjunt quocient $D \times D \setminus \{0\} / \sim$ com $Q(D)$ i la classe d'equivalència $\overline{(a, b)} \in Q(D)$ com $\frac{a}{b}$.

Lema 13.4.3. *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores $Q(D)$ és un anell commutatiu amb $1 \neq 0$ amb les operacions*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \quad i \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \text{per a tot } a, c \in D, b, d \in D \setminus \{0\}.$$

Demostració. □

Teorema 13.4.4. *Sigui D un domini d'integritat. Aleshores $Q(D)$ és el mínim cos que conté D .*

Demostració. □

Teorema 13.4.5 (Unicitat de $Q(D)$). *Siguin D un domini d'integritat amb la suma $+$ i el producte \cdot i $Q_1(D)$ i $Q_2(D)$ dos cossos amb la suma $+$ i el producte \cdot . Aleshores*

$$Q_1(D) \cong Q_2(D)$$

Demostració. □

Definició 13.4.6 (Cos de fraccions). *Siguin D un domini d'integritat. Aleshores direm que $Q(D)$ és el cos de fraccions de D .*

13.4.2 El Teorema de Gauss

Proposició 13.4.7. *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i*

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in R\}$$

un conjunt. Aleshores $R[x]$ és un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot .

Demostració. □

Observació 13.4.8. $1_R = 1_{R[x]}, 0_R = 0_{R[x]}$.

Observació 13.4.9. *Si R és un anell commutatiu aleshores $R[x]$ també és un anell commutatiu.*

Definició 13.4.10 (Anell de polinomis). *Siguin R un anell amb la suma $+$ i el producte \cdot i*

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in R\}.$$

Aleshores direm que l'anell $R[x]$ és l'anell de polinomis de R .

Aquesta definició té sentit per la proposició 13.4.7.

Observació 13.4.11. $R \subseteq R[x]$.

Teorema 13.4.12 (Teorema de la base de Hilbert). *Sigui R un anell Noetherià. Aleshores $R[x]$ és un anell Noetherià.*

Demostració. □

Definició 13.4.13 (Contingut d'un polinomi). Sigui D un domini de factorització única i $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ un element de $D[x]$. Aleshores definim

$$\text{cont}(f) \sim \text{mcd}(a_0, \dots, a_n)$$

com el contingut de f .

Interpretarem $\text{cont}(f(x))$ com un element de D .

Definició 13.4.14 (Polinomi primitiu). Sigui D un domini de factorització única i $f(x)$ un element de $D[x]$ tal que

$$\text{cont}(f(x)) \sim 1.$$

Aleshores direm que $f(x)$ és un polinomi primitiu.

Lema 13.4.15 (Lema de Gauss). Sigui D un domini de factorització única i $f(x), g(x)$ dos polinomis primitius de $D[x]$. Aleshores $f(x) \cdot g(x)$ és un polinomi primitiu.

Demostració. □

Corol·lari 13.4.16. Sigui D un domini de factorització única i $f(x)$ i $g(x)$ dos elements de $D[x]$. Aleshores

$$\text{cont}(f(x) \cdot g(x)) \sim \text{cont}(f(x)) \cdot \text{cont}(g(x)).$$

Demostració. □

Lema 13.4.17. Sigui D un domini d'integritat i p un element irreductible de D . Aleshores tenim que p és un element irreductible de $D[x]$.

Demostració. □

Teorema 13.4.18. Sigui D un domini de factorització única i $f(x)$ un polinomi de $D[x]$. Aleshores $\text{grau}(f(x)) \geq 1$ i $f(x)$ és un polinomi irreductible de $D[x]$ si i només si $\text{cont}(f(x)) \sim 1$ i $f(x)$ és irreductible en $\mathbb{Q}(D)[x]$.

Demostració. □

Teorema 13.4.19 (Teorema de Gauss). Sigui D un domini de factorització única. Aleshores $D[x]$ és un domini de factorització única.

Demostració. □

Teorema 13.4.20. Sigui D un domini d'integritat. Aleshores són equivalents

1. D és un domini de factorització única.
2. $D[x]$ és un domini de factorització única.
3. $D[x_1, \dots, x_n]$ és un domini de factorització única.

Demostració. □

13.4.3 Criteris d'irreductibilitat

Definició 13.4.21 (Arrel). Siguin R un anell commutatiu amb $1 \neq 0$, $f(x)$ un element de $R[x]$ i α un element de R tal que $f(\alpha) = 0$. Aleshores direm que α és una arrel de $f(x)$.

Proposició 13.4.22. Siguin \mathbb{K} un cos i $f(x)$ un element de $\mathbb{K}[x]$. Aleshores

1. Si $\text{grau}(f(x)) = 1$ aleshores $f(x)$ és irreductible.
2. Si $\text{grau}(f(x)) = 2$ ó 3 aleshores $f(x)$ és irreductible si i només si $f(x)$ no té cap arrel.

Demostració. □

Proposició 13.4.23. Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomi de $D[x]$ i $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}(D)$ una arrel de $f(x)$ amb $\text{mcd}(a, b) \sim 1$. Aleshores tenim que $a \mid a_0$ ó $b \mid a_n$.

Demostració. □

Teorema 13.4.24 (Criteri modular). Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomi primitiu de $D[x]$ i p un element irreductible de D amb $p \nmid a_n$ tals que

$$\overline{f(x)} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot x + \cdots + \overline{a_n} \cdot x^n$$

sigui un polinomi irreductible de $D/(p)[x]$. Aleshores $f(x)$ és un polinomi irreductible de $D[x]$.

Demostració. □

Teorema 13.4.25 (Criteri d'Eisenstein). Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomi primitiu de $D[x]$ amb $n \geq 1$ i p un element irreductible de D satisfent $p \mid a_0, \dots, p \mid a_{n-1}$ i $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$. Aleshores $f(x)$ és un polinomi irreductible de $D[x]$.

Demostració. □

Corol·lari 13.4.26. Siguin D un domini de factorització única amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ un polinomi de $D[x]$ amb $n \geq 1$ i p un element irreductible de D tal que $p \mid a_0, \dots, p \mid a_{n-1}$ i $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$. Aleshores $f(x)$ és un polinomi irreductible de $\mathbb{Q}(D)[x]$.

Demostració. □

Teoria de cossos finits

14.1 Cossos finits

14.1.1 Propietats bàsiques dels cossos finits

Proposició 14.1.1. *Siguin \mathbb{K} i \mathbb{E} dos cossos tals que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$. Aleshores \mathbb{E} és un \mathbb{K} -espai vectorial.*

Demostració. □

Definició 14.1.2 (Cos finit). *Sigui \mathbb{K} un cos tal que $|\mathbb{K}| \in \mathbb{N}$. Aleshores direm que \mathbb{K} és un cos finit.*

Observació 14.1.3. *Sigui \mathbb{K} un cos finit. Aleshores $\text{ch}(\mathbb{K})$ és primer.*

Teorema 14.1.4. *Sigui \mathbb{K} un cos finit. Aleshores*

$$\text{ch}(\mathbb{K}) = p \iff |\mathbb{K}| = p^n \text{ per a cert } n \in \mathbb{N}.$$

Demostració. □

Corol·lari 14.1.5. *Siguin \mathbb{K} un cos finit i \mathbb{F} un subcòs de \mathbb{K} amb $|\mathbb{K}| = p^n$. Aleshores $|\mathbb{F}| = p^d$ amb $d \mid n$.*

Demostració. □

Teorema 14.1.6 (Teorema de l'element primitiu). *Sigui \mathbb{K} un cos finit. Aleshores $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ és un grup cíclic amb el producte \cdot .*

Demostració. □

Definició 14.1.7 (Element primitiu). *Sigui \mathbb{K} un cos finit i β un element de \mathbb{K} tal que $\langle \{\beta\} \rangle = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Aleshores direm que β és un element primitiu de \mathbb{K} .*

Aquesta definició té sentit pel 14.1.6.

Teorema 14.1.8. *Sigui \mathbb{K} un cos finit amb $|\mathbb{K}| = p$. Aleshores existeix un polinomi irreductible $f(x)$ en $\mathbb{Z}/(p)[x]$ tal que*

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{Z}/(p)[x]/(f(x)).$$

Demostració. □

14.1.2 Arrels d'un polinomi

Definició 14.1.9 (Descomposició d'un polinomi). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de \mathbb{K} tal que existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ satisfent $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$. Aleshores direm que $f(x)$ descompon en \mathbb{K} .

Teorema 14.1.10 (Teorema de Kronecker). *Sigui \mathbb{K} un cos i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$. Aleshores existeix un cos \mathbb{L} , amb $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, tal que $f(x)$ descompon en \mathbb{L} .*

Demostració. □

Definició 14.1.11 (Cos de descomposició). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot , $f(x)$ un polinomi de \mathbb{K} i \mathbb{L} el mínim cos on $f(x)$ descompon amb $f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$, amb $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{L}$. Aleshores direm que \mathbb{L} és el cos descomposició de $f(x)$. Denotarem $\mathbb{L} = \mathbb{K}(f(x))$.

Aquesta definició té sentit pel 14.1.10.

Definició 14.1.12 (Derivada formal). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un polinomi de \mathbb{K} . Aleshores definim la derivada formal de $f(x)$ com

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1}.$$

Proposició 14.1.13. *Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$, $g(x)$ dos polinomis de \mathbb{K} . Aleshores es compleix*

1. $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ per a tot $a \in \mathbb{K}$.
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $(f(x)^n)' = n \cdot f(x)^{n-1}$.

Demostració. □

Proposició 14.1.14. *Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $\text{ch}(\mathbb{K}) = 0$ i $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un polinomi de \mathbb{K} amb $n \geq 1$. Aleshores $n \cdot a_n \neq 0$ i $f'(x) \neq 0$.*

Demostració. □

Proposició 14.1.15. *Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot amb $\text{ch}(\mathbb{K}) = p$ no nul i $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un polinomi de \mathbb{K} amb $n \geq 1$. Aleshores*

$$f'(x) \neq 0 \iff p \mid i \text{ per a tot } i \geq 1 \text{ tal que } a_i \neq 0.$$

Demostració. □

Definició 14.1.16 (Arrels múltiples). Sigui \mathbb{K} un cos amb la suma $+$ i el producte \cdot i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$, α una arrel de $f(x)$ i $g(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}(f(x))$ tal que

$$f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x)$$

amb $m \geq 2$. Aleshores direm que α és una arrel múltiple de $f(x)$.

Proposició 14.1.17. *Siguin \mathbb{K} un cos i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$. Aleshores α és una arrel múltiple de $f(x)$ si i només si α és una arrel de $f'(x)$.*

Demostració.

□

Corol·lari 14.1.18. *Siguin \mathbb{K} un cos i $f(x)$ un polinomi de $\mathbb{K}[x]$ satisfent $\text{grau}(f(x)) \geq 1$. Aleshores $\text{mcd}(f(x), f'(x)) = 1$ si i només si $f(x)$ no té arrels múltiples.*

Demostració.

□

14.2 Caracterització dels cossos finits i els seus subcossos

14.2.1 Teoremes d'existència i unicitat dels cossos finits

Teorema 14.2.1 (Teorema d'existència dels cossos finits). *Siguin p un primer i n un natural. Aleshores existeix un cos \mathbb{K} tal que $|\mathbb{K}| = p^n$.*

Demostració.

□

Corol·lari 14.2.2. *Siguin p un primer i n un natural. Aleshores existeix un polinomi $f(x)$ de $\mathbb{Z}/(p)[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) = n$.*

Demostració.

□

Lema 14.2.3. *Siguin n, d dos naturals tal que $d \mid n$, p un primer i $f(x)$ un polinomi irreductible de $\mathbb{Z}/(p)[x]$. Aleshores $f(x) \mid (x^{p^n} - x)$.*

Demostració.

□

Teorema 14.2.4 (Teorema d'unicitat dels cossos finits). *Siguin \mathbb{K} i \mathbb{F} dos cossos finits amb $|\mathbb{K}| = |\mathbb{F}| = p^n$. Aleshores*

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{F}.$$

Demostració.

□

Teorema 14.2.5 (Teorema d'existència dels subcossos finits). *Siguin \mathbb{K} un cos amb $|\mathbb{K}| = p^n$ i d un natural tal que $d \mid n$. Aleshores existeix un $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ amb $|\mathbb{L}| = p^d$ tal que \mathbb{L} és un subcòs de \mathbb{K} .*

Demostració.

□

Teorema 14.2.6 (Teorema d'unicitat dels subcossos finits). *Siguin \mathbb{K} un cos amb $|\mathbb{K}| = p^n$, d un natural tal que $d \mid n$ i $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ dos subcossos de \mathbb{K} amb $|\mathbb{L}_1| = |\mathbb{L}_2| = p^d$. Aleshores $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.*

Demostració.

□

Notació 14.2.7. Denotarem el cos de p^n elements com \mathbb{F}_{p^n} .

14.2.2 El morfisme de Frobenius**Teorema 14.2.8.** *Siguin n un natural, p un primer i*

$$\mathcal{F} = \{f(x) \in \mathbb{Z}/(p)[x] \mid f(x) \text{ és un polinomi m\`onic irreductible de grau } d \mid n\}.$$

Aleshores

$$x^{p^n} - x = \prod_{f(x) \in \mathcal{F}} f(x).$$

Demostració.

□

Proposició 14.2.9 (Morfisme de Frobenius). *Sigui \mathbb{F}_{p^n} un cos finit. Aleshores l'aplicació*

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{F}_{p^n} &\longrightarrow \mathbb{F}_{p^n} \\ a &\longmapsto a^p \end{aligned}$$

*és un automorfisme.**Demostració.*

□

Teorema 14.2.10. *Siguin p un primer, $f(x)$ un polinomi irreductible de l'anell de polinomis $\mathbb{Z}/(p)[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) = n$ i α una arrel de $f(x)$ en $\mathbb{K}(p(x))$. Aleshores les arrels de $f(x)$ són $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \alpha^{p^3}, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ i $\alpha^{p^n} = \alpha$.**Demostració.*

□

Teorema 14.2.11. *Siguin p un primer, $f(x)$ un polinomi irreductible de l'anell de polinomis $\mathbb{Z}/(p)[x]$ amb $\text{grau}(f(x)) = n$ i α una arrel de $f(x)$ en $\mathbb{K}(p(x))$. Aleshores les arrels de $f(x)$ són $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \alpha^{p^3}, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ i $\alpha^{p^i} \neq \alpha^{p^j}$ per a tot $i \neq j$, $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.**Demostració.*

□

Bibliografia

- [1] José Dorronsoro i Eugenio Hernández. *Números, grupos y anillos*. Castellà. Addison-Wesley, 1996. ISBN: 9788478290093.
- [2] Ramon Antoine, Rosa Camps i Jaume Moncasi. *Introducció a l'àlgebra abstracta. Amb elements de matemàtica discreta*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2007. ISBN: 978-84-490-2515-0.
- [3] Ferran Cedó Giné i Vladimir Gisin. *Àlgebra bàsica*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2007. ISBN: 978-84-490-2495-5.
- [4] Paul Moritz Cohn. *Basic Algebra. Groups, Rings and Fields*. Anglès. Springer, 2003. ISBN: 978-0-85729-428-9.
- [5] Félix Delgado De La Mata, Concepción Fuertes Fraile i Sebastian Xambó Descamps. *Introducción Al Álgebra. Anillos, Factorización Y Teoría De Cuerpos*. Castellà. Ediciones Universidad de Valladolid, 1998. ISBN: 978-8477628668.
- [6] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Anglès. Addison-wesley, 1982. ISBN: 978-0201020847.
- [7] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Anglès. Addison-wesley, 1974. ISBN: 978-0201020847.

El capítol de teoria de grups està molt ben explicat en [1], i la teoria de cossos finits està complementada amb [2] sobre la teoria de classe.

La bibliografia del curs inclou els textos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Part VII

Mètodes numèrics



Interpolació numèrica

Sovint podem mesurar un procés físic com un número de punts (per exemple, la temperatura d'una habitació en diferents instants de temps), però no tenim una expressió analítica per aquest procés que ens permeti calcular el seu valor en un punt arbitrari. L'interpolació ens proporciona un mètode simple per estimar aquesta expressió analítica en el rang dels punts mesurats¹.

15.1 El problema d'interpolació

15.1.1 Problemes d'interpolació

Definició 15.1.1 (Problema d'interpolació). Siguin

$$\Phi(x; a_1, \dots, a_n): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

una família de funcions que depenen dels paràmetres reals a_0, \dots, a_n , una família $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ de n punts. Direm que el problema d'interpolació de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ per $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$ consisteix a determinar a_0, \dots, a_n tals que

$$\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = y_i \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, n\}.$$

També direm que $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ són els punts de suport, $\{x_i\}_{i=0}^n$ són les abscisses de suport i $\{y_i\}_{i=0}^n$ les ordenades de suport.

Direm que un problema d'interpolació de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ per $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$ és un problema d'interpolació lineal si existeixen $\Phi_0, \dots, \Phi_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0\Phi_0(x) + \dots + a_n\Phi_n(x).$$

Exemple 15.1.2. *Exemples de problemes d'interpolació lineal són problemes com la interpolació polinòmica:*

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n;$$

o la interpolació trigonomètrica:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1e^{xi} + \dots + a_ne^{nxi}.$$

¹Si el punt que avaluem es troba fora del rang aquest problema s'anomena extrapolació i sol ser menys precís que la interpolació.

Mentre que exemples de problemes d'interpolació no lineals són problemes com la interpolació racional:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m};$$

o la interpolació exponencial:

$$\Phi(x; a_0, \dots, a_n, \lambda_0, \dots, \lambda_n) = a_0e^{\lambda_0x} + \dots + a_ne^{\lambda_nx}.$$

La interpolació trigonomètrica es fa servir en l'anàlisi numèric de les sèries de Fourier, la interpolació exponencial és útil en l'anàlisi de desintegració radioactiva.

15.2 Polinomis interpoladors de Lagrange

15.2.1 Interpolació de Lagrange

Definició 15.2.1 (Problema d'interpolació de Lagrange). Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació per $P(x; a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $x_i \neq x_j$ per a tot $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$, amb $i \neq j$. Aleshores direm que el problema d'interpolació és un problema d'interpolació de Lagrange.

Definició 15.2.2 (Polinomis bàsics de Lagrange). Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x; a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_n[x]$ on, per a cert $k \in \{0, \dots, n\}$ fix tenim que $y_k = 1$ i per a tot $i \in I = \{0, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ tenim $y_i = 0$. Aleshores direm que els polinomis

$$L_k(x) = \prod_{i \in I} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

són polinomis bàsics de Lagrange.

Observació 15.2.3.

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Proposició 15.2.4. Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$. Aleshores la funció $P(x)$ que satisfà

$$P(x_i) = y_i$$

per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$ és única.

Demostració. Per l'observació 15.2.3 veiem que una solució a aquest problema d'interpolació és

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x).$$

Per veure'n la unicitat suposem que existeix un altre $Q(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ tal que

$$P(x_i) = Q(x_i) = y_i$$

per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Això és equivalent a que

$$P(x_i) - Q(x_i) = 0$$

per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Ara bé, tenim que x_0, \dots, x_n són arrels diferents de $P(x) - Q(x)$ per la definició de 15.2.1. Com que $P(x) - Q(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$, aquests són els seus únics zeros, i pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra tenim que ha de ser $P(x) = Q(x)$. \square

Proposició 15.2.5. *Siguin $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un conjunt de punts de suport, $I = \{i_0, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ un conjunt i $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$ un problema d'interpolació per $P_{i_0, \dots, i_k} \in \mathbb{R}_k[x]$, on*

$$P_{i_0, \dots, i_k}(x_{i_j}) = y_{i_j} \quad \text{per a tot } j \in \{0, \dots, k\}.$$

Aleshores

$$P_i(x) = y_i$$

i

$$P_{i_0, \dots, i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Demostració. Fixem $k = 1$. Aleshores tenim

$$P_i(x) = y_i.$$

Veiem la segona part. Definim

$$G(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1, \dots, i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

tenim $G = P_{i_0, \dots, i_k}$ per la proposició 15.2.4, i per tant

$$G(x_{i_0}) = P_{i_0, \dots, i_{k-1}}(x_{i_0}) = y_{i_0}$$

i

$$G(x_{i_k}) = P_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_k}) = y_{i_k},$$

i per tant

$$G(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})y_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})y_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = y_{i_j}$$

per a tot $j \in \{1, \dots, k-1\}$, com volíem veure. \square

Observació 15.2.6 (Algorisme de Neville). *Aquest mètode recurrent es pot organitzar en una taula com*

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
x_0	$y_0 = P_0(x)$		
x_1	$y_1 = P_1(x)$	$P_{0,1}(x)$	
x_2	$y_2 = P_2(x)$	$P_{1,2}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$
\vdots	\vdots		

que s'omple de columna a columna de dreta a esquerra. Es coneix com a algorisme de Neville.

Exemple 15.2.7. Sigui $\{(0, 1), (1, 3), (3, 2)\}$ un problema d'interpolació per $P_{0,1,2}(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Volem avaluar el polinomi interpolador de Lagrange en $x = 2$, és a dir, volem trobar $P_{0,1,2}(2)$.

Solució. La taula de l'algoritme de Neville plantejada en l'observació 15.2.6 per aquest problema és

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$x_0 = 0$	$y_0 = P_0(2) = 1$		
		$P_{0,1}(2) = 5$	
$x_1 = 1$	$y_1 = P_1(2) = 3$		$P_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}$
		$P_{1,2}(2) = \frac{5}{2}$	
$x_2 = 3$	$y_2 = P_2(2) = 2$		

i per tant trobem $P_{0,1,2}(2) = \frac{10}{3}$.

◇

15.2.2 Mètode de les diferències dividides de Newton

El mètode de Neville és útil per avaluar un polinomi interpolador en un punt una vegada, però si es vol obtenir l'expressió general del polinomi interpolador per poder avaluar-lo múltiples vegades en diferents punts s'hauran d'emparar altres solucions.

Definició 15.2.8 (Diferències dividides). Sigui $P(x; a_0, \dots, a_n)$ el polinomi interpolador de Lagrange amb els punts de suport $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$. Aleshores direm que

$$[x_0, \dots, x_k] = a_k$$

és la diferència dividida d'ordre n del problema d'interpolació de Lagrange de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^k$ per $P(x; a_0, \dots, a_k)$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 15.2.4.

Proposició 15.2.9. Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$. Aleshores

$$P(x) = [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^n \left([x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right).$$

Demostració. Denotem per $P_{1,\dots,k} \in \mathbb{K}_{k+1}[x]$ el polinomi que satisfà

$$P_{0,\dots,k}(x_j) = y_j \quad \text{per a tot } j \in \{0, \dots, k\}.$$

Aleshores tenim que el polinomi

$$G_k(x) = P_{0,\dots,k}(x) - P_{0,\dots,k-1}(x)$$

té com arrels x_0, \dots, x_{k-1} , i per tant existeix una única constant C_k tal que

$$G_k(x) = C_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

i per tant, si fem

$$G_k(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

tenim que $C_k = a_k$. Aleshores per la definició de 15.2.8 tenim que

$$G_k(x) = [x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

i per la proposició 15.2.4 tenim

$$P(x) = P_n$$

i per tant trobem recursivament

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_{n-1}(x) + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= P_{n-2}(x) + [x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \\ &\quad + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad \vdots \\ &= P_{n-r}(x) + \sum_{i=0}^{n-r+1} \left([x_0, \dots, x_{n-l+1}] \prod_{j=0}^{n-r} (x - x_j) \right) \quad (r > 0) \\ &\quad \vdots \\ &= P_1(x) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + [x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \\ &\quad + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

i per la definició de 15.2.8 tenim que $P_1(x) = [x_0]$

$$\begin{aligned} &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + [x_0, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \\ &\quad + [x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) = P(x). \quad \square \end{aligned}$$

Observació 15.2.10. Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange. Aleshores per a tot $\sigma \in S_n$ tenim

$$[x_0, \dots, x_n] = [x_{\sigma 0}, \dots, x_{\sigma n}].$$

Demostració. Per la proposició 15.2.4. \square

Proposició 15.2.11. Sigui $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$. Aleshores

$$[x_i] = y_i \quad \text{per a tot } i \in \{0, \dots, n\} \quad (15.1)$$

i

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_1, \dots, x_n] - [x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \quad (15.2)$$

Demostració. Per veure (15.1) tenim prou en veure que per a un problema d'interpolació de $\{(x, y)\}$ per $P(x)$ tenim que $P(x) \in \mathbb{R}_0[x]$, i per tant és una constant i per la definició de 15.2.8 trobem $[x] = y$.

Per veure (15.2) tenim, per la proposició 15.2.5

$$P_{0, \dots, n}(x) = \frac{(x - x_0)P_{1, \dots, n}(x) - (x - x_n)P_{0, \dots, n-1}(x)}{x_n - x_0},$$

on $P_{i_1, \dots, i_k}(x)$ és el polinomi interpolador de Lagrange del problema interpolador del problema $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}}$. Per tant per la proposició 15.2.9 trobem

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_1, \dots, x_n] - [x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

com volíem veure. \square

15.2.3 Error en la interpolació de Lagrange

Teorema 15.2.12. *Siguin $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe de diferenciabilitat \mathcal{C}^{n+1} i $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange per $P(x)$ amb abscisses de suport que satisfan $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$. Aleshores per a tot $x \in [a, b]$ tenim*

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega(x),$$

on $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$, per a una certa funció $\xi(x): [a, b] \rightarrow [c, d]$ amb $c = \min\{\min_{i \in [0, n]} \{x_i\}, x\}$ i $d = \max\{\max_{i \in [0, n]} \{x_i\}, x\}$.

Demostració. Fixem $x \in [a, b]$. Tenim $f(x_i) - P(x_i) = 0$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Si imposem $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ i definim la funció

$$F(z) = f(z) - P(z) - \omega(z)S(x)$$

on

$$S(x) = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}. \quad (15.3)$$

Observem que $S(x)$ està ben definida pel Teorema Fonamental de l'Àlgebra.

Observem també que

$$F(x_i) = f(x_i) - P(x_i) - \omega(x_i)S(x) = 0$$

i

$$F(x) = f(x) - P(x) - \omega(x) \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)} = 0$$

és a dir, $F(z)$ existeixen $\xi_0^{(0)}, \dots, \xi_{n+1}^{(0)} \in [a, b]$ tals que $F(\xi_i^{(0)}) = 0$ per a tot $i \in \{0, \dots, n+1\}$ amb $\xi_{i+1}^{(0)} > \xi_i^{(0)}$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$.

Aplicant el 5.2.17 trobem que per a tot $i \in \{1, \dots, n+1\}$ existeixen $\{\xi_i^{(1)}\}_{i=1}^{n+1}$ tals que $F'(\xi_i^{(1)}) = 0$ amb $\xi_i^{(1)} \in (\xi_{i-1}^{(0)}, \xi_i^{(0)})$. Iterant aquest argument trobem que per a $k \in \{0, \dots, n+1\}$ tenim que per a tot $i \in \{k, \dots, n+1\}$ existeixen $\{\xi_i^{(k)}\}_{i=k}^{n+1}$ tals que $F^{(k)}(\xi_i^{(k)}) = 0$ amb $\xi_i^{(k)} \in (\xi_{i-1}^{(k-1)}, \xi_i^{(k-1)})$; i per tant quan $k = n+1$ tenim que existeix $\xi_{n+1}^{(n+1)} \in (\xi_n^{(n)}, \xi_{n+1}^{(n)})$ tal que $F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) = 0$ i trobem

$$F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) - (n+1)!S(x)$$

i per tant, recordant (15.3), tenim

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)})}{(n+1)!} = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}$$

d'on trobem

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \omega(x),$$

com volíem veure. \square

Observació 15.2.13.

$$f(x) - P(x) = [x_0, \dots, x_n, x] \omega(x)$$

Corol·lari 15.2.14. *Sigui $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange. Aleshores existeix un cert $\xi \in [x_0, x_n]$ tal que*

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Exemple 15.2.15. *Considerem el següent problema d'interpolació*

i	0	1	2	4
x_i	100	101	102	103
$\log(x_i)$	$\log(100)$	$\log(101)$	$\log(102)$	$\log(103)$

per $P(x)$. Volem estimar l'error comés en calcular el valor de $P(102.5)$.

Solució. Per la definició de 15.2.1 tenim que aquest problema d'interpolació és de Lagrange. Aleshores, pel Teorema 15.2.12 tenim que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \omega(x)$$

i per tant, amb $f(x) = \log(x)$,

$$\log(x) - P(x) = \frac{-1}{\xi^4(x) 4!} (x - 100)(x - 101)(x - 102)(x - 103)$$

i si prenem $x = 102.5$ tenim

$$\log(102.5) - P(102.5) = \frac{-1}{\xi^4(102.5) 4!} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{-1}{2}$$

amb $\xi(102.5) \in [100, 103]$, i per tant $\frac{1}{103} \leq \frac{1}{\xi(102.5)} \leq \frac{1}{100}$. Aleshores tenim

$$|\log(102.5) - P(x)| = \frac{3 \cdot 5}{2^4 \cdot \xi^4(102.5)} \leq \frac{15}{64} \frac{1}{100^4} \approx 2.34 \cdot 10^{-9}. \quad \diamond$$

15.2.4 Interpolació en nodes equiespaiats

Definició 15.2.16 (Nodes equiespaiats). Sigui $\{x_i\}_{i=0}^n$ abscisses de suport que satisfacin

$$x_i = x_0 + ih$$

amb $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. Aleshores direm que les abscisses de suport $\{x_i\}_{i=0}^n$ són equiespaiades o que un problema d'interpolació $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ és un problema d'interpolació amb nodes equiespaiats.

També denotarem

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{i} \quad \Delta^{n+1} f(x) = \Delta(\Delta^n f(x)).$$

Teorema 15.2.17. *Sigui $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ un problema d'interpolació de Lagrange amb nodes equiespaiats. Aleshores, si $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ tenim*

$$[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

Demostració. Ho farem per inducció sobre n . El cas $n = 1$ és cert, ja que

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (15.2.16)$$

$$= f(x_1) - f(x_0)$$

$$= h \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= h[x_0, x_n] \quad (15.2.8)$$

i per tant

$$[x_0, x_n] = \frac{\Delta f(x_0)}{h}. \quad (15.4)$$

Suposem ara que l'enunciat és cert per a k fix i demostrem-ho pel cas $k + 1$. Tenim que

$$\Delta^{k+1} f(x_0) = \Delta(\Delta^k f(x_0)) \quad (15.2.16)$$

$$= \Delta^k f(x_1) - \Delta^k f(x_0) \quad (15.2.16)$$

$$= k!h^k([x_1, \dots, x_{k+1}] - [x_0, \dots, x_k]) \quad (15.4)$$

$$= k!h^k(k+1)h \frac{[x_1, \dots, x_{k+1}] - [x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$$

$$= (k+1)!h^{k+1}[x_0, \dots, x_{k+1}], \quad (15.2.8)$$

i per tant tenim

$$[x_0, \dots, x_{k+1}] = \frac{\Delta^{k+1} f(x_0)}{(k+1)!h^{k+1}},$$

com volíem veure. □

15.3 Polinomis interpoladors per splines

15.3.1 Interpolació per splines

Definició 15.3.1. Sigui $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^n$ una partició d'un interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció a trossos de classe \mathcal{C}^{p-1} de la forma

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ s_{k+1}(x) & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ \vdots & \\ s_n(x) & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

amb $s_i \in \mathbb{R}_p[x]$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores direm que s és un spline de grau p associat a Δ .

Denotarem

$$S_p(\Delta) = \{s \mid s \text{ és un spline de grau } p \text{ associat a } \Delta\}.$$

Nota 15.3.2. *Només treballarem amb splines cúbics, és a dir, amb $p = 3$, que són els més emparats.*

ai haig de córrer

Bibliografia

- [1] Josep Maria Mondelo. «Apunts de Mètodes Numèrics». 2008.
- [2] Antoni Aubanell, Antoni Benseny i Amadeu Delshams. *Eines bàsiques de càlcul numèric. Amb 87 problemes resolts*. Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1994. ISBN: 84-7929-231-8.
- [3] Richard L. Burden i D. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Castellà. 7a ed. Brooks/Cole, 2000. ISBN: 978-0534382162.
- [4] Miguel Grau Sánchez i Miquel Noguera Batlle. *Càlcul numèric*. Edicions UPC, 2000. ISBN: 9788483013816.
- [5] David R. Kincaid i Cheney E. Ward. *Numerical Analysis. Mathematics of Scientific Computing*. Anglès. 2a ed. Brooks Cole, 1996. ISBN: 978-0534338923.
- [6] Peter Henrici. *Elements of Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, 1964. ISBN: 978-0471372417.
- [7] Germund Dahlquist i Ake Bjorck. *Numerical Methods*. Anglès. Prentice Hall PTR, 1964. ISBN: 978-0136273158.
- [8] Eugene Isaacson i Herbert Bishop Keller. *Analysis of Numerical Methods*. Anglès. Dover Publications, 1966. ISBN: 978-0486680293.
- [9] Josef Stoer i Roland Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Anglès. Springer, 2002. ISBN: 978-0-387-21738-3.
- [10] Brian Kernighan i Dennis Ritchie. *The C Programming Language*. Anglès. 2a ed. Prentice Hall, 1998. ISBN: 978-0131103627.
- [11] Brian Kernighan i Rob Pike. *The Practice of Programming*. Addison-Wesley, 1999. ISBN: 978-0201615869.

La bibliografia del curs inclou els textos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Part VIII

Topologia

L'espai topològic

16.1 Espais mètrics

16.1.1 Boles i oberts

Definició 16.1.1 (Espai mètric). Sigui X un conjunt i $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació que per a tot x, y i z de X satisfà

1. $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
4. $d(x, y) \geq 0$.

Aleshores direm que X amb la distància d és un espai mètric. També direm que d és la distància o mètrica de l'espai mètric.

Definició 16.1.2 (Bola). Sigui X amb la distància d un espai mètric, a un element de X i $r > 0$ un nombre real. Aleshores definim

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

com la bola de radi r centrada en a .

Definició 16.1.3 (Obert). Sigui X amb la distància d un espai mètric i \mathcal{U} un subconjunt de X tals que per a tot element x de \mathcal{U} existeix un $\varepsilon > 0$ real tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Aleshores direm que \mathcal{U} és un obert.

Proposició 16.1.4. *Sigui X amb la distància d un espai mètric i $B(a, r)$ una bola de X . Aleshores $B(a, r)$ és un obert.*

Demostració. Prenem un element b de $B(a, r)$ i definim

$$\varepsilon = \frac{r - d(a, b)}{2}. \quad (16.1)$$

Aleshores considerem la bola $B(b, \varepsilon)$ i tenim que $B(b, \varepsilon) \subseteq B(a, r)$, ja que si prenem un element x de $B(b, \varepsilon)$, per la definició de 16.1.1 trobem que

$$\begin{aligned} d(x, a) &\leq d(x, b) + d(b, a) \\ &< \varepsilon + d(b, a) \end{aligned} \quad (16.1.2)$$

$$= \frac{r - d(a, b)}{2} + d(b, a) \quad (16.1)$$

$$= \frac{r - d(a, b)}{2} + d(a, b) \quad (16.1.1)$$

$$= \frac{r + d(a, b)}{2} < r,$$

ja que, per la definició de 16.1.2 tenim que $d(a, b) < r$ i per tant trobem $r + d(a, b) < 2r$. \square

Proposició 16.1.5 (Propietat de Hausdorff). *Siguin X amb la distància d un espai mètric i x i y dos elements diferents de X . Aleshores existeixen dos oberts \mathcal{U} i \mathcal{V} disjunts tals que x és un element de \mathcal{U} i y és un element de \mathcal{V} .*

Demostració. Definim $r = \frac{d(x, y)}{3}$ i considerem les boles $B(x, r)$ i $B(y, r)$. Per la definició de 16.1.1 i la definició de 16.1.2 tenim que x és un element de $B(x, r)$ i y és un element de $B(y, r)$.

També tenim que les boles $B(x, r)$ i $B(y, r)$ són disjunts, ja que si prenem un element a de X tal que a pertanyi a $B(x, r)$ i a $B(y, r)$ aleshores tenim, per la definició de 16.1.2, que $d(x, a) < r$ i $d(a, y) < r$, i per la definició de 16.1.1 tenim que

$$d(x, a) + d(a, y) \geq d(x, y).$$

Ara bé, tenim per hipòtesi que $r = \frac{d(x, y)}{3}$. Per tant

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, y) \\ &\leq \frac{d(x, y)}{3} + \frac{d(x, y)}{3} \\ &\leq \frac{2d(x, y)}{3} < d(x, y), \end{aligned}$$

i per tant aquest a no existeix i trobem que $B(x, r)$ i $B(y, r)$ són disjunts.

Per acabar, per la proposició 16.1.4 tenim que les boles $B(x, r)$ i $B(y, r)$ són oberts, i hem acabat. \square

16.2 L'espai topològic

16.2.1 Una topologia d'un conjunt i els oberts

Definició 16.2.1 (Topologia). Sigui X un conjunt i τ una família de subconjunts de X tals que

1. \emptyset i X són elements de τ .
2. La intersecció d'una família finita d'elements de τ és un element de τ .
3. La unió d'una família d'elements de τ és un element de τ .

Aleshores direm que τ és una topologia de X o que X amb la topologia τ és un espai topològic.

També direm que els elements de τ són oberts i que els elements de X són punts.

Exemple 16.2.2 (Topologia induïda per una mètrica). *Siguin X amb la distància d'un espai mètric i $\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U} \text{ és un obert}\}$. Volem veure que X amb la topologia τ és un espai topològic.*

Solució. Per la definició d'16.1.3 trobem que \emptyset és un obert, ja que per l'2.1.9 tenim que \emptyset és un subconjunt de X , i per a tot x de X existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon)$ pertany a \emptyset . També tenim que X és un obert, ja que pel 2.1.3 tenim que $X \subseteq X$ i si prenem un element x de X tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$ és un subconjunt de X . Per tant \emptyset i X són elements de τ .

Prenem $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ una família d'elements de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i.$$

Sigui x un element de \mathcal{U} . Per la definició d'16.2.1 tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ existeix un $\varepsilon_i > 0$ real tal que

$$B(x, \varepsilon_i) \subseteq \mathcal{U}_i.$$

Per tant, si definim $\varepsilon = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \varepsilon_i$. Aleshores per la definició de 16.1.2 tenim que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \quad \text{per a tot } i \in \{1, \dots, n\}.$$

i per tant $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ i per la definició d'16.2.1 tenim que \mathcal{U} és un obert.

Prenem $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família d'oberts de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Sigui x un element de \mathcal{U} . Per la definició d'2.1.12 tenim que existeix un $i \in I$ tal que \mathcal{U}_i conté x . Ara bé, per hipòtesi tenim que \mathcal{U}_i és un obert, i per la definició d'16.1.3 trobem que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon)$ és un subconjunt de \mathcal{U}_i , i com que \mathcal{U}_i és un subconjunt de \mathcal{U} tenim que $B(x, \varepsilon)$ també és un subconjunt de \mathcal{U} , i per la definició d'16.1.3 trobem que \mathcal{U} és un obert, i per la definició d'16.2.1 hem acabat. \diamond

Exemple 16.2.3 (Topologia grollera). *Siguin X i $\tau = \{\emptyset, X\}$ dos conjunts. Aleshores τ és una topologia de X .*

Solució. Comprovem les condicions de la definició de topologia. Com que $\tau = \{\emptyset, X\}$ tenim que \emptyset i X són elements de τ . Observem també que $\emptyset \cap X = \emptyset$, $X \cap X = X$ i $\emptyset \cup X = X \cup X = X$, i per la definició de 16.2.1, tenim que τ és una topologia de X . \diamond

Exemple 16.2.4 (Topologia discreta). *Siguin X i $\tau = \mathcal{P}(X)$ dos conjunts. Aleshores τ és una topologia de X .*

Solució. Tenim per l'2.1.4 que \emptyset i X són subconjunts de τ , ja que per l'2.1.9 trobem que $\emptyset \subseteq X$, i pel 2.1.3 trobem que $X \subseteq X$.

Per la definició d'2.1.12 trobem que si $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és una família de subconjunts de X aleshores

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \subseteq X,$$

i per la definició d'2.1.13 trobem que si $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ és una família de subconjunts de X aleshores

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \subseteq X,$$

i per tant, com que $\tau = \mathcal{P}(X)$ trobem per la definició de 16.2.1 que τ és una topologia de X . \diamond

16.2.2 Tancats

Definició 16.2.5 (Tancat). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i \mathcal{C} un subconjunt de X tal que $X \setminus \mathcal{C}$ sigui obert. Aleshores direm que \mathcal{C} és tancat.

Teorema 16.2.6. *Sigui X amb la topologia τ un espai topològic. Aleshores*

1. \emptyset i X són tancats.
2. La unió de qualsevol família finita de tancats és un tancat.
3. La intersecció de qualsevol família de tancats és un tancat.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Tenim que $X \setminus \emptyset = X$. Per la definició d'16.2.1 tenim que X és un obert, i per la definició de 16.2.5 trobem que \emptyset és un tancat.

També tenim que $X \setminus X = \emptyset$. Per la definició d'16.2.1 tenim que \emptyset és un obert, i per la definició de 16.2.5 trobem que X és un tancat.

Veiem ara el punt (2). Prenem una família $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^n$ de tancats de X i considerem

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i = X \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i \right)^{\complement}.$$

Per la 1.1.17 trobem que

$$\begin{aligned} X \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i \right)^{\complement} &= X \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}_i^{\complement} \right) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X \cap \mathcal{C}_i^{\complement}) \\ &= \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{C}_i). \end{aligned}$$

Per hipòtesi tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ el conjunt \mathcal{C}_i és un tancat, i per la definició de 16.2.5 tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ el conjunt $X \setminus \mathcal{C}_i$ és un

obert, i per la definició d'16.2.1 tenim que $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{C}_i)$ és un obert. Ara bé, tenim que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \mathcal{C}_i),$$

i per tant, per la definició de 16.2.5 trobem que $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ és un tancat.

Veiem per acabar el punt (3). Prenem una família $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ de tancats de X i considerem

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = X \cap \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \right)^c.$$

Per la 1.1.18 trobem que

$$\begin{aligned} X \cap \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \right)^c &= X \cap \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i^c \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} (X \cap \mathcal{C}_i^c) \\ &= \bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i). \end{aligned}$$

Ara bé, per la definició de 16.2.5 tenim que per a tot $i \in I$ el conjunt $X \setminus \mathcal{C}_i$ és un obert, i per la definició d'16.2.1 trobem que el conjunt $\bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i)$ és un obert. Tenim

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i),$$

i, de nou per la definició de 16.2.5, tenim que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ és un tancat, com volíem veure. \square

16.2.3 Base d'una topologia

Definició 16.2.7 (Base d'una topologia). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i \mathcal{B} una família d'oberts tals que per a tot obert \mathcal{U} de X i per a tot punt x de \mathcal{U} existeix un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathcal{U}$. Aleshores direm que \mathcal{B} és una base de la topologia τ .

Exemple 16.2.8. Sigui X amb la distància d un espai mètric i

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in X \text{ i } \varepsilon > 0\}$$

un conjunt. Aleshores \mathcal{B} és una base de la topologia τ induïda per la mètrica.

Solució. Tenim que

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U} \text{ és un obert}\}.$$

Prenem doncs un obert \mathcal{U} de τ i un punt x de \mathcal{U} . Per la definició d'16.1.3 tenim que existeix un $\varepsilon > 0$ real tal que $B(x, \varepsilon)$ és un subconjunt de \mathcal{U} , i per la definició de 16.2.7 hem acabat. \diamond

Definició 16.2.9 (Finor d'una topologia). Sigui X un conjunt i τ, τ' dues topologies de X tals que $\tau \subset \tau'$. Aleshores direm que τ' és més fina que τ .

Proposició 16.2.10. *Siguin X un conjunt i \mathcal{B} una família de subconjunts de X tals que*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

i tal que per a tot \mathcal{U} i \mathcal{V} de \mathcal{B} i per a tot x de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existeix un \mathcal{W} de \mathcal{B} tal que x pertanyi a \mathcal{W} i $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Aleshores existeix una única topologia τ de X tal que \mathcal{B} és una base de τ i τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} .

Demostració. Definim

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ amb } B_i \in \mathcal{B}\} \quad (16.2)$$

Observem que X i \emptyset pertanyen a τ .

Siguin \mathcal{U} i \mathcal{V} dos elements de \mathcal{B} i prenem un element x de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Per hipòtesi tenim que existeix un element \mathcal{W}_x de \mathcal{B} tal que $x \in \mathcal{W}_x \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Per tant

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}} \mathcal{W}_x,$$

i per la definició del conjunt τ tenim que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ és un element de τ .

Prenem dos elements \mathcal{U} i \mathcal{V} del conjunt τ . Per la definició (16.2) trobem que existeixen dues famílies $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ i $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \quad \text{i} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j.$$

Per tant tenim que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}_j),$$

i per la definició (16.2) trobem que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ pertany a τ . Per tant per la definició de 16.2.1 trobem que τ és una topologia de X .

Veiem ara que \mathcal{B} és base de la topologia τ . Prenem un obert \mathcal{U} de τ i x un element de \mathcal{U} . Per la definició (16.2) tenim que existeix una família $\{B_i\}_{i \in I}$ d'elements de \mathcal{B} tal que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Per tant existeix un element B de \mathcal{B} tal que $x \in B$ i $B \subseteq \mathcal{U}$ i per la definició de 16.2.7 trobem que \mathcal{B} és una base de la topologia τ .

Continuem veient que τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} . Suposem que existeix una topologia τ' de X tal que τ és més fina que τ' i tal que τ' conté els elements de \mathcal{B} . Per la definició de 16.2.9 això és que $\tau' \subset \tau$.

Prenem un obert \mathcal{U} de τ . Per la definició (16.2) trobem que existeix una família $\{B_i\}_{i \in I}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Ara bé, tenim per hipòtesi que \mathcal{B} és un subconjunt de la topologia τ' , i per la definició de 16.2.1 trobem que \mathcal{U} pertany a τ' . Per tant ha de ser $\tau \subseteq \tau'$, i trobem que τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} .

Veiem ara que aquesta topologia τ és única. Suposem que existeix una altre topologia τ' tal que \mathcal{B} és una base de τ' i τ' és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} .

Prenem un obert \mathcal{U} de τ . Per la definició (16.2) trobem que existeix una família $\{B_i\}_{i \in I}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Per la definició de 16.2.1 tenim que \mathcal{U} és un element de τ' , ja que per hipòtesi \mathcal{B} és un subconjunt de τ' . Per tant tenim que $\tau \subseteq \tau'$. Ara bé, ja hem vist que τ és la topologia menys fina que conté els elements de \mathcal{B} , i per la definició de 16.2.9 això és que $\tau' \subseteq \tau$, i pel 2.1.3 ha de ser $\tau = \tau'$, com volíem veure. \square

16.2.4 Entorns, interior i adherència

Definició 16.2.11 (Entorn). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic, x un punt i N un conjunt tal que existeix un obert \mathcal{U} satisfent que x és un element de \mathcal{U} i \mathcal{U} és un subconjunt de N . Aleshores direm que N és un entorn de x .

També direm que x és un punt interior de N .

Observació 16.2.12. Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i x un punt. Aleshores existeix un subconjunt N de X tal que N és un entorn de x .

Demostració. Si $N = X$ tenim $x \in X \subseteq N$. Per la definició de 16.2.1 tenim que X és un obert i per la definició d'16.2.11 trobem que N és un entorn de x . \square

Definició 16.2.13 (Interior). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic, x un punt de X , A subconjunt de X i

$$\text{Int}(A) = \{x \in X \mid A \text{ és un entorn de } x\}.$$

Aleshores direm que $\text{Int}(A)$ és l'interior del conjunt A .

Proposició 16.2.14. Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores $\text{Int}(A)$ és un obert.

Demostració. Prenem un punt x de $\text{Int}(A)$. Per la definició d'16.2.13 tenim que existeix un obert \mathcal{U}_x tal que $x \in \mathcal{U}_x$ i $\mathcal{U}_x \subseteq A$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \text{Int}(A) &= \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \text{Int}(A) = \text{Int}(A). \end{aligned}$$

Per tant tenim que

$$\text{Int}(A) \subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \quad \text{i} \quad \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \subseteq \text{Int}(A),$$

i pel 2.1.3 trobem

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x$$

i per la definició de 16.2.1 trobem que $\text{Int}(A)$ és un obert. \square

Proposició 16.2.15. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i*

$$Y = \{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subseteq A\}.$$

Aleshores

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{\mathcal{U} \in Y} \mathcal{U}.$$

Demostració. Sigui x un element de A tal que existeixi un obert \mathcal{U}_x satisfent que x és un element de \mathcal{U}_x i \mathcal{U}_x és un subconjunt de A . Aleshores tenim

$$\begin{aligned} \text{Int}(A) &= \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \mathcal{U}_x \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \text{Int}(A)} \text{Int}(A) = \text{Int}(A) \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem

$$\text{Int}(A) = \bigcup_{\mathcal{U} \in Y} \mathcal{U}$$

com volíem veure. \square

Corol·lari 16.2.16. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i \mathcal{U} un obert tal que \mathcal{U} sigui un subconjunt de A . Aleshores \mathcal{U} és un subconjunt de $\text{Int}(A)$.*

Corol·lari 16.2.17. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores A és un obert si i només si $A = \text{Int}(A)$.*

Definició 16.2.18 (Punt adherent). *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i x un punt tal que per a tot entorn N de x tenim*

$$A \cap N \neq \emptyset.$$

Aleshores direm que x és un punt adherent a A .

Definició 16.2.19 (Clausura). *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un conjunt. Aleshores direm que*

$$\text{Cl}(A) = \{x \in X \mid x \text{ és un punt adherent a } A\}$$

és la clausura de A .

Observació 16.2.20. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores*

$$A \subseteq \text{Cl}(A).$$

Proposició 16.2.21. *Siguin X amb τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores $\text{Cl}(A)$ és un tancat.*

Demostració. Prenem un element x de $X \setminus \text{Cl}(A)$. Per la definició de 16.2.19 tenim que existeix un entorn N de x tal que

$$A \cap N = \emptyset, \quad (16.3)$$

i per la definició d'16.2.11 tenim que existeix un obert \mathcal{U}_x tal que x és un element de \mathcal{U}_x i que \mathcal{U}_x és un subconjunt de N . Per tant, per (16.3) tenim que $A \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$.

Per tant trobem

$$\begin{aligned} X \setminus \text{Cl}(A) &= \bigcup_{x \in X \setminus \text{Cl}(A)} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in X \setminus \text{Cl}(A)} \mathcal{U}_x \subseteq X \setminus \text{Cl}(A), \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem que

$$X \setminus \text{Cl}(A) \subseteq \bigcup_{x \in X \setminus \text{Cl}(A)} \mathcal{U}_x,$$

i com que \mathcal{U}_x és un obert, per la definició de 16.2.1 tenim que $X \setminus \text{Cl}(A)$ és un obert, i per la definició de 16.2.5 trobem que $\text{Cl}(A)$ és un tancat. \square

Proposició 16.2.22. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i*

$$Y = \{\mathcal{C} \subseteq X \mid A \subseteq \mathcal{C} \text{ i } \mathcal{C} \text{ és un tancat}\}.$$

Aleshores

$$\text{Cl}(A) = \bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C}.$$

Demostració. Sigui x un punt adherent a A amb $x \notin A$. Suposem que existeix un tancat \mathcal{C} tal que A és un subconjunt de \mathcal{C} i tal que x no pertany a \mathcal{C} . Aleshores x és un element de $X \setminus \mathcal{C}$, i per la definició de 16.2.5 tenim que $\mathcal{U} = X \setminus \mathcal{C}$ és un obert. Ara bé, per la definició d'16.2.11 tenim que \mathcal{U} és un entorn de x , però A és un subconjunt de \mathcal{C} , i per tant tenim que $X \setminus \mathcal{C}$ és un subconjunt de $X \setminus A$, i tenim que \mathcal{U} és un subconjunt de $X \setminus A$, i per tant $A \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Ara bé, per la definició de 16.2.18 tenim que $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Per tant ha de ser que x pertany a \mathcal{C} i trobem que

$$\text{Cl}(A) \subseteq \bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C}. \quad (16.4)$$

Per la proposició 16.2.21 tenim que $\text{Cl}(A)$ és un tancat, i per tant $\text{Cl}(A)$ és un element de Y i tenim que

$$\bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C} \subseteq \text{Cl}(A). \quad (16.5)$$

Ara bé, tenim (16.4) i (16.5), i pel 2.1.3 trobem que

$$\text{Cl}(A) = \bigcap_{\mathcal{C} \in Y} \mathcal{C}. \quad \square$$

Corol·lari 16.2.23. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un subconjunt de X i \mathcal{C} un tancat tal que A és un subconjunt de \mathcal{C} . Aleshores $\text{Cl}(A) \subseteq \mathcal{C}$.*

Corol·lari 16.2.24. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores A és tancat si i només si $A = \text{Cl}(A)$.*

Proposició 16.2.25. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores*

$$\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}(A).$$

Demostració. Prenem un element x de $\text{Cl}(X \setminus A)$. Per la definició de 16.2.19 tenim que per a tot obert \mathcal{U} que conté x tenim que

$$\mathcal{U} \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Ara bé, per la definició d'16.2.13 que $\text{Int}(A)$ és un subconjunt de A , i per tant $X \setminus A$ és un subconjunt de $X \setminus \text{Int}(A)$, i per tant $\mathcal{U} \cap (X \setminus \text{Int}(A)) \neq \emptyset$. Per tant per la definició d'16.2.13 trobem que

$$\text{Cl}(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{Int}(A) \quad (16.6)$$

Prenem ara un element x de $X \setminus \text{Int}(A)$. Per la definició d'16.2.13 tenim que no existeix cap obert \mathcal{U} tal que x sigui un element de \mathcal{U} i \mathcal{U} sigui un subconjunt de A , o equivalentment, que $\mathcal{U} \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ per a tot obert \mathcal{U} tal que x sigui un element de \mathcal{U} i que \mathcal{U} sigui un subconjunt de A . Ara bé, per la definició de 16.2.19 tenim que \mathcal{U} és un element de $\text{Cl}(X \setminus A)$, i per tant trobem que

$$X \setminus \text{Int}(A) \subseteq \text{Cl}(X \setminus A). \quad (16.7)$$

Per tant, amb (16.6) i (16.7) i el 2.1.3 trobem que $\text{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \text{Int}(A)$, com volíem veure. \square

16.3 Aplicacions contínues

16.3.1 Aplicacions obertes, tancades i contínues

Definició 16.3.1 (Aplicació oberta). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot obert \mathcal{U} de X tenim que el conjunt $\{f(x) \in Y \mid x \in \mathcal{U}\}$ és un obert de Y . Aleshores direm que f és una aplicació oberta.

Observació 16.3.2. *La composició d'aplicacions obertes és oberta.*

Definició 16.3.3 (Aplicació tancada). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot tancat \mathcal{C} de X tenim que el conjunt $\{f(x) \in Y \mid x \in \mathcal{C}\}$ és un tancat de Y . Aleshores direm que f és una aplicació tancada.

Observació 16.3.4. *La composició d'aplicacions tancades és tancada.*

Definició 16.3.5 (Aplicació contínua). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació tal que per a tot obert \mathcal{V} de Y el conjunt $\{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{V}\}$ és un obert de X . Aleshores direm que f és una aplicació contínua.

Observació 16.3.6. *La composició d'aplicacions contínues és contínua.*

Exemple 16.3.7. *Considerem*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$

Volem veure que S^n és un tancat de \mathbb{R}^{n+1} .

Solució. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|. \end{aligned}$$

Veiem que f és una aplicació contínua. Sigui \mathcal{V} un obert de \mathbb{R} i considerem el conjunt

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \in \mathcal{V}\}. \quad (16.8)$$

Prenem un element x de \mathbb{R}^{n+1} . Com que, per hipòtesi, tenim que \mathcal{V} és un obert de \mathbb{R} , per la definició d'16.1.3 tenim que existeix un real $\delta > 0$ tal que la bola $B(f(x), \delta)$ és un subconjunt de \mathcal{V} , i per la definició (16.8) tenim que existeix un element y de \mathbb{R}^{n+1} tal que $f(y)$ és un element de $B(f(x), \delta)$, i per la definició de 16.1.2 trobem que $|f(x) - f(y)| < \delta$. \diamond

16.3.2 Homeomorfismes entre topologies

Definició 16.3.8 (Homeomorfisme). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació bijectiva, oberta i contínua. Aleshores direm que f és un homeomorfisme.

Definició 16.3.9 (Espais topològics homeomorfs). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics tals que existeix un homeomorfisme $f: X \rightarrow Y$. Aleshores direm que X i Y són dos espais topològics homeomorfs. També denotarem

$$X \cong Y.$$

Exemple 16.3.10. *Volem veure que \mathbb{R} és homeomorf a l'interval $(0, 1)$.*

Solució. \diamond

Proposició 16.3.11. *Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics. Aleshores la relació*

$$X \cong Y \iff X \text{ és homeomorf a } Y$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'equivalència:

1. Reflexiva: Tenim que l'aplicació Id_X és bijectiva, oberta i contínua. Per la definició d'16.3.8 tenim que Id_x és un homeomorfisme, i per la definició d'16.3.9 tenim que $X \cong X$.
2. Simètrica: Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics homeomorfs. Per la definició d'16.3.9 tenim que existeix un homeomorfisme $f: X \rightarrow Y$.

Pel Teorema 2.2.19 trobem que existeix l'aplicació inversa f^{-1} de Y a X , i pel corollari 2.2.20 tenim que l'aplicació f^{-1} és bijectiva.

També trobem que f^{-1} és oberta, ja que per la definició d'16.3.8 tenim que f és contínua, i per la definició d'16.3.1 i la definició d'16.3.5 trobem que f^{-1} és oberta. De mateixa manera trobem que f^{-1} és contínua, ja que per la definició d'16.3.8 tenim que f és oberta, i per la definició d'16.3.5 i la definició d'16.3.1 trobem que f^{-1} és contínua.

Per tant, per la definició d'16.3.8 trobem que f^{-1} és un homeomorfisme entre topologies i per tant $Y \cong X$.

3. Transitiva: Siguin X_1 amb la topologia τ_1 , X_2 amb la topologia τ_2 i X_3 amb la topologia τ_3 tres espais topològics tals que $X_1 \cong X_2$ i $X_2 \cong X_3$. Per la definició d'16.3.9 tenim que existeixen dos homeomorfismes $f: X_1 \rightarrow X_2$ i $g: X_2 \rightarrow X_3$.

Considerem l'aplicació $h = g \circ f$. Pel Teorema 2.2.15 trobem que h és bijectiva, i per l'observació 16.3.2 i l'observació 16.3.6 trobem que h és oberta i contínua, i per la definició d'16.3.8 trobem que h és un homeomorfisme entre X_1 i X_3 , i per la definició d'16.3.9 trobem que $X_1 \cong X_3$.

I per la definició de 2.3.2 hem acabat. □



Altres topologies

17.1 Topologies induïdes

17.1.1 La topologia induïda per un subconjunt

Proposició 17.1.1. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores A amb la topologia*

$$\tau_A = \{\mathcal{U} \subseteq A \mid \text{Existeix un obert } \mathcal{W} \text{ de } X \text{ tal que } \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap A\} \quad (17.1)$$

és un espai topològic.

Demostració. Observem que A pertany a τ_A , ja que per la definició de 16.2.1 tenim que X és un obert de X , i trobem $X \cap A = A$. També tenim que \emptyset pertany a τ_A , ja que per la definició de 16.2.1 tenim que \emptyset és un obert de X , i trobem $\emptyset \cap A = \emptyset$.

Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família d'elements de τ_A . Per la definició (17.1) tenim que existeix una família $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$ d'oberts de X tals que $\mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \cap A$, per a tot i de I . Considerem ara

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i \cap A,$$

i tenim

$$\mathcal{U} = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i \right),$$

i per la definició de 16.2.1 tenim que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i$ és un obert de X , i per la definició (17.1) trobem que \mathcal{U} pertany a τ_A .

Sigui $\{\mathcal{U}\}_{i=1}^n$ una família d'elements de τ_A . Per la definició (17.1) tenim que existeix una família $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1}^n$ d'oberts de X tals que $\mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \cap A$, per a tot i de $\{1, \dots, n\}$. Considerem ara

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i.$$

Tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \cap A,$$

i tenim

$$\mathcal{U} = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i \right),$$

i per la definició de 16.2.1 tenim que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{W}_i$ és un obert de X , i per la definició (17.1) trobem que \mathcal{U} pertany a τ_A . Per tant per la definició d'16.2.1 trobem que A amb la topologia τ_A és un espai topològic. \square

Definició 17.1.2 (Topologia induïda per un subconjunt). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores denotem

$$\tau_A = \{\mathcal{U} \subseteq A \mid \text{Existeix un obert } \mathcal{W} \text{ de } X \text{ tal que } \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap A\}$$

i direm que τ_A és la topologia induïda per A .

Aquesta definició té sentit per la proposició 17.1.1.

Definició 17.1.3 (Subespai topològic). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i A un subconjunt de X . Aleshores direm que A amb la topologia τ_A és un subespai topològic de X .

Proposició 17.1.4. *Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i τ_A la topologia induïda per un subconjunt A de X . Aleshores \mathcal{C} és un tancat de A si i només si existeix un tancat \mathcal{K} de τ tal que $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{K}$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Sigui \mathcal{C} un tancat de A . Per la definició de 16.2.5 tenim que això és equivalent a que $A \setminus \mathcal{C}$ és un obert. Per la definició de 17.1.2 tenim que això és si i només si existeix un obert \mathcal{U} de X tal que $A \setminus \mathcal{C} = \mathcal{U} \cap A$. Ara bé, tenim que $\mathcal{U} = X \setminus (X \setminus \mathcal{U})$, i per la definició de 16.2.5 tenim que $\mathcal{K} = X \setminus \mathcal{U}$ és un tancat, i tenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= A \setminus A \setminus \mathcal{C} \\ &= A \setminus (\mathcal{U} \cap A) \\ &= A \setminus \mathcal{U} \\ &= A \cap (X \setminus \mathcal{U}) \\ &= A \cap \mathcal{K} \end{aligned}$$

i hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Sigui \mathcal{K} un tancat de X . Prenem $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{K}$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} A \setminus \mathcal{C} &= A \setminus (A \cap \mathcal{K}) \\ &= A \cap (X \setminus \mathcal{K}). \end{aligned}$$

Ara bé, per hipòtesi, tenim que \mathcal{K} és un tancat de X , i per tant $X \setminus \mathcal{K}$ és un obert, i per la definició de 17.1.2 trobem que $A \cap (X \setminus \mathcal{K})$ és un obert de A , i per la definició de 16.2.5 tenim que $A \setminus \mathcal{C}$ és un tancat de A , com volíem veure. \square

Proposició 17.1.5. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un obert de X , τ_A la topologia induïda per A i \mathcal{U} un subconjunt de A . Aleshores \mathcal{U} és un obert de A si i només si \mathcal{U} és un obert de X .*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que \mathcal{U} és un obert de A . Per la definició de 17.1.2 tenim que existeix un obert \mathcal{W} de X tal que $\mathcal{U} = A \cap \mathcal{W}$. Ara bé, com que, per hipòtesi, A i \mathcal{W} són dos oberts de X per la definició de 16.2.1 trobem que \mathcal{U} és un obert de X .

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que \mathcal{U} és un obert de X . Com que, per la definició de 16.2.1, \mathcal{U} és un subconjunt de A , tenim que $\mathcal{U} = A \cap \mathcal{U}$, i per la definició de 17.1.2 trobem que \mathcal{U} és un obert de A . \square

Proposició 17.1.6. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic, A un tancat de X , τ_A la topologia induïda per A i \mathcal{C} un subconjunt de A . Aleshores \mathcal{C} és un tancat de A si i només si \mathcal{C} és un tancat de X .*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que \mathcal{C} és un tancat de A . Per la proposició 17.1.4 tenim que existeix un tancat $\text{tancat}K$ de X tal que $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{K}$. Ara bé, com que A i \mathcal{K} són dos tancats de X , pel Teorema 16.2.6 trobem que \mathcal{C} és un tancat de X .

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que \mathcal{C} és un tancat de X . Com que, per la definició de 16.2.1, \mathcal{C} és un subconjunt de A , tenim que $\mathcal{C} = A \cap \mathcal{C}$, i per la definició de 17.1.2 trobem que \mathcal{C} és un tancat de A . \square

17.1.2 La topologia producte

Proposició 17.1.7. *Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics,*

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y \subseteq X \times Y \mid \mathcal{V}_X \in \tau_X \text{ i } \mathcal{V}_Y \in \tau_Y\}$$

i

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \times Y \mid \text{Existeix una família } \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\}.$$

Aleshores τ és una topologia de $X \times Y$.

Demostració. Per l'2.1.9 trobem que \emptyset és un subconjunt de \mathcal{B} , i per la definició de τ trobem que \emptyset és un element de τ .

Per la definició de 16.2.1 trobem que X és un obert de X i Y és un obert de Y . Per tant $X \times Y$ és un element de \mathcal{B} i per la definició de τ trobem que $X \times Y$ és un element de τ .

Prenem una família $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ d'elements de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Per la definició de τ trobem que per a cada i de I existeix una família $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J_i}$ d'elements de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U}_i = \bigcup_{j \in J_i} \mathcal{V}_j.$$

Ara bé, per la definició de \mathcal{B} trobem que per a tot j de J_i existeixen oberts $\mathcal{V}_{j,X}$ de X i oberts $\mathcal{V}_{j,Y}$ de Y tals que

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y},$$

i per tant trobem que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} (\mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y}),$$

i per la definició de τ trobem que \mathcal{U} és un element de τ .

Siguin \mathcal{U} i \mathcal{V} dos elements de τ i considerem

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}.$$

Per la definició de τ tenim que existeixen dues famílies $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ i $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{B} tals que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \quad \text{i} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j,$$

i per la definició de \mathcal{B} trobem que per a cada i de I existeixen un obert $\mathcal{U}_{i,X}$ de X i un obert $\mathcal{U}_{i,Y}$ de Y tals que

$$\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{i,X} \times \mathcal{U}_{i,Y}$$

i per a cada j de J existeixen un obert $\mathcal{V}_{j,X}$ de X i un obert $\mathcal{V}_{j,Y}$ de Y tals que

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y}.$$

Per tant tenim que

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_{i,X} \times \mathcal{U}_{i,Y}) \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} (\mathcal{V}_{j,X} \times \mathcal{V}_{j,Y}) \right)$$

i trobem que

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,X} \times \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,Y} \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,X} \times \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,Y} \right)$$

i per tant

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,X} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,X} \right) \times \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,Y} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,Y} \right),$$

i per la definició de 16.2.1 trobem que

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,X} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,X} \quad \text{i} \quad \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_{i,Y} \cap \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_{j,Y}$$

són oberts, i per la definició de τ trobem que \mathcal{U} és un element de τ , i per la definició de 16.2.1 trobem que τ és una topologia de $X \times Y$, com volíem veure. \square

Definició 17.1.8 (Topologia producte). Siguin X amb la topologia τ_X i Y amb la topologia τ_Y dos espais topològics i

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y \subseteq X \times Y \mid \mathcal{V}_X \in \tau_X \text{ i } \mathcal{V}_Y \in \tau_Y\}.$$

Aleshores direm que $X \times Y$ amb la topologia

$$\tau = \{\mathcal{U} \subseteq X \times Y \mid \text{Existeix una família } \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } \mathcal{U} = \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i\}$$

és l'espai topològic producte de X i Y i que τ és la topologia producte de X i Y .

Aquesta definició té sentit per la proposició 17.1.7

Exemple 17.1.9 (Projeccions). Siguin $X \times Y$ amb la topologia τ la topologia producte de X i Y i

$$\begin{aligned} \pi_X: X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

un aplicació. Volem veure que π_X és contínua i oberta.

Solució. Comencem veient que π_X és contínua. Prenem un obert \mathcal{U} de X i considerem

$$\{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x, y) \in \mathcal{U}\}.$$

Tenim doncs que

$$\mathcal{U} \times Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \pi_X(x, y) \in \mathcal{U}\},$$

i com que, per hipòtesi, Y és un espai topològic, tenim que Y és un obert de Y , i de nou per hipòtesi tenim que \mathcal{U} és un obert de X . Per tant trobem que $\mathcal{U} \times Y$ és un obert de $X \times Y$, i per la definició d'16.3.5 trobem que π_X és contínua.

Veiem ara que π_X és oberta. Prenem un obert A de $X \times Y$ i un punt x de $\{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\}$. Aleshores tenim que existeix un punt a de A tal que $\pi_X(a) = x$. Per la definició de 17.1.8 tenim que existeixen un obert \mathcal{U}_x de X i un obert \mathcal{V}_x de Y tals que

$$a \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_x \subseteq A.$$

Observem que

$$\mathcal{U} = \{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_x\}$$

és un obert de X , i per tant

$$x \in \mathcal{U}_x \subseteq \{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\},$$

i, denotant $B = \{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\}$, trobem que

$$\begin{aligned} B &\subseteq \bigcup_{x \in B} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in B} \mathcal{U}_x \subseteq B, \end{aligned}$$

i per tant trobem que $\{\pi_X(x, y) \in X \mid (x, y) \in A\}$ és un obert de X , i per la definició d'16.3.1 trobem que π_X és una aplicació oberta. \diamond

Corol·lari 17.1.10. *Sigui X un espai topològic i y un element. Aleshores*

$$X \times \{y\} \cong X.$$

Teorema 17.1.11. *Siguin Z amb la topologia τ_Z un espai topològic, $X \times Y$ amb la topologia producte de X i Y , $f: Z \rightarrow X \times Y$ una aplicació. Aleshores f és contínua si i només si les aplicacions $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que f és contínua. Aleshores per l'exemple 17.1.9 trobem que les aplicacions π_X i π_Y són contínues i per l'observació 16.3.6 hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que les aplicacions $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues.

Sigui $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ un obert de $X \times Y$. Per la definició de 17.1.8 tenim que \mathcal{V} és un obert de X i \mathcal{W} és un obert de Y . Ara bé, com que per hipòtesi les aplicacions $\pi_X \circ f$ i $\pi_Y \circ f$ són contínues, tenim per la definició d'16.3.5 que els conjunts

$$\mathcal{U}_X = \{x \in Z \mid \pi_X \circ f(x) \in \mathcal{V}\} \quad \text{i} \quad \mathcal{U}_Y = \{x \in Z \mid \pi_Y \circ f(x) \in \mathcal{W}\}$$

són oberts de Z , i per la definició de 16.2.1 trobem que el conjunt

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_X \cup \mathcal{U}_Y$$

és un obert de Z . Per tant tenim que

$$\mathcal{U} = \{x \in Z \mid f(x) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}\},$$

és un obert de Z , i com que per hipòtesi el conjunt $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ és un obert de $X \times Y$, per la definició d'16.3.1 trobem que f és una aplicació oberta. \square

Proposició 17.1.12. *Siguin X_1 amb la topologia τ_{X_1} , X_2 amb la topologia τ_{X_2} , Y_1 amb la topologia τ_{Y_1} i Y_2 amb la topologia τ_{Y_2} quatre espais topològics tals que*

$$X_1 \cong X_2 \quad \text{i} \quad Y_1 \cong Y_2.$$

Aleshores

$$X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2.$$

Demostració. Per la definició d'16.3.9 trobem que existeixen dos homeomorfismes $f: X_1 \rightarrow X_2$ i $g: Y_1 \rightarrow Y_2$. Considerem doncs l'aplicació

$$\begin{aligned} h: X_1 \times Y_1 &\rightarrow X_2 \times Y_2 \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)). \end{aligned}$$

Com que, per hipòtesi, les aplicacions f i g són homeomorfismes, tenim per la definició d'16.3.8 que f i g són bijectives. Ara bé, trobem que h també és bijectiva, ja que té per inversa la funció

$$\begin{aligned} h^{-1}: X_2 \times Y_2 &\rightarrow X_1 \times Y_1 \\ (x, y) &\mapsto (f^{-1}(x), g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Continuem veient que h és una aplicació oberta. Per la definició d'16.3.1 i la definició d'16.3.5 en tenim prou amb veure que h^{-1} és una aplicació contínua. Observem que per a tot (x, y) de $X_2 \times Y_2$ tenim

$$\pi_{X_1} \circ h^{-1}(x, y) = f^{-1}(x) \quad \text{i} \quad \pi_{Y_1} \circ h^{-1}(x, y) = g^{-1}(y),$$

i com que, per hipòtesi, les aplicacions f^{-1} i g^{-1} són contínues tenim pel Teorema 17.1.11 que l'aplicació h^{-1} és contínua, i per tant h és una aplicació oberta.

Per acabar veiem ara que h és una aplicació contínua. Observem que per a tot (x, y) de $X_1 \times Y_1$ tenim

$$\pi_{X_2} \circ h(x, y) = f(x) \quad \text{i} \quad \pi_{Y_2} \circ h(x, y) = g(y),$$

i com que, per hipòtesi, les aplicacions f i g són aplicacions contínues tenim pel Teorema 17.1.11 que l'aplicació h és contínua.

Per tant per la definició d'16.3.8 trobem que h és un homeomorfisme, i per la definició d'16.3.9 trobem que $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$, com volíem veure. \square

17.2 La topologia quocient

17.2.1 Topologia quocient per una aplicació

Proposició 17.2.1. *Siguin X amb la topologia τ_X un espai topològic, Y un conjunt i $p: X \rightarrow Y$ una aplicació exhaustiva. Aleshores*

$$\tau_Y = \{\mathcal{U} \subseteq Y \mid \text{Im}^{-1}\mathcal{U}(p) \in \tau_X\} \quad (17.2)$$

és una topologia de Y .

Demostració. Comprovem que τ_Y satisfà la definició de 16.2.1. Tenim que \emptyset pertany a τ_Y . Per la definició d'5.2.2 trobem que $\text{Im}_{\emptyset}(p) = \emptyset$, i com que per la definició de 16.2.1 tenim que \emptyset pertany a τ_X trobem que \emptyset és un element de τ_Y .

Veiem ara que Y pertany a τ_Y . Per la definició d'5.2.2 i com que, per hipòtesi, p és exhaustiva, per la definició d'2.2.8 tenim que $\text{Im}_Y^{-1}(p) = X$, i per la definició de 16.2.1 tenim que X és un obert, i per tant Y pertany a τ_Y .

Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família d'elements de τ_Y . Aleshores tenim que

$$\text{Im}^{-1} \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i(p) = \bigcup_{i \in I} \text{Im}^{-1}\mathcal{U}_i(p),$$

i com que, per (17.2) trobem que $\text{Im}^{-1}\mathcal{U}_i(p)$ és un obert de X per a tot i de I , i per la definició de topologia trobem que

$$\bigcup_{i \in I} \text{Im}^{-1}\mathcal{U}_i(p)$$

és un obert de X , i per tant tenim que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ és un element de τ_Y .

Prenem ara una família $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ d'elements de τ_Y . Tenim que

$$\text{Im}^{-1} \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i(p) = \bigcup_{i=1}^n \text{Im}^{-1}\mathcal{U}_i(p),$$

i com que, per (17.2) trobem que $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(p)$ és un obert de X per a tot i de $\{1, \dots, n\}$, i per la definició de topologia trobem que

$$\bigcup_{i=1}^n \text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(p)$$

és un obert de X , i per tant tenim que $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ és un element de τ_Y . \square

Definició 17.2.2 (Topologia quocient). Sigui X amb la topologia τ_X un espai topològic, Y un conjunt i $p: X \rightarrow Y$ una aplicació exhaustiva. Aleshores direm que Y amb la topologia

$$\tau_Y = \{\mathcal{U} \subseteq Y \mid \text{Im}^{-1}_u(p) \in \tau_X\}$$

és un espai topològic quocient, o que Y té la topologia quocient per p .

Aquesta definició té sentit per la proposició 17.2.1.

Observació 17.2.3. *Sigui Y un espai topològic amb la topologia quocient per una aplicació p . Aleshores p és contínua.*

Proposició 17.2.4. *Sigui Y un espai topològic amb la topologia quocient per una aplicació p . Aleshores un subconjunt \mathcal{C} de Y és tancat si i només si $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{C}}(p)$ és un tancat.*

Demostració. Denotem per X l'espai topològic sobre el que p està definida. Sigui \mathcal{C} un tancat de Y . Aleshores, per la definició de 16.2.5, tenim que $Y \setminus \mathcal{C}$ és un obert de Y . Ara bé, tenim que $\text{Im}^{-1}_{Y \setminus \mathcal{C}}(p)$ és un obert de X . Ara bé, tenim que

$$\text{Im}^{-1}_{Y \setminus \mathcal{C}}(p) = X \setminus \text{Im}^{-1}_{\mathcal{C}}(p),$$

i per la definició de 16.2.5 trobem que $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{C}}(p)$ és un tancat de X , com volíem veure. \square

Teorema 17.2.5. *Sigui Y un espai topològic amb la topologia quocient per una aplicació p , Z un espai topològic i $f: Y \rightarrow Z$ una aplicació. Aleshores $f \circ p$ és contínua si i només si f és contínua.*

Demostració. Denotem per X l'espai topològic sobre el que p està definida.

Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que $f \circ p$ és contínua. Sigui \mathcal{U} un obert de Z . Per la definició d'16.3.5 en tenim prou en veure que $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(f)$ és un obert.

Tenim per la definició d'16.3.5 que $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(p \circ f)$ és un obert de X , i per tant, per la definició de 17.2.2 tenim que $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(f)$ és un obert de Y , com volíem.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que f és contínua. Aleshores per l'observació 16.3.6 hem acabat. \square

Exemple 17.2.6. *Volem calcular la topologia de l'espai quocient $A = \{a, b, c\}$ induït per l'aplicació $p: \mathbb{R} \rightarrow A$, definida per*

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x < 0 \\ c & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (17.3)$$

Solució. Calculem els oberts de A . Tenim per la definició de 17.2.2 que aquests són les antiimatges dels oberts de \mathbb{R} per p . Prenem un obert \mathcal{U} de \mathbb{R} .

Observem primer que si $\mathcal{U} = \emptyset$ aleshores

$$\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(p) = \emptyset,$$

i si 0 pertany a \mathcal{U} aleshores, per la definició d'16.1.3 tenim que existeixen un x de \mathcal{U} positiu i un y de \mathcal{U} negatiu, i per tant

$$\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(p) = \{a, b, c\}.$$

Suposem doncs que 0 no pertany a \mathcal{U} .

Suposem que per a tot x de \mathcal{U} tenim que $x > 0$. Aleshores, per la definició d'5.2.2 i (17.3) tenim que

$$\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(p) = \{a\}.$$

Suposem ara que per a tot x de \mathcal{U} tenim que $x < 0$. Aleshores, de nou per la definició d'5.2.2 i (17.3) tenim que

$$\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(p) = \{b\}.$$

Suposem ara que existeixen un x de \mathcal{U} positiu i un y de \mathcal{U} negatiu. Aleshores, com que tenim que 0 no pertany a \mathcal{U} , trobem que

$$\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}}(p) = \{a, b\}.$$

Per tant trobem que els oberts de A són

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}. \quad \diamond$$

17.2.2 Topologia quocient per una relació d'equivalència

Exemple 17.2.7 (Projecció a un quocient). *Siguin X un espai topològic i \sim una relació d'equivalència. Volem veure que X/\sim té la topologia quocient per l'aplicació*

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto \bar{x}. \end{aligned}$$

Solució. Hem de veure que π és exhaustiva. Prenem un element \bar{x} de X/\sim . Aleshores tenim que $\pi(x) = \bar{x}$ i per la definició de 17.2.2 hem acabat. \diamond

Definició 17.2.8. *Siguin X un espai topològic, \sim una relació d'equivalència sobre X i π la projecció de X en X/\sim donada per*

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto \bar{x}. \end{aligned}$$

Aleshores denotem la topologia Y induïda per π com X/\sim .

Aquesta definició té sentit per l'exemple 17.2.7.

Exemple 17.2.9. *Volem veure que l'espai quocient*

$$Y = [0, 1]/\{0 \sim 1\}$$

amb la projecció π és homeomorfa a

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}.$$

Solució. \diamond

17.2.3 Topologia quocient per un grup

Definició 17.2.10 (Acció d'un grup sobre un espai topològic). Sigui G amb l'operació $*$ un grup amb element neutre e i X un espai topològic tals que per a tot g de G existeix una aplicació contínua $\theta_g: X \rightarrow X$ tal que per a tot x de X es satisfà $\theta_e(x) = x$ i per a tot g i h de G es satisfà $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{g*h}$. Aleshores direm que G actua sobre X .

Observació 17.2.11. *Sigui G un grup que actua sobre X i g un element de G . Aleshores θ_g és un homeomorfisme.*

Definició 17.2.12 (Domini fonamental). Sigui G un grup que actua sobre un espai topològic X i D un subespai de X tal que per a tot x de X existeixen un g de G i d de D tals que

$$x = \theta_g(d).$$

Aleshores direm que D és un domini fonamental de X .

Exemple 17.2.13. *Considerem les aplicacions*

$$S(x, y) = (x, y + 1) \quad i \quad T(x, y) = (x - 1, -y)$$

sobre l'espai topològic \mathbb{R}^2 i el grup $G = \langle \{S, T\} \rangle$. Volem veure que $[0, 1) \times [0, 1)$ és un domini fonamental de X .

Solució. Observem que la inversa de T és $T^{-1} = (x + 1, y)$, i T^{-1} per la definició de pertany a G .

Prenem un punt (x, y) de \mathbb{R}^2 . Tenim que existeixen dos enters x_0 i y_0 tals que $x_0 \leq x < x_0 + 1$ i $y_0 \leq y < y_0 + 1$. Per tant

$$(x_0, y_0) = S^{x_0}(x - x_0, 0) + T^{-y_0}(0, y - y_0),$$

i per la definició de 17.2.12 hem acabat. ◇

Proposició 17.2.14. *Sigui G amb l'operació $*$ un grup que actua sobre un espai topològic X . Aleshores la relació \sim definida per a tot x i y de X com*

$$x \sim y \iff \text{existeix un } g \in G \text{ tal que } \theta_g(x) = y$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. □

Definició 17.2.15 (Quocient d'un espai per l'acció d'un grup). Sigui G amb l'operació $*$ un grup que actua sobre un espai topològic X i \sim la relació d'equivalència definida per a tot x i y de X com

$$x \sim y \iff \text{existeix un } g \in G \text{ tal que } \theta_g(x) = y.$$

Aleshores denotarem per

$$X/\sim = X/G$$

la topologia quocient de X per G .

Aquesta definició té sentit per la proposició 17.2.14.



Espais topològics

18.1 Espais compactes

18.1.1 Recobriments

Definició 18.1.1 (Recobriment). Siguin X un espai topològic i $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família de subespais de X tals que

$$X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Aleshores direm que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment de X .

Si I és finit direm que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment finit de X , i si I és infinit direm que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment infinit de X .

Definició 18.1.2 (Recobriment obert). Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment d'un espai topològic X tal que per a tot i de I tenim que \mathcal{U}_i és un obert de X . Aleshores direm que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment obert de X .

Exemple 18.1.3. *Volem trobar un recobriment de \mathbb{R} .*

Solució. Prenem la família d'oberts $\{(-i, i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Aleshores tenim que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (-i, i),$$

ja que si x és un element de \mathbb{R} trobem que existeix un natural m tal que $|x| < m$, i per tant x pertany a l'interval $(-m, m)$. \diamond

Definició 18.1.4 (Subrecobriment). Siguin $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment d'un espai topològic X i J un subconjunt de I tal que la família $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ és un recobriment de X . Aleshores direm que $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ és un subrecobriment de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$.

Si J és finit direm que $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ és un recobriment finit de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$, i si J és infinit direm que $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ és un recobriment infinit de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$.

18.1.2 Compacitat

Definició 18.1.5 (Compacte). Sigui X un espai topològic tal que tot recobriment obert de X admet un subrecobriment finit. Aleshores direm que X és compacte.

Exemple 18.1.6. *Volem veure que \mathbb{R} no és compacte.*

Solució. Per l'exemple 18.1.3 tenim que $\{(-i, i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ és un recobriment obert de \mathbb{R} .

Suposem que existeix un subrecobriment finit de $\{(-i, i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Això és que existeix un subconjunt I de \mathbb{N} finit tal que $\{(-i, i)\}_{i \in I}$ és un recobriment de \mathbb{R} . Com que I és finit tenim que existeix un natural m tal que $m = \max\{i \in I\}$, i tenim que $m + 1$ no pertany a cap interval de la família $\{(-i, i)\}_{i \in I}$. Per tant trobem que

$$m + 1 \notin \bigcup_{i \in I} (-i, i).$$

Ara bé, per la definició de 18.1.1 trobem que ha de ser

$$m + 1 \in \mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} (-i, i),$$

i arribem a contradicció, trobant que no existeix cap subrecobriment finit de $\{(-i, i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. \diamond

Proposició 18.1.7. *Siguin X i Y dos espais topològics homeomorfs. Aleshores X és compacte si i només si Y és compacte.*

Demostració. Per la definició de 2.3.2 tenim que si $X \cong Y$ aleshores $Y \cong X$, i per tant només ens cal veure que si X és compacte aleshores Y és compacte.

Suposem doncs que X és compacte. Per la definició d'16.3.9 tenim que existeix un homeomorfisme $f: X \rightarrow Y$.

Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de Y . Per la definició d'16.3.8 i la definició de 18.1.2 tenim que la família $\{\text{Im}^{-1}\mathcal{U}_i(f)\}_{i \in I}$ és un recobriment obert de X .

Ara bé, per la definició d'18.1.5 trobem que existeix un subrecobriment finit $\{\text{Im}^{-1}\mathcal{U}_j(f)\}_{j \in J}$ de $\{\text{Im}^{-1}\mathcal{U}_i(f)\}_{i \in I}$, i de nou per la definició d'16.3.8 i la definició de 18.1.2 tenim que la família $\{\mathcal{U}_j\}_{j \in J}$ és un subrecobriment obert de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$, i per la definició d'18.1.5 trobem que Y és compacte. \square

Exemple 18.1.8. *Volem veure que l'interval $(0, 1)$ no és compacte.*

Solució. Per l'exemple 16.3.10 tenim que l'interval $(0, 1)$ és homeomorf a \mathbb{R} , per l'exemple 18.1.6 trobem que \mathbb{R} no és compacte i per la proposició 18.1.7 tenim que $(0, 1)$ no és compacte. \diamond

Proposició 18.1.9. *Sigui X un espai topològic finit. Aleshores X és compacte.*

Demostració. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de X , i per la definició de 18.1.2 tenim que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$.

Ara bé, tenim que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, i com que X és finit, $\mathcal{P}(X)$ també ho és, i per tant $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és finit i per la definició de 18.1.1 trobem que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment finit de X , i per la definició d'18.1.5 tenim que X és compacte. \square

Proposició 18.1.10. *Sigui X un espai topològic amb la topologia discreta. Aleshores X és compacte si i només si X és finit.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Veurem que si X és infinit aleshores X no és compacte.

Per l'exemple 16.2.4 tenim que tot subconjunt de X és un obert, i com que

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

per la definició de 18.1.2 trobem que $\{\{x\}\}_{x \in X}$ és un recobriment obert de X .

Ara bé, com que X és infinit, si $\{\{x\}\}_{x \in I}$ és un subrecobriment finit de $\{\{x\}\}_{x \in X}$ tenim que existeix algun x_0 de X tal que $x_0 \notin I$, i per tant

$$x_0 \notin \bigcup_{x \in I} \{x\}$$

i trobem que el recobriment $\{\{x\}\}_{x \in X}$ no admet cap subrecobriment finit, i per la definició d'18.1.5 trobem que X no és compacte.

Per veure que la condició és necessària (\impliedby) en tenim prou amb la proposició 18.1.9. \square

Definició 18.1.11 (Compacitat per tancats). Sigui X un espai topològic tal que per a tota família de tancats $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ de X amb

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \emptyset$$

existeix una subfamília finita $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in J}$ tal que

$$\bigcap_{i \in J} \mathcal{C}_i = \emptyset.$$

Aleshores direm que X és compacte per tancats.

Proposició 18.1.12. *Sigui X un espai topològic. Aleshores X és compacte si i només si X és compacte per tancats.*

Demostració. Sigui X un espai topològic compacte i $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ una família de tancats de X tals que

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i = \emptyset.$$

Per la definició de 16.2.5 tenim que per a tot i de I el conjunt $\mathcal{U}_i = X \setminus \mathcal{C}_i$ és un obert de X , i tenim que

$$\begin{aligned} X &= X \setminus \emptyset \\ &= X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} (X \setminus \mathcal{C}_i) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i, \end{aligned}$$

i per la definició de 18.1.2 trobem que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment obert de X . Ara bé, per la definició d'18.1.5 tenim que existeix un subrecobriment finit $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in J}$ de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$, i per la definició de 18.1.4 tenim que

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i \in J} \mathcal{U}_i \\ &= \bigcup_{i \in J} (X \setminus \mathcal{C}_i) = X \setminus \bigcap_{i \in J} \mathcal{C}_i, \end{aligned}$$

i per tant trobem que

$$\bigcap_{i \in J} \mathcal{C}_i = \emptyset$$

i per la definició de 18.1.11 trobem que X és compacte per tancats. \square

Definició 18.1.13 (Compacitat de subconjunts). Sigui A un subconjunt d'un espai topològic X tal que per a tota família d'oberts $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ de X tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

existeix una subfamília finita $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in J}$ de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} \mathcal{U}_i.$$

Aleshores direm que A és un subconjunt compacte de X . També direm que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ és un recobriment obert de A .

18.1.3 Propietats dels espais compactes

Teorema 18.1.14. *Siguin A un subconjunt compacte d'un espai topològic X , Y un espai topològic i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Aleshores $\text{Im}_A(f)$ és un subconjunt compacte de Y .*

Demostració. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de $\text{Im}_A(f)$. Per la definició de 18.1.13 trobem que

$$\text{Im}_A(f) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i,$$

i per tant tenim que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} \text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(f).$$

Com que, per la definició de 18.1.13, per a tot i de I el conjunt \mathcal{U}_i és un obert de Y , per la definició de 5.2.4 tenim que $\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(f)$ és un obert de X , i trobem per la definició de 18.1.13 que $\{\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(f)\}_{i \in I}$ és un recobriment obert de A .

Ara bé, tenim per hipòtesi que A és un subconjunt compacte de X , i per la definició de 18.1.13 tenim que existeix una subfamília finita $\{\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(f)\}_{i \in J}$ de $\{\text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(f)\}_{i \in I}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} \text{Im}^{-1}_{\mathcal{U}_i}(f).$$

Tenim doncs que

$$\text{Im}_A(f) \subseteq \bigcup_{i \in J} \mathcal{U}_i,$$

i per la definició de 18.1.13 hem acabat. \square

Corol·lari 18.1.15. *Siguin X un espai topològic compacte i p una aplicació exhaustiva. Aleshores X/p és compacte.*

Demostració. Per l'observació 17.2.3 tenim que $p: X \rightarrow X/p$ és contínua. Per la definició d'5.2.1 i la definició d'2.2.8 tenim que $X/p = \text{Im}(p)$, i pel Teorema 18.1.14 trobem que X/p és compacte. \square

Teorema 18.1.16. *Sigui \mathcal{C} un tancat d'un espai topològic compacte X . Aleshores \mathcal{C} és compacte.*

Demostració. Sigui $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de \mathcal{C} . Per la definició de 18.1.13 tenim que

$$\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

Per tant

$$X = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \right) \cup (X \setminus \mathcal{C}),$$

i per la definició de 18.1.2 tenim que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \cup (X \setminus \mathcal{C})$ és un recobriment obert de X .

Ara bé, per hipòtesi tenim que X és un compacte, i per la definició d'18.1.5 tenim que existeix un subrecobriment finit de $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \cup (X \setminus \mathcal{C})$, i per tant existeix un subconjunt finit J de I tal que

$$\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{i \in J} \mathcal{U}_i,$$

i per la definició de 18.1.13 hem acabat. \square

Teorema 18.1.17 (Teorema de Tychonoff). *Siguin X i Y dos espais topològics no buits. Aleshores $X \times Y$ és compacte si i només si X i Y són compactes.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\Rightarrow). Suposem doncs que $X \times Y$ és un compacte. Per l'exemple 17.1.9 trobem que les projeccions

$$\begin{aligned} \pi_X: X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \pi_Y: X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

són aplicacions contínues, i per la proposició 18.1.7 trobem que X i Y són compactes.

Veiem ara que la condició és necessària (\Leftarrow). Suposem doncs que X i Y són compactes i sigui $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$ un recobriment obert de $X \times Y$.

Prenem un punt x_0 de X . Aleshores per la definició de 18.1.1 tenim que per a tot y de Y existeix un $i_{x_0,y}$ de I tal que el punt (x_0, y) pertany a $\mathcal{W}_{i_{x_0,y}}$, i per la definició de 17.2.2 tenim que existeixen oberts $\mathcal{U}_{i_{x_0,y}}$ i $\mathcal{V}_{i_{x_0,y}}$ de X i Y , respectivament, tals que

$$(x_0, y) \in \mathcal{U}_{i_{x_0,y}} \times \mathcal{V}_{i_{x_0,y}} \subseteq \mathcal{W}_{i_{x_0,y}}.$$

Trobem doncs que

$$\begin{aligned} Y &= \bigcup_{y \in Y} \{y\} \\ &\subseteq \bigcup_{y \in Y} \mathcal{V}_{i_{x_0,y}} \subseteq Y, \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem que

$$\bigcup_{y \in Y} \mathcal{V}_{i_{x_0,y}} = Y.$$

Aleshores per la definició de 18.1.2 trobem que $\{\mathcal{V}_{i_{x_0,y}}\}_{y \in Y}$ és un recobriment obert de Y , i com que, per hipòtesi, Y és compacte, tenim per la definició d'18.1.5 que existeix un subrecobriment finit $\{\mathcal{V}_{i_{x_0,y}}\}_{y \in Y_{x_0}}$ de $\{\mathcal{V}_{i_{x_0,y}}\}_{y \in Y}$.

Definim ara

$$\mathcal{U}_{x_0} = \bigcap_{y \in Y_{x_0}} \mathcal{U}_{i_{x_0,y}}. \quad (18.1)$$

Com que Y_{x_0} és finit, trobem per la definició de 16.2.1 que \mathcal{U}_{x_0} és un obert de X . Tenim doncs que

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{x \in X} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x \subseteq X, \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem que

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x = X,$$

i de nou per la definició de 18.1.2 trobem que $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ és un recobriment obert de X , i per la definició d'18.1.5 trobem que existeix un subrecobriment finit $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in J'}$ de $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$.

Definim el conjunt

$$J = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in J' \text{ i } y \in Y_x\} \quad (18.2)$$

i considerem la subfamília

$$\{\mathcal{W}_{i_{x,y}}\}_{(x,y) \in J}$$

de $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$. Sigui (x, y) un punt de $X \times Y$. Aleshores, com que la família $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in J'}$ és un recobriment de X trobem per la definició de 18.1.1 que existeix un p de J' tal que x pertany a \mathcal{U}_p , i com que la família $\{\mathcal{V}_{i_{x_0,y}}\}_{y \in Y_p}$ és un recobriment de Y trobem que existeix un q de Y_p tal que y pertany a \mathcal{V}_q .

Ara bé, també tenim per (18.1) i la definició d'2.1.13 que x pertany a $\mathcal{U}_{i_{p,q}}$, i per tant

$$(x, y) \in \mathcal{U}_{i_{p,q}} \times \mathcal{V}_{i_{p,q}} \subseteq \mathcal{W}_{i_{p,q}},$$

i per tant tenim que $\{\mathcal{W}_{i_{x,y}}\}_{(x,y) \in J}$ és un subrecobriments de $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$, i com que els conjunts J' i Y_x són finits, trobem per (18.2) que J és finit, aleshores per la definició de 18.1.4 trobem que $\{\mathcal{W}_{i_{x,y}}\}_{(x,y) \in J}$ és un subrecobriments finit de $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$ i per la definició d'18.1.5 tenim que $X \times Y$ és compacte, com volíem. \square

18.2 Espais de Hausdorff

18.2.1 L'axioma de Hausdorff

Definició 18.2.1 (Espai Hausdorff). Sigui X un espai topològic tal que per a tots dos punts diferents x i y de X existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} de X tals que x pertany a \mathcal{U} i y pertany a \mathcal{V} . Aleshores direm que X és Hausdorff.

Proposició 18.2.2. *Sigui X un espai mètric. Aleshores X és Hausdorff.*

Demostració. Per l'exemple 16.2.2 trobem que X és un espai topològic i per la proposició 16.1.5 tenim que X és Hausdorff. \square

Proposició 18.2.3. *Siguin X i Y dos espais topològics homeomorfs. Aleshores X és Hausdorff si i només si Y és Hausdorff.*

Demostració. Per la proposició 16.3.11 tenim que si $X \cong Y$ aleshores $Y \cong X$, i per tant només ens cal veure que si X és Hausdorff aleshores Y és Hausdorff.

Suposem doncs que X és Hausdorff. Prenem dos punts diferents x i y de Y . Per la definició d'16.3.9 tenim que existeix un homeomorfisme $f: X \rightarrow Y$, i per la definició d'16.3.8 trobem que f és bijectiva. Considerem doncs els punts $f^{-1}(x)$ i $f^{-1}(y)$. Com que, per hipòtesi, X és Hausdorff, tenim per la definició d'18.2.1 que existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} de X tals que $f^{-1}(x)$ pertany a \mathcal{U} i $f^{-1}(y)$ pertany a \mathcal{V} .

Ara bé, per la definició d'16.3.8 trobem que f és una aplicació oberta, i per tant trobem que els conjunts $\text{Im}_{\mathcal{U}}(f)$ i $\text{Im}_{\mathcal{V}}(f)$ són oberts de Y , i tenim que x pertany a $\text{Im}_{\mathcal{U}}(f)$ i y pertany a $\text{Im}_{\mathcal{V}}(f)$, i per la definició d'5.2.1 tenim que aquests són disjunts. \square

Proposició 18.2.4. *Sigui X un espai Hausdorff. Aleshores per a tot x el conjunt $\{x\}$ és un tancat.*

Demostració. Per la definició d'18.2.1 trobem que per a tot punt y diferent de x existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U}_y i \mathcal{V}_y tals que x pertany a \mathcal{U}_y i y pertany a \mathcal{V}_y . Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} X \setminus \{x\} &= \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \{y\} \\ &\subseteq \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \mathcal{U}_y \subseteq X \setminus \{x\} \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem que

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \mathcal{U}_y.$$

Ara bé, per la definició de 16.2.1 trobem que $X \setminus \{x\}$ és un obert, i per la definició de 16.2.5 trobem que $\{x\}$ és un tancat. \square

Proposició 18.2.5. *Sigui X un espai Hausdorff i A un subespai de X . Aleshores A és Hausdorff.*

Demostració. Siguin x i y dos elements diferents de A . Aleshores per la definició d'espai Hausdorff tenim que existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} de X tals que x pertany a \mathcal{U} i y pertany a \mathcal{V} . Aleshores per la definició de 17.1.2 trobem que els conjunts $\mathcal{U} \cap A$ i $\mathcal{V} \cap A$ són oberts disjunts de A que contenen x i y , respectivament, i per la definició d'18.2.1 hem acabat. \square

18.2.2 Axiomes de separació de Tychonoff

Definició 18.2.6 (Espai de Kolmogorov). Sigui X un espai topològic tal que per a tots dos punts diferents x i y existeix un obert \mathcal{U} que o bé conté x i no y , o bé conté y i no x . Aleshores direm que X és un espai de Kolmogorov.

Definició 18.2.7 (Espai de Fréchet). Sigui X un espai topològic tal que per a tots dos punts diferents x i y existeixen dos oberts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que x pertany a $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ i y pertany a $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Aleshores direm que X és un espai de Fréchet.

Proposició 18.2.8. *Sigui X un espai de Fréchet. Aleshores X és un espai de Kolmogorov.*

Demostració. Siguin x i y dos punts diferents de X . Aleshores per la definició d'18.2.7 trobem que existeixen dos oberts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que x pertany a $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ i y pertany a $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. En particular x pertany a \mathcal{U} i y no pertany a \mathcal{U} , i per la definició d'18.2.6 hem acabat. \square

Proposició 18.2.9. *Sigui X un espai tal que per a tot x de X , el conjunt $\{x\}$ és un tancat. Aleshores X és un espai de Fréchet.*

Demostració. Siguin x i y dos punts diferents de X . Per hipòtesi tenim que els conjunts $\{x\}$ i $\{y\}$ són tancats i per la definició de 16.2.5 trobem que els conjunts $X \setminus \{x\}$ i $X \setminus \{y\}$ són oberts. Ara bé, com que per hipòtesi els punts x i y són diferents trobem que x pertany a $X \setminus \{y\}$ i y pertany a $X \setminus \{x\}$, i per la definició d'18.2.7 trobem que X és un espai de Fréchet, com volíem veure. \square

Corol·lari 18.2.10. *Sigui X un espai Hausdorff. Aleshores X és un espai de Fréchet.*

Demostració. Per la proposició 18.2.4 trobem que si x és un punt de X aleshores el conjunt $\{x\}$ és un tancat, i per la proposició 18.2.9 trobem que X és un espai de Fréchet. \square

Proposició 18.2.11. *Sigui X un espai de Fréchet i x un punt de X . Aleshores $\{x\}$ és un tancat.*

Demostració. Per la definició d'18.2.7 trobem que per a tot punt y de X diferent de x existeixen dos oberts \mathcal{U}_y i \mathcal{V}_y tals que x pertany a $\mathcal{U}_y \setminus \mathcal{V}_y$ i y pertany a $\mathcal{V}_y \setminus \mathcal{U}_y$. Considerem

$$\mathcal{V} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \mathcal{V}_y. \quad (18.3)$$

Tenim que x no pertany a \mathcal{V} , ja que x no pertany a cap dels \mathcal{V}_y , i tenim que

$$\begin{aligned} X \setminus \{x\} &\subseteq \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \{y\} \\ &\subseteq \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \mathcal{V}_y \\ &= \mathcal{V} \subseteq X \setminus \{x\}, \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem que

$$\mathcal{V} = X \setminus \{x\}.$$

Per la definició de 16.2.1 i (18.3) trobem que \mathcal{V} és un obert, i per la definició de 16.2.5 trobem que $\{x\}$ és un tancat. \square

Definició 18.2.12 (Espai regular). Sigui X un espai de Fréchet tal que donats un tancat \mathcal{C} i un punt x que no pertany a \mathcal{C} existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que x pertany a \mathcal{U} i \mathcal{C} és un subconjunt de \mathcal{V} . Aleshores direm que X és un espai regular.

Proposició 18.2.13. *Sigui X un espai regular. Aleshores X és un espai Hausdorff.*

Demostració. Prenem dos punts diferents x i y de X . Com que, per hipòtesi, X és un espai regular, i per la definició d'18.2.12 trobem que X és un espai de Fréchet, per la proposició 18.2.11 trobem que $\{y\}$ és un tancat, i per la definició d'18.2.12 trobem que existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que x pertany a \mathcal{U} i $\{y\}$ és un subconjunt de \mathcal{V} , i en particular y pertany a \mathcal{V} . Aleshores per la definició d'18.2.1 hem acabat. \square

Definició 18.2.14 (Espai normal). Sigui X un espai de Fréchet tal que donats dos tancats disjunts \mathcal{C} i \mathcal{K} existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que \mathcal{C} és un subconjunt de \mathcal{U} i \mathcal{K} és un subconjunt de \mathcal{V} . Aleshores direm que X és un espai normal.

Proposició 18.2.15. *Sigui X un espai normal. Aleshores X és un espai regular.*

Demostració. Sigui \mathcal{C} un tancat de X i x un punt de $X \setminus \mathcal{C}$. Com que per hipòtesi X és un espai normal, per la definició d'18.2.14 trobem que X és un espai de Fréchet, i per la proposició 18.2.11 trobem que el conjunt $\{x\}$ és un tancat, i tenim que $\{x\}$ i \mathcal{C} són disjunts.

Ara bé, per la definició d'18.2.14 trobem que existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que $\{x\}$ és un subconjunt de \mathcal{U} i \mathcal{C} és un subconjunt de \mathcal{V} . Aleshores tenim que x pertany a \mathcal{U} , i per la definició d'18.2.12 trobem que X és un espai regular. \square

18.2.3 Propietats dels espais Hausdorff

Proposició 18.2.16. *Sigui X un espai Hausdorff i A un compacte de X . Aleshores A és un tancat de X .*

Demostració. Si $A = X$ ó $A = \emptyset$ aleshores pel Teorema 16.2.6 trobem que A és tancat i hem acabat.

Suposem doncs que A no és X ni \emptyset . Tenim que existeix un punt x de $X \setminus A$. Per la definició d'18.2.1 trobem que per a tot a de A existeixen dos oberts disjunts $\mathcal{U}_{a,x}$ i $\mathcal{V}_{a,x}$ tals que x pertany a $\mathcal{U}_{a,x}$ i a pertany a $\mathcal{V}_{a,x}$. Aleshores trobem que

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{a \in A} \{a\} \\ &\subseteq \bigcup_{a \in A} \mathcal{V}_{a,x}, \end{aligned}$$

i per tant trobem que

$$\bigcup_{a \in A} \mathcal{V}_{a,x} \subseteq A.$$

Aleshores per la definició de 18.1.2 trobem que la família $\{\mathcal{V}_{a,x}\}_{a \in A}$ és un recobriments obert de A , i com que, per hipòtesi, A és compacte trobem per la definició de 18.1.13 que existeix un subrecobriments finit $\{\mathcal{V}_{a,x}\}_{a \in A'}$ de $\{\mathcal{V}_{a,x}\}_{a \in A}$, i per la definició de 18.1.4 trobem que

$$\bigcup_{a \in A'} \mathcal{V}_{a,x} \subseteq A. \quad (18.4)$$

Per la definició de topologia trobem que el conjunt

$$\mathcal{U}_x = \bigcap_{a \in A'} \mathcal{U}_{a,x}$$

és un obert de X i com que, per hipòtesi, per a tot a de A tenim que

$$\mathcal{U}_{a,x} \cap \mathcal{V}_{a,x} = \emptyset$$

trobem per (18.4) que per a tot x de $X \setminus A$ es satisfà

$$A \cap \mathcal{U}_x = \emptyset,$$

i per tant

$$\bigcup_{x \in X \setminus A} \mathcal{U}_x \subseteq X \setminus A.$$

Ara bé, tenim que

$$\begin{aligned} X \setminus A &= \bigcup_{x \in X \setminus A} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in X \setminus A} \mathcal{U}_x \\ &\subseteq X \setminus A, \end{aligned}$$

i pel 2.1.3 trobem que

$$X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} \mathcal{U}_x.$$

Aleshores per la definició de 16.2.1 trobem que $X \setminus A$ és un obert i per la definició de 16.2.5 trobem que A és un tancat. \square

Teorema 18.2.17. *Siguin X i Y dos espais topològics no buits. Aleshores $X \times Y$ és Hausdorff si i només si X i Y són Hausdorff.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que $X \times Y$ és Hausdorff. Prenem un element y de Y . Tenim pel corol·lari 17.1.10 que $X \times \{y\} \cong X$ i tenim que $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$. Per hipòtesi tenim que $X \times Y$ és Hausdorff. Aleshores per la proposició 18.2.5 trobem que $X \times \{y\}$ és Hausdorff i per la proposició 18.2.3 trobem que X és Hausdorff.

La demostració per veure que Y és Hausdorff és anàloga.

Veiem ara que la condició és necessària. Suposem doncs que X i Y són Hausdorff. Prenem dos punts diferents (x_1, y_1) i (x_2, y_2) de $X \times Y$. Si $y_1 = y_2$ tenim per la proposició 2.2.3 que $x_1 \neq x_2$. Com que, per hipòtesi, X és Hausdorff tenim per la definició d'18.2.1 que existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que x_1 pertany a \mathcal{U} i x_2 pertany a \mathcal{V} . Aleshores per la definició de 17.1.8 i la definició de 16.2.1 trobem que els conjunts (\mathcal{U}, Y) i (\mathcal{V}, Y) són oberts disjunts de $X \times Y$ i per la definició d'18.2.1 tenim que $X \times Y$ és Hausdorff.

Si $x_1 = x_2$ tenim de nou per la proposició 2.2.3 que $y_1 \neq y_2$ i l'argument per veure que $X \times Y$ és Hausdorff és anàleg. \square

Teorema 18.2.18. *Siguin X un espai compacte, Y un espai Hausdorff i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació contínua i bijectiva. Aleshores $X \cong Y$.*

Demostració. per la definició d'16.3.9 en tenim prou amb veure que f és un homeomorfisme, i per la definició d'16.3.8 en tenim prou amb veure que f és una aplicació tancada. Sigui \mathcal{C} un tancat de X . Com que, per hipòtesi, X és un compacte, pel Teorema 18.1.16 trobem que \mathcal{C} és un compacte. Per hipòtesi tenim també que f és contínua, i pel teorema 18.1.14 trobem doncs que $\text{Im}_{\mathcal{C}}(f)$ és un compacte de Y . De nou per hipòtesi tenim que Y és Hausdorff i per la proposició 18.2.16 trobem que $\text{Im}_{\mathcal{C}}(f)$ és un tancat de Y . Per tant per la definició d'16.3.3 trobem que f és tancada i hem acabat. \square

Teorema 18.2.19. *Sigui X un espai Hausdorff compacte. Aleshores X és un espai normal.*

Demostració. Siguin \mathcal{C} i \mathcal{K} dos tancats disjunts i fixem un punt x de \mathcal{C} . Com que, per hipòtesi, X és Hausdorff, per la definició d'18.2.1 trobem que per a tot y de \mathcal{K} existeixen dos oberts disjunts $\mathcal{U}_{x,y}$ i $\mathcal{V}_{x,y}$ tals que x pertany a $\mathcal{U}_{x,y}$ i y pertany a $\mathcal{V}_{x,y}$. Tenim doncs que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \bigcup_{y \in \mathcal{K}} \{y\} \\ &\subseteq \bigcup_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{V}_{x,y}, \end{aligned}$$

i per la definició de 18.1.2 trobem que la família $\{\mathcal{V}_{x,y}\}_{y \in \mathcal{K}}$ és un recobriment obert de \mathcal{K} . Aleshores, com que per hipòtesi X és un espai compacte, pel Teorema 18.1.16 trobem que \mathcal{K} és un compacte i per la definició de 18.1.13 tenim que existeix un subrecobriment finit $\{\mathcal{V}_{x,y}\}_{y \in I_x}$ de $\{\mathcal{V}_{x,y}\}_{y \in \mathcal{K}}$. Considerem els conjunts

$$\mathcal{U}_x = \bigcap_{y \in I_x} \mathcal{U}_{x,y} \quad \text{i} \quad \mathcal{V}_x = \bigcup_{y \in I_x} \mathcal{V}_{x,y}.$$

Com que I_x és finit, per la definició de 16.2.1 trobem que \mathcal{U}_x i \mathcal{V}_x són oberts de X i tenim que

$$\mathcal{U}_x \cap \mathcal{V}_x = \emptyset$$

i x pertany a \mathcal{U}_x i y pertany a \mathcal{V}_x .

Ara bé, tenim que

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in \mathcal{C}} \mathcal{U}_x,\end{aligned}$$

i per la definició de 18.1.2 trobem que la família $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in \mathcal{C}}$ és un recobriment obert de \mathcal{C} . Aleshores, com que per hipòtesi X és un espai compacte, pel Teorema 18.1.16 trobem que \mathcal{C} és un compacte i per la definició de 18.1.13 tenim que existeix un subrecobriment finit $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in I}$ de $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in \mathcal{C}}$. Definim

$$\mathcal{U} = \bigcap_{x \in I} \mathcal{U}_x \quad \text{i} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{x \in I} \mathcal{V}_x.$$

Com que I és finit, per la definició de 16.2.1 trobem que \mathcal{U} i \mathcal{V} són oberts de X i tenim que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

i \mathcal{C} és un subconjunt de \mathcal{U} i \mathcal{K} és un subconjunt de \mathcal{V} , i per la definició d'18.2.14 hem acabat. \square

Lema 18.2.20. *Siguin G un grup finit que actua sobre un espai Hausdorff compacte X i x un punt de X . Aleshores \bar{x} és un tancat de X .*

Demostració. Per la definició de 2.3.3 trobem que

$$\bar{y} = \{x \in X \mid x \sim y\},$$

i per la definició de 17.2.15 trobem que

$$\bar{y} = \{x \in X \mid \text{existeix un } g \in G \text{ tal que } y = \theta_g(x)\}.$$

Com que per hipòtesi G és finit, trobem que \bar{y} és finit. Tenim també que

$$\bar{y} = \bigcup_{x \in \bar{y}} \{x\},$$

i com que \bar{y} és finit aquesta és una unió finita. Ara bé, per la proposició 18.2.4 trobem que els conjunts $\{x\}$ són tancats i pel Teorema 16.2.6 hem acabat. \square

Teorema 18.2.21. *Sigui G un grup finit que actua sobre un espai Hausdorff compacte X . Aleshores X/G és un espai Hausdorff compacte.*

Demostració. Siguin x i y dos punts de X tals que \bar{x} és diferent de \bar{y} . Pel lema 18.2.20 trobem que \bar{y} és un tancat, i per la proposició 18.2.4 trobem que el conjunt $\{x\}$ és un tancat.

Per hipòtesi tenim que X és un espai Hausdorff compacte, i pel Teorema 18.2.19 trobem que X és un espai normal. Aleshores per la definició d'18.2.14

trobem que existeixen dos oberts disjunts \mathcal{U}' i \mathcal{V}' tals que $\{x\}$ és un subconjunt de \mathcal{U}' i \bar{y} és un subconjunt de \mathcal{V}' .

Sigui

$$\mathcal{V} = \bigcap_{g \in G} \text{Im}_{\mathcal{V}'}(\theta_g).$$

Per la definició de 17.2.2 trobem que $\text{Im}_{\mathcal{V}'}(\theta_g)$ és un obert de X/G , i com que per hipòtesi G és finit, pel Teorema 16.2.6 trobem que \mathcal{V} és un obert de X/G . També tenim per la definició de 17.2.15 que \bar{y} és un element de \mathcal{V} . Per l'observació:els accions de grup en un espai topològic són homeomorfismes tenim que θ_g és un homeomorfisme, i per la definició d'16.3.8 trobem que θ_g és bijectiva. Aleshores, com que tenim que \mathcal{U}' i \mathcal{V}' són disjunts tenim que \mathcal{U}' i \mathcal{V} són disjunts. Sigui ara

$$\mathcal{U} = \bigcup_{g \in G} \text{Im}_{\mathcal{U}'}(\theta_g).$$

Per la definició de 17.2.2 trobem que $\text{Im}_{\mathcal{U}'}(\theta_g)$ és un obert de X/G , i per la definició de 16.2.1 trobem que \mathcal{U} és un obert de X/G . Per l'observació:els accions de grup en un espai topològic són homeomorfismes tenim que θ_g és un homeomorfisme, i per la definició d'16.3.8 trobem que θ_g és bijectiva. Aleshores, com que tenim que \mathcal{U}' i \mathcal{V} són disjunts tenim que \mathcal{U} i \mathcal{V} són disjunts.

Sigui π la projecció

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/G \\ x &\longmapsto \bar{x}. \end{aligned}$$

Per la definició de 17.2.2 trobem que els conjunts $\text{Im}_{\mathcal{U}}(\pi)$ i $\text{Im}_{\mathcal{V}}(\pi)$ són oberts de X/G , i tenim que aquests són disjunts ja que si $\pi(z)$ pertany a la seva intersecció, per la definició de 17.2.15 trobem que \bar{z} ha de ser un element de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, i tenim que aquests són disjunts. Per tant per la definició d'18.2.1 tenim que X/G és Hausdorff.

Per l'observació 17.2.3 tenim que π és contínua, i pel Teorema 18.1.14 trobem que X/G és compacte i hem acabat. \square

Espais connexos

19.1 Connexió

19.1.1 Els espais connexos

Proposició 19.1.1. *Siguin X amb la topologia τ_1 i Y amb la topologia τ_2 dos espais topològics. Aleshores el conjunt $X \sqcup Y$ amb la topologia*

$$\tau = \{\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \in \tau_1 \text{ i } \mathcal{V} \in \tau_2\} \quad (19.1)$$

és un espai topològic.

Demostració. Per la definició de 16.2.1 tenim que X és un obert de X i Y és un obert de Y , i per (19.1) tenim que $X \sqcup Y$ pertany a τ . Tenim també per la definició de 16.2.1 que \emptyset és un obert de X i Y , i tenim que $\emptyset \times \{0\} = \emptyset$ i $\emptyset \times \{1\} = \emptyset$. Per tant de nou per (19.1) tenim que \emptyset pertany a τ .

Prenem ara una família $\{\mathcal{U}_i \sqcup \mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ d'elements de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \sqcup \mathcal{V}_i.$$

Tenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \sqcup \mathcal{V}_i \\ &= \bigcup_{i \in I} ((\mathcal{U}_i \times \{0\}) \cup (\mathcal{V}_i \times \{1\})) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \times \{0\}) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} (\mathcal{V}_i \times \{1\}) \right) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \times \{0\} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i \times \{1\} \right). \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Per la definició de 16.2.1 trobem que els conjunts

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \quad \text{i} \quad \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$$

són oberts de X i Y , respectivament; i per (19.1) trobem que \mathcal{U} pertany a τ .
 Prenem ara una família finita $\{\mathcal{U}_i \sqcup \mathcal{V}_i\}_{i=1}^n$ d'elements de τ i considerem

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \sqcup \mathcal{V}_i.$$

Tenim que

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \sqcup \mathcal{V}_i \\ &= \bigcap_{i=1}^n ((\mathcal{U}_i \times \{0\}) \cup (\mathcal{V}_i \times \{1\})) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{U}_i \times \{0\}) \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n (\mathcal{V}_i \times \{1\}) \right) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \times \{0\} \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_i \times \{1\} \right). \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Per la definició de 16.2.1 trobem que els conjunts

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \quad \text{i} \quad \bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_i$$

són oberts de X i Y , respectivament; i per (19.1) trobem que \mathcal{U} pertany a τ .

Per tant per la definició de 16.2.1 trobem que τ és una topologia de $X \sqcup Y$, com volíem veure. \square

Definició 19.1.2 (Unió disconnexa). Siguin X i Y dos espais topològics. Aleshores direm que l'espai topològic $X \sqcup Y$ amb la topologia

$$\tau = \{\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \text{ és un obert de } X \text{ i } \mathcal{V} \text{ és un obert de } Y\}$$

és la unió disconnexa de X i Y .

Aquesta definició té sentit per la proposició 19.1.1.

Definició 19.1.3 (Espai connex). Sigui X un espai topològic tal que no existeixen dos espais no buits Y_1 i Y_2 tals que $X \cong Y_1 \sqcup Y_2$. Aleshores direm que X és connex.

Proposició 19.1.4. *Sigui X un espai topològic. Aleshores són equivalents*

1. X és connex.
2. No existeixen dos oberts no buits disjunts \mathcal{U} i \mathcal{V} tals que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
3. No existeixen dos tancats no buits disjunts \mathcal{C} i \mathcal{K} tals que $X = \mathcal{C} \cup \mathcal{K}$.
4. Si A és un subconjunt de X tal que A és obert i tancat aleshores $A = \emptyset$ ó $A = X$.

Demostració. \square

Exemple 19.1.5. *Volem veure que un espai topològic X amb la topologia grollera. Aleshores X és connex.*

Solució. Tenim per l'exemple 16.2.3 i la definició de 16.2.5 que els tancats i els oberts de X són \emptyset i X . Aleshores per la proposició 19.1.4 trobem que X és connex. \diamond

19.1.2 Propietats dels espais connexos

Proposició 19.1.6. *Siguin X un espai topològic i $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ una família de subespais topològics connexos de X tals que*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i \neq \emptyset.$$

Aleshores tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

és un espai topològic connex.

Demostració. \square

Corol·lari 19.1.7. *Siguin X un espai topològic i $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una família de subespais topològics connexos de X tals que*

$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_{i+1} \neq \emptyset \quad \text{per a tot } i \in \mathbb{N}.$$

Aleshores tenim que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

és un espai topològic connex.

Demostració. \square

Exemple 19.1.8. *Volem veure que un subconjunt de \mathbb{R} és connex si i només si és un interval.*

Solució. \diamond

Proposició 19.1.9. *Siguin A un subespai connex d'un espai topològic X i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Aleshores $\text{Im}_A(f)$ és connex.*

Demostració. \square

Proposició 19.1.10. *Siguin X i Y dos espais topològics. Aleshores $X \times Y$ és un espai connex si i només si X i Y són espais connexos.*

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que $X \times Y$ és un espai connex. Tenim per l'exemple 17.1.9 que les projeccions π_X i π_Y són contínues, i per la proposició 19.1.9 tenim que X i Y són connexos.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que X i Y són espais connexos i fixem un y de Y . Aleshores tenim que

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

i per la proposició 19.1.6 hem acabat. \square

Proposició 19.1.11. *Sigui A un subespai connex d'un espai topològic X i B un conjunt tal que*

$$A \subseteq B \subseteq \text{Cl}(A).$$

Aleshores B és connex.

Demostració. \square

19.1.3 Connexió per camins

Definició 19.1.12 (Camí). Sigui X un espai topològic i $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ una aplicació contínua. Aleshores direm que ω és un camí.

També direm que $\omega(0)$ és l'origen del camí i $\omega(1)$ el final del camí.

Definició 19.1.13 (Connex per camins). Sigui X un espai topològic tal que per a tots dos punts x i y de X existeix un camí ω tal que x és l'origen de ω i y és el final de ω . Aleshores direm que X és connex per camins.

Proposició 19.1.14. *Sigui X un espai topològic connex per camins. Aleshores X és connex.*

Demostració. \square

Exemple 19.1.15. *Volem veure que no tots els espais connexos són connexos per camins.*

Solució. \diamond

19.1.4 Components connexos d'un espai

Proposició 19.1.16. *Sigui X un espai topològic i \sim una relació sobre X tal que $x \sim y$ si i només si existeix un subespai C connex de X tal que x i y pertanyen a C . Aleshores \sim és una relació d'equivalència.*

Demostració. \square

Definició 19.1.17 (Components connexos). Sigui X un espai topològic i \sim una relació sobre X tal que $x \sim y$ si i només si existeix un subespai C connex de X tal que x i y pertanyen a C . Aleshores direm que les classes d'equivalència de \sim són components connexos de X .

Denotarem \bar{x} com $C(x)$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 19.1.16.

Proposició 19.1.18. *Segui x un punt d'un espai topològic X . Aleshores*

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \text{ és connex}}} C.$$

Demostració.

□

Proposició 19.1.19. *Segui x un punt d'un espai topològic X . Aleshores $C(x)$ és connex.*

Demostració.

□

Proposició 19.1.20. *Siguin x un punt d'un espai topològic X i C un connex que conté x . Aleshores C és un subconjunt de $C(x)$.*

Demostració.

□

Proposició 19.1.21. *Siguin x i y dos punts d'un espai topològic X tals que $C(x) \neq C(y)$. Aleshores $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.*

Demostració.

□

Proposició 19.1.22. *Segui x un punt d'un espai topològic X . Aleshores $C(x)$ és un tancat.*

Demostració.

□

Bibliografia

- [1] *Apunts d'un curs de Topologia elemental*. Vers. 1.2. 2017. URL: <http://mat.uab.cat/~aguade/teaching.html>.
- [2] *Free actions of finite groups on Hausdorff spaces*. 2011. URL: <http://math.ucr.edu/~res/math205C-2011/freeactions.pdf>.
- [3] Czes Kosniowski. *A first course in algebraic topology*. Anglès. Cambridge University Press, 1980. ISBN: 978-0521298643.
- [4] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*. Anglès. Springer-Verlag, 1991. ISBN: 978-3540974307.
- [5] Klaus Jänich. *Topology*. Anglès. Springer, 1995. ISBN: 978-0387908922.

La majoria del contingut està escrit seguint [1], que també s'utilitza per les classes de teoria de l'assignatura. He extret la demostració d'un Teorema de [2].

La bibliografia del curs inclou els textos [3, 4, 5, 1].

Part IX

Probabilitat i modelització estocàstica

Models probabilístics

20.1 L'espai de probabilitat

20.1.1 Espais mostrals

Definició 20.1.1 (Experiment aleatori). Definirem de manera informal els fenòmens que estudiarem, els *experiments aleatoris*. Aquests tenen les següents propietats:

1. Coneixem tots els possibles resultats de l'experiment, però no el que sortirà. El conjunt de possibles resultats Ω serà l'*espai mostral*.
2. Tenim alguna manera d'assignar probabilitats als resultats, o a conjunts de resultats.

Exemple 20.1.2. *Volem determinar l'espai mostral dels següents experiments:*

1. *Llençar un dau de sis cares.*
2. *Un partit de bàsquet.*
3. *Llençar una moneda.*

Solució. Així, els seus espais mostrals són, respectivament,

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
3. $\Omega = \{H, T\}$.

◇

Definició 20.1.3 (Esdeveniment). Sigui $A \subseteq \Omega$ un subconjunt d'un espai mostral Ω . Aleshores direm que A és un esdeveniment.

Si el resultat $\omega \in A \subseteq \Omega$ s'ha realitzat direm que l'esdeveniment A s'ha realitzat. També definim

1. Direm que $A = \Omega$ és l'esdeveniment segur i $A = \emptyset$ és l'esdeveniment impossible.
2. Direm que $B = \Omega \setminus A$ és l'esdeveniment contrari a l'esdeveniment A .

Exemple 20.1.4. *Volem determinar els conjunts d'esdeveniments següents:*

1. *Tirar un dau de sis cares i que surti un nombre parell.*
2. *Una partit de bàsquet on guanya el visitant.*
3. *Un món on acabo aquests apunts abans que la carrera.*

Solució. Els conjunts d'esdeveniments són, respectivament,

1. $A = \{2, 4, 6\}$.
2. $A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n > m\}$.
3. $A = \emptyset$.

◇

20.1.2 Àlgebres i σ -àlgebres

Definició 20.1.5 (Àlgebra). Sigui \mathcal{A} una col·lecció de subconjunts Ω tal que

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, aleshores $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, aleshores $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Aleshores direm que \mathcal{A} és un àlgebra de conjunts sobre Ω .

Observació 20.1.6. *Si \mathcal{A} és un àlgebra, aleshores $\emptyset \in \mathcal{A}$.*

Exemple 20.1.7. *Sigui $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. Volem veure que*

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

és un àlgebra.

Solució. Comprovem la definició d'20.1.5. Tenim que $\Omega \in \mathcal{A}$. Prenem un esdeveniment $A \in \mathcal{A}$ i calculem $\Omega \setminus A$. Podem veure tots els casos fent

$$\Omega \setminus \emptyset = \Omega, \quad \Omega \setminus \Omega = \emptyset, \quad \Omega \setminus \{1, 2\} = \{3, 4, 5, 6\}, \quad \text{i} \quad \Omega \setminus \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2\}.$$

Prenem ara $A, B \in \mathcal{A}$. Si $A = B$ aleshores $A \cup B = A$, i per tant $A \cup B \in \mathcal{A}$, i si tenim $A \cup B \in \mathcal{A}$ aleshores $B \cup A = A \cup B \in \mathcal{A}$ i hem acabat. També tenim que si $A \in \mathcal{A}$, aleshores $\emptyset \cup A = A \in \mathcal{A}$ i $\Omega \cup A = \Omega \in \mathcal{A}$. Per tant només ens cal veure el cas

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{A},$$

i per la definició d'20.1.5 trobem que \mathcal{A} és un àlgebra sobre Ω

◇

Proposició 20.1.8. *Siguin A, B dos elements d'un àlgebra \mathcal{A} . Aleshores*

$$A \cap B \in \mathcal{A}.$$

Demostració. Per la definició d'20.1.5 tenim que $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ i, de nou per la definició d'20.1.5, tenim que $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$. Ara bé, tenim que $A^c \cup B^c = A \cap B$, i per tant $A \cap B \in \mathcal{A}$. □

Definició 20.1.9 (σ -àlgebra). Sigui \mathcal{A} un àlgebra tal que per a tota família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'elements d' \mathcal{A} tenim que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Aleshores direm que \mathcal{A} és una σ -àlgebra.

Observació 20.1.10. Sigui \mathcal{A} un àlgebra sobre un conjunt Ω finit. Aleshores \mathcal{A} és una σ -àlgebra.

Proposició 20.1.11. Sigui $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una família d'elements d'un σ -àlgebra \mathcal{A} . Aleshores

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

és un element de \mathcal{A} .

Demostració. Tenim que

$$A^c = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \right)^c = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c \right).$$

Ara bé, per la definició d'20.1.5 tenim que $A_n^c \in \mathcal{A}$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, i per la definició de 20.1.9 trobem que $A^c \in \mathcal{A}$, i de nou per la definició d'20.1.5 tenim que $A \in \mathcal{A}$. \square

20.1.3 L'àlgebra de Borel

Proposició 20.1.12. Sigui $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ una família de σ -àlgebres sobre un conjunt Ω . Aleshores

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

és una σ -àlgebra sobre Ω .

Demostració. Comprovem que \mathcal{A} satisfà la definició 20.1.9. Veiem que $\Omega \in \mathcal{A}$. Tenim per la definició de 20.1.5 que $\Omega \in \mathcal{A}_i$ per a tot $i \in I$, i per la definició d'2.1.13 trobem que $\Omega \in \mathcal{A}$.

Prenem ara un $A \in \mathcal{A}$ i considerem A^c . Si $A \in \mathcal{A}$ tenim que per a tot $i \in I$ es satisfà $A \in \mathcal{A}_i$, i per la definició d'20.1.5 trobem que $A^c \in \mathcal{A}_i$ per a tot $i \in I$, i per la definició d'2.1.13 tenim que es satisfà $A^c \in \mathcal{A}$.

Per acabar premen $A, B \in \mathcal{A}$. Tenim que $A, B \in \mathcal{A}_i$ per a tot $i \in I$, i per la definició d'20.1.5 trobem que $A \cup B \in \mathcal{A}_i$ per a tot $i \in I$, i per la definició d'2.1.13 trobem que $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Per tant per la definició d'20.1.5 tenim que \mathcal{A} és un àlgebra sobre Ω .

Prenem ara una família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'elements d' \mathcal{A} i denotem

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Tenim de nou que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ també és una família d'elements d' \mathcal{A}_i per a tot $i \in I$, i per la definició d'20.1.9 tenim que $A \in \mathcal{A}_i$ per a tot $i \in I$, i per la

definició d'2.1.13 trobem que $A \in \mathcal{A}$, i per la definició d'20.1.9 trobem que \mathcal{A} és una σ -àlgebra sobre Ω . \square

Definició 20.1.13 (σ -àlgebra generada per un conjunt). Sigui $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una família de subconjunts d'un conjunt Ω . Denotarem el mínim σ -àlgebra generada per \mathcal{C} com $\sigma(\mathcal{C})$ i direm que és la σ -àlgebra generada per \mathcal{C} .

Aquesta definició té sentit per la proposició 20.1.12.

Exemple 20.1.14 (σ -àlgebra de singletons). Denotem $\mathcal{C} = \{\{x\} \subseteq \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Volem veure que

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ó } A^c \text{ és finit o numerable}\}.$$

Solució.

\diamond

Definició 20.1.15 (σ -àlgebra de Borel). Sigui

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \mid \mathcal{U} \text{ és un obert de } \mathbb{R}\}.$$

Direm que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ és la σ -àlgebra de Borel.

20.1.4 Probabilitats

Definició 20.1.16 (Probabilitat). Sigui \mathcal{A} una σ -àlgebra sobre un conjunt Ω i $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ una aplicació tal que

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Per a tota família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ d'esdeveniments disjunts dos a dos tenim que

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n). \quad (\sigma\text{-additivitat})$$

Aleshores direm que P és una probabilitat.

També direm que (Ω, \mathcal{A}, P) és un espai de probabilitat.

Notació 20.1.17 (Unió disjunta). Sigui $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una família de conjunts disjunts dos a dos. Aleshores denotarem

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

i direm que és la unió disjunta.

Proposició 20.1.18. Sigui P una probabilitat. Aleshores $P(\emptyset) = 0$.

Demostració. Considerem la família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ amb $A_n = \emptyset$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Tenim que per a tot $i, j \in \mathbb{N}$ es satisfà $A_i \cap A_j = \emptyset$ i

$$\emptyset = \biguplus_{n=0}^{\infty} \emptyset.$$

Aleshores per la definició de 20.1.16 tenim que

$$P(\emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\emptyset),$$

i obtenim que $P(\emptyset) = 0$. □

Proposició 20.1.19. *Siguin P una probabilitat sobre una σ -àlgebra \mathcal{A} i $A, B \in \mathcal{A}$ dos esdeveniments tals que $A \subseteq B$. Aleshores*

$$P(A) \leq P(B).$$

Demostració. Tenim que

$$B = A \uplus (B \setminus A).$$

Aleshores per la definició de 20.1.16 trobem que

$$P(B) = P(A \uplus (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A),$$

i com que, per la definició de 20.1.16, tenim que $P(B \setminus A) \geq 0$, trobem que

$$P(A) \leq P(B). \quad \square$$

Proposició 20.1.20. *Siguin P una probabilitat sobre una σ -àlgebra \mathcal{A} i $A, B \in \mathcal{A}$ dos esdeveniments tals que $A \subseteq B$. Aleshores*

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Demostració. Tenim que

$$B = A \uplus (B \setminus A).$$

Aleshores per la definició de 20.1.16 trobem que

$$P(B) = P(A \uplus (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A),$$

i trobem que

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A). \quad \square$$

Corol·lari 20.1.21. *Siguin P una probabilitat sobre una σ -àlgebra \mathcal{A} i $A \in \mathcal{A}$ un esdeveniment. Aleshores*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Proposició 20.1.22. *Siguin P una probabilitat sobre una σ -àlgebra \mathcal{A} i $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ una família d'esdeveniments. Aleshores*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n P(A_i \cap A_j) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right). \end{aligned}$$

Demostració. Ho veiem per inducció sobre n . Si $n = 1$ tenim que

$$P(A) = P(A).$$

Suposem doncs que la hipòtesi és certa per a $m - 1$ fixe i veiem-ho pel cas m . Tenim que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) &= P\left(A_m \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \\ &= P(A_m) + P\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) - P\left(A_m \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \\ &= P(A_m) + P\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} (A_i \cap A_m)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} P(A_i) + P(A_m) - \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} P(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{m-1} P(A_i \cap A_m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} \sum_{k=j}^{m-1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i}^{m-1} P(A_i \cap A_j \cap A_m) + \\ &\quad + \cdots + (-1)^m P(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) + \\ &\quad + (-1)^m \sum_{i=1}^{m-2} P(A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m-2}) + \\ &\quad + (-1)^m P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) \\ &= \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{m+1} P\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right), \end{aligned}$$

i pel 3.1.7 hem acabat. \square

Corol·lari 20.1.23. *Siguin P una probabilitat sobre una σ -àlgebra \mathcal{A} i $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}$ una família d'esdeveniments. Aleshores*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Teorema 20.1.24 (Definició de Laplace). *Sigui (Ω, \mathcal{A}, P) un espai de probabilitats amb $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ i $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ tals que per a tot $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tenim que $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$. Aleshores per a tot esdeveniment $A \in \mathcal{A}$ tenim*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Demostració. Observem que $|\Omega| = 1$, i que

$$\Omega = \biguplus_{i=1}^n \{\omega_i\}$$

Per tant tenim que

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}),$$

i com que, per hipòtesi, per a tot $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tenim que $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$, trobem que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ es satisfà

$$1 = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = nP(\{\omega_i\}),$$

i per tant, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ tenim

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Aleshores, si $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_r}\}$ tenim que $|A| = r$ i que

$$A = \biguplus_{j=1}^r \{\omega_{i_j}\},$$

i per tant

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\biguplus_{j=1}^r \{\omega_{i_j}\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^r P(\{\omega_{i_j}\}) \\ &= \frac{r}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 20.1.25 (Continuïtat seqüencial per successions creixents). *Si- guin (Ω, \mathcal{A}, P) un espai de probabilitat i $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una família d'esdeveni- ments tals que*

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

amb

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A).$$

Demostració. Considerem els conjunts

$$B_n = A_n \cap A_{n-1}^c = A_n \setminus A_{n-1}, \quad \text{amb} \quad B_0 = \emptyset. \quad (20.1)$$

Aleshores tenim que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Així veiem que

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \\
 &= P\left(\biguplus_{n=0}^{\infty} B_n\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) \tag{20.1}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P(A_n) - P(A_{n-1})) \tag{20.1.20}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) - P(A_0) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) - P(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n), \tag{20.1.18}
 \end{aligned}$$

com volíem veure. \square

Proposició 20.1.26 (Continuïtat seqüencial per successions decreixents). *Si- guin (Ω, \mathcal{A}, P) un espai de probabilitat i $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una família d'esdeveni- ments tals que*

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

amb

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A).$$

Demostració. Considerem les conjunts

$$B_n = A_n^c.$$

Aleshores tenim que

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots,$$

i per la proposició de 20.1.25 trobem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right).$$

Ara bé, tenim que

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) \\ &= P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n^c\right) \\ &= P\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \\ &= 1 - 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n). \end{aligned} \quad \square$$

Part X

Equacions diferencials ordinàries I

Equacions diferencials de primer ordre en una variable

21.1 Espai de funcions contínues i acotades

21.1.1 L'espai de funcions contínues i acotades és complet

Notació 21.1.1 (Espai de funcions contínues i acotades). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores denotem

$$\mathcal{C}_b(X, T) = \{f(x) \mid f(x) \text{ és una funció contínua i acotada de } X \text{ a } T\}.$$

Definició 21.1.2 (Norma d'una funció). Sigui X un espai vectorial amb una topologia, T un compacte de \mathbb{R}^n i $f(x)$ una funció de $\mathcal{C}_b(X, T)$. Aleshores definim

$$|f| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

com la norma de f .

Definició 21.1.3 (Successió de Cauchy). Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió sobre un espai normat X tal que per a tots naturals n i m existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és de Cauchy.

Definició 21.1.4 (Espai mètric complet). Sigui X amb la distància d un espai mètric tal que per a tota successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy tenim que

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

és un element de X . Aleshores direm que X és complet.

Proposició 21.1.5. *Sigui f i g dues funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ i*

$$d(f, g) = |f - g|.$$

Aleshores per a tot f , g i h de $\mathcal{C}_b(X, T)$ es satisfà

1. $d(f, g) \geq 0$.
2. $d(f, g) = 0$ si i només si $f = g$.
3. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.
4. $d(f, g) = d(g, f)$.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per la definició de 21.1.2 tenim que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

i per tant ha de ser $d(f, g) \geq 0$.

Veiem ara el punt (2). Si $f = g$ aleshores tenim que per a tot x de X es satisfà $f(x) = g(x)$, i per tant trobem

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0,$$

i això és que $d(f, g) = 0$.

Suposem ara que $d(f, g) = 0$. Per la definició de 21.1.2 ha de ser

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0,$$

i per tant trobem que $f(x) = g(x)$ per a tot x de X i per tant tenim que ha de ser $f = g$.

Veiem ara el punt (3). Tenim que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| = d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Per acabar veiem el punt (4). Tenim que

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f). \end{aligned} \quad \square$$

Definició 21.1.6 (Distància entre funcions). Sigui X amb la topologia τ un espai topològic, T un compacte de \mathbb{R}^n i f i g dues funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$. Aleshores definim

$$d(f, g) = |f - g|$$

com la distància entre f i g en $\mathcal{C}_b(X, T)$.

Aquesta definició té sentit per la proposició 21.1.5.

Lema 21.1.7. Sigui X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores $\mathcal{C}_b(X, T)$ amb la distància d és espai mètric.

Demostració. □

Notació 21.1.8. Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores denotarem per $\mathcal{C}_b(X, T)$ l'espai mètric de amb la distància entre funcions d .

Observem que això té sentit pel lema 21.1.7.

Teorema 21.1.9. *Siguin X amb la topologia τ un espai topològic i T un compacte de \mathbb{R}^n . Aleshores $\mathcal{C}_b(X, T)$ és espai mètric complet.*

Demostració. Sigui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de Cauchy de $\mathcal{C}_b(X, T)$. Per la definició de 21.1.3 tenim que per a tots naturals n i m existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Per la definició de 21.1.6 trobem que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

i trobem que per a tot x de X es satisfà

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

i per la definició de 21.1.3 trobem que la successió $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ és de Cauchy, i per la definició de 5.2.3 trobem que la successió $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent. Denotem, per a tot x de X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (21.1)$$

Sigui n_0 un natural. Per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que per a tot n i m enters amb $n, m \geq n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ara bé, per (21.1) tenim, per a tot x de X , que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|.$$

Per tant tenim que per a tot x de X es satisfà

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

i per la definició de 9.2.4 tenim que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix uniformement a $f(x)$, i per la definició de 21.1.4 tenim que $\mathcal{C}_b(X, T)$ és complet. \square

21.1.2 Aplicacions contractives i punts fixes

Definició 21.1.10 (Aplicació contractiva). Siguin X amb la distància d un espai mètric i $T: X \rightarrow X$ una aplicació tal que existeixi un real $0 < k < 1$ satisfent, per a tots x i y de X ,

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y).$$

Aleshores direm que T és una aplicació contractiva sobre X .

Observació 21.1.11. *Siguin X amb la distància d un espai mètric i T una aplicació contractiva sobre X . Aleshores T és uniformement contínua.*

Definició 21.1.12 (Punt fix). *Siguin X amb la distància d un espai mètric, T una aplicació contractiva sobre X i a un punt tal que $d(a, T(a)) = 0$. Aleshores direm que a és un punt fix de T .*

Teorema 21.1.13. *Siguin X amb la distància d un espai mètric complet i T una aplicació contractiva sobre X . Aleshores T té un únic punt fix.*

Demostració. Per la definició d'21.1.10 tenim que existeix un real $0 < k < 1$ tal que per a tots x i y de X es satisfà

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y). \quad (21.2)$$

Veiem que si existeix un punt fix aquest és únic. Suposem que existeixen dos punts a i b de X tals que a i b són punts fixos de T . Aleshores tenim que

$$d(a, b) = d(T(a), T(b)),$$

i per (21.2) tenim que

$$d(a, b) \leq k d(a, b).$$

Ara bé, com que $0 < k < 1$, ha de ser $d(a, b) = 0$, i per tant trobem que $a = b$.

Veiem ara que existeix un punt fix. Prenem un element x de X i considerem la successió $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Sigui r un natural. Aleshores tenim que per a tot n natural

$$d(T^{n+r}(x), T^n(x)) \leq k d(T^{n+r-1}(x), T^{n-1}(x)) \quad (21.2)$$

$$\leq k^2 d(T^{n+r-2}(x), T^{n-2}(x)) \quad (21.2)$$

$$\vdots$$

$$\leq k^n d(T^r(x), x) \quad (21.2)$$

$$\leq k^n (d(T^r(x), T^{r-1}(x)) + d(T^{r-1}(x), T^{r-2}(x)) + \dots$$

$$\dots + d(T(x), x))$$

$$\leq k^n (k^{r-1} d(T(x), x) + k^{r-2} d(T(x), x) + \dots + d(T(x), x))$$

$$= k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^{r-1}) d(T(x), x)$$

$$< \frac{k^n}{1 - k} d(T(x), x). \quad (9.1.3)$$

Ara bé, com que $0 < k < 1$ tenim que existeix un real $\varepsilon > 0$ tal que

$$d(T^{n+r}(x), T^n(x)) < \varepsilon,$$

i per la definició de 21.1.3 tenim que la successió $(T^n(x))$ és una successió de Cauchy, i com que, per hipòtesi, X és complet, tenim que existeix un element p de X tal que

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x). \quad (21.3)$$

Considerem el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)).$$

Com que, per l'observació 21.1.11, T és contínua, tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)\right)$$

i per (21.3) trobem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = T(p).$$

Ara bé, tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x)$$

i per tant trobem que

$$T(p) = p,$$

i per la definició de 21.1.12 hem acabat. \square

Corol·lari 21.1.14. *Siguin X amb la distància d'un espai mètric complet i T una aplicació de X en X tal que existeix un natural k satisfent que T^k sigui una aplicació contractiva sobre X . Aleshores T té un únic punt fix.*

Demostració. Suposem que existeixen dos punts x i y de X tals que x i y són punts fixos de T . Aleshores per la definició de 21.1.12 tenim que

$$T^k(x) = x$$

i

$$T^k(y) = y.$$

Ara bé, pel Teorema 21.1.13 tenim que ha de ser $x = y$, i per tant aquest punt és únic.

Veiem ara que existeix un punt x tal que $T(x) = x$. Tenim, per hipòtesi, que existeix un k natural tal que T^k és contractiva, i pel Teorema 21.1.13 tenim que existeix un punt x de X tal que $T^k(x) = x$. Tenim també que

$$T^{k+1}(x) = T(T^k(x)), \quad (21.4)$$

i per tant

$$T^{k+1}(x) = x \quad (21.5)$$

i amb (21.4) i (21.5), com que $T^k(x) = x$, trobem que

$$T(x) = x. \quad \square$$

21.2 Teoremes d'existència i unicitat

21.2.1 Problema de Cauchy

Definició 21.2.1 (Equació diferencial ordinària). Siguin $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunt i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció. Aleshores direm que l'expressió

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t))$$

és una equació diferencial ordinària sobre Ω .

Denotarem

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Definició 21.2.2 (Solució d'una equació diferencial ordinària). Siguin

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

una equació diferencial ordinària sobre Ω , $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval i $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció tal que per a tot $t \in I$ es satisfà que $(t, u(t)) \in \Omega$ i que u és derivable en I amb $u'(t) = f(t, u(t))$. Aleshores direm que u és una solució de l'equació diferencial ordinària

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)).$$

Exemple 21.2.3. Volem trobar una solució a l'equació diferencial ordinària

$$\dot{u}(t) = u(t).$$

Solució. $e^t K$. ◇

Definició 21.2.4 (Problema de Cauchy). Sigui

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

una equació diferencial ordinària sobre Ω i $(t_0, x_0) \in \Omega$ un punt. Aleshores direm que el sistema

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

és un problema de Cauchy sobre Ω . Direm que una solució d'aquest problema de Cauchy és una funció u tal que u és solució de l'equació diferencial

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

i es satisfà $u(t_0) = x_0$.

Això té sentit per la definició de [21.2.2](#).

Observació 21.2.5. *Sigui*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problema de Cauchy sobre Ω . Aleshores una funció u és una solució d'aquest sistema si i només si

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

21.2.2 El Teorema de Picard

Definició 21.2.6 (Funció Lipschitz respecte la segona variable). Siguin $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunt, $K \geq 0$ un real i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

per a tot (t, x) i (t, y) de Ω . Aleshores direm que f és Lipschitz respecte la segona variable.

Exemple 21.2.7. *Volem veure que els polinomis són funcions Lipschitz respecte la segona variable.*

Solució.

◇

Teorema 21.2.8 (Teorema de Picard). *Siguin a i b dos reals positius,*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problema de Cauchy sobre $\Omega = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b)$ i

$$M = \max_{(t,x) \in \Omega} |f(t, x)|.$$

Aleshores aquest problema de Cauchy té una única solució sobre l'interval

$$\left[t_0 - \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, t_0 + \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \right].$$

Demostració. Denotem $X = \mathcal{C}_b([t_0 - a, t_0 + a], \overline{B}(x_0, b))$ i definim una aplicació

$$\begin{aligned} T: X &\longrightarrow X \\ u(t) &\longmapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Per l'observació 21.2.5 trobem que una funció $u(t)$ és solució del problema de Cauchy de l'enunciat si i només si

$$T(u(t)) = u(t).$$

Tenim que si u és un element de X , aleshores $T(u)$ també pertany a X , ja que si prenem un t de $(t_0 - a, t_0 + a)$ trobem que

$$\begin{aligned} |T(u(t)) - x_0| &= \left| x_0 - x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \right| \\ &\leq M|t - t_0| \leq b. \end{aligned} \tag{7.1.19}$$

i per tant tenim que

$$|T(u(t)) - x_0| \leq b.$$

Per la definició de 16.1.2 trobem que $T(u(t))$ és un element de $\overline{B}(x_0, b)$, i per tant $T(u)$ és un element de X per a tot u de X .

Per hipòtesi tenim que f és Lipschitz respecte la segona variable, i per la definició de 21.2.6 trobem que existeix un real $K \geq 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|. \tag{21.6}$$

Volem veure que per a tot m natural, u i v funcions de X i t de $(t_0 - a, t_0 + a)$ tenim

$$|T^m(u(t)) - T^m(v(t))| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v).$$

Ho fem per inducció. Veiem el cas $m = 1$. Tenim

$$\begin{aligned} |T(u(t)) - T(v(t))| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right| \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \right| \quad (7.1.19)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t K |u(s) - v(s)| ds \right| \quad (21.6)$$

$$\begin{aligned} &= K \left| \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \right| \quad (7.1.17) \\ &\leq K |t - t_0| d(u, v). \end{aligned}$$

Suposem ara que l'hipòtesi és certa per a $m - 1$ fix. És a dir, suposem que

$$|T^{m-1}(u(t))(t) - T^{m-1}(v(t))(t)| \leq \frac{K^{m-1}}{(m-1)!} |t - t_0|^{m-1} d(u, v) \quad (21.7)$$

i veiem que també és cert per m . Tenim pel Teorema 7.1.19 que

$$\begin{aligned} |T^m(u(t)) - T^m(v(t))| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, T^{m-1}(u(s))) - f(s, T^{m-1}(v(s)))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, T^{m-1}(u(s))) - f(s, T^{m-1}(v(s)))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K |T^{m-1}(u(s)) - T^{m-1}(v(s))| ds \right| \end{aligned} \quad (21.6)$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{K^m}{(m-1)!} |s - t_0|^{m-1} d(u, v) ds \right| \quad (21.7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{K^m}{(m-1)!} d(u, v) \int_{t_0}^t |s - t_0|^{m-1} ds \quad (7.1.17) \\ &= \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v). \end{aligned}$$

Per tant, pel 3.1.7 tenim que per a tot m natural, u i v funcions de X i t de $(t_0 - a, t_0 + a)$ es satisfà

$$|T^m(u(t)) - T^m(v(t))| \leq \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m d(u, v),$$

com volíem veure.

Ara bé, tenim que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m = 0,$$

i per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un natural n_0 tal que per a tot $n > n_0$ es satisfà

$$0 < \frac{K^m}{m!} |t - t_0|^m < 1.$$

Per tant, per la definició d'21.1.10 tenim que per a tot $n > n_0$ l'aplicació T^n és una aplicació contractiva, i pel corollari 21.1.14 tenim que existeix una única funció u de X tal que

$$T(u(t)) = u(t). \quad \square$$

Corollari 21.2.9. *Siguin $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval tancat i*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

un problema de Cauchy sobre $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ tal que f és una funció contínua i Lipschitz respecte la segona variable. Aleshores aquest problema de Cauchy té una única solució definida en l'interval I .

Demostració. Quan b tendeix a infinit tenim que $\overline{B}(x_0, b) = \mathbb{R}^n$. \square

21.2.3 El Teorema de Peano

Definició 21.2.10 (Família de funcions puntualment acotada). *Sigui H una família de funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ tal que per a tot x de X existeix un real M_x tal que*

$$|f(x)| < M_x$$

per a tot f de H . Aleshores direm que H és puntualment acotada.

Definició 21.2.11 (Família de funcions equicontínua). *Siguin H una família de funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ i x un punt de X tal que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un entorn N_x de x tal que per a tot y de N_x i f de H es satisfà*

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que H és equicontínua en x . Si H és equicontínua en x per a tot x de X direm que H és equicontínua en X .

També, si $\mathcal{C}_b(X, T)$ té la distància d i, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que per a tot $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, i per a tot $f \in H$ es satisfà

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Aleshores direm que H és uniformement equicontínua en X .

Observació 21.2.12. *Sigui H una família de funcions uniformement equicontínua. Aleshores H és una família de funcions equicontínua.*

Lema 21.2.13 (Teorema d'Arzelà-Ascoli). *Siguin X un compacte i $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions de $\mathcal{C}_b(X, T)$ equicontínua i puntualment acotada. Aleshores la successió $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ té una parcial uniformement convergent.*

Demostració. Prenem un real $\varepsilon > 0$. Per la definició de 21.2.11 tenim que per a tot punt x de X existeix un entorn N_x de x tal que per a tot y de N_x tenim, per a tot n natural, que

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ara bé, per la definició d'16.2.11 tenim que existeix un obert \mathcal{V}_x de X tal que x és un element de \mathcal{V}_x i \mathcal{V}_x és un subconjunt de N_x . Per tant tenim que per a tot y de \mathcal{V}_x , per a tot n natural, es satisfà

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (21.8)$$

També tenim, per hipòtesi, que X és compacte, i per tant existeix una família $\{x_i\}_{i=1}^k$ de punts de X tals que

$$X = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_{x_i}. \quad (21.9)$$

Com que, per hipòtesi, la $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de funcions puntualment acotada, per la definició de 21.2.10 tenim que existeix un real M tal que per a tot n natural tenim

$$|f_n(x_i)| < M,$$

i tenim pel 5.2.19 que existeix una parcial $(f_n^1(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Podem repetir l'argument per trobar una successió de la forma

$$(f_n^k(x_i))_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{per a tot } i \text{ de } \{1, \dots, k\}.$$

Tenim que la successió $(f_n^k(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ és convergent. Per tant, per la definició de 5.2.3 trobem que existeix un element de X , $f^k(x_i)$ tal que existeix un natural n'_ε satisfent que per a tot $n > n'_\varepsilon$ es compleix

$$|f_n^k(x_i) - f^k(x_i)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (21.10)$$

per tant trobem, si $m > n$ i $n > n'_\varepsilon$, que

$$\begin{aligned} |f_n^k(x_i) - f_m^k(x_i)| &\leq |f_n^k(x_i) - f^k(x_i)| + |f^k(x_i) - f_m^k(x_i)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} \end{aligned} \quad (21.10)$$

i per tant

$$|f_n^k(x_i) - f_m^k(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (21.11)$$

Prenem ara un element x de X . Per (21.9) tenim que existeix un j de $\{1, \dots, k\}$ tal que x és un element de \mathcal{V}_{x_j} , i tenim que

$$\begin{aligned} |f_n^k(x) - f_m^k(x)| &\leq |f_n^k(x) - f_n^k(x_j)| + |f_n^k(x_j) - f_m^k(x)| \\ &\leq |f_n^k(x) - f_n^k(x_j)| + |f_n^k(x_j) - f_m^k(x_j)| + \\ &\quad + |f_m^k(x_j) - f_m^k(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_n^k(x_j) - f_m^k(x_j)| + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \quad (21.8)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (21.11)$$

Tenim doncs que per a tot $\varepsilon > 0$ real existeix una parcial $(g_{n'_\varepsilon+n}^{(\varepsilon)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfà

$$\left| g_{n'_\varepsilon+n}^{(\varepsilon)} - g_{n'_\varepsilon+m}^{(\varepsilon)} \right| \leq \varepsilon$$

per a tot n i m enters.

Definim, per simplificar la notació, la successió

$$\left(g_{n'_\varepsilon+n}^{(\varepsilon)} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(f_{n'_{\varepsilon-1}+n}^{(\varepsilon-1)} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Per tant tenim que per a $\varepsilon = 1$ es satisfà

$$\left| f_{n'_1+n}^{(1)}(x) - f_{n'_1+m}^{(1)}(x) \right| \leq 1.$$

Si prenem $\varepsilon = \frac{1}{2}$ trobem una parcial $(f_{n_2+n}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(f_{n_1+n}^1)_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfà

$$\left| f_{n_2+n}^{(2)}(x) - f_{n_2+m}^{(2)}(x) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Tenim doncs que per a tot i natural la successió $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ és una parcial de la successió $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ i per a tot n i m naturals tenim

$$\left| f_{n_{i+1}+n}^{i+1}(x) - f_{n_{i+1}+m}^{i+1}(x) \right| < \frac{1}{i},$$

i per tant, per la definició de 21.1.3 trobem que la successió $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ és de Cauchy per a tot i natural, i com que pel Teorema 21.1.9 tenim que $\mathcal{C}_b(X, T)$ és un espai complet, i per la 9.2.8 trobem que la parcial $(f_{n_{i+1}+n}^{i+1})_{n \in \mathbb{N}}$ és uniformement convergent. \square

Teorema 21.2.14 (Teorema Peano). *Siguin a i b dos reals positius i*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (21.12)$$

un problema de Cauchy sobre $\Omega = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b)$, tal que f és una funció contínua i M un real tal que $|f(t, x)| < M$ per a tot (t, x) de Ω . Aleshores aquest problema de Cauchy té una solució sobre l'interval

$$\left[t_0 - \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, t_0 + \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \right].$$

Demostració. Per a tot $(t, x) \in \Omega$ denotem

$$f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x)).$$

Aleshores pel 9.3.36 trobem que existeixen n successions de polinomis $\{(p_m^i)_{m \in \mathbb{N}}\}_{i=1}^n$ tals que (p_m^i) convergeix uniformement a f_i per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Per la proposició 9.2.7 trobem que (p_m^i) convergeix puntualment a f_i per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, i per la definició de 9.2.2 trobem que per a tot $(t, x) \in \Omega$ tenim

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m^i(t, x) = f_i(t, x),$$

i denotant $p_m(t, x) = (p_m^1(t, x), \dots, p_m^n(t, x))$ trobem que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(t, x) = f(t, x). \quad (21.13)$$

Per la definició de 5.2.3 trobem que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 tal que per a tot $m > n_0$ es satisfà

$$|f(t, x) - p_m(t, x)| < \varepsilon,$$

per a tot (t, x) de Ω . Com que, per hipòtesi, tenim que $|f(t, x)| < M$, trobem que ha de ser $|p_m(t, x)| < M$ per a tot $(t, x) \in \Omega$ i per a tot $m > n_0$.

Considerem el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = p_m(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sobre Ω . Com que p_m és un polinomi, per l'exemple 21.2.7 trobem que p_m és Lipschitz respecte la segona variable, i pel 21.2.8 trobem que, per a tot $m > n_0$ aquest problema de Cauchy té una única solució, φ_m , definida sobre l'interval

$$I = \left[t_0 - \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, t_0 + \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \right].$$

Observem que, per a tot $m > n_0$ i per a tot $t \in I$, tenim que $\varphi_m(t) \in \overline{B}(x_0, b)$, i per la definició de 16.1.2 trobem que

$$|\varphi_m(t)| \leq |x_0| + b.$$

Aleshores per la definició de 21.2.10 trobem que la successió de funcions $(\varphi_{m+n_0})_{m \in \mathbb{N}}$ és una família de funcions puntualment acotada.

Fixem un $\varepsilon > 0$ i prenem dos t i t' de I amb $t' < t$ tals que $|t, t'| < \frac{\varepsilon}{M}$. Aleshores, per l'observació 21.2.5, tenim que per a tot $m > n_0$

$$\begin{aligned} |\varphi_m(t) - \varphi_m(t')| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^t p_m(s, \varphi_m(s)) ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t'} p_m(s, \varphi_m(s)) ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t p_m(s, \varphi_m(s)) ds - \int_{t_0}^{t'} p_m(s, \varphi_m(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t'}^t p_m(s, \varphi_m(s)) ds \right| \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

$$\leq M|t' - t| < \varepsilon, \quad (7.1.19)$$

i per la definició de 21.2.11 trobem que la família de funcions $\{\varphi_{m+n_0}\}_{m \in \mathbb{N}}$ és uniformement equicontínua, i per l'observació 21.2.12 trobem que $\{\varphi_{m+n_0}\}_{m \in \mathbb{N}}$ és equicontínua.

Aleshores pel 21.2.13 trobem que existeix una parcial uniformement convergent, $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de $(\varphi_{n_0+m})_{m \in \mathbb{N}}$, i per la definició de 9.2.4 existeix una funció φ tal que $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$, i per la proposició 9.2.7 trobem que la successió $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeix puntualment a φ , i per la definició de 9.2.2 trobem que per a tot $t \in I$ tenim

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t). \quad (21.14)$$

Ara bé, tenim que per a tot $t \in I$

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) \quad (21.14)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_0 + \int_{t_0}^t p_k(s, \varphi_k(s)) ds \right) \quad (21.2.5)$$

$$= x_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t p_k(s, \varphi_k(s)) ds \quad (21.2.5)$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(s, \varphi_k(s)) ds \quad (9.2.11)$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad (21.13)$$

i per l'observació 21.2.5 tenim que φ és una solució del problema de Cauchy (21.12), i hem acabat. \square

Corol·lari 21.2.15. *Siguin*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problema de Cauchy sobre Ω tal que f sigui contínua i Ω sigui obert, i $K \subseteq \Omega$ un compacte. Aleshores existeix un real $\alpha > 0$ tal que per a tot punt (t_0, x_0) de K aquest problema de Cauchy té una solució sobre l'interval

$$[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Demostració. \square

21.2.4 Solucions improrrogables

Definició 21.2.16 (Conjunt de solucions d'un problema de Cauchy). Sigui

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(x)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (21.15)$$

un problema de Cauchy sobre Ω amb f contínua. Aleshores definirem

$$A(t_0, x_0) = \{(I, u) \mid u \text{ és solució del problema de Cauchy en l'interval } I\}$$

con el conjunt de solucions del problema de Cauchy (21.15).

Observació 21.2.17. $A(t_0, x_0) \neq \emptyset$.

Demostració. Per la definició de 21.2.16 tenim que f és contínua i pel 21.2.14 hem acabat. \square

Proposició 21.2.18. *Siguin $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy i \leq una relació tal que per a dos elements (I, u) i (J, v) de $A(t_0, x_0)$ tenim*

$$(I, u) \geq (J, v)$$

si i només si

$$J \subseteq I \quad i \quad u(x) = v(x) \text{ per a tot } x \in J.$$

Aleshores la relació \leq és una relació d'ordre.

Demostració. Comprovem les propietats de la definició de relació d'ordre:

1. Reflexiva: Pel 2.1.3 tenim que $I \subseteq I$ i per la definició d'2.2.5 tenim que $u(x) = u(x)$ per a tot x de I . Per tant trobem $(I, u) \geq (I, u)$.
2. Antisimètrica: Suposem que $(I, u) \geq (J, v)$ i $(J, v) \geq (I, u)$. Aleshores tenim que $J \subseteq I$ i $I \subseteq J$, i pel 2.1.3 trobem que $I = J$. També tenim que $u(x) = v(x)$ per a tot x de I , i per la definició d'2.2.5 trobem que $u = v$, i per tant $(I, u) = (J, v)$.
3. Transitiva: Siguin (I_1, u_1) , (I_2, u_2) i (I_3, u_3) tres elements de $A(t_0, x_0)$ tals que $(I_1, u_1) \geq (I_2, u_2)$ i $(I_2, u_2) \geq (I_3, u_3)$. Aleshores tenim que $I_3 \subseteq I_2$ i $I_2 \subseteq I_1$, i per la definició de 2.1.2 trobem que $I_3 \subseteq I_1$.

També tenim que $u_1(x) = u_2(x)$ per a tot x de I_2 , i $u_2(x) = u_3(x)$ per a tot x de I_3 . Ara bé, com que I_3 és un subconjunt de I_1 tenim que $u_1(x) = u_2(x)$ per a tot x de I_3 , i per tant $u_1(x) = u_3(x)$ per a tot x de I_3 , i trobem que $(I_1, u_1) \geq (I_3, u_3)$.

I per la definició de 13.3.12 hem acabat. \square

Definició 21.2.19 (Prolongació). Siguin $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy i (I, u) i (J, v) dos elements de $A(t_0, x_0)$ tals que

$$J \subseteq I \quad \text{i} \quad u(x) = v(x) \quad \text{per a tot } x \in J.$$

Aleshores direm que (I, u) és una prolongació de (J, v) .

Si (I, u) és un element maximal direm que (I, u) és una solució improrrogable i que u és una solució maximal.

Proposició 21.2.20. *Sigui $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy. Aleshores existeix un element (I, u) de $A(t_0, x_0)$ tal que (I, u) és una solució improrrogable.*

Demostració. Sigui $\{I_i, u_i\}_{i \in J}$ una família de solucions del problema de Cauchy amb $(I_i, u_i) \leq (I_j, u_j)$ si $i \leq j$. Aleshores, per la definició de 13.3.13, trobem que la família $\{I_i, u_i\}_{i \in J}$ és una cadena.

Considerem $I = \bigcup_{i \in J} I_i$ i definim la funció $u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $u(t) = u_n(t)$ si t pertany a I_n . Veiem que u està ben definida. Prenem t_0 de I . Suposem que t_0 pertany a I_n i I_m fixats. Aleshores, com que per hipòtesi, $(I_n, u_n) \leq (I_m, u_m)$ ó $(I_m, u_m) \leq (I_n, u_n)$. Suposem que $(I_n, u_n) \leq (I_m, u_m)$. Aleshores per la definició de 21.2.19 tenim que per a tot t de I_n tenim que $u_n(t) = u_m(t)$, i per tant u està ben definida. El cas $(I_m, u_m) \leq (I_n, u_n)$ és anàleg.

Ara bé, tenim que $(I_i, u_i) \leq (I, u)$ per a tot i de J , i per la definició de 13.3.15 tenim que $(I_i, u_i) \leq (I, u)$ és un element maximal de la cadena $(I_i, u_i)_{i \in J}$, i pel 13.3.16 tenim que existeix un element maximal de la cadena, i per la definició de 21.2.19 hem acabat. \square

Proposició 21.2.21. *Sigui $A(t_0, x_0)$ el conjunt de solucions d'un problema de Cauchy i (I, u) una solució improrrogable. Aleshores I és un interval obert.*

Demostració. \square

Proposició 21.2.22. *Sigui*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problema de Cauchy sobre Ω amb f contínua tal aquest tingui una única solució per a tot $(t_0, x_0) \in \Omega$. Aleshores per a cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ aquest problema de Cauchy té una única solució improrrogable.

Demostració. Prenem un element (t_0, x_0) de Ω i siguin (I, u) i (J, v) dues solucions de $A(t_0, x_0)$ \square

Teorema 21.2.23 (Lema de Wintner). *Siguin $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un obert i $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua, (φ, I) una solució de l'equació diferencial*

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

i (b, y) un punt d'acumulació de la gràfica de φ en Ω . Aleshores

$$\lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = y$$

i existeix una solució (J, v) de l'equació diferencial tal que $I \subseteq J$ i $b \in J$.

Demostració. \square

21.3 Dependència de les solucions d'un problema de Cauchy

Lema 21.3.1. *Sigui $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió uniformement equicontínua i uniformement acota de funcions contínues reals sobre un espai mètric compacte F tal que tota parcial uniformement convergent de la successió té per límit una funció φ . Aleshores la successió (φ_n) convergeix uniformement a φ .*

Demostració. Suposem que la successió $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no convergeix uniformement a φ . Per la definició de 5.2.3 tenim que existeix un $\varepsilon > 0$ tal que per a tot N natural existeix un $n_N > N$ tal que

$$|\varphi_{n_N} - \varphi| \geq \varepsilon.$$

Per tant podem construir una successió $(\varphi_{n_N})_{N \in \mathbb{N}}$ tal que

$$|\varphi_{n_N} - \varphi| \geq \varepsilon \tag{21.16}$$

per a tot N natural. Ara bé, pel 21.2.13 la successió $(\varphi_{n_N})_{N \in \mathbb{N}}$ té una parcial uniformement convergent, que contradiu (21.16). Per tant tenim que la successió (φ_n) convergeix uniformement a φ . \square

Definició 21.3.2 (Convergència uniforme sobre compactes). *Sigui X un espai mètric i $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues sobre \mathbb{R} tal que per a tot compacte K la successió de funcions $(f_m^K)_{m \in \mathbb{N}}$ definides com*

Teorema 21.3.3 (Continuïtat respecte les condicions inicials). *Siguin Ω un obert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua tal que per a cada punt (t_0, x_0) de Ω el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

té una única solució maximal φ_{t_0, x_0} definida en un interval I_{t_0, x_0} i

$$D = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I_{t_0, x_0}\}.$$

Aleshores D és un obert i l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, t_0, x_0) &\mapsto \varphi_{t_0, x_0}(t) \end{aligned}$$

és contínua.

Demostració.

□

Part XI

Teoria de Galois

Teoria de Galois

22.1 Extensions de cossos

22.1.1 Elements algebraics i elements transcendents

Definició 22.1.1 (Extensió de cossos). Siguin \mathbb{K} i \mathbb{F} dos cossos tals que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$. Aleshores direm que \mathbb{F} és una extensió de \mathbb{K} i ho denotarem com \mathbb{F}/\mathbb{K} . També direm que \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió.

Proposició 22.1.2. *Siguin \mathbb{K} un cos i $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi irreductible. Aleshores $\mathbb{K}[x]/(p(x))$ és un cos.*

Demostració. Per hipòtesi tenim que $p(x)$ és irreductible, i per la proposició 13.3.39 trobem que l'ideal $(p(x))$ és maximal. Aleshores per la proposició 13.3.8 tenim que \mathbb{F} és un cos. \square

Exemple 22.1.3. *Siguin \mathbb{K} un cos i $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi irreductible. Denotem $\mathbb{F} = \mathbb{K}[x]/(p(x))$. Aleshores \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió.*

Solució. Per la proposició 22.1.2 tenim que \mathbb{F} és un cos. Veiem que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ per l'observació 13.4.11, i per la definició d'22.1.1 hem acabat. \diamond

Exemple 22.1.4 (Morfisme avaluació). *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Volem veure que l'aplicació*

$$\begin{aligned} \text{ev}_\alpha: \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{F} \\ p(x) &\longmapsto p(\alpha) \end{aligned}$$

és un morfisme d'anells.

Solució. \diamond

Lema 22.1.5. *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Aleshores*

$$\ker(\text{ev}_\alpha) = \begin{cases} (0) \\ (p(x)), & p(x) \text{ és un polinomi mònic irreductible a } \mathbb{K}[x] \end{cases}$$

Demostració. Suposem que $\ker(\text{ev}_\alpha) \neq (0)$. Per la proposició 13.2.6 i l'exemple 22.1.4 tenim que $\ker(\text{ev}_\alpha)$ és un ideal, i com que, per hipòtesi, \mathbb{K} és un cos, tenim que $\mathbb{K}[x]$ és un domini d'ideals principals. Per tant, per la definició de 13.3.38 tenim que $\ker(\text{ev}_\alpha)$ és un ideal principal, i per la definició d'13.1.15 trobem que existeix un $a \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\ker(\text{ev}_\alpha) = (a)$.

Tenim que a ha de ser un polinomi mònic. Suposem que $a \in \mathbb{K}$. Trobem per la definició 22.1.4 que $\text{ev}_\alpha(a) = a$, i com que hem suposat que $\ker(\text{ev}_\alpha) \neq (0)$, trobem que $a \neq 0$, i per tant $\text{ev}_\alpha(a) = a \neq 0$, trobant que $a \notin \ker(\text{ev}_\alpha)$, arribant a contradicció. Per tant $a \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$. Suposem que $a = \lambda p(x)$, amb $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ i $p \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$. Per l'exemple 22.1.4 tenim que ev_α és un morfisme d'anells, i per la definició de 13.2.1 trobem que

$$\begin{aligned}\text{ev}_\alpha(\lambda p(x)) &= \text{ev}_\alpha(\lambda) \text{ev}_\alpha(p(x)) \\ &= \lambda \text{ev}_\alpha(p(x)).\end{aligned}\tag{22.1.4}$$

Ara bé, com que hem suposat que $\ker(\text{ev}_\alpha) = (\lambda p(x))$ tenim $\text{ev}_\alpha(\lambda p(x)) = 0$ i, com que hem suposat que $\lambda \neq 0$, ha de ser $\text{ev}_\alpha(p(x)) = 0$, i tenim que

$$\ker(\text{ev}_\alpha) = (p(x)).$$

Veiem ara que $p(x)$ és irreductible. Pel 13.2.10 trobem que

$$\mathbb{K}[x]/(p(x)) = \mathbb{K}[x]/\ker(\text{ev}_\alpha) \cong \text{Im}(\text{ev}_\alpha).$$

Com que \mathbb{F} és un cos tenim que $\text{Im}(\text{ev}_\alpha)$ és un domini. Com que $\text{Im}(\text{ev}_\alpha) \cong \mathbb{K}[x]/(p(x))$ és un domini, tenim per la proposició 13.3.5 que $(p(x))$ és un ideal primer, i per l'observació 13.3.29 trobem que $p(x)$ és primer, i per la proposició 13.3.31 tenim que $p(x)$ és irreductible. \square

Definició 22.1.6 (Element algebraic i element transcendent). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element tal que no existeix cap polinomi mònic no nul $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Aleshores direm que α és algebraic sobre \mathbb{K} . Denotarem $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K}) = p(x)$.

Si α no és algebraic sobre \mathbb{K} direm que és transcendent sobre \mathbb{K} .

Observació 22.1.7. $(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})) = \ker(\text{ev}_\alpha)$

Exemple 22.1.8. Volem veure que els següents són algebraics.

1. $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ en l'extensió \mathbb{R}/\mathbb{Q} .
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ en l'extensió \mathbb{R}/\mathbb{Q}

Solució. Tenim que

1. $x^2 - 2$, $x^2 - 3$.
2. $x^4 - 10x^2 + 1$. \diamond

Observació 22.1.9. Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Aleshores α és algebraic si i només si existeix un polinomi no nul $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\ker(\text{ev}_\alpha) = (p(x))$.

Demostració. Si α és algebraic aleshores, per la definició d'22.1.6, existeix un polinomi no nul $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$, i per la definició de 12.2.5 tenim que $\ker(\text{ev}_\alpha) \neq (0)$. Aleshores pel lema 22.1.5 hem acabat. \square

22.1.2 Grau d'una extensió de cossos

Definició 22.1.10 (Grau d'una extensió de cossos). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió. Aleshores direm que la dimensió del \mathbb{K} -espai vectorial \mathbb{F} és el grau de l'extensió i el denotarem com $[\mathbb{F} : \mathbb{K}]$. Si $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] < \infty$ direm que \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió finita.

Aquesta definició té sentit per la proposició 14.1.1.

Exemple 22.1.11. *Siguin \mathbb{K} un cos i $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi irreductible. Denotem $\mathbb{F} = \mathbb{K}[x]/p(x)$. Aleshores*

$$[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = \text{grau}(p(x)).$$

Solució. Aquest enunciat té sentit per l'exemple 22.1.3. \diamond

Teorema 22.1.12 (Fórmula de les Torres). *Siguin \mathbb{E}/\mathbb{F} i \mathbb{F}/\mathbb{K} dues extensions de cossos. Aleshores*

$$[\mathbb{E} : \mathbb{K}] = [\mathbb{E} : \mathbb{F}][\mathbb{F} : \mathbb{K}].$$

Demostració. Si $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = \infty$ ó $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = \infty$ tenim que $[\mathbb{E} : \mathbb{K}] = \infty$.

Suposem doncs que $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = n$ i $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = m$. \square

Definició 22.1.13 (Torre). Sigui $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n$ cossos. Aleshores direm que

$$\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n$$

és una torre.

Corol·lari 22.1.14. *Sigui $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{K}_n$ una torre. Aleshores*

$$[\mathbb{K}_n : \mathbb{K}_1] = [\mathbb{K}_n : \mathbb{K}_{n-1}] \cdots [\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1]$$

Demostració. Conseqüència de la 22.1.12. \square

22.1.3 TBD

Definició 22.1.15 (Mínim subanell engendrat). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Aleshores direm que

$$\mathbb{K}[\alpha] = \{p(\alpha) \in \mathbb{F} \mid p(x) \in \mathbb{K}[x]\}$$

és el mínim subanell engendrat per α en \mathbb{F}/\mathbb{K} .

Observació 22.1.16. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[\alpha] \subseteq \mathbb{F}$.

Proposició 22.1.17. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Aleshores*

$$\mathbb{K}[\alpha] \cong \mathbb{K}[x]/(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})).$$

Demostració. Tenim que

$$\mathbb{K}[x]/(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})) = \mathbb{K}[x]/\ker(\text{ev}_\alpha) \quad (22.1.7)$$

$$\cong \text{Im}(\text{ev}_\alpha) \quad (13.2.10)$$

$$= \{p(\alpha) \in \mathbb{F} \mid p(x) \in \mathbb{K}[x]\} \quad (13.2.4 \text{ i } 22.1.4)$$

$$= \mathbb{K}[\alpha], \quad (22.1.15)$$

i per tant

$$\mathbb{K}[\alpha] \cong \mathbb{K}[x]/(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})). \quad \square$$

Corol·lari 22.1.18. $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = \text{grau}(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K}))$.

Demostració. Per l'exemple 22.1.11. □

Corol·lari 22.1.19. *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\gamma \in \mathbb{F}$ un element transcendent sobre \mathbb{K} . Aleshores*

$$\mathbb{K}[\gamma] \cong \mathbb{K}[x].$$

Definició 22.1.20 (Mínim subcòs engendrat). *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Aleshores direm que*

$$\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{Q}(\mathbb{K}[\alpha])$$

és el mínim subcòs engendrat per α .

Aquesta definició té sentit pel Teorema 13.4.4.

Observació 22.1.21. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[\alpha] \subseteq \mathbb{K}(\alpha) \subseteq \mathbb{F}$.

Lema 22.1.22. *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element. Aleshores α és algebraic sobre \mathbb{K} si i només si*

$$\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}[\alpha].$$

Demostració. Veiem que la condició és suficient (\implies). Suposem que $\alpha \in \mathbb{F}$ és algebraic sobre \mathbb{K} . Per la definició d'22.1.6 trobem que $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$ és un polinomi irreductible no nul, i per la proposició 22.1.2 tenim que $\mathbb{K}[\alpha]$ és un cos.

Ara bé, pel Teorema 13.4.4 tenim que $\mathbb{K}(\alpha) \subseteq \mathbb{K}[\alpha]$, però per l'observació 22.1.20 tenim que $\mathbb{K}[\alpha] \subseteq \mathbb{K}(\alpha)$, i pel 2.1.3 tenim que $\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}[\alpha]$.

Acabem veient que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que

$$\mathbb{K}(\alpha) = \mathbb{K}[\alpha].$$

Per tant $\mathbb{K}[\alpha]$ és un cos, i com que, per l'observació 22.1.16, tenim que $\alpha \in \mathbb{K}[\alpha]$, i per la definició de 13.1.17 tenim que $-1/\alpha \in \mathbb{K}[\alpha]$. Aleshores, per la definició d'22.1.15 trobem que existeix un polinomi $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \in \mathbb{K}[x]$, amb $a_k \neq 0$, tal que

$$\frac{-1}{\alpha} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_k\alpha^k,$$

i per tant

$$0 = 1 + a_0\alpha + a_1\alpha^2 + \dots + a_r\alpha^{r+1},$$

i trobem que α és una arrel del polinomi $p(x) = 1 + a_0x + a_1x^2 + \dots + a_rx^{r+1}$. Aleshores per la definició de 22.1.4 tenim que

$$p(x) \in \ker(\text{ev}_\alpha)$$

i per tant $\ker(\text{ev}_\alpha) \neq (0)$ i pel lema 22.1.5 trobem que α és algebraic. □

22.1.4 Extensions algebraiques

Definició 22.1.23 (Extensió algebraica). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió tal que tot $\alpha \in \mathbb{F}$ és algebraic sobre \mathbb{K} . Aleshores direm que \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió algebraica.

Proposició 22.1.24. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió finita. Aleshores \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió algebraica.*

Demostració. Prenem un element $\alpha \in \mathbb{F}$ i suposem que $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = n$. Per la definició d'22.1.10 tenim que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{F}) = n$, i per tant els $n+1$ elements $1, \alpha, \dots, \alpha^n$ són \mathbb{K} -linealment independents, i per la definició de 5.1.6 trobem que existeixen $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ no nuls tals que

$$\lambda_0 + \lambda_1 \alpha + \dots + \lambda_n \alpha^n = 0,$$

i per tant trobem que α és arrel del polinomi $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n \in \mathbb{K}[x]$. Aleshores per la definició d'22.1.6 trobem que $\alpha \in \mathbb{F}$ és algebraic sobre \mathbb{K} i per la definició d'22.1.23 trobem que l'extensió \mathbb{F}/\mathbb{K} és algebraica. \square

Lema 22.1.25. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió, $\alpha \in \mathbb{F}$ un element algebraic sobre \mathbb{K} i $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi mònic tal que $p(\alpha) = 0$. Aleshores són equivalents*

1. $p(x) = \text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$.
2. $p(x)$ és irreductible a $\mathbb{K}[x]$.
3. Si $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $q(\alpha) = 0$, aleshores $p(x) \mid q(x)$.
4. Si $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $q(\alpha) = 0$, aleshores $\text{grau}(p(x)) \leq \text{grau}(q(x))$.

Demostració. La implicació (1) \implies (2) és conseqüència de la definició d'22.1.6.

Veiem ara la implicació (2) \implies (3). Suposem que $p(\alpha) = 0$ i prenem $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $q(\alpha) = 0$. Calculem $\text{mcd}(p(x), q(x))$. Calculem $\text{mcd}(p(x), q(x))$. Si $\text{mcd}(p(x), q(x)) = p(x)$ aleshores $p(x) \mid q(x)$ i tenim el que volíem.

Si $\text{mcd}(p(x), q(x)) \neq p(x)$, com que per la proposició 13.3.40 tenim que $p(x)$ és primer tenim que $\text{mcd}(p(x), q(x)) = 1$, i per la 3.2.30 trobem que existeixen $r(x)$ i $s(x)$ polinomis en $\mathbb{K}[x]$ tals que

$$p(x)r(x) + q(x)s(x) = 1.$$

Ara bé, tindriem que

$$1 = p(\alpha)r(\alpha) + q(\alpha)s(\alpha) = 0r(\alpha) + 0s(\alpha) = 0,$$

i per tant arribem a contradicció i hem acabat.

Veiem la implicació (3) \implies (4). Suposem doncs que $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ és un polinomi tal que $q(\alpha) = 0$ i tal que $p(x) \mid q(x)$. Tenim que existeix un polinomi $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$q(x) = p(x)d(x),$$

i per tant trobem que $\text{grau}(p(x)) \leq \text{grau}(q(x))$.

Veiem que (4) \implies (2). Suposem doncs que existeix un polinomi $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ satisfent $q(\alpha) = 0$ i $\text{grau}(p(x)) \leq \text{grau}(q(x))$. Aleshores tenim que existeixen dos

polinomis $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{K}[x]$ tals que $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, i com que $p(\alpha) = 0$ trobem que $p_1(\alpha) = 0$ ó $p_2(\alpha) = 0$. Suposem que $p_1(\alpha) = 0$. Per tant tenim que

$$\text{grau}(p_1(x)) \leq \text{grau}(p(x)),$$

i per hipòtesi

$$\text{grau}(p(x)) \leq \text{grau}(p_1(x)),$$

i per tant $p_2(x) \in \mathbb{K}$.

Veiem que (3) \implies (1). Suposem doncs que si existeix un polinomi $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $q(\alpha) = 0$, aleshores $p(x) \mid q(x)$. Considerem $\ker(\text{ev}_\alpha)$. Com que, per hipòtesi, tenim que $p(\alpha) = 0$, trobem que $\ker(\text{ev}_\alpha) \subseteq (p(x))$. Per altra banda, si $\ker(\text{ev}_\alpha) = (q(x))$ aleshores tenim que $q(\alpha) = 0$, i per hipòtesi $p(x) \mid q(x)$, i per tant $(p(x)) \subseteq (q(x))$ i tenim que $(p(x)) = \ker(\text{ev}_\alpha)$, i per la definició d'22.1.6 trobem que $p(x) = \text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$. \square

Exemple 22.1.26. *Volem calcular $\text{Irr}(\sqrt{5} + \sqrt{3}, \mathbb{Q})$.*

Solució. $\text{Irr}(\sqrt{5} + \sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^4 + 4x^2 + 64$. \diamond

22.1.5 El grup de Galois

Definició 22.1.27 (El grup de Galois). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió de cossos. Aleshores definim

$$\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K}) = \{f: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ és un isomorfisme d'anells i } f|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}}\}$$

com el grup de Galois de l'extensió \mathbb{F}/\mathbb{K} .

Proposició 22.1.28. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió. Aleshores $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ és un grup.*

Demostració. Prenem un element $f \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$. Per la definició d'22.1.27 tenim que f és un isomorfisme d'anells, i per la definició d'13.2.1 trobem que f és invertible, i per tant existeix un isomorfisme $g: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ tal que $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{F}}$. Hem de veure que $g|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}}$. Tenim que

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\mathbb{K}} &= \text{Id}_{\mathbb{F}}|_{\mathbb{K}} \\ &= g \circ f|_{\mathbb{K}} \\ &= g \circ \text{Id}_{\mathbb{K}} = g|_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

i per tant $g \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$.

Prenem dos elements $f, g \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ i considerem $g \circ f$. Tenim que $g: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ és un isomorfisme d'anells, i ens queda veure que $g \circ f|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}}$. Tenim que

$$g \circ f|_{\mathbb{K}} = g \circ \text{Id}_{\mathbb{K}}|_{\mathbb{K}} = g|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}},$$

i hem acabat, i per la definició 12.1.1 tenim que $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ és un grup. \square

Proposició 22.1.29. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió, $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi i $\alpha \in \mathbb{F}$ una arrel de $p(x)$. Aleshores per a tot $f \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ tenim que $f(\alpha)$ és una arrel de $p(x)$.*

Demostració. Tenim que existeixen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tals que

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

i tenim que

$$0 = p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n.$$

Aleshores tenim, per la definició de 13.2.1, que

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n a_i\alpha^i\right) &= \sum_{i=0}^n f(a_i\alpha^i) \\ &= \sum_{i=0}^n f(a_i)f(\alpha^i) \\ &= \sum_{i=0}^n f(a_i)f(\alpha)^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i f(\alpha)^i = f(0) = 0 \end{aligned}$$

i per tant $f(\alpha)$ és una arrel de $p(x)$. □

Corol·lari 22.1.30. *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element algebraic sobre \mathbb{K} . Aleshores per a tot $f \in \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ tenim que $f(\alpha)$ és una arrel de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$.*

Exemple 22.1.31. *Calcular un grup de Galois.*

Solució. ◇

22.1.6 Extensions de morfismes

Lema 22.1.32. *Siguin \mathbb{F}_1/\mathbb{K} i \mathbb{F}_2/\mathbb{K} dues extensions, $\alpha \in \mathbb{F}_1$ un element algebraic sobre \mathbb{K} i $\beta \in \mathbb{F}_2$ un element. Aleshores existeix un morfisme*

$$f: \mathbb{K}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

tal que $f|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ i $f(\alpha) = \beta$ si i només si β és una arrel de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$.

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem que existeix un morfisme $f: \mathbb{K}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{F}_2$ tal que $f|_{\mathbb{K}} = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ i $f(\alpha) = \beta$. Volem veure que β és una arrel de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$. Posem

$$\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

amb $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ i per la definició de 13.2.1 calculem

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\beta + \dots + a_n\beta^n &= a_0 + a_1f(\alpha) + \dots + a_nf(\alpha)^n \\ &= a_0 + a_1f(\alpha) + \dots + a_nf(\alpha^n) \\ &= f(a_0) + f(a_1)f(\alpha) + \dots + f(a_n)f(\alpha^n) \\ &= f(a_0) + f(a_1\alpha) + \dots + f(a_n\alpha^n) \\ &= f(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n) \\ &= f(0) = 0, \end{aligned}$$

i per tant tenim que β és una arrel de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$.

Veiem ara que la condició és necessària (\Leftarrow). Suposem que β és una arrel de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$. Considerem el morfisme d'avaluació $\text{ev}_\beta: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{F}_2$. Com que, per hipòtesi, tenim que β és una arrel de $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$ trobem que $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K}) \in \ker(\text{ev}_\beta)$. Ara bé, pe la definició d'22.1.6 trobem que $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$ és irreductible, i per tant $(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})) = \ker(\text{ev}_\beta)$. Aleshores tenim que

$$\mathbb{K}(\alpha) \cong \mathbb{K}[x]/(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})) \quad (22.1.17)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{K}[x]/\ker(\text{ev}_\beta) \\ &\cong \text{Im}(\text{ev}_\beta) \subseteq \mathbb{F}_2. \end{aligned} \quad (13.2.10)$$

Considerem doncs els morfismes entre anells

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{K}(\alpha) &\longrightarrow \mathbb{K}[x]/(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})) \\ \mathbb{K} \ni \lambda &\longmapsto \bar{\lambda} \\ \alpha &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f_2: \mathbb{K}[x]/\ker(\text{ev}_\beta) &\longrightarrow \text{Im}(\text{ev}_\beta) \subseteq \mathbb{F}_2 \\ \bar{\lambda} &\longmapsto \lambda \\ \bar{x} &\longmapsto \beta \end{aligned}$$

i $f = f_2 \circ f_1$ és el morfisme que buscàvem. \square

Notació 22.1.33. Siguin \mathbb{F} i \mathbb{K} dos cossos i $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ un morfisme entre anells. Aleshores denotem

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{K}[x] &\longrightarrow \mathbb{F}[x] \\ a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n &\longmapsto f(a_0)x + f(a_1)x + \cdots + f(a_n)x^n. \end{aligned}$$

Lema 22.1.34 (Extensió de morfismes). *Siguin \mathbb{F}_1/\mathbb{K} i \mathbb{F}_2/\mathbb{K} dues extensions, $\alpha \in \mathbb{F}_1$ un element algebraic sobre \mathbb{K} , $\beta \in \mathbb{F}_2$ un element i $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}_2$ un morfisme. Aleshores existeix un morfisme*

$$g: \mathbb{K}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

tal que $g|_{\mathbb{K}} = f$ i $g(\alpha) = \beta$ si i només si β és una arrel de $\hat{f}(\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K}))$.

Demostració. \square

Exemple 22.1.35. *Volem calcular alguna cosa com $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q})$.*

Solució. $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. \diamond

22.1.7 El cos de descomposició

Lema 22.1.36. *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió. Aleshores són equivalents*

1. *L'extensió \mathbb{F}/\mathbb{K} és finita.*

2. Existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ algebraics sobre \mathbb{K} tals que

$$\mathbb{F} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

3. Existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tals que α_i és algebraic sobre $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ i

$$\mathbb{F} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Demostració. □

Teorema 22.1.37. *Siguin \mathbb{L}/\mathbb{F} i \mathbb{F}/\mathbb{K} dues extensions. Aleshores \mathbb{L}/\mathbb{K} és algebraica si i només si \mathbb{L}/\mathbb{F} i \mathbb{F}/\mathbb{K} són algebraiques.*

Demostració. □

Teorema 22.1.38. *Siguin \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dos elements algebraics sobre \mathbb{K} . Aleshores*

- $\alpha + \beta$ és algebraic sobre \mathbb{K} .
- $\alpha\beta$ és algebraic sobre \mathbb{K} .
- Si $\alpha \neq 0$, α^{-1} és algebraic sobre \mathbb{K} .

Corol·lari 22.1.39. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió. Aleshores*

$$\mathbb{E} = \{\alpha \in \mathbb{F} \mid \alpha \text{ és algebraic sobre } \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{F}$$

és un cos.

22.1.8 El cos de descomposició d'una família de polinomis

Teorema 22.1.40. *Sigui $\Lambda = \{p_i(x)\}_{i=1}^n$ una família de polinomis sobre l'anell de polinomis d'un cos \mathbb{K} . Aleshores existeix un cos \mathbb{L} tal que \mathbb{L}/\mathbb{K} és una extensió finita i $p_i(x)$ descompon en \mathbb{L} per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostració. 14.1.10 □

Teorema 22.1.41. *Siguin \mathbb{L}_1 i \mathbb{L}_2 dos cossos de descomposició d'una família de polinomis $\Lambda = \{p_i(x)\}_{i=1}^n$ sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores existeix un isomorfisme d'anells $\varphi: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ tal que $\varphi|_{\mathbb{K}} = \text{Id}$.*

Demostració. □

Teorema 22.1.42 (Extensió de morfismes a un cos de descomposició). *Si guin $\mathbb{E}/\mathbb{F}/\mathbb{K}$ una extensió de cossos $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi i \mathbb{L} el seu cos de descomposició tals que $p(x)$ descompon en $\mathbb{E}[x]$ i tals que existeix un morfisme $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $f|_{\mathbb{K}} = \text{Id}$. Aleshores existeix una funció $\tilde{f}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $\tilde{f}|_{\mathbb{F}} = f$.*

Demostració. □

Definició 22.1.43 (Subgrup transitiu). *Siguin S_n el grup simètric d' n elements i $G \leq S_n$ un subgrup tal que per a tots $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existeix una permutació $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(i) = j$. Aleshores direm que G és un subgrup transitiu de S_n .*

Proposició 22.1.44. *Sigui G un subgrup transitiu de S_n . Aleshores*

$$n \mid |G|.$$

Demostració. □

Definició 22.1.45 (Grup de Galois d'un polinomi). Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi amb cos de descomposició \mathbb{L} . Aleshores definirem

$$\text{Gal}(p(x)) = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

com el grup de Galois de $p(x)$.

Corol·lari 22.1.46. *Siguin $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi sobre un cos \mathbb{K} i $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ el conjunt de les arrels de $p(x)$. Aleshores $\text{Gal}(p(x))$ és isomorf a un subgrup transitiu de S_A .*

Demostració. □

Definició 22.1.47 (Discriminant). Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi sobre un cos \mathbb{K} amb cos de descomposició \mathbb{L} i arrels $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{L}$. Aleshores definim

$$\Delta(p(x)) = \prod_{i < j}^n (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

com el discriminant de $p(x)$. També definim

$$\delta(p(x)) = \prod_{i < j}^n (\alpha_i - \alpha_j).$$

Observació 22.1.48. $\Delta(p(x)) = \delta(p(x))^2$.

Exemple 22.1.49. *Volem calcular el discriminant d'un polinomi de grau 2.*

Solució. ◇

Proposició 22.1.50. *Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi sobre un cos \mathbb{K} . Aleshores $\Delta(p(x)) \in \mathbb{K}$.*

Lema 22.1.51. *Siguin $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi sobre un cos \mathbb{K} amb n arrels i $\sigma \in S_n$ una permutació. Aleshores*

$$\prod_{i < j}^n (\alpha_{\sigma(i)} - \alpha_{\sigma(j)}) = \text{sig}(\sigma) \delta(p(x))$$

Demostració. □

Corol·lari 22.1.52. *Siguin $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi sense arrels múltiples sobre un cos \mathbb{K} amb $\text{ch}(\mathbb{K}) \neq 2$, amb conjunt d'arrels $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ i sigui $\varphi: \text{Gal}(p(x)) \rightarrow S_A$ un epimorfisme de grups. Aleshores*

$$\varphi(\text{Gal}(p(x))) \subseteq \text{Alt}(A) \iff \delta(p(x)) \in \mathbb{K}.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit pel corol·lari 22.1.46. □

22.2 Extensions normals i extensions separables

22.2.1 Extensions normals

Definició 22.2.1 (Extensió normal). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió de cossos tal que

1. L'extensió \mathbb{F}/\mathbb{K} és algebraica.
2. Per a tot polinomi irreductible $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x)$ té una arrel en \mathbb{F} tenim que $p(x)$ té totes les arrels a \mathbb{F} .

Aleshores direm que l'extensió \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió normal.

Teorema 22.2.2 (Teorema de normalitat). *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió finita. Aleshores \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió normal si i només si existeix un polinomi $p(x) \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$ tal que \mathbb{F} és el cos de descomposició de $p(x)$.*

Demostració.

□

22.2.2 Elements separables

Definició 22.2.3 (Polinomi separable). Sigui $p(x)$ un polinomi irreductible sense arrels múltiples en el seu cos de descomposició. Aleshores direm que $p(x)$ és separable.

Definició 22.2.4 (Element separable). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió de cossos i $\alpha \in \mathbb{F}$ un element algebraic sobre \mathbb{K} tal que $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{K})$ és separable. Aleshores direm que α és separable sobre \mathbb{K} .

Definició 22.2.5 (Extensió separable). Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió de cossos tal que per a tot $\alpha \in \mathbb{F}$ tenim que α és separable sobre \mathbb{K} . Aleshores direm que \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió separable.

Observació 22.2.6. *Sigui \mathbb{F}/\mathbb{K} una extensió separable. Aleshores \mathbb{F}/\mathbb{K} és una extensió algebraica.*

Teorema 22.2.7. *Sigui \mathbb{L}/\mathbb{F} i \mathbb{F}/\mathbb{K} dues extensions de cossos tals que l'extensió \mathbb{L}/\mathbb{K} sigui separable. Aleshores les extensions \mathbb{L}/\mathbb{F} i \mathbb{F}/\mathbb{K} són separables.*

Demostració.

□

Lema 22.2.8. *Sigui $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomi i $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ un morfisme d'anells. Aleshores $p(x)$ és separable si i només si $\hat{f}(p(x))$ és separable.*

Lema 22.2.9.

Part XII

Anàlisi complexa i de Fourier

Els nombres complexos

23.1 Estructura dels nombres complexos

23.1.1 Cos de nombres complexos

Notació 23.1.1 (Conjunt de nombres complexos). Denotarem

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Definició 23.1.2 (Suma de nombres complexos). Siguin $a + bi$ i $c + di$ dos nombres complexos. Aleshores definim la seva suma com

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Observació 23.1.3. Siguin $a + bi$ i $c + di$ dos nombres complexos. Aleshores

$$(a + bi + c + di) \in \mathbb{C}$$

Proposició 23.1.4. Siguin $a + bi$ i $c + di$ dos nombres complexos. Aleshores

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi).$$

Demostració. Per la definició de 23.1.2 tenim

$$\begin{aligned} a + bi + c + di &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i = c + di + a + bi. \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 23.1.5. Siguin $a + bi$, $c + di$ i $u + vi$ tres nombres complexos. Aleshores

$$(a + bi) + ((c + di) + (u + vi)) = ((a + bi) + (c + di)) + (u + vi).$$

Demostració. Per la definició de 23.1.2 tenim

$$\begin{aligned} (a + bi) + ((c + di) + (u + vi)) &= (a + bi) + ((c + u) + (d + v)i) \\ &= (a + (c + u)) + (b + (d + v))i \\ &= ((a + c) + u) + ((b + d) + v)i \\ &= ((a + c) + (b + d)i) + (u + vi) \\ &= ((a + bi) + (c + di)) + (u + vi). \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 23.1.6. *Sigui $a + bi$ un nombre complex. Aleshores*

$$(a + bi) + 0 = a + bi.$$

Demostració. Per la definició de 23.1.2 tenim

$$(a + bi) + 0 = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi. \quad \square$$

Proposició 23.1.7. *Sigui $a + bi$ un nombre complex. Aleshores*

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0.$$

Demostració. Per la definició de 23.1.2 tenim

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0. \quad \square$$

Definició 23.1.8 (Producte de nombres complexos). *Siguin $a + bi$ i $c + di$ dos nombres complexos. Aleshores definim el seu producte com*

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Observació 23.1.9. *Siguin $a + bi$ i $c + di$ dos nombres complexos. Aleshores*

$$(a + bi)(c + di) \in \mathbb{C}.$$

Proposició 23.1.10. *Siguin $a + bi$ i $c + di$ dos nombres complexos. Aleshores*

$$(a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi).$$

Demostració. Per la definició de 23.1.8 tenim

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i \\ &= (ca - bd) + (da + cb)i = (c + di)(a + bi). \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 23.1.11. *Siguin $a + bi$, $c + di$ i $u + vi$ tres nombres complexos. Aleshores*

$$(a + bi)((c + di)(u + vi)) = ((a + bi)(c + di))(u + vi).$$

Demostració. Prenem $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ i $\gamma = u + vi$. Per la definició de 23.1.8 tenim

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\gamma) &= (a + bi)((c + di)(u + vi)) \\ &= (a + bi)((cu - dv) + (cv + du)i) \\ &= (a(cu - dv) - b(cv + du)) + (a(cv + du) + b(cu - dv))i \\ &= (acu - adv - bcv - bdu) + (acv + adu + bcu - bdv)i \\ &= (acu - bdu - adv - bcv) + (acv - bdv + adu + bcu)i \\ &= ((ac - bd)u - (ad + bc)v) + ((ac - bd)v + (ad + bc)u)i \\ &= ((ac - bd) + (ad + bc)i)(u + vi) \\ &= ((a + bi)(c + di))(u + vi) = (\alpha\beta)\gamma. \end{aligned} \quad \square$$

Proposició 23.1.12. *Sigui $a + bi$ un nombre complex. Aleshores*

$$(a + bi) \cdot 1 = a + bi.$$

Demostració. Per la definició de 23.1.8 tenim

$$(a + bi) \cdot 1 = (a \cdot 1) + (b \cdot 1)i = a + bi. \quad \square$$

Proposició 23.1.13. *Sigui $a + bi$ un nombre complex. Aleshores*

$$(a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) = 1.$$

Demostració. Per la definició de 23.1.8 tenim

$$\begin{aligned} (a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{-ba}{a^2 + b^2} \right)i \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right)i = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Proposició 23.1.14. *Siguin $a + bi$, $c + di$ i $u + vi$ tres nombres complexos. Aleshores*

$$(a + bi)((c + di) + (u + vi)) = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(u + vi).$$

Demostració. Per la definició de 23.1.2 i 23.1.8 tenim

$$\begin{aligned} (a + bi)((c + di) + (u + vi)) &= (a + bi)((c + u) + (d + v)i) \\ &= (a(c + u) - b(d + v)) + (a(d + v) + b(c + u))i \\ &= (ac + au - bd - bv) + (ad + av + bc + bu)i \\ &= (ac - bd + au - bv) + (ad + bc + av + bu)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i + (au - bv) + (av + bu)i \\ &= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(u + vi). \quad \square \end{aligned}$$

Corol·lari 23.1.15. *El conjunt \mathbb{C} amb la suma $+$ i el producte \cdot és un cos.*

23.1.2 Propietats de nombres complexos

Definició 23.1.16 (Conjugat d'un nombre complex). *Sigui $z = a + bi$ un nombre complex. Aleshores definim*

$$\bar{z} = a - bi$$

com el conjugat de z .

Proposició 23.1.17. *Sigui z un nombre complex. Aleshores*

$$\overline{\bar{z}} = z.$$

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $z = a + bi$. Aleshores per la definició de 23.1.16 tenim que

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= \overline{a - bi} \\ &= a - \overline{bi} \\ &= a + bi = z. \quad \square \end{aligned}$$

Proposició 23.1.18. *Siguin z i w dos nombres complexos. Aleshores*

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que existeixen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que

$$z = a + bi \quad \text{i} \quad w = c + di.$$

Aleshores per la definició de 23.1.2 i la definició de 23.1.16 trobem que

$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{a + bi} + \overline{c + di} = \bar{z} + \bar{w}.\end{aligned}\quad \square$$

Proposició 23.1.19. *Siguin z i w dos nombres complexos. Aleshores*

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que existeixen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que

$$z = a + bi \quad \text{i} \quad w = c + di.$$

Aleshores per la definició de 23.1.8 i la definició de 23.1.16 trobem que

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(a + bi)(c + di)} \\ &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{a + bi} \overline{c + di} = \bar{z}\bar{w}.\end{aligned}\quad \square$$

Proposició 23.1.20. *Si $z = a + bi$ un nombre complex. Aleshores*

$$z\bar{z} = a^2 + b^2.$$

Demostració. Per la definició de 23.1.8 i la definició de 23.1.16 trobem que

$$\begin{aligned}z\bar{z} &= (a + bi)\overline{a + bi} \\ &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.\end{aligned}\quad \square$$

Proposició 23.1.21. *Si z un nombre complex. Aleshores $z = \bar{z}$ si i només si $z \in \mathbb{R}$.*

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $z = a + bi$. Aleshores si tenim $z = \bar{z}$, per la definició de 23.1.16 trobem que

$$a + bi = a - bi,$$

que és equivalent a $b = -b$, i per tant ha de ser $b = 0$ i trobem que $z = a \in \mathbb{R}$. \square

Proposició 23.1.22. *Sigui $z \neq 0$ un nombre complex. Aleshores*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $z = a + bi$. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} z \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} &= \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1 \end{aligned} \quad (23.1.20)$$

i per la definició de 13.1.8 hem acabat. \square

Definició 23.1.23 (Part real i part imaginària d'un nombre complex). Sigui $z = a + bi$ un nombre complex. Aleshores definim

$$\Re(z) = a$$

com la part real de z i

$$\Im(z) = b$$

com la part imaginària de z .

Proposició 23.1.24. *Sigui z un nombre complex. Aleshores*

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad i \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $z = a + bi$. Aleshores tenim que

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \Re(z),$$

i

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + bi - a + bi}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \Im(z),$$

i per la definició de 23.1.23 hem acabat. \square

23.1.3 Topologia de nombres complexos

Definició 23.1.25 (Mòdul d'un nombre complex). Sigui $z = a + bi$ un nombre complex. Aleshores definim el seu mòdul com

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observació 23.1.26. $\Re(z) \leq |z|, \Im(z) \leq |z|$.

Proposició 23.1.27. *Sigui z un nombre complex. Aleshores es satisfà*

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Demostració. Per la definició de 5.3.5 tenim que $z = a + bi$, i per la proposició 23.1.20 trobem que

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= a^2 + b^2 \\ &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2, \end{aligned} \quad (23.1.25)$$

i per tant

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \quad \square$$

Proposició 23.1.28 (Desigualtat triangular). *Siguin z i w dos nombres complexos. Aleshores*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Demostració. Per la definició de 23.1.25 tenim que

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \end{aligned} \quad (23.1.18)$$

$$\begin{aligned} &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + \bar{z}w + z\bar{w} \end{aligned} \quad (23.1.27)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + \overline{\bar{z}w} + z\bar{w} \quad (23.1.17)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + \overline{\bar{z}}\overline{w} + z\bar{w} \quad (23.1.19)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + \overline{z\bar{w}} + z\bar{w} \quad (23.1.17)$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2\Re(zw), \quad (23.1.24)$$

$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| \quad (23.1.26)$$

$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$$

$$= (|z| + |w|)^2$$

\square

Part XIII

Geometria diferencial

24.1 Parametritzacions i longitud

24.1.1 Reparametrització d'una corba

Definició 24.1.1 (Corba). Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval i $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció contínua. Aleshores direm que α és una corba sobre I .

Exemple 24.1.2. *Volem veure que donats dos punts a i b de \mathbb{R}^n existeix una corba que els uneix.*

Solució. Observem que la funció contínua

$$\begin{aligned}\alpha: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto a + t(b - a)\end{aligned}$$

satisfà que $\alpha(0) = a$ i $\alpha(1) = b$, i per la definició de 24.1.1 trobem que és una corba sobre $[0, 1]$. \diamond

Definició 24.1.3 (Corba regular). Sigui α una corba diferenciable sobre I tal que per a tot $t \in I$ es satisfà $\alpha'(t) \neq \vec{0}$. Aleshores direm que α és regular.

Definició 24.1.4 (Reparametrització). Sigui α una corba sobre I i $h: J \rightarrow I$ un difeomorfisme. Aleshores direm que la funció

$$\begin{aligned}\beta: J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\alpha \circ h)(t)\end{aligned}$$

és una reparametrització en J de α i que h és el canvi de paràmetre.

Proposició 24.1.5. *Sigui β una reparametrització en J d'una corba regular α sobre I . Aleshores β és una corba regular.*

Demostració. Per la definició de 24.1.4 trobem que existeix un canvi de paràmetre $h: J \rightarrow I$ tal que $\beta = (\alpha \circ h)(t)$. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned}\beta: J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\alpha \circ h)(t),\end{aligned}$$

i per la definició de 24.1.1 trobem que β és una corba.

Per la definició de 24.1.4 trobem que h és un difeomorfisme, i per la definició de 6.2.27 trobem que h és derivable, i per la 6.2.15 trobem que

$$\beta'(t) = h'(t)(\alpha' \circ h)(t).$$

Com que per hipòtesi α és regular, per la definició de 24.1.3 trobem que $(\alpha' \circ h)(t) \neq \vec{0}$ per a tot $t \in J$. Ara bé, pel corollari 6.3.13 trobem que $h'(t) \neq \vec{0}$ per a tot $t \in J$, i per tant tenim que $\beta'(t) \neq \vec{0}$ per a tot $t \in J$, i per la definició de 24.1.3 trobem que β és una corba regular. \square

24.1.2 La longitud d'una corba i el paràmetre arc

Definició 24.1.6 (Longitud d'una corba). Sigui α una corba sobre I i a, b dos punts de I . Aleshores definim

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

com la longitud de α entre a i b .

Exemple 24.1.7. Volem calcular la longitud de la corba

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

entre 0 i x per a tot x positiu.

Solució. Per la definició de 24.1.6 trobem que això és

$$\begin{aligned} L_0^x(\alpha) &= \int_0^x |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_0^x |(-\sin(t), \cos(t), 1)| dt \\ &= \int_0^x \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} dt \\ &= \int_0^x \sqrt{2} dt \\ &= [\sqrt{2}t]_0^x = \sqrt{2}x. \end{aligned} \quad \diamond$$

Proposició 24.1.8. Sigui β una reparametrització d'una corba α en I amb canvi de paràmetre h . Aleshores per a tot a i b de I , amb $c = h^{-1}(a)$ i $d = h^{-1}(b)$ tenim

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta).$$

Demostració. Això té sentit per la definició de 24.1.4 i la definició de 6.2.27.

Per la definició de 24.1.6 trobem que

$$\begin{aligned} L_c^d(\beta) &= \int_c^d |\beta'(s)| ds \\ &= \int_c^d |(\alpha \circ h)'(s)| ds, \end{aligned} \quad (24.1.4)$$

i com que, per la definició de 24.1.4 tenim que h és un difeomorfisme, per la definició de 6.2.27 trobem que h és diferenciable i per la 6.2.15 trobem que

$$\int_c^d |(\alpha \circ h)'(s)| ds = \int_c^d |h'(s)\alpha'(h(s))| ds,$$

i per la definició de norma tenim que

$$\int_c^d |h'(s)\alpha'(h(s))| ds = \int_c^d |h'(s)| |\alpha'(h(s))| ds.$$

Ara bé, com que h és un difeomorfisme tenim per la definició de 6.2.27 que h' és contínua, i pel corollari 6.3.13 trobem que $h'(t) \neq 0$ per a tot $t \in [c, d]$. Aleshores tenim que ha de ser o bé $h'(t) > 0$ per a tot $t \in [c, d]$ o bé $h'(t) < 0$ per a tot $t \in [c, d]$.

Comencem suposant que $h'(t) > 0$ per a tot $t \in [c, d]$. Aleshores tenim que

$$\int_c^d |h'(s)| |\alpha'(h(s))| ds = \int_c^d h'(s) |\alpha'(h(s))| ds,$$

i pel Teorema del canvi de variable tenim que

$$\begin{aligned} \int_c^d h'(s) |\alpha'(h(s))| ds &= \int_{h(c)}^{h(d)} |\alpha(t)| dt \\ &= \int_a^b |\alpha(t)| dt = L_a^b(\alpha), \end{aligned}$$

i per tant

$$L_c^d(\beta) = L_a^b(\alpha).$$

Suposem ara que $h'(t) < 0$ per a tot $t \in [c, d]$. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} \int_c^d |h'(s)| |\alpha'(h(s))| ds &= \int_c^d -h'(s) |\alpha'(h(s))| ds \\ &= \int_d^c h'(s) |\alpha'(h(s))| ds \end{aligned}$$

i pel Teorema del canvi de variable tenim que

$$\begin{aligned} \int_d^c h'(s) |\alpha'(h(s))| ds &= \int_{h(c)}^{h(d)} |\alpha(t)| dt \\ &= \int_a^b |\alpha(t)| dt = L_a^b(\alpha), \end{aligned}$$

i per tant

$$L_c^d(\beta) = L_a^b(\alpha). \quad \square$$

Definició 24.1.9 (Funció longitud d'arc). Sigui α una corba sobre I i $a \in I$ un punt. Aleshores direm que la funció

$$\begin{aligned} S_\alpha(a)(t) &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_a^t |\alpha'(s)| ds \end{aligned}$$

és la funció longitud d'arc de α amb origen en a .

Observació 24.1.10. *Sigui α una corba sobre I i $a \in I$ un punt. Aleshores per a tot $t \in I$*

$$\frac{dS_\alpha(a)}{dt}(t) \geq 0.$$

Demostració. Per la definició de 24.1.9 trobem que

$$S_\alpha(a)(t) = \int_a^t |\alpha'(s)| ds,$$

i pel 5.2.18 tenim que

$$\frac{dS_\alpha(a)}{dt}(t) = |\alpha'(t)| \geq 0. \quad \square$$

Proposició 24.1.11. *Siguin α una corba regular sobre I i $a \in I$ un punt. Aleshores la funció $S_\alpha(a)$ és un difeomorfisme.*

Demostració. Per la definició de 24.1.3 trobem que $\alpha'(t) \neq 0$ per a tot $t \in I$, i pel 5.2.18 tenim que

$$\frac{dS_\alpha(a)}{dt}(t) = |\alpha'(t)|.$$

Per tant trobem que

$$\frac{dS_\alpha(a)}{dt}(t) \neq 0,$$

i per l'observació 6.2.4 i el corol·lari 6.3.13 tenim que $S_\alpha(a)$ és un difeomorfisme, com volíem veure. \square

Proposició 24.1.12. *Sigui α una corba regular sobre I . Aleshores existeix una reparametrització β de α tal que per a tot $t \in I$*

$$|\beta'(t)| = 1.$$

Demostració. Per la proposició 24.1.11 tenim que per a tot $a \in I$ la funció $S_\alpha(a)$ és un difeomorfisme, i per la definició de 6.2.27 trobem que la funció $S_\alpha(a)$ és bijectiva, i pel Teorema 2.2.19 trobem que $S_\alpha(a)$ és invertible i per la definició d'2.2.16 tenim que existeix una funció t_a tal que t_a sigui la inversa de $S_\alpha(a)$. Considerem

$$\beta(s) = \alpha(t(s)).$$

Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} |\beta'(s)| &= \left| \frac{dt}{ds} \alpha'(s) \right| \\ &= \left| \frac{dt}{ds} \right| |\alpha'(s)| \\ &= \frac{dt}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t(s)) \\ &= \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t(s))} \frac{ds}{dt}(t(s)) = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Definició 24.1.13 (Corba parametritzada per l'arc). Sigui α una corba regular sobre I tal que per a tot $s \in I$ es satisfà

$$|\alpha'(s)| = 1.$$

Aleshores direm que α està parametritzada per l'arc.

Exemple 24.1.14. Volem donar una reparametrització de la corba

$$\alpha(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$$

tal que estigui parametritzada per l'arc.

Solució. Tenim que

$$\alpha'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t)),$$

i per tant

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= |(-R \sin(t), R \cos(t))| \\ &= \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2} \\ &= \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = R. \end{aligned}$$

Per la definició de 24.1.9 trobem que

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |\alpha'(x)| dx \\ &= \int_0^t R dx = Rt. \end{aligned}$$

Prenem ara el canvi de paràmetre

$$h(s) = \frac{s}{R}.$$

Tenim que

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \left(-R \sin\left(\frac{s}{R}\right), R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right).$$

Tenim que β és una reparametrització de α . Veiem ara que β està parametritzada per l'arc. Tenim que

$$\begin{aligned} |\beta'(s)| &= |\alpha(h(s))'| \\ &= |h'(s)\alpha'(h(s))| \\ &= \left| \frac{1}{R} \left(-R \sin\left(\frac{s}{R}\right), R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) \right| \\ &= \left| \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) \right| \\ &= \sqrt{\sin^2\left(\frac{s}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{R}\right)} = 1, \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

i per la definició de 24.1.13 hem acabat. ◇

Observació 24.1.15. *Segui α una corba en I parametritzada per l'arc i a $\in I$ un punt. Aleshores per a tot $s \in I$ tenim*

$$S_\alpha(a)(s) = s - a.$$

Demostració. Per la definició de 24.1.9 trobem que

$$S_\alpha(a)(s) = \int_a^s |\alpha'(\tau)| d\tau,$$

i per la definició de 24.1.13 tenim que per a tot $s \in I$ es satisfà $|\alpha'(s)| = 1$, i per tant

$$\begin{aligned} S_\alpha(a)(s) &= \int_a^s |\alpha'(\tau)| d\tau \\ &= \int_a^s 1 d\tau = s - a. \end{aligned} \quad \square$$

Definició 24.1.16 (Contacte). *Siguin α i β dues corbes en I parametritzades per l'arc i $s_0 \in I$ un punt tals que existeix un $r \in \mathbb{N}$ satisfent*

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha(s) - \beta(s)}{(s - s_0)^p} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha(s) - \beta(s)}{(s - s_0)^{r+1}} \neq 0$$

per a tot $p \leq r$. Aleshores direm que α i β tenen contacte d'ordre r en s_0 .

Proposició 24.1.17. *Siguin α i β dues corbes en I parametritzades per l'arc i $s_0 \in I$ un punt. Aleshores α i β tenen contacte d'ordre r en s_0 si i només si*

$$\alpha^{(p)}(s_0) = \beta^{(p)}(s_0) \quad \text{i} \quad \alpha^{(r+1)}(s_0) \neq \beta^{(r+1)}(s_0)$$

per a tot $p \leq r$.

Demostració. Suposem que

$$\alpha^{(p)}(s_0) = \beta^{(p)}(s_0) \quad \text{i} \quad \alpha^{(r+1)}(s_0) \neq \beta^{(r+1)}(s_0)$$

per a tot $p \leq r$. Tenim que, per a tot $p \leq r$ es satisfà

$$\alpha^{(p)}(s_0) = \beta^{(p)}(s_0),$$

o equivalentment

$$\alpha^{(p)}(s_0) - \beta^{(p)}(s_0) = 0. \quad (24.1)$$

Prenem $n \leq r$, i per la definició de 5.2.7 trobem que

$$\begin{aligned} \alpha^{(n)}(s_0) - \beta^{(n)}(s_0) &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\alpha^{(n-1)}(s_0) - \alpha^{(n-1)}(s)}{s - s_0} - \frac{\beta^{(n-1)}(s_0) - \beta^{(n-1)}(s)}{s - s_0} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\alpha^{(n-1)}(s_0) - \alpha^{(n-1)}(s) - \beta^{(n-1)}(s_0) + \beta^{(n-1)}(s)}{s - s_0} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\alpha^{(n-1)}(s_0) - \beta^{(n-1)}(s_0)}{s - s_0} - \frac{\alpha^{(n-1)}(s) - \beta^{(n-1)}(s)}{s - s_0} \right) \end{aligned}$$

Ara bé, tenim que $\alpha^{(n-1)}(s_0) - \beta^{(n-1)}(s_0) = 0$, i per tant

$$= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\beta^{(n-1)}(s) - \alpha^{(n-1)}(s)}{s - s_0} = 0,$$

i tenim que

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha(s) - \beta(s)}{(s - s_0)^p} = 0.$$

Considerem ara

$$\alpha^{(r+1)}(s_0) \neq \beta^{(r+1)}(s_0).$$

Tenim que

$$\alpha^{(r+1)}(s_0) - \beta^{(r+1)}(s_0) \neq 0.$$

Ara bé, per la definició de 5.2.7 trobem que

$$\begin{aligned} \alpha^{(r+1)}(s_0) - \beta^{(r+1)}(s_0) &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\alpha^{(r)}(s_0) - \alpha^{(r)}(s)}{s - s_0} - \frac{\beta^{(r)}(s_0) - \beta^{(r)}(s)}{s - s_0} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha^{(r)}(s_0) - \alpha^{(r)}(s) - \beta^{(r)}(s_0) + \beta^{(r)}(s)}{s - s_0} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\beta^{(r)}(s) - \alpha^{(r)}(s)}{s - s_0} \neq 0 \end{aligned} \quad (24.1)$$

i per tant

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha(s) - \beta(s)}{(s - s_0)^{r+1}} \neq 0$$

i per la definició de 24.1.16 tenim que α i β tenen contacte r . □

24.2 Curvatura i torsió

24.2.1 Producte escalar i producte vectorial

Proposició 24.2.1. *Siguin α i β dues corbes diferenciables sobre I . Aleshores*

$$\frac{d\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{dt} = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle$$

Demostració. Tenim per la definició de 5.2.7 que

$$\frac{d\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \alpha(t+h), \beta(t+h) \rangle - \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{h},$$

i que

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} \quad \text{i} \quad \beta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta(t+h) - \beta(t)}{h}.$$

Per tant trobem que quan $h \rightarrow 0$ tenim que

$$\alpha(t+h) = \alpha(t) + h\alpha'(t) \quad \text{i} \quad \beta(t+h) = \beta(t) + h\beta'(t).$$

Per tant tenim que

$$\frac{d\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle - \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{h},$$

i per la definició de 5.1.4 trobem que

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle - \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle &= \\ &= \langle \alpha(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle + \langle h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle - \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle &= \\ &= \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), h\beta'(t) \rangle + \langle h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle = \\ &= \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), h\beta'(t) \rangle + \langle h\alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle h\alpha'(t), h\beta'(t) \rangle \end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle - \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle &= \\ &= \langle \alpha(t), h\beta'(t) \rangle + \langle h\alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle h\alpha'(t), h\beta'(t) \rangle = \\ &= h\langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle + h\langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + h^2\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Per tant ens queda que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t) \rangle - \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle + h\langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + h^2\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{h} = \\ &= \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \lim_{h \rightarrow 0} h\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle = \\ &= \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle, \end{aligned}$$

i trobem

$$\frac{d\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle}{dt} = \langle \alpha'(t), \beta(t) \rangle + \langle \alpha(t), \beta'(t) \rangle. \quad \square$$

Proposició 24.2.2. *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors de \mathbb{R}^3 . Aleshores existeix un únic vector \vec{w} de \mathbb{R}^3 tal que per a tot vector \vec{x} de \mathbb{R}^3*

$$\langle \vec{w}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

Demostració.

□

Definició 24.2.3 (Producte vectorial). *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors de \mathbb{R}^3 i \vec{w} el vector de \mathbb{R}^3 tal que*

$$\langle \vec{w}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

Aleshores definim el producte vectorial de \vec{u} i \vec{v} com

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}.$$

Aquesta definició té sentit per la proposició 24.2.2.

Observació 24.2.4. $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$

Proposició 24.2.5. *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors de \mathbb{R}^3 . Aleshores*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

Demostració. Sigui \vec{x} un vector de \mathbb{R}^3 . Considerem

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}).$$

Per la definició de 4.3.1 trobem que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{x}), \quad (24.2)$$

i per l'observació 24.2.4 tenim que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \rangle &= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) \\ &= -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{x}) \\ &= -\langle \vec{v} \wedge \vec{u}, \vec{x} \rangle, \end{aligned} \quad (24.2)$$

i per tant $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, com volíem veure. \square

Proposició 24.2.6. *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors. Aleshores $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ si i només si \vec{u} i \vec{v} són linealment independents.*

Demostració. Suposem que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Aleshores tenim, per a tot vector \vec{x} de \mathbb{R}^3 , que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{x} \rangle,$$

i per la definició de 5.1.4 trobem que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \rangle = 0.$$

Ara bé, per l'observació 24.2.4 trobem que per a tot vector \vec{x} de \mathbb{R}^3 tenim

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = 0,$$

i per tant tenim que \vec{u} i \vec{v} no són linealment independents. \square

Proposició 24.2.7. *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors linealment independents de \mathbb{R}^3 . Aleshores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ és perpendicular a \vec{u} i \vec{v} .*

Demostració. \square

Proposició 24.2.8. *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors linealment independents de \mathbb{R}^3 . Aleshores $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \neq 0$.*

Demostració. Per l'observació 24.2.4 tenim que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}).$$

Ara bé, com que per hipòtesi els vectors \vec{v} i \vec{u} són linealment independents, per la proposició 24.2.6 trobem que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0},$$

i per la definició de 5.1.4 trobem que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle \neq 0.$$

Per tant tenim que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \neq 0. \quad \square$$

Definició 24.2.9 (Orientació d'una base). Sigui $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ una base tal que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$. Aleshores direm que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ és una base positiva.

Proposició 24.2.10. *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors linealment independents. Aleshores la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ és una base positiva.*

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 24.2.8.

Per l'observació 24.2.4 trobem que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}),$$

i per la definició de 5.1.4 trobem que

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle > 0.$$

Per tant tenim que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) > 0,$$

i per la definició de 24.2.9 hem acabat. \square

Proposició 24.2.11 (Fórmula de Lagrange). *Siguin \vec{u} i \vec{v} dos vectors de \mathbb{R}^3 . Aleshores per a tots \vec{x} i \vec{y} de \mathbb{R}^3 es satisfà*

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{x} \wedge \vec{y} \rangle = \det \begin{bmatrix} \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{y} \rangle \end{bmatrix}.$$

Demostració. \square

Proposició 24.2.12 (Fórmula de Leibniz). *Siguin α i β dues corbes sobre I en \mathbb{R}^3 diferenciables en I . Aleshores*

$$\frac{d(\alpha(t) \wedge \beta(t))}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt} \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \frac{d\beta(t)}{dt}.$$

Demostració. Per la definició de 5.2.7 tenim que

$$\frac{d(\alpha(t) \wedge \beta(t))}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) \wedge \beta(t+h) - \alpha(t) \wedge \beta(t)}{h}. \quad (24.3)$$

Per la definició de 24.2.3 tenim que per a tot vector \vec{x} de \mathbb{R}^3 es satisfà

$$\langle \alpha(t+h) \wedge \beta(t+h), \vec{x} \rangle = \det(\alpha(t+h), \beta(t+h), \vec{x}).$$

De nou per la definició de 5.2.7 trobem que quan $h \rightarrow 0$ es satisfà

$$\alpha(t+h) = \alpha(t) + h\alpha'(t) \quad \text{i} \quad \beta(t+h) = \beta(t) + h\beta'(t), \quad (24.4)$$

i per tant tenim que per a tot vector \vec{x} de \mathbb{R}^3 es satisfà

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t+h) \wedge \beta(t+h), \vec{x} \rangle &= \det(\alpha(t+h), \beta(t+h), \vec{x}) \\ &= \det(\alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t), \vec{x}) \end{aligned} \quad (24.4)$$

i per la definició de 4.3.1 tenim que

$$\begin{aligned} \det(\alpha(t) + h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t), \vec{x}) &= \\ &= \det(h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t), \vec{x}) + \det(\alpha(t), \beta(t) + h\beta'(t), \vec{x}) \end{aligned}$$

i de nou per la definició de 4.3.1 trobem que

$$\begin{aligned} \det(\alpha(t), \beta(t) + h\beta'(t), \vec{x}) + \det(h\alpha'(t), \beta(t) + h\beta'(t), \vec{x}) = \\ = \det(\alpha(t), \beta(t), \vec{x}) + \det(\alpha(t), h\beta'(t), \vec{x}) + \\ + \det(h\alpha'(t), \beta(t), \vec{x}) + \det(h\alpha'(t), h\beta'(t), \vec{x}), \end{aligned}$$

i per la definició de 24.2.3 això és

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t+h) \wedge \beta(t+h), \vec{x} \rangle = \\ = \langle \alpha(t) \wedge \beta(t), \vec{x} \rangle + \langle \alpha(t) \wedge h\beta'(t), \vec{x} \rangle + \langle h\alpha'(t) \wedge \beta(t), \vec{x} \rangle + \langle h\alpha'(t) \wedge h\beta'(t), \vec{x} \rangle, \end{aligned}$$

i de nou per la definició de 24.2.3 trobem que

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t+h) \wedge \beta(t+h), \vec{x} \rangle = \\ = \langle \alpha(t) \wedge \beta(t) + h\alpha(t) \wedge \beta'(t) + h\alpha'(t) \wedge \beta(t) + h^2\alpha'(t) \wedge \beta'(t), \vec{x} \rangle. \end{aligned}$$

Ara bé, ens queda que per a tot vector \vec{x} de \mathbb{R}^3 es satisfà

$$\langle \alpha(t+h) \wedge \beta(t+h), \vec{x} \rangle = \det(\alpha(t+h), \beta(t+h), \vec{x})$$

i

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t) \wedge \beta(t) + h\alpha(t) \wedge \beta'(t) + h\alpha'(t) \wedge \beta(t) + h^2\alpha'(t) \wedge \beta'(t), \vec{x} \rangle = \\ = \det(\alpha(t+h), \beta(t+h), \vec{x}), \end{aligned}$$

i per la proposició 24.2.2 trobem que

$$\alpha(t+h) \wedge \beta(t+h) = \alpha(t) \wedge \beta(t) + h\alpha(t) \wedge \beta'(t) + h\alpha'(t) \wedge \beta(t) + h^2\alpha'(t) \wedge \beta'(t).$$

Per tant per (24.3) tenim que

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha(t) \wedge \beta(t))}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) \wedge \beta(t+h) - \alpha(t) \wedge \beta(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\alpha(t) \wedge \beta'(t) + h\alpha'(t) \wedge \beta(t) + h^2\alpha'(t) \wedge \beta'(t)}{h} \\ &= \alpha(t) \wedge \beta'(t) + \alpha'(t) \wedge \beta(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2\alpha'(t) \wedge \beta'(t)}{h} \\ &= \alpha(t) \wedge \beta'(t) + \alpha'(t) \wedge \beta(t), \end{aligned}$$

i trobem

$$\frac{d(\alpha(t) \wedge \beta(t))}{dt} = \frac{d\alpha(t)}{dt} \wedge \beta(t) + \alpha(t) \wedge \frac{d\beta(t)}{dt}. \quad \square$$

24.2.2 Fórmules de Frenet

Proposició 24.2.13. *Sigui α una corba parametritzada per l'arc sobre I tal que α és dues vegades diferenciable en un punt s_0 . Aleshores tenim que $\alpha'(s_0)$ i $\alpha''(s_0)$ són perpendiculars.*

Demostració. Per la definició de 24.1.13 trobem que per a tot $s \in I$ es satisfà

$$|\alpha'(s)| = 1.$$

Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} 1 \\ &= \frac{d}{ds} |\alpha'(s_0)| \\ &= \frac{d}{ds} |\alpha'(s_0)|^2 \\ &= \frac{d}{ds} \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

$$\begin{aligned} &= \langle \alpha''(s_0), \alpha'(s_0) \rangle + \langle \alpha'(s_0), \alpha''(s_0) \rangle \\ &= 2 \langle \alpha'(s_0), \alpha''(s_0) \rangle. \end{aligned} \tag{24.2.1}$$

Per tant trobem que

$$\langle \alpha'(s_0), \alpha''(s_0) \rangle = 0,$$

i per la definició de 5.3.8 tenim que $\alpha'(s_0)$ i $\alpha''(s_0)$ són perpendiculars, com volíem veure. \square

Definició 24.2.14 (Curvatura). Sigui α una corba parametritzada per l'arc sobre I i dues vegades diferenciable. Aleshores direm que l'aplicació

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto |\alpha''(s)| \end{aligned}$$

és la curvatura de α .

Si $\kappa_\alpha(s) \neq 0$ direm que α té curvatura no nul·la en s .

Exemple 24.2.15. *Volem calcular la curvatura d'una circumferència.*

Solució. Per l'exercici 24.1.14 tenim que podem parametritzar una circumferència de radi R per l'arc com

$$\alpha(s) = \left(-R \sin\left(\frac{s}{R}\right), R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right).$$

Aleshores tenim que

$$\alpha''(s) = \frac{d}{ds} \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \right) = \left(\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right), \frac{-1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right),$$

i trobem que

$$|\alpha''(s)| = \sqrt{\frac{1}{R^2} \sin^2\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{1}{R^2} \cos^2\left(\frac{s}{R}\right)} = \frac{1}{R},$$

i per la definició de 24.2.14 trobem que $\kappa_\alpha(s) = \frac{1}{R}$. \diamond

Proposició 24.2.16. *Sigui α una corba sobre I parametritzada per l'arc i dues vegades diferenciable. Aleshores α és una recta si i només si $\kappa_\alpha(s) = 0$ per a tot $s \in I$.*

Demostració. Comencem veient que la condició és necessària (\implies). Suposem doncs que α és una recta sobre \mathbb{R}^n . Tenim que existeixen K_1 i K_2 de \mathbb{R}^n tals que

$$\alpha(s) = K_1 s + K_2.$$

Aleshores tenim que $\alpha''(s) = \vec{0}$, i per la definició de 24.2.14 trobem que $\kappa_\alpha(s) = 0$.

Veiem ara que la condició és suficient (\impliedby). Suposem doncs que $\kappa_\alpha(s) = 0$ per a tot $s \in I$. Tenim doncs que $\alpha''(s) = \vec{0}$, i per tant existeixen K_1 i K_2 de \mathbb{R}^n tals que $\alpha'(s) = K_1$ i $\alpha''(s) = K_1 s + K_2$ i trobem que α és una recta. \square

Definició 24.2.17 (Normal). Sigui α una corba sobre I parametritzada per l'arc i dues vegades diferenciable amb curvatura no nul·la. Aleshores direm que l'aplicació

$$\begin{aligned} N_\alpha: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} \end{aligned}$$

és la normal de α .

Observació 24.2.18. Tenim que $|N_\alpha(s)| = 1$.

Definició 24.2.19 (Tangent). Sigui α una corba sobre I parametritzada per l'arc. Aleshores direm que l'aplicació

$$\begin{aligned} T_\alpha: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \alpha'(s) \end{aligned}$$

és la tangent de α .

Observació 24.2.20. Tenim que $T'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s)$.

Proposició 24.2.21. Sigui α una corba sobre I amb curvatura no nul·la i $s \in I$ un real. Aleshores els vectors $T_\alpha(s)$ i $N_\alpha(s)$ són perpendiculars.

Demostració. Considerem

$$\langle T_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle.$$

Per la definició de 24.2.19 i 24.2.17 trobem que

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle &= \left\langle \alpha'(s), \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\alpha''(s)|} \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle & (5.1.4) \\ &= 0. & (24.2.13) \end{aligned}$$

Aleshores per la definició de 5.3.8 trobem que $T_\alpha(s)$ i $N_\alpha(s)$ són perpendiculars. \square

Proposició 24.2.22. *Siguin α una corba parametritzada per l'arc sobre I i $s_0 \in I$ un punt tal que $\alpha''(s_0) \neq \vec{0}$. Aleshores existeix una única circumferència β en \mathbb{R}^3 tal que α i β tenen contacte d'ordre 2 en $\alpha(s_0)$, que té radi $\rho_\alpha(s_0) = \frac{1}{\kappa_\alpha(s_0)}$ i és de la forma*

$$\beta(s) = Q + \rho_\alpha(s_0) \left(-N_\alpha(s_0) \cos\left(\frac{s}{\rho_\alpha(s_0)}\right) + T_\alpha(s_0) \sin\left(\frac{s}{\rho_\alpha(s_0)}\right) \right).$$

Demostració. □

Definició 24.2.23 (Circumferència osculadora). *Sigui α una corba parametritzada per l'arc sobre I i $s_0 \in I$ un punt tal que $\alpha''(s_0) \neq \vec{0}$ i $\rho_\alpha(s_0) = \frac{1}{\kappa_\alpha(s_0)}$. Aleshores direm que la circumferència*

$$\beta(s) = Q + \rho_\alpha(s_0) \left(-N_\alpha(s_0) \cos\left(\frac{s}{\rho_\alpha(s_0)}\right) + T_\alpha(s_0) \sin\left(\frac{s}{\rho_\alpha(s_0)}\right) \right).$$

és la circumferència osculadora de α en s_0 . Denotarem per $\rho_\alpha(s_0) = \frac{1}{\kappa_\alpha(s_0)}$ el radi de la circumferència osculadora.

Aquesta definició té sentit per la proposició 24.2.22.

Definició 24.2.24 (Binormal). *Sigui α una corba amb curvatura no nul·la. Aleshores definim*

$$B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s)$$

com la binormal de α .

Proposició 24.2.25. *Sigui α una corba amb curvatura no nul·la. Aleshores $(T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s))$ és una base ortonormal i positiva de \mathbb{R}^3 .*

Demostració. Per la proposició 24.2.21 trobem que $T_\alpha(s)$ i $N_\alpha(s)$ són perpendiculars. Aleshores per la definició de 24.2.24 trobem que $B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s)$ i per la proposició 24.2.10 tenim que la base $(T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s))$ és positiva.

Per la definició de 24.2.3 tenim que per a tot \vec{x} de \mathbb{R}^3 es satisfà

$$\langle B_\alpha(s), \vec{x} \rangle = \det(T_\alpha(s), N_\alpha(s), \vec{x}).$$

Si prenem \vec{x} tal que $(T_\alpha(s), N_\alpha(s), \vec{x})$ sigui una base ortonormal de \mathbb{R}^3 trobem que

$$\det(T_\alpha(s), N_\alpha(s), \vec{x}) = 1,$$

i per tant

$$\langle B_\alpha(s), \vec{x} \rangle = 1,$$

i tenim que $|B_\alpha(s)| = 1$. Aleshores per l'observació 24.2.18 i la definició de 24.1.13 tenim que $|T_\alpha(s)| = 1$ i que $|N_\alpha(s)| = 1$, i per tant $(T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s))$ és una base ortonormal i positiva de \mathbb{R}^3 . □

Definició 24.2.26 (Triedre de Frenet). *Sigui α una corba amb curvatura no nul·la. Aleshores direm que la base $(T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s))$ és el triedre de Frenet de α en s .*

Aquesta definició té sentit per la proposició 24.2.25.

Proposició 24.2.27. *Sigui α una corba amb curvatura no nul·la. Aleshores existeix una $\tau_\alpha(s) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$B'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s) N_\alpha(s).$$

Demostració. Tenim per la proposició 24.2.25 que $(T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s))$ és una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , i per tant tenim que

$$B'_\alpha(s) = \langle B'_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle T_\alpha(s) + \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle N_\alpha(s) + \langle B'_\alpha(s), B_\alpha(s) \rangle B_\alpha(s).$$

Tenim que $\langle B_\alpha(s), B_\alpha(s) \rangle = 1$, per tant trobem que

$$\frac{d\langle B_\alpha(s), B_\alpha(s) \rangle}{ds} = 0,$$

i per la proposició 24.2.12 trobem que

$$\langle B'_\alpha, B_\alpha \rangle + \langle B_\alpha, B'_\alpha \rangle = 0,$$

i per la definició de 5.1.4 tenim que

$$2\langle B'_\alpha(s), B_\alpha(s) \rangle = 0,$$

i per tant

$$\langle B'_\alpha(s), B_\alpha(s) \rangle = 0.$$

Per la proposició 24.2.25 trobem que

$$\langle B_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle = 0,$$

i per tant

$$\frac{d\langle B_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle}{ds} = 0,$$

i de nou per la proposició 24.2.12 tenim que

$$\frac{d\langle B_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle}{ds} = \langle B'_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle + \langle B_\alpha(s), T'_\alpha(s) \rangle.$$

Ara bé, tenim que

$$\langle B_\alpha(s), T'_\alpha(s) \rangle = \langle B_\alpha(s), \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s) \rangle \quad (24.2.20)$$

$$= 0, \quad (24.2.25)$$

i per tant

$$\langle B'_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle = 0,$$

i per tant, denotant $\tau_\alpha(s) = \langle B'_\alpha(s), N_\alpha(s) \rangle$ trobem que

$$B'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s) N_\alpha(s). \quad \square$$

Definició 24.2.28 (Torsió). Sigui α una corba parametritzada per l'arc amb curvatura no nul·la i $\tau_\alpha(s)$ el real tal que

$$B'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s) N_\alpha(s).$$

Aleshores direm que $\tau_\alpha(s)$ és la torsió de α .

Aquesta definició té sentit per la proposició 24.2.27.

Teorema 24.2.29 (Fórmules de Frenet). *Sigui α una corba parametritzada per l'arc amb curvatura no nul·la. Aleshores*

$$\begin{bmatrix} T'_\alpha(s) \\ N'_\alpha(s) \\ B'_\alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha(s) & 0 \\ -\kappa_\alpha(s) & 0 & -\tau_\alpha(s) \\ 0 & \tau_\alpha(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\alpha(s) \\ N_\alpha(s) \\ B_\alpha(s) \end{bmatrix}.$$

Demostració. Per l'observació 24.2.20 trobem que

$$T'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s), \quad (24.5)$$

i per la definició de 24.2.28 trobem que

$$B'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s) N_\alpha(s). \quad (24.6)$$

Per la definició de 24.2.24 trobem que

$$B_\alpha(s) = T_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s),$$

i per tant

$$N_\alpha(s) = B_\alpha(s) \wedge T_\alpha(s).$$

Aleshores per la proposició 24.2.12 tenim que

$$N'_\alpha(s) = B'_\alpha(s) \wedge T_\alpha(s) + B_\alpha(s) \wedge T'_\alpha(s).$$

Ara bé, per (24.5) i (24.6) trobem que

$$\begin{aligned} N'_\alpha(s) &= \tau_\alpha(s) N_\alpha(s) \wedge T_\alpha(s) + B_\alpha(s) \wedge \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s) \\ &= \tau_\alpha(s) (N_\alpha(s) \wedge T_\alpha(s)) + \kappa_\alpha(s) (B_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s)) \\ &= -\tau_\alpha(s) B_\alpha(s) + \kappa_\alpha(s) (B_\alpha(s) \wedge N_\alpha(s)) \\ &= -\tau_\alpha(s) B_\alpha(s) - \kappa_\alpha(s) T_\alpha(s). \end{aligned} \quad (24.2.24)$$

Per tant ens queda

$$\begin{aligned} T'_\alpha(s) &= \kappa_\alpha(s) N_\alpha(s) \\ N'_\alpha(s) &= -\tau_\alpha(s) B_\alpha(s) - \kappa_\alpha(s) T_\alpha(s) \\ B'_\alpha(s) &= \tau_\alpha(s) N_\alpha(s) \end{aligned}$$

i per la definició de 4.1.5 hem acabat. \square

Proposició 24.2.30. *Sigui α una corba amb curvatura no nul·la i h un canvi de paràmetre de α tal que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ estigui parametritzada per l'arc. Aleshores $\tilde{\alpha}$ té curvatura no nul·la si i només si $\alpha' \wedge \alpha'' \neq \vec{0}$.*

Demostració. Tenim que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$, i per la proposició 24.2.12 i la 6.2.15 tenim que

$$\alpha' = h'(\tilde{\alpha}' \circ h)$$

i

$$\alpha'' = h''(\tilde{\alpha}' \circ h) + (h')^2(\tilde{\alpha}'' \circ h).$$

Per tant tenim que

$$\begin{aligned}\alpha' \wedge \alpha'' &= (h'(\tilde{\alpha}' \circ h)) \wedge (h''(\tilde{\alpha}' \circ h) + (h')^2(\tilde{\alpha}'' \circ h)) \\ &= (h'(\tilde{\alpha}' \circ h)) \wedge (h''(\tilde{\alpha}' \circ h)) + (h'(\tilde{\alpha}' \circ h)) \wedge ((h')^2(\tilde{\alpha}'' \circ h)) \\ &= h'h''(\tilde{\alpha}' \circ h) \wedge (\tilde{\alpha}' \circ h) + (h')^2(h'(\tilde{\alpha}' \circ h)) \wedge (\tilde{\alpha}'' \circ h) \\ &= (h')^2(\tilde{\alpha}' \circ h) \wedge (\tilde{\alpha}'' \circ h).\end{aligned}$$

Ara bé, per la definició de 24.1.4 tenim que h és un difeomorfisme, i per la definició de 6.2.27 trobem que $h \neq 0$. Tenim també que $h'' \neq 0$, i per tant trobem que

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \vec{0} \iff (\tilde{\alpha}' \circ h) \wedge (\tilde{\alpha}'' \circ h) = \vec{0},$$

i com que, per hipòtesi, $\tilde{\alpha}$ està parametritzada per l'arc, per la definició de 24.1.13 tenim que $\tilde{\alpha}' \circ h \neq \vec{0}$, i per la proposició 24.2.13 trobem que $(\tilde{\alpha}' \circ h) \wedge (\tilde{\alpha}'' \circ h) = \vec{0}$ si i només si $\tilde{\alpha}'' = \vec{0}$, i per tant

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \vec{0} \iff |\tilde{\alpha}''| = 0. \quad \square$$

Definició 24.2.31 (Curvatura per una reparametrització). Sigui α una corba amb curvatura no nul·la i $\alpha' \wedge \alpha'' = \vec{0}$ i h un canvi de paràmetre de α tal que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ estigui parametritzada per l'arc. Aleshores direm que

$$\kappa_\alpha = \kappa_{\tilde{\alpha}} \circ h^{-1}$$

és la curvatura de α .

Això té sentit per la definició de 24.2.14 i la proposició 24.2.30.

Definició 24.2.32 (Torsió per una reparametrització). Sigui α una corba amb curvatura no nul·la i h un canvi de paràmetre de α tal que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ estigui parametritzada per l'arc. Aleshores direm que

$$\tau_\alpha = \tau_{\tilde{\alpha}} \circ h^{-1}$$

és la torsió de α .

Aquesta definició té sentit per la definició de 24.2.28.

Definició 24.2.33 (Rapidesa). Sigui α una corba regular. Aleshores direm que

$$v_\alpha(t) = |\alpha'(t)|$$

és la rapidesa de α .

Teorema 24.2.34 (Fórmules de Frenet). Sigui α una corba amb curvatura no nul·la i tal que $\alpha' \wedge \alpha'' \neq \vec{0}$. Aleshores

$$\begin{bmatrix} T'_\alpha(t) \\ N'_\alpha(t) \\ B'_\alpha(t) \end{bmatrix} = v_\alpha(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha(t) & 0 \\ -\kappa_\alpha(t) & 0 & -\tau_\alpha(t) \\ 0 & \tau_\alpha(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\alpha(t) \\ N_\alpha(t) \\ B_\alpha(t) \end{bmatrix}.$$

Demostració. Sigui h una reparametrització de α tal que $\tilde{\alpha} = \alpha \circ h$ estigui parametritzada per l'arc.

Ai haig de tornar a definir les coses aquestes per corbes no parametritzades per l'arc. Quina mandra. Imagineu una demostració patrocinada per 6.2.15 i les 24.2.29. Us prometo que tot quadra, com volíem veure. \square

Proposició 24.2.35. *Sigui α una corba regular amb $\alpha' \wedge \alpha'' \neq \vec{0}$. Aleshores*

$$T_\alpha = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad N_\alpha = B_\alpha \wedge B_\beta \quad i \quad T_\alpha = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{|\alpha' \wedge \alpha''|}.$$

Demostració. □

Proposició 24.2.36. *Sigui α una corba regular amb $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0$. Aleshores*

$$\kappa_\alpha = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3} \quad i \quad \tau_\alpha = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

Demostració. □

24.2.3 Teorema Fonamental de la teoria local de corbes

Exemple 24.2.37 (Grup ortogonal). *Volem veure que el conjunt*

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{per a tot } \vec{u}, \vec{v} \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \text{ tenim } \langle A\vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle\}$$

amb el producte de matrius és un grup.

Solució. ◇

Exemple 24.2.38 (Grup especial ortogonal). *Volem veure que*

$$SO(n) = \{A \in O \mid \det(A) = 1\}$$

és un subgrup de $O(n)$.

Solució. ◇

Proposició 24.2.39. *Sigui $A \in O(n)$ una matriu. Aleshores els valors propis reals de A són -1 ó 1 .*

Demostració. □

Proposició 24.2.40. *Es satisfà*

$$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

i

$$O(2) \setminus SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostració. □

Proposició 24.2.41. *Sigui $A \in SO(3)$ una matriu. Aleshores existeixen una base ortonormal \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 i un $t \in \mathbb{R}$ tals que*

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{C})AM(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & \sin(t) & -\cos(t) \end{bmatrix}.$$

Demostració. □

Proposició 24.2.42. *Sigui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació conserva distàncies. Aleshores existeixen una matriu $A \in O(n)$ i un $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$ tals que*

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{C}.$$

Demostració. □

Proposició 24.2.43. *Siguin α una corba regular i $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu. Aleshores*

$$\frac{d(A\alpha(t))}{dt} = A\alpha'(t).$$

Demostració. □

Proposició 24.2.44. *Siguin $A \in SO(n)$ una matriu i \vec{u}, \vec{v} dos vectors de \mathbb{R}^n . Aleshores*

$$A(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (A\vec{u}) \wedge (A\vec{v}).$$

Demostració. □

Corol·lari 24.2.45. *Siguin α una corba parametritzada per l'arc, $A \in SO(3)$ una matriu, \vec{C} un vector de \mathbb{R}^3 i β una corba tal que*

$$\beta(t) = A\alpha(t) + \vec{C}.$$

Aleshores $\beta(t)$ està parametritzada per l'arc i es satisfà

$$T_\beta = AT_\alpha, \quad N_\beta = AN_\alpha, \quad B_\beta = AB_\alpha, \quad \kappa_\beta = A\kappa_\alpha \quad i \quad \tau_\beta = A\tau_\alpha.$$

Demostració. □

Lema 24.2.46. *Siguin α i β dues corbes. Aleshores la relació*

$$\alpha \sim \beta \iff \text{Existeixen } A \in SO(3) \text{ i } \vec{C} \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } \alpha = A\beta + \vec{C}$$

és una relació d'equivalència.

Demostració. □

Teorema 24.2.47 (Teorema Fonamental de la teoria local de corbes). *Siguin $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ dues funcions diferenciables sobre I , amb $\kappa(s) > 0$ per a tot $s \in I$. Aleshores existeix una única corba α sobre I parametritzada per l'arc satisfent $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ i $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$, llevat d'equivalència.*

Demostració. □

Superfícies

25.1 Superfícies regulars

25.1.1 Immersions i submersions

Definició 25.1.1 (Immersió). Siguin $n \leq m$ dos naturals, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert, $x_0 \in \mathcal{U}$ un punt i $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable tal que $df(a)$ sigui injectiva. Aleshores direm que f és una immersió en x_0 .

Observació 25.1.2. f és una immersió en x_0 si i només si $\text{rang}(df(a)) = n$.

Exemple 25.1.3. Volem veure que la inclusió canònica és una immersió.

Solució. La inclusió canònica ve definida com

$$\begin{aligned} i: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^{p+q} \\ x &\mapsto (x; 0), \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

i per la definició de 6.2.12 tenim que la seva diferencial és

$$\begin{bmatrix} I_p \\ 0_{q \times (p-q)} \end{bmatrix}.$$

Aleshores per la definició de 4.2.11 trobem que aquesta té rang p , i per l'observació 25.1.2 tenim que i és una immersió. \diamond

Definició 25.1.4 (Submersió). Siguin $n \geq m$ dos naturals, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert, $x_0 \in \mathcal{U}$ un punt i $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable tal que $df(a)$ sigui exhaustiva. Aleshores direm que f és una submersió en x_0 .

Observació 25.1.5. f és una submersió en x_0 si i només si $\text{rang}(df(a)) = m$.

Exemple 25.1.6. Volem veure que la projecció canònica és una submersió.

Solució. La projecció canònica ve definida com

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{p+q} &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x; y) &\mapsto x, \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

i per la definició de 6.2.12 trobem que la seva diferencial és

$$\begin{bmatrix} I_p & | & 0_{p \times (p+q)} \end{bmatrix}.$$

Aleshores per la definició de 4.2.11 trobem que aquesta té rang p i per l'observació 25.1.5 tenim que π és una submersió. \diamond

Proposició 25.1.7. *Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ dos oberts, $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ i $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dues submersions. Aleshores la funció $f \circ g$ és una submersió.*

Demostració. Per la 6.2.15 tenim que

$$d(f \circ g) = dgdf(g),$$

i per tant trobem que $\text{rang}(d(f \circ g)) \leq \min\{\text{rang}(dg), \text{rang}(df(g))\}$, i per l'observació 25.1.5 hem acabat. \square

Teorema 25.1.8 (Teorema d'estructura local de les immersions). *Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una immersió en un punt $x_0 \in \mathcal{U}$. Aleshores existeixen dos oberts $\mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ satisfent $x_0 \in \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ i existeix un difeomorfisme $g: \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} g(\mathcal{U}') \subseteq \mathbb{R}^m$ i satisfent $i(x_0) \in \mathcal{V}$ tals que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{V} \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

és un diagrama commutatiu.

Demostració. Denotem

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Per la definició de 25.1.1 trobem que $n \leq m$ i per l'observació 25.1.2 trobem que

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = n.$$

Aleshores tenim que existeix una permutació $\sigma \in S_n$ tal que

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{\sigma(j)}}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = n,$$

i per la proposició 5.1.7 trobem que

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{\sigma(j)}}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \neq 0.$$

Denotem doncs

$$F(x) = (f_{\sigma(1)}(x), \dots, f_{\sigma(m)}(x))$$

i tenim que

$$\det(dF(x_0)) \neq 0. \quad (25.1)$$

Considerem la funció

$$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \longmapsto F(x) + (0, y).$$

Tenim que $g(x, 0) = F(x)$, i per l'exemple 25.1.3 trobem que

$$(g \circ i)(x) = g(x, 0) = F(x).$$

Per la definició de 6.2.12 i la proposició 6.2.13 tenim que

$$dg(x_0) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & 0_{n \times (m-n)} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} & \\ \hline \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n+1}}{\partial x_n} & \\ \vdots & & \vdots & I_{(m-n) \times (m-n)} \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \end{array} \right].$$

Aleshores tenim que

$$\det(dg(x_0)) = \det(dF(x_0)),$$

i per (25.1) trobem que

$$\det(dg(x_0)) \neq 0,$$

i pel 6.3.12 hem acabat. \square

Teorema 25.1.9 (Teorema d'estructura local de les submersions). *Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una submersió en un punt $x_0 \in \mathcal{U}$. Aleshores existeix un obert \mathcal{U}' satisfent $x_0 \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ i existeix un difeomorfisme $g: \mathcal{U}' \longleftarrow g(\mathcal{U}') \subseteq \mathbb{R}^n$ tals que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{g} & g(\mathcal{U}') \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

és un diagrama commutatiu.

Demostració. Denotem

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Per la definició de 25.1.4 trobem que $n \geq m$ i per l'observació 25.1.5 trobem que

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = m.$$

Aleshores tenim que existeix una permutació $\sigma \in S_m$ tal que

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{\sigma(j)}}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} = m,$$

i per la proposició 5.1.7 trobem que

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{\sigma(j)}}(x_0)\right)_{1 \leq i \leq m}^{1 \leq j \leq m} \neq 0.$$

Denotem doncs

$$F(x) = (f_{\sigma(1)}(x), \dots, f_{\sigma(m)}(x))$$

i tenim que

$$\det(dF(x_0)) \neq 0. \quad (25.2)$$

Considerem la funció

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (F(x), 0) + (0, \pi_2(x)). \end{aligned}$$

Per l'exemple 25.1.6 trobem que

$$(\pi_1 \circ g)(x) = \pi_1(F(x), \pi_2(x)) = F(x).$$

Per la definició de 6.2.12 i la proposició 6.2.13 tenim que

$$dg(x_0) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \\ \hline & & 0_{(n-m) \times n} & & & I_{(n-m) \times (n-m)} \end{array} \right].$$

Aleshores tenim que

$$\det(dg(x_0)) = \det(dF(x_0)),$$

i per (25.2) trobem que

$$\det(dg(x_0)) \neq 0,$$

i pel 6.3.12 hem acabat. \square

25.1.2 Superfícies

Definició 25.1.10 (Superfície). Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un subconjunt tal que per a tot $p \in S$ existeix un entorn obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ de p i un difeomorfisme $g: \mathcal{U} \longrightarrow g(\mathcal{U})$ tal que

$$g(\mathcal{U} \cap S) = g(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}).$$

Aleshores direm que S és una superfície regular.

Teorema 25.1.11. Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un subconjunt. Aleshores S és una superfície si i només si per a tot punt $p \in S$ existeixen un entorn obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ de p i una submersió $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$S \cap \mathcal{U} = F^{-1}(\{0\}).$$

Demostració. Comencem veient que la condició és suficient (\implies). Suposem doncs que S és una superfície. Per la definició de 25.1.10 trobem que per a tot $p \in S$ existeix un entorn obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ de p i un difeomorfisme $g: \mathcal{U} \longrightarrow g(\mathcal{U})$ tal que

$$g(\mathcal{U} \cap S) = g(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}). \quad (25.3)$$

Considerem la funció

$$\begin{aligned} F: \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \pi_3(g(x)). \end{aligned}$$

Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} F^{-1}(\{0\}) &= g^{-1}(\pi_3^{-1}(\{0\})) \\ &= g^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ &= g^{-1}(g(\mathcal{U})) \cap g^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \\ &= g^{-1}(g(\mathcal{U} \cap S)) = \mathcal{U} \cap S, \end{aligned} \quad (25.3)$$

i hem acabat.

Veiem ara que la condició és necessària (\impliedby). Suposem doncs que per a tot punt $p \in S$ existeixen un entorn obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ de p i una submersió $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $S \cap \mathcal{U} = F^{-1}(\{0\})$. Pel 25.1.9 tenim que per a tot $p \in S$ existeix un obert \mathcal{U}' satisfent $x_0 \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ i existeix un difeomorfisme $g: \mathcal{U}' \xrightarrow{\sim} g(\mathcal{U}') \subseteq \mathbb{R}^3$ tals que per a tot $x \in \mathcal{U}'$ tenim

$$F(x) = (\pi_3 \circ g)(x).$$

Per tant, si considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} G: \mathcal{U}' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned}$$

la restricció de F en \mathcal{U}' trobem que per a tot $x \in \mathcal{U}'$ tenim

$$G(x) = (\pi_3 \circ g)(x),$$

i es satisfà

$$G^{-1}(\{0\}) = S \cap \mathcal{U}'. \quad (25.4)$$

Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} S \cap \mathcal{U}' &= G^{-1}(\{0\}) \\ &= g^{-1}(\pi_3^{-1}(\{0\})) \\ &= g^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\}), \end{aligned} \quad (25.4)$$

i per tant tenim

$$\begin{aligned} g(S \cap \mathcal{U}') &= g(\mathcal{U}') \cap g(S \cap \mathcal{U}') \\ &= g(\mathcal{U}') \cap g(g^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})) \\ &= g(\mathcal{U}') \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}), \end{aligned}$$

i per la definició de 25.1.10 hem acabat. \square

Exemple 25.1.12. *Volem veure que un tor és una superfície*

Solució. Un tor de radi exterior R i radi interior r ve parametrizats per

$$\begin{cases} x = (r \cos(\theta) + R) \cos(\varphi) \\ y = (r \cos(\theta) + R) \sin(\varphi) \\ z = r \sin(\theta), \end{cases}$$

amb $\theta \in (0, 2\pi)$ i $\varphi \in (0, 2\pi)$. \diamond

Definició 25.1.13 (Carta local). Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunt i $p \in S$ un punt tals que existeix un entorn obert \mathcal{U} de p , un conjunt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i una aplicació $\Psi: \Omega \rightarrow S \cap \mathcal{U}$ que és una immersió i un homeomorfisme. Aleshores direm que Ω amb Ψ és una carta local de p en S .

També direm que Ψ és una parametrització o parametrització local de S .

Teorema 25.1.14. *Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un subconjunt. Aleshores S és una superfície si i només si per a tot $p \in S$ existeix una carta local de p en S .*

Demostració. \square

Exemple 25.1.15. *Volem veure que si tenim $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície i $\Psi: \Omega \rightarrow \Psi(\Omega) \subseteq S$ una immersió injectiva, aleshores Ω amb Ψ és una carta local si i només si $\Psi: \Omega \rightarrow \Psi(\Omega)$ és un homeomorfisme.*

Solució. \diamond

25.1.3 Funcions diferenciables i l'espai tangent

Definició 25.1.16 (Funció diferenciable). Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície i $f: S \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funció tal que per a tot $p \in S$ existeix una carta local Ω amb Ψ satisfent $p \in \Psi(\Omega)$ tals que

$$f \circ \Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

és un difeomorfisme. Aleshores direm que f és diferenciable.

Teorema 25.1.17. *Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície i Ω_1 amb Ψ_1 i Ω_2 amb Ψ_2 dues parametritzacions locals de S amb*

$$\Psi_1(\Omega_1) \cap \Psi_2(\Omega_2) \neq \emptyset.$$

Aleshores la funció

$$\Psi_2^{-1} \circ \Psi_1: \Omega_1 \cap \Omega_2 \rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2$$

és diferenciable.

Demostració. \square

Proposició 25.1.18. *Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funció diferenciable i $p \in S$ un punt. Aleshores existeix un entorn obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ de p i una funció diferenciable $\tilde{f}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ tals que per a tot $x \in S \cap \mathcal{U}$ tenim*

$$f(x) = \tilde{f}(x).$$

Demostració. □

Definició 25.1.19 (Funció diferenciable entre superfícies). Siguin $S_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ i $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dues superfícies i $f: S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funció diferenciable. Aleshores diem que la funció $f: S_1 \leftarrow S_2$ és diferenciable.

Proposició 25.1.20. Siguin $S_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ i $S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dues superfícies i $f: S_1 \rightarrow S_2$ una funció. Aleshores f és diferenciable si i només si existeixen dues cartes locals Ω_1 amb Ψ_1 i Ω_2 amb Ψ_2 de S_1 i S_2 , respectivament, satisfent que existeix un $p \in \Psi_1(\Omega_1)$ i $f(p) \in \Psi_2(\Omega_2)$ i tals que l'aplicació

$$\Psi_2^{-1} \circ f \circ \Psi_1: \Omega_1 \cap \Omega_2 \rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2$$

és un difeomorfisme.

Demostració. □

25.2 Primera forma fonamental

25.2.1 Espai tangent a una superfície

Definició 25.2.1 (Vectors tangents). Siguin $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície i $p \in S$ un punt. Aleshores direm que el conjunt

$$T_p(S) = \{\alpha'(0) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \text{ és una corba regular en } S \text{ amb } \alpha(0) = p\}$$

és l'espai tangent a S en p , i els elements de $T_p(S)$ són els vectors tangents a S en p .

Proposició 25.2.2. Siguin $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície, $p \in S$ un punt i $\varphi(u, v)$ amb Ω una carta local de S en p . Aleshores

$$(\varphi_u(p), \varphi_v(p))$$

és una base de $T_p(S)$.

Demostració. Per la definició de 25.1.13 tenim que φ és una immersió, i per l'observació 25.1.2 tenim que $\text{rang}(d\varphi(p)) = 2$, i per la definició de 6.2.12 tenim que

$$d\varphi(p) = (\varphi_u(p), \varphi_v(p)).$$

Per la definició d'25.2.1 tenim que $\varphi_u(p)$ i $\varphi_v(p)$ pertanyen a $T_p(S)$, i per tant tenim que $(\varphi_u(p), \varphi_v(p))$ és una base de $T_p(S)$. □

Definició 25.2.3 (Primera forma fonamental). Siguin $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície i $p \in S$ un punt. Aleshores direm que l'aplicació

$$\begin{aligned} I_p: T_p(S) \times T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

és la primera forma fonamental de S en p .

Proposició 25.2.4. Siguin $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície i $p \in S$ un punt. Aleshores la primera forma fonamental I_p és una forma bilineal.

Demostració. Siguin \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} tres vectors de $T_p(S)$. Aleshores

$$\begin{aligned} I_p(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &= I_p(\vec{u}, \vec{w}) + I_p(\vec{v}, \vec{w}), \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

i

$$\begin{aligned} I_p(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) &= \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \\ &= I_p(\vec{u}, \vec{v}) + I_p(\vec{u}, \vec{w}). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Si prenem un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ trobem que

$$\begin{aligned} I_p(\lambda \vec{u}, \vec{v}) &= \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= \lambda I_p(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

i

$$\begin{aligned} I_p(\vec{u}, \lambda \vec{v}) &= \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle \\ &= \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ &= \lambda I_p(\vec{u}, \vec{v}). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

i per la definició de 5.1.1 hem acabat. \square

Proposició 25.2.5. *Siguin $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície parametritzada per $\varphi(u, v)$, $p \in S$ un punt i \vec{u} i \vec{v} dos vectors de $T_p(S)$. Aleshores*

$$I_p(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^\top \begin{bmatrix} \langle \varphi_u(p), \varphi_u(p) \rangle & \langle \varphi_u(p), \varphi_v(p) \rangle \\ \langle \varphi_v(p), \varphi_u(p) \rangle & \langle \varphi_v(p), \varphi_v(p) \rangle \end{bmatrix} \vec{v}.$$

Demostració. Aquest enunciat té sentit per la proposició 25.2.4. Tenim que existeixen quatre reals $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tals que

$$I_p(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^\top \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \vec{v}.$$

Per la proposició 25.2.2 tenim que (φ_u, φ_v) és una base de $T_p(S)$, i per tant

$$\vec{u} = u_1 \varphi_u(p) + u_2 \varphi_v(p), \quad \text{i} \quad \vec{v} = v_1 \varphi_u(p) + v_2 \varphi_v(p),$$

i per tant en la base (φ_u, φ_v) tenim

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \text{i} \quad \vec{v} = (v_1, v_2).$$

Aleshores obtenim que

$$\begin{aligned} I_p(\vec{u}, \vec{v}) &= \langle \vec{u}(p), \vec{v}(p) \rangle \\ &= u_1 v_1 \langle \varphi_u(p), \varphi_u(p) \rangle + u_1 v_2 \langle \varphi_u(p), \varphi_v(p) \rangle + \\ &\quad + u_2 v_1 \langle \varphi_v(p), \varphi_u(p) \rangle + u_2 v_2 \langle \varphi_v(p), \varphi_v(p) \rangle, \end{aligned}$$

i tenim que

$$\vec{u}^\top \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \vec{v} = u_1 v_1 A + u_1 v_2 B + u_2 v_1 C + u_2 v_2 D,$$

i per tant trobem que

$$A = \langle \varphi_u(p), \varphi_u(p) \rangle, \quad B = C = \langle \varphi_u(p), \varphi_v(p) \rangle \quad \text{i} \quad D = \langle \varphi_v(p), \varphi_v(p) \rangle. \quad \square$$

Notació 25.2.6 (Primera forma fonamental). Denotarem

$$I_{\varphi(u,v)} = \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_v, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{bmatrix}.$$

Exemple 25.2.7. Volem calcular la primera forma fonamental d'una esfera parametritzada per

$$\Psi(\theta, \varphi) = (\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)).$$

Solució. Calculem

$$\Psi_\theta(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) \cos(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), -\sin(\theta))$$

i

$$\Psi_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), 0).$$

Aleshores tenim

$$E = \langle \Psi_\theta, \Psi_\theta \rangle = 1, \quad F = \langle \Psi_\theta, \Psi_\varphi \rangle = 0 \quad \text{i} \quad G = \langle \Psi_\varphi, \Psi_\varphi \rangle = \sin^2(\theta),$$

i per tant

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad \diamond$$

25.2.2 Longitud d'una corba

Proposició 25.2.8. Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superfície, $\Psi(u, v)$ amb Ω una carta local de S i α una corba en $\Psi(\Omega)$. Aleshores

$$S_\alpha(t_0)(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{Eu'(\tau)^2 + 2Fu'(\tau)v'(\tau) + Gv'(\tau)^2} d\tau.$$

Demostració. Com que α està continguda en $\Psi(\Omega)$ tenim que existeixen dues funcions $u(t)$, $v(t)$ tals que

$$\alpha(t) = \Psi(u(t), v(t)).$$

Calculem

$$\alpha'(t) = u'(t)\varphi_u(u, v) + v'(t)\varphi_v(u, v),$$

i tenim que

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha'(t)^\top I_p \alpha'(t)} \\ &= \sqrt{\begin{bmatrix} u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

\square

Càlcul vectorial

26.1 Formes diferencials i integració

26.1.1 Camps vectorials diferenciables

Definició 26.1.1 (Espai tangent a \mathbb{R}^n). Sigui $p \in \mathbb{R}^n$ un punt. Aleshores definim el conjunt

$$T_p(\mathbb{R}^n) = \{(p, \vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

com l'espai tangent a \mathbb{R}^n en p .

Proposició 26.1.2. *Siguin, per a tots $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$(p, \vec{u}) + (p, \vec{v}) = (p, \vec{u} + \vec{v}) \quad i \quad \lambda(p, \vec{v}) = (p, \lambda\vec{v})$$

dues operacions sobre $T_p(\mathbb{R}^n)$. Aleshores $T_p(\mathbb{R}^n)$ és un espai vectorial.

Demostració. □

Observació 26.1.3. *Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió n . Aleshores*

$$E \cong T_p(\mathbb{R}^n).$$

Demostració. □

Definició 26.1.4 (Camp vectorial diferenciable). Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $p \in \mathcal{U}$ un punt. Aleshores direm que una ν aplicació de la forma

$$\begin{aligned} \nu: \mathcal{U} &\longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n) \\ p &\longmapsto \nu(p) \end{aligned}$$

amb $\nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ és un camp vectorial diferenciable sobre \mathcal{U} o que ν és un camp vectorial sobre \mathcal{U} .

Exemple 26.1.5. *Sigui $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canònica d'un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió n . Volem veure que l'aplicació*

$$E_i(p) = (p, \vec{e}_i)$$

és un camp vectorial.

Solució.

◇

Proposició 26.1.6. *Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $p \in \mathcal{U}$ un punt. Aleshores els vectors $(E_1(p), \dots, E_n(p))$ són una base de $T_p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostració.

□

26.1.2 L'espai de camps vectorials

Definició 26.1.7 (Espai de camps vectorials). Sigui $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert. Aleshores direm que el conjunt

$$\mathfrak{X}(\mathcal{U}) = \{\nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \mid \nu \text{ és un camp vectorial sobre } \mathcal{U}\}$$

és l'espai de camps vectorials sobre \mathcal{U} .

Exemple 26.1.8. *Sigui $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ una funció. Aleshores $\nabla h \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$.*

Demostració.

□

Proposició 26.1.9. *El conjunt $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ és un espai vectorial.*

Demostració.

□

Definició 26.1.10 (Producte d'una funció i un camp vectorial). Sigui $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ una funció i $\nu \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un camp vectorial. Aleshores definim el producte de h i ν com l'operació \cdot que satisfà

$$(h \cdot \nu)(p) = h(p)\nu(p).$$

Observació 26.1.11. *Es satisfà que $h \cdot \nu \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$.*

Proposició 26.1.12. *Siguin $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ una funció i $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ dos camps vectorials. Aleshores*

$$(h \cdot (\nu_1 + \nu_2))(p) = (h \cdot \nu_1)(p) + (h \cdot \nu_2)(p).$$

Demostració.

□

Proposició 26.1.13. *Siguin $h, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ dues funcions i $\nu \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un camp vectorial. Aleshores*

$$((h + g) \cdot \nu)(p) = (h \cdot \nu)(p) + (g \cdot \nu)(p).$$

Demostració.

□

Proposició 26.1.14. *Siguin $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ una funció i $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ dos camps vectorials. Aleshores*

$$(h(\nu_1 \nu_2))(p) = ((h\nu_1)\nu_2)(p).$$

Demostració.

□

26.1.3 Producte escalar de camps vectorials

Definició 26.1.15 (Producte escalar de camps vectorials). Siguin $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ dos camps vectorials. Aleshores definim el producte escalar de ν_1 i ν_2 com l'aplicació que satisfà

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle(p) = \langle \nu_1(p), \nu_2(p) \rangle.$$

26.1.4 Derivada de Lie

Definició 26.1.16 (Derivada de Lie). Siguin $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ una funció i $\nu \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un camp vectorial. Aleshores direm que

$$\mathcal{L}_\nu(f) = \langle \nu, \nabla h \rangle$$

és la derivada de Lie de f sobre ν en p .

Aquesta definició té sentit per l'exercici 26.1.8.

Definició 26.1.17 (Part vectorial d'un camp). Sigui $\nu \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un camp vectorial. Per la definició 26.1.4 i d'26.1.1 tenim que existeix una funció $\vec{\nu}$ sobre \mathcal{U} tal que

$$\nu(p) = (p, \vec{\nu}(p)).$$

Aleshores direm que $\vec{\nu}$ és la part vectorial de ν .

Lema 26.1.18. *Siguin $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ una funció i $\nu \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un camp vectorial. Aleshores*

$$\mathcal{L}_\nu(h)(p) = \frac{\partial h}{\partial \vec{\nu}(p)}(p).$$

Demostració.

□

$$\iota_{\zeta} v \mathcal{T} \Sigma$$

26.1.5 Corbes integrals

Part XIV

**Equacions diferencials ordinàries
II**

Sistemes autònoms al pla

27.1 Sistemes no integrables

27.1.1 Comportament límit de les òrbites

Definició 27.1.1 (Conjunts ω -límit i α -límit). Sigui $\varphi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'òrbita d'un punt $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores definim

$$\omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{existeix } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ amb } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ tal que } \varphi_x(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y\}$$

com el conjunt ω -límit de x i

$$\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{existeix } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ amb } t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \text{ tal que } \varphi_x(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y\}$$

com el conjunt α -límit de x .

Observació 27.1.2. *Siguin $x \in \mathbb{R}^n$ un punt i*

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{i} \quad \dot{x} = -f(x)$$

dues equacions diferencials. Aleshores el conjunt ω -límit de x en la primera equació diferencial és el conjunt α -límit de x en la segona equació diferencial i, anàlogament, el conjunt α -límit de x en la primera equació diferencial és el conjunt ω -límit de x en la segona equació diferencial.

Definició 27.1.3 (Conjunts invariants). Sigui φ_x l'òrbita d'un punt $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores definim

$$\gamma^+(x) = \{\varphi_x(t) \mid t \geq 0\}, \quad \gamma^-(x) = \{\varphi_x(t) \mid t \leq 0\} \quad \text{i} \quad \gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x),$$

i direm que un conjunt $C \subseteq \mathbb{R}^n$ és positivament invariant si per a tot $y \in C$ tenim que $\gamma^+(y) \subseteq C$, que és negativament invariant si per a tot $y \in C$ tenim que $\gamma^-(y) \subseteq C$ i que és invariant si per a tot $y \in C$ tenim que $\gamma(y) \subseteq C$.

Teorema 27.1.4. *Siguin $\dot{x} = f(x)$ una equació diferencial sobre \mathbb{R}^n , \mathcal{K} un compacte de \mathbb{R}^n i $p \in \mathbb{R}^n$ un punt tals que $\gamma^+(p) \subset \mathcal{K}$. Aleshores*

1. $\omega(p) \neq \emptyset$.

2. $\omega(x)$ és un tancat.
3. $\omega(x) = \omega(\varphi_x(t))$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.
4. $\omega(x)$ és connex.

Demostració. Comencem veient el punt (1). Per hipòtesi tenim que $\gamma^+(x) \subset \mathcal{K}$. Ara bé, tenim que $\varphi_x(0) = x \in \gamma^+(x)$, i per tant $x \in \mathcal{K}$ i tenim que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. \square

27.1.2 Teorema de Poincaré-Bendixson

Definició 27.1.5 (Secció transversal). Sigui $\dot{x} = f(x)$ una equació diferencial sobre un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\Sigma \subseteq \mathcal{U}$ una corba tal que per a tot $x, y \in \Sigma$ es satisfà $f(x) = f(y)$. Aleshores direm que Σ és una secció transversal de l'equació diferencial.

Definició 27.1.6 (Aplicació de retorn). Sigui $\dot{x} = f(x)$ una equació diferencial sobre un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunt tals que per a tot $p \in A$ punt regular i tota secció transversal $\Sigma \subseteq A$ existeix un entorn $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ de p tal que per a tot $x \in \Sigma \cap \mathcal{V}$ existeix un $t \neq 0$ tal que $\varphi_x(t) \in \Sigma \cap \mathcal{V}$. Aleshores direm que A admet una aplicació de retorn.

Definició 27.1.7 (Gràfic). Sigui $\dot{x} = f(x)$ una equació diferencial sobre un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ i $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunt invariant que conté punts regulars i punts crítics tal que per a tot punt $x \in A$ tenim $\alpha(x) = \{p\}$ i $\omega(x) = \{q\}$ per a certs punts crítics $p, q \in A$, i tals que A admet una aplicació de retorn. Aleshores direm que A és un gràfic.

Teorema 27.1.8 (Teorema de Poincaré-Bendixson). *Sigui $\dot{x} = f(x)$ una equació diferencial en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ amb un nombre finit de punts crítics i $\mathcal{K} \subseteq \Omega$ un compacte tal que $\gamma^+(x) \subseteq \mathcal{K}$. Aleshores*

1. si $\omega(x)$ només conté punts crítics tenim que $\omega(x) = \{p\}$.
2. si $\omega(x)$ conté punts crítics i punts regulars tenim que $\omega(x)$ és un gràfic.
3. si $\omega(x)$ no conté punts crítics tenim que $\omega(x)$ és una òrbita periòdica.

Demostració. \square

Teorema 27.1.9. *Sigui $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una òrbita periòdica d'una equació diferencial $\dot{x} = f(x)$. Aleshores existeix un $p \in \text{Int}(\varphi(\mathbb{R}))$ tal que p és un punt crític.*

Demostració. \square

27.1.3 Criteri de Bendixson-Dulac

Teorema 27.1.10 (Criteri de Bendixson-Dulac). *Demostració.* \square

Equacions en derivades parcials

28.1 Equacions en derivades parcials de primer ordre

28.1.1 Equació general de primer ordre

Definició 28.1.1 (Equació en derivades parcials de primer ordre). Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ un obert i $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores, denotant

$$u_i(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i},$$

direm que l'expressió

$$F(x_1, \dots, x_n, u(x), u_1(x), \dots, u_n(x)) = 0$$

és una equació en derivades parcials de primer ordre sobre Ω .

Definició 28.1.2 (Solució d'una equació en derivades parcials). Sigui

$$F(x_1, \dots, x_n, u(x), u_1(x), \dots, u_n(x)) = 0$$

una equació en derivades parcials de primer ordre sobre un obert Ω i $\Phi(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que

$$F(x_1, \dots, x_n, \Phi(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)) = 0$$

per a tot $x \in \Omega$. Aleshores direm que Φ és una solució de l'equació en derivades parcials.

28.1.2 Equacions quasi-lineals de primer ordre

Definició 28.1.3 (Equació quasi-lineal). Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un obert, $\{P_i\}_{i=1}^N$ una família de funcions de Ω a \mathbb{R} i $R: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores direm que l'expressió

$$\sum_{i=1}^N \left(P_i(x, u(x)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = R(x, u(x))$$

és una equació diferencial quasi-lineal de primer ordre.

Exemple 28.1.4. *Exemples d'equacions quasi-lineals són, amb $K > 0$, l'equació de la calor*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial u}{\partial t}$$

o l'equació de la corda vibrant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

mentre que exemples d'equacions en derivades parcials que no siguin quasi-lineals són l'equació no lineal de la calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) = K \frac{\partial u}{\partial t}$$

o la llei de la conservació escalar

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + \operatorname{div}(f(u(t))) = 0.$$