Equacions de la calor i de la corda vibrant

Claudi Lleyda Moltó

1 L'equació de la calor

Considerem una barra 1-dimensional col·locada sobre l'interval $(0, 1/2)$ i prenem una distribució de calor inicial sobre la barra donada per una funció $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Volem trobar una funció $u(x, t)$ prou derivable que modelitzi la temperatura del punt x de la barra en l'instant t.

Considerem també que la funció u satisfà, per a cert $K > 0$, l'anomenada equació de la calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

i afegim la condició sobre els extrems de la barra

$$u(0, t) = u(1/2, t) = 0. \tag{2}$$

Per tant el model que volem estudiar ve donat per

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(0, t) = u(1/2, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Degut a que, per hipòtesi, la funció u és prou diferenciable i per (2) tenim que la sèrie de Fourier de l'extensió senar de la funció convergeix puntualment, i per tant tenim per a tot x en $(0, 1/2)$ que

$$u(x, t) = \mathrm{S}u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(2\pi n x),$$

on

$$b_n(t) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} u(x, t) \sin(2\pi n x) \mathrm{d}x,$$

i trobem que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi n x)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin(2\pi n x).$$

Podem imposar ara la condició (1) per obtenir

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t)\sin(2\pi nx) = 2K\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\sin(2\pi nx),$$

o equivalentment

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \big(4\pi^2 n^2 b_n(t)\sin(2\pi nx) + Kb_n'(t)\sin(2\pi nx)\big) = 0,$$

i trobem que

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \big(4\pi^2 n^2 b_n(t) + Kb_n'(t)\big)\sin(2\pi nx) = 0.$$

d'on deduïm que s'ha de complir

$$Kb_n'(t) = -4\pi^2 n^2 b_n(t).$$

Podem resoldre aquesta equació diferencial fent

$$K\int \frac{b_n'(t)}{b_n(t)}\mathrm{d}t = -\int 4\pi nx\mathrm{d}t$$

i per tant

$$b_n(t) = C_n e^{-4\pi^2 n^2 K^{-1} t}$$

per a una certa constant C_n, i ens queda

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4\pi^2 n^2 K^{-1} t}\sin(2\pi nx).$$

Ens queda trobar la constant C_n. Tenim que

$$u(x,0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(2\pi nx).$$

Tenim per hipòtesi que la distribució inicial de calor en la barra és $f(x)$, i per tant

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(2\pi nx).$$

Ara bé, això és la sèrie Fourier de l'extensió senar de f, i per tant trobem que els C_n són els coeficients de Fourier de f, és a dir,

$$C_n = \widehat{f}(n) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2\pi nt)\mathrm{d}t,$$

i tot plegat els queda que

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \left(\widehat{f}(n) e^{-4\pi^2 n^2 K^{-1} t}\sin(2\pi nx)\right).$$

2 L'equació de la corda vibrant

Considerem que tenim una corda tensada amb els extrems fixats als punts $(0, 0)$ i $(0, 1/2)$ i la desplacem fins a una posició donada per una funció $f(x)$. Volem estudiar el comportament en el temps d'aquesta corda quan la deixem anar, és a dir: volem trobar una funció $u(x, t)$ prou derivable que modelitzi la posició de la corda en el punt x en l'instant t. Tindrem que

$$u(x, 0) = f(x), \tag{3}$$

i com que els extrems estan fixats tenim que

$$u(0, t) = u(1/2, t) = 0. \tag{4}$$

Considerarem també que la corda té una velocitat inicial, donada per una funció $g(x)$. Això és que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \tag{5}$$

Per ultim suposarem que la corda satisfà, per a cert $K > 0$, l'equació

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Per tant el model que volem estudiar ve donat per

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0, t) = u(1/2, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Degut a que, per hipòtesi, la funció u és prou diferenciable i per (4) tenim que la sèrie de Fourier de l'extensió senar de la funció convergeix puntualment, i per tant tenim per a tot x en $(0, 1/2)$ que

$$u(x, t) = \mathrm{S}u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(2\pi n x),$$

on

$$b_n(t) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} u(x, t) \sin(2\pi n x) \mathrm{d}x,$$

i trobem que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t) \sin(2\pi n x)$$

i

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin(2\pi n x).$$

Podem imposar ara la condició (6) per trobar que

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} 4\pi^2 n^2 b_n(t)\sin(2\pi nx) = 2K\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(2\pi nx),$$

o equivalentment

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\big(4\pi^2 n^2 b_n(t)\sin(2\pi nx) - Kb_n''(t)\sin(2\pi nx)\big) = 0$$

i trobem que

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\big(4\pi^2 n^2 b_n(t) - Kb_n''(t)\big)\sin(2\pi nx) = 0$$

d'on deduïm que s'ha de complir

$$\frac{4\pi^2 n^2}{K} b_n(t) = b_n''(t).$$

La solució a aquesta equació diferencial és, per a certes constants A_n i B_n, de la forma

$$b_n(t) = A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}}t\right) + B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}}t\right).$$

Determinem la costant A_n. Considerem

$$u(x,0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\sin(2\pi nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(2\pi nx),$$

i si imposem la condició (3) trobem que

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(2\pi nx),$$

i per tant tenim que les constants A_n són els coeficients de Fourier de l'extensió senar de f, i per tant

$$A_n = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\sin(2\pi nt)\mathrm{d}t.$$

Calculem ara la constat B_n. Tenim que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(0)\sin(2\pi nx) = \frac{4\pi}{\sqrt{K}}\sum_{n=1}^{\infty} B_n n\sin(2\pi nx),$$

i imposant la condició (5) trobem que

$$g(x) = \frac{4\pi}{\sqrt{K}}\sum_{n=1}^{\infty} B_n n\sin(2\pi nx),$$

i per tant tenim que les constants B_n són els coeficients de l'extensió senar de la funció g per una constant, i tenim que

$$\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} B_n = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \sin(2\pi n t) \mathrm{d}t,$$

i per tant trobem que

$$B_n = \frac{\sqrt{K}}{\pi n} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \sin(2\pi n t) \mathrm{d}t.$$

Tot junt ens queda que

$$u(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\widehat{f}(n) \cos\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} t\right) + \widehat{g}(n) \frac{\sqrt{K}}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{K}} t\right) \sin(2\pi n x) \right).$$