

# LABORATOR DE MECANICĂ INFORMATIZAT

## Lucrarea 6

### DINAMICA UNUI SISTEM DE DOI PENDULI CUPLAȚI

Prof. dr. ing. Andrei Craifaleanu

#### 1. ENUNȚ

Se studiază oscilațiile sistemului din figura 1, format din doi penduli identici, cuplați printr-un resort liniar elastic. Pendulii sunt construiți din bilele  $P_1$  și  $P_2$  de diametru neglijabil, sudate la capetele tijelor omogene  $O_1P_1$ , respectiv  $O_2P_2$ , care sunt articulate ideal în  $O_1$ , respectiv  $O_2$ , pe elementul fix. Pendulii sunt cuplați, de asemenea, cu elementul fix, prin amortizori vâscoși liniari.

Configurația sistemului este determinată de unghiurile  $\theta_1$  și  $\theta_2$  formate din tijele pendulilor cu direcția verticală, presupusă de echilibru. În consecință, aceste unghiuri vor fi alese drept coordonate generalizate ale sistemului.

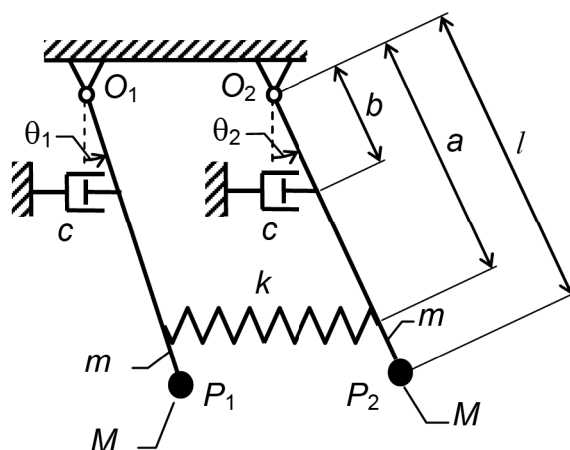


Fig. 1

#### Date:

$l$  = lungimea tije;

$a, b$  = distanțele la care sunt prinse resortul, respectiv amortizorii;

$M$  = masa fiecărei bile;

$m$  = masa fiecărei tije;

$g$  = accelerația gravitațională;

$k$  = rigiditatea resortului;

$c$  = coeficientul de amortizare al fiecărui amortizorilor;

$\theta_{10}, \theta_{20}$  = valorile inițiale ale unghiurilor  $\theta_1$ , respectiv  $\theta_2$ ;

$\omega_{10}, \omega_{20}$  = valorile inițiale ale vitezelor unghiulare  $\dot{\theta}_1$ , respectiv  $\dot{\theta}_2$ ;

$\Delta t$  = pasul de timp între două poziții succesive ale pendulilor.

#### Se cere:

Să se scrie un program care

a) să determine ecuațiile de mișcare (exprimate în coordonatele generalizate  $\theta_1$  și  $\theta_2$ ), prin

- integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale ale mișcării;  
b) să reprezinte grafic animat sistemul.

## 2. REZOLVARE

### a) Ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului

Forțele ce acționează asupra celor doi penduli sunt ilustrate în figura 2.

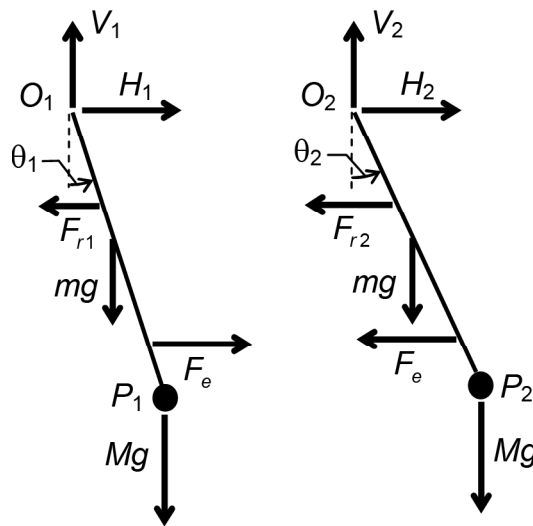


Fig. 2

În cele ce urmează se va presupune că resortul și amortizorii sunt lungi, astfel că direcțiile lor nu se modifică semnificativ atunci când pendulii se rotesc.

Se aplică teorema momentului cinetic pentru fiecare dintre penduli, în raport cu axa articulației sale,

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -Mgl \sin \theta_1 - mg \frac{l}{2} \sin \theta_1 + F_e a \cos \theta_1 - F_{r1} b \cos \theta_1 \\ J\ddot{\theta}_2 = -Mgl \sin \theta_2 - mg \frac{l}{2} \sin \theta_2 - F_e a \cos \theta_2 - F_{r2} b \cos \theta_2, \end{cases} \quad (1)$$

unde s-a notat momentul de inerție al unui pendul în raport cu axa articulației sale

$$J = \left( M + \frac{m}{3} \right) l^2. \quad (2)$$

Forța elastică are expresia

$$F_e = k(a \sin \theta_2 - a \sin \theta_1), \quad (3)$$

iar forțele rezistente iau formele

$$\begin{cases} F_{r1} = cb\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ F_{r2} = cb\dot{\theta}_2 \cos \theta_2. \end{cases} \quad (4)$$

Notând

$$S = \left( M + \frac{m}{2} \right) gl, \quad (5)$$

$$A = ka^2, \quad (6)$$

$$B = cb^2, \quad (7)$$

și înlocuind expresiile (3)-(4), ecuațiile diferențiale ale mișcării (1) pot fi rescrise sub forma

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \frac{-S \sin \theta_1 + A(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cos \theta_1 - B \dot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1}{J} \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{-S \sin \theta_2 - A(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cos \theta_2 - B \dot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2}{J} \end{cases} \quad (8)$$

Introducând ca variabile suplimentare vitezele unghiulare ale pendulilor,

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}_1 \\ \omega_2 = \dot{\theta}_2, \end{cases} \quad (9)$$

sistemul (8), format din două ecuații diferențiale de ordinul II, poate fi scris sub forma unui sistem de patru ecuații diferențiale de ordinul I:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ \dot{\omega}_1 = \frac{-S \sin \theta_1 + A(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cos \theta_1 - B \omega_1 \cos^2 \theta_1}{J} \\ \dot{\omega}_2 = \frac{-S \sin \theta_2 - A(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cos \theta_2 - B \omega_2 \cos^2 \theta_2}{J} \end{cases} \quad (10)$$

**Observație.** Sistemul obținut este neliniar și nu are soluție analitică. Drept urmare, în cazul general, integrarea sa se poate face numai numeric.

#### b) Integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare

Sistemul (10) este de forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \end{cases} \quad (11)$$

sau, mai concentrat,

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11')$$

Integrarea numerică a unui astfel de sistem de ecuații diferențiale înseamnă determinarea aproximativă a valorilor pe care le iau variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la anumite momente de timp cunoscute și relativ apropiate,  $t_0=0, t_1, t_2, \dots$

Aceste valori vor fi notate cu doi indici, primul corespunzând numărului variabilei, iar cel de al doilea momentului de timp:

$$x_{ik} = x_i(t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Se va utiliza metoda lui Euler de integrare numerică, ce se bazează pe aproximația

$$\dot{x}_i(t_k) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_k} \cong \frac{x_{i,k+1} - x_{i,k}}{t_{k+1} - t_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Scriind ecuațiile (11') pentru momentul de timp  $t_k$  și înlocuind derivatele prin expresiile aproximative (13), rezultă

$$\frac{x_{i,k+1} - x_{i,k}}{t_{k+1} - t_k} \cong f_i(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k}; t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Se obțin de aici formulele iterative

$$x_{i,k+1} \cong x_{i,k} + f_i(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k}; t_k)(t_{k+1} - t_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

cu ajutorul cărora, pornind de la valorile inițiale cunoscute  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ , se determină succesiv, cu aproximație, valorile  $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$ , apoi  $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$  etc.

În cazul sistemului (10), formulele iterative (15) iau forma:

$$\begin{cases} \theta_{1,k+1} \cong \theta_{1,k} + \omega_{1,k}(t_{k+1} - t_k) \\ \theta_{2,k+1} \cong \theta_{2,k} + \omega_{2,k}(t_{k+1} - t_k) \\ \omega_{1,k+1} \cong \omega_{1,k} + \frac{-S \sin \theta_{1,k} + A(\sin \theta_{2,k} - \sin \theta_{1,k}) \cos \theta_{1,k} - B \omega_{1,k} \cos^2 \theta_{1,k}}{J} (t_{k+1} - t_k) \\ \omega_{2,k+1} \cong \omega_{2,k} + \frac{-S \sin \theta_{2,k} - A(\sin \theta_{2,k} - \sin \theta_{1,k}) \cos \theta_{2,k} - B \omega_{2,k} \cos^2 \theta_{2,k}}{J} (t_{k+1} - t_k). \end{cases} \quad (16)$$

**Observație.** Reprezentarea grafică animată impune alegerea unor momente de timp echidistante:

$$t_0 = 0, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

### 3. INDICAȚII PENTRU PROGRAMARE

#### a) Integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare

Se calculează parametrii  $J$ ,  $S$ ,  $A$  și  $B$  cu formulele (2), (5), (6), respectiv (7).

Se atribuie variabilelor  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  valorile inițiale:

$$\begin{cases} \theta_1 \leftarrow \theta_{10} \\ \theta_2 \leftarrow \theta_{20} \\ \omega_1 \leftarrow \omega_{10} \\ \omega_2 \leftarrow \omega_{20} \end{cases} \quad (18)$$

Determinarea succesivă a valorilor ulterioare ale variabilelor se realizează în cadrul unui ciclu, în care, la fiecare pas, se efectuează următoarele operații:

– cu valorile anterioare ale variabilelor  $\theta_1$  și  $\theta_2$  se calculează variabilele auxiliare

$$\begin{cases} s_1 = \sin \theta_1, & c_1 = \cos \theta_1 \\ s_2 = \sin \theta_2, & c_2 = \cos \theta_2; \end{cases} \quad (19)$$

- cu formulele iterative (16) se determină valorile aproximative curente ale variabilelor  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ :

$$\begin{cases} \theta_1 \leftarrow \theta_1 + \omega_1 \Delta t \\ \theta_2 \leftarrow \theta_2 + \omega_2 \Delta t \\ \omega_1 \leftarrow \omega_1 + \frac{-Ss_1 + A(s_2 - s_1)c_1 - B\omega_1 c_1^2}{J} \Delta t \\ \omega_2 \leftarrow \omega_2 + \frac{-Ss_2 - A(s_2 - s_1)c_2 - B\omega_2 c_2^2}{J} \Delta t. \end{cases} \quad (20)$$

### Observații

1. Utilizarea variabilelor auxiliare  $s_1$ ,  $c_1$ ,  $s_2$ ,  $c_2$  în locul funcțiilor trigonometrice ale variabilelor  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  este necesară deoarece membrii dreپți ai ultimelor două relații (20) se calculează cu valorile anterioare ale acestor variabile, care au fost pierdute prin atribuirile efectuate în primele două relații (20).
2. Teoretic, metoda numerică este cu atât mai exactă, cu cât pasul de timp  $\Delta t$  este mai mic. În practică, însă, valori foarte scăzute ale acestui parametru pot conduce la erori mai mari ale rezultatului final. Acest fenomen se datorează reprezentării numerelor cu un număr finit de cifre semnificative, ceea ce poate conduce la erori de rotunjire ce pot depăși ca valoare contribuțiile termenilor ce conțin parametrul  $\Delta t$ .

### b) Reprezentarea grafică animată a sistemului

În cadrul ciclului definit la punctul a), la fiecare pas se efectuează următoarele operații:

- se reprezintă tijele pendulilor, sub forma segmentelor de dreaptă  $O_1P_1$  și  $O_2P_2$ , definite de punctele  $O_1\left(-\frac{d}{2}, \frac{L}{2}\right)$ ,  $P_1\left(-\frac{d}{2} + L \sin \theta_1, \frac{L}{2} - L \cos \theta_1\right)$ , respectiv  $O_2\left(\frac{d}{2}, \frac{L}{2}\right)$ ,  $P_2\left(\frac{d}{2} + L \sin \theta_2, \frac{L}{2} - L \cos \theta_2\right)$ , în care  $L$  este lungimea segmentelor reprezentate (aleasă, de exemplu, egală cu o treime din înălțimea ecranului), iar  $d$  este distanța dintre articulații (aleasă, de exemplu, egală cu jumătate din lățimea ecranului);
- se reprezintă punctele materiale din capetele tijelor, sub forma cercurilor de centre  $P_1$ , respectiv  $P_2$ , și rază  $R$ , în care  $R$  este aleasă, de exemplu, egală cu  $0,1 L$ ;
- se întrerupe execuția programului un interval de timp  $\Delta t'$  (ales, de exemplu, egal cu 50 ms), astfel încât să se permită formarea imaginii;
- se șterge imaginea de pe ecran, în vederea eliberării acestuia pentru reprezentarea sistemului la următorul moment de timp.

## 4. EXEMPLE NUMERICE

### a) Date (fig. 1):

$l = 0,5;$   
 $a = 0,1; b = 0,2;$   
 $M = 0,5;$   
 $m = 0,1;$   
 $g = 9,81;$   
 $k = 40;$   
 $c = 0;$   
 $\theta_{10} = 0,3; \theta_{20} = 0,3;$   
 $\omega_{10} = 0; \omega_{20} = 0;$   
 $\Delta t = 0,05.$

### Rezultate:

Pendulii vor oscila în fază, dar, datorită erorilor metodei de integrare, amplitudinile celor două oscilații cresc în timp, ceea ce nu corespunde realității, deoarece în absența amortizorului ( $c = 0$ ) energia mecanică a sistemului se conservă, deci amplitudinile trebuie să rămână constante.

### b) Date (fig. 1):

$l = 0,5;$   
 $a = 0,1; b = 0,2;$   
 $M = 0,5;$   
 $m = 0,1;$   
 $g = 9,81;$   
 $k = 40;$   
 $c = 2;$   
 $\theta_{10} = 0,3; \theta_{20} = 0,3;$   
 $\omega_{10} = 0; \omega_{20} = 0;$   
 $\Delta t = 0,05.$

### Rezultate:

Pendulii vor oscila în fază, dar, în acest caz amplitudinile celor două oscilații scad în timp, deoarece în prezența amortizorului ( $c = 2$ ) energia mecanică a sistemului descrește treptat, transformându-se în energie termică.

### c) Date (fig. 1):

$l = 0,5;$   
 $a = 0,1; b = 0,2;$   
 $M = 0,5;$   
 $m = 0,1;$   
 $g = 9,81;$   
 $k = 40;$   
 $c = 2;$   
 $\theta_{10} = -0,3; \theta_{20} = 0,3;$   
 $\omega_{10} = 0; \omega_{20} = 0;$   
 $\Delta t = 0,05.$

### Rezultate:

Pendulii vor oscila amortizat, în opoziție de fază.

### d) Date (fig. 1):

$l = 0,5;$   
 $a = 0,1; b = 0,2;$   
 $M = 0,5;$   
 $m = 0,1;$   
 $g = 9,81;$   
 $k = 40;$   
 $c = 2;$   
 $\theta_{10} = 0; \theta_{20} = 0,3;$   
 $\omega_{10} = 0; \omega_{20} = 0;$   
 $\Delta t = 0,05.$

### Rezultate:

Pendulii vor efectua bătăi, adică vor oscila cu amplitudini care variază periodic între valori minime și valori maxime.