LABORATOR DE MECANICĂ INFORMATIZAT

Lucrarea 3

ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID

Prof. dr. ing. Andrei Craifaleanu

1. ENUNŢ

Se consideră, în plan, un corp solid rigid aflat în echilibru, articulat în punctul *O* şi simplu rezemat în punctul *A* (fig. 1 a). Ambele legături sunt presupuse ideale. Reazemul acţionează pe direcţie verticală. Asupra rigidului sunt aplicate un număr de forţe şi un număr de cupluri.

Studiul se va efectua alegând sistemul de referinţă cu originea în articulaţie, având axa *Ox* orizontală şi axa *Oy* verticală.

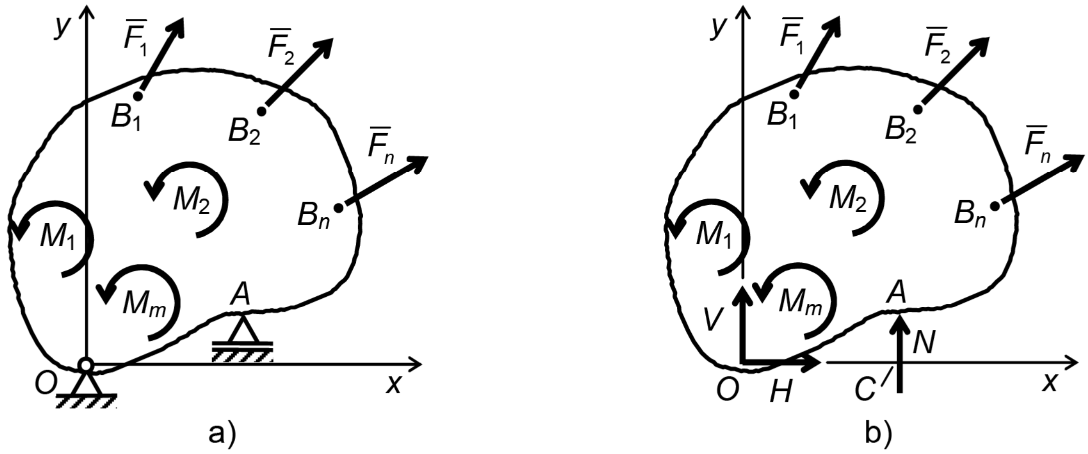

Fig. 1

Date:

x_A = abscisa punctului de rezemare *A*;

n = numărul de forţe;

Pentru $i = 1, 2, \ldots, n$,

F_{ix}, F_{iy} = componentele forţei *i*,

x_i, y_i = coordonatele punctului de aplicaţie B_i al forţei *i*;

m = numărul de cupluri;

Pentru $j = 1, 2, \ldots, m$,

M_j = scalarul momentului cuplului *j*.

Se cere:

Să se scrie un program de calculator care

a) să determine reacţiunile din articulaţie şi din reazem;

b) să verifice rezultatele obţinute.

2. REZOLVARE

a) Determinarea reacţiunilor

Determinarea reacţiunilor necesită, în prealabil, eliberarea corpului de legături. În cazul rigidului studiat, aceasta constă în (fig. 1 b):

- înlocuirea articulaţiei din *O* printr-o reacţiune având o componentă orizontală *H* şi una verticală *V*;
- înlocuirea reazemului din *A* printr-o reacţiune normală *N*, al cărei suport este vertical.

Prima metodă de determinare a reacţiunilor

Exprimând ecuaţiile de echilibru al forţelor în raport cu axa *Ox*, respectiv *Oy*, şi ecuaţia de echilibru al momentelor în raport cu punctul *O*, rezultă:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_{iO} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} + H = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} + V + N = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) + \sum\limits_{j=1}^{m} M_j + x_A N = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Soluţia acestui sistem este:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad N = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i F_{ix} - x_i F_{iy}\right) - \sum\limits_{j=1}^{m} M_j}{x_A}, \qquad V = -N - \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \ . \tag{2}$$

Metoda de rezolvare prezentată are dezavantajul că eventuale erori efectuate în determinarea necunoscutei *N* se vor propaga, afectând şi necunoscuta *V*, care este dedusă cu ajutorul acesteia. Astfel de erori se pot datora fie programării greşite, fie, în cazul programării corecte, calculului numeric, aplicat unor mărimi reprezentate aproximativ, cu un număr restrâns de cifre semnificative.

În continuare se prezintă o altă metodă, care are avantajul de a determina independent cele trei necunoscute.

A doua metodă de determinare a reacţiunilor

Se notează cu *C* proiecţia punctului *A* pe axa *Ox*.

Reacţiunile *H* şi *N* produc momente nule în raport cu punctul *C*.

Exprimând ecuaţia de echilibru al forţelor în raport cu axa *Ox* şi ecuaţiile de echilibru al momentelor în raport cu punctul *O*, respectiv C, rezultă:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum M_{iC} = 0 \\ \sum M_{iO} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} + H = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - x_A\right)F_{iy} - y_i F_{ix}\right] + \sum\limits_{j=1}^{m} M_j - x_A V = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) + \sum\limits_{j=1}^{m} M_j + x_A N = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Se observă că fiecare ecuaţie a acestui sistem conţine numai câte una dintre necunoscute. Astfel, fiecare necunoscută se determină independent.

Soluţia sistemului (3) este:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,, \qquad V = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i - x_A\right)F_{iy} - y_i F_{ix}\right] + \sum_{j=1}^{m} M_j}{x_A}\,, \qquad N = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{ix} - x_i F_{iy}\right) - \sum_{j=1}^{m} M_j}{x_A}\,. \quad (4)$$

b) Verificarea rezultatelor obţinute

Dacă necunoscutele au fost determinate prin cea de a doua dintre metodele prezentate, a doua ecuaţie (1), care reprezintă ecuaţia de echilibru al forţelor în raport cu axa *Oy*, poate fi utilizată pentru verificarea rezultatelor.

Verificarea acestei ecuaţii echivalează cu anularea parametrului

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} + V + N\,. \quad (5)$$

3. INDICAŢII PENTRU PROGRAMARE

a) Determinarea reacţiunilor

Datele forţelor (componentele şi coordonatele punctelor de aplicaţie) se citesc, pe rând, într-un ciclu, după i=1,…, n.

Pe măsură ce sunt citite, datele fiecărei forţe sunt folosite pentru a calcula contribuţia acesteia la cele trei reacţiuni. Ca urmare, deşi mărimile respective au fost notate în formulele de mai sus cu indicele „*i*“, calculul numeric nu necesită stocarea lor în variabile indexate cu câte n elemente, fiind suficientă stocarea temporară în variabile neindexate, reutilizate la fiecare nou pas.

Astfel, la pasul i:

– se citesc datele forţei i, adică cele două componente (F_x, respectiv F_y) şi cele două coordonatele ale punctului de aplicaţie (x, respectiv y);
– se adună contribuţia acesteia la reacţiunea H, conform primei expresii (4) precum şi la numărătorii ultimelor două expresii (4), stocaţi temporar în variabilele V, respectiv N,

$$H \leftarrow H - F_x\,, \qquad V \leftarrow V + \left(x - x_A\right)F_y - yF_x\,, \qquad N \leftarrow N + yF_x - xF_y\,. \quad (6)$$

La încheierea acestui ciclu, necunoscuta H este deja determinată.

Pentru determinarea celorlalte două necunoscute, trebuie adăugate şi contribuţiile cuplurilor (H nu depinde de acestea).

Datele cuplurilor (scalarii momentelor lor) se citesc, pe rând, într-un al doilea ciclu, după j=1,…, m.

La fel ca în cazul forţelor, pe măsură ce sunt citite, datele fiecărui cuplu sunt folosite pentru a calcula contribuţia acestuia la cele două reacţiuni. Din nou, deşi mărimile respective au fost notate în formulele de mai sus cu indicele „*j*“, pentru stocarea lor, se pot utiliza variabile neindexate, reutilizate la fiecare nou pas.

Astfel, la pasul j:

– se citeşte scalarul M al momentului cuplului j;
– se adună contribuţia acestuia la numărătorii ultimelor două expresii (4):

$$V \leftarrow V + M, \qquad N \leftarrow N - M. \quad (7)$$

La încheierea celui de al doilea ciclu, numărătorii menţionaţi sunt deja calculaţi.

Dar, pentru determinarea reacţiunilor V şi N, mai este necesară împărţirea acestor numărători prin x_A:

$$V \leftarrow \frac{V}{x_A}, \qquad N \leftarrow \frac{N}{x_A}. \tag{8}$$

Operaţiile din formulele (8) încheie calculele şi atribuie variabilelor *V*, respectiv *N*, valorile reacţiunilor omonime.

b) Verificarea rezultatelor obţinute

Parametrul (5) se construieşte pas cu pas, în cadrul primului ciclu, după formula

$$\varepsilon \leftarrow \varepsilon + F_y . \tag{9}$$

După determinarea tuturor reacţiunilor, se adaugă şi contribuţia acestora:

$$\varepsilon \leftarrow \varepsilon + V + N . \tag{10}$$

Din cauza erorilor de rotunjire, inerente calculului numeric, este puţin probabil ca a doua ecuaţie (1) să se verifice exact. Drept urmare, rezultatele pot fi considerate corecte dacă parametrul ε ia o valoare nu neapărat nulă, dar, cel puţin, suficient de mică în valoare absolută, comparativ cu *V* şi *N* (mai exact, cu cea mai mare în valoare absolută dintre acestea două):

$$|\varepsilon| << \max\{|V|,|N|\}. \tag{11}$$

4. EXEMPLE NUMERICE

a) Date (fig. 1):

$x_A = 3$;

$F_{1x} = 2$; $F_{1y} = 3$; $x_1 = 2$; $y_1 = 1$;

$F_{2x} = 4$; $F_{2y} = 1$; $x_2 = 1$; $y_2 = 2$;

$M_1 = -2$.

Rezultate:

$H = -6{,}000$;

$V = -5{,}667$;

$N = 1{,}667$;

$\varepsilon = 0{,}000\,000\,119$.

b) Date (fig. 1):

$x_A = 6$;

$F_{1x} = 2$; $F_{1y} = -3$; $x_1 = 2$; $y_1 = 1$;

$F_{2x} = -1$; $F_{2y} = 2$; $x_2 = 1$; $y_2 = -1$;

$F_{3x} = 2$; $F_{3y} = 3$; $x_3 = -2$; $y_3 = 3$;

$M_1 = 2$;

$M_2 = -3$.

Rezultate:

$H = -3{,}000$;

$V = -5{,}333$;

$N = 3{,}333$;

$\varepsilon = 0{,}000\,000\,238$.