LABORATOR DE MECANICĂ INFORMATIZAT

Lucrarea 1

REDUCEREA SISTEMELOR DE FORŢE OARECARE

Prof. dr. ing. Andrei Craifaleanu

1. ENUNŢ

Se consideră un paralelipiped $A_0A_1\ldots A_7$ (fig. 1), asupra căruia acţionează un număr de forţe şi un număr de cupluri. Fiecare forţă este aplicată pe o latură sau pe o diagonală a paralelipipedului. Analog, orientarea momentului fiecărui cuplu este definită de o latură sau de o diagonală.

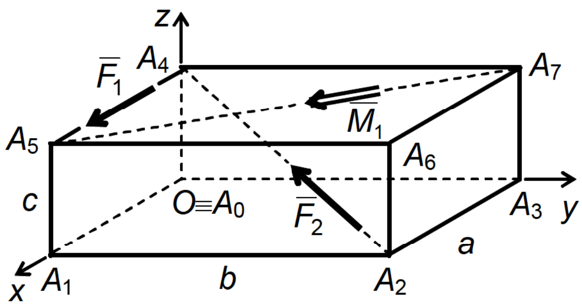

Fig. 1

Date:

a, b, c = laturile paralelipipedului;

n = numărul de forţe;

Pentru $i = 1, 2, \ldots, n$,

F_i = scalarul forţei i,

P_i, Q_i = indicii capetelor segmentului pe care acţionează forţa i; de exemplu, în cazul forţei $\overline{F}_1$ din figura 1, aceştia sunt egali cu 4, respectiv 5;

m = numărul de cupluri;

Pentru $j = 1, 2, \ldots, m$,

M_j = scalarul momentului cuplului j,

P_j, Q_j = indicii capetelor segmentului care defineşte orientarea momentului j; de exemplu, în cazul momentului $\overline{M}_3$ din figura 1, aceştia sunt egali cu 7, respectiv 5.

Se cere:

Să se scrie un program de calculator care să determine elementele torsorului de reducere al sistemului de forţe în raport cu punctul O.

2. REZOLVARE

Coordonatele vârfurilor paralelipipedului, $A_0, A_1, \ldots, A_7$, sunt:

$$\begin{cases} x_0 = 0, & y_0 = 0, & z_0 = 0 \\ x_1 = a, & y_1 = 0, & z_1 = 0 \\ x_2 = a, & y_2 = b, & z_2 = 0 \\ x_3 = 0, & y_3 = b, & z_3 = 0 \\ x_4 = 0, & y_4 = 0, & z_4 = c \\ x_5 = a, & y_5 = 0, & z_5 = c \\ x_6 = a, & y_6 = b, & z_6 = c \\ x_7 = 0, & y_7 = b, & z_7 = c. \end{cases} \tag{1}$$

Expresiile analitice ale forţelor se determină prin metoda versorului:

$$\overline{F}_i = F_i \frac{\overline{A_{Pi}A_{Qi}}}{\left|\overline{A_{Pi}A_{Qi}}\right|} = F_i \frac{(x_{Qi} - x_{Pi})\bar{i} + (y_{Qi} - y_{Pi})\bar{j} + (z_{Qi} - z_{Pi})\bar{k}}{\sqrt{(x_{Qi} - x_{Pi})^2 + (y_{Qi} - y_{Pi})^2 + (z_{Qi} - z_{Pi})^2}}. \tag{2}$$

Expresiile analitice ale momentelor forţelor se determină, conform definiţiei:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{iO} &= \overline{M}_O(\overline{F}_i) = \overline{OA_{Pi}} \times \overline{F}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{Pi} & y_{Pi} & z_{Pi} \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} = \\ &= (y_{Pi}F_{iz} - z_{Pi}F_{iy})\bar{i} + (z_{Pi}F_{ix} - x_{Pi}F_{iz})\bar{j} + (x_{Pi}F_{iy} - y_{Pi}F_{ix})\bar{k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Expresiile analitice ale momentelor cuplurilor se determină, asemănător cu cele ale forţelor, prin metoda versorului:

$$\overline{M}_j = M_j \frac{\overline{A_{Pj}A_{Qj}}}{\left|\overline{A_{Pj}A_{Qj}}\right|} = M_j \frac{(x_{Qj} - x_{Pj})\bar{i} + (y_{Qj} - y_{Pj})\bar{j} + (z_{Qj} - z_{Pj})\bar{k}}{\sqrt{(x_{Qj} - x_{Pj})^2 + (y_{Qj} - y_{Pj})^2 + (z_{Qj} - z_{Pj})^2}}. \tag{4}$$

Componentele torsorului de reducere sunt forţa rezultantă şi momentul rezultant:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}, \tag{5}$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOx} + \sum_{j=1}^{m} M_{jx}, \qquad M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOy} + \sum_{j=1}^{m} M_{jy}, \qquad M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOz} + \sum_{j=1}^{m} M_{jz}. \tag{6}$$

3. INDICAŢII PENTRU PROGRAMARE

Se calculează coordonatele vârfurilor paralelipipedului cu formulele (1).

Aceste coordonate se stochează în 3 vectori, cu câte 8 elemente fiecare: *x*(0),…, *x*(7); *y*(0),…, *y*(7); *z*(0),…, *z*(7).

Datele forţelor (scalarii şi indicii capetelor segmentelor pe care acestea acţionează) se citesc, pe rând, într-un ciclu, după *i*=1,…, *n*.

Pe măsură ce sunt citite, datele fiecărei forţe sunt folosite pentru a calcula contribuţia acesteia la forţa rezultantă şi la momentul rezultant. Ca urmare, deşi mărimile respective au fost notate în formulele de mai sus cu indicele „*i*“, calculul numeric nu necesită stocarea lor în variabile indexate cu câte *n* elemente, fiind suficientă stocarea temporară în variabile neindexate, reutilizate la fiecare nou pas.

Astfel, la pasul *i*:

– se citesc datele forţei *i*, adică scalarul *F* şi indicii *P*, respectiv *Q*, ai capetelor segmentului pe care acţionează aceasta;

– se determină componentele acesteia cu formulele

$$B = \frac{F}{\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}}, \tag{7}$$

$$F_x = B(x_Q - x_P), \qquad F_y = B(y_Q - y_P), \qquad F_z = B(z_Q - z_P); \tag{8}$$

– se determină, de asemenea, componentele momentului forţei, cu formulele

$$M'_x = (y_P F_z - z_P F_y), \qquad M'_y = (z_P F_x - x_P F_z), \qquad M'_z = (x_P F_y - y_P F_x); \tag{9}$$

– pe baza formulelor (5) şi (6), componentele astfel calculate se adună la componentele forţei rezultante, respectiv la cele ale momentului rezultant,

$$R_x \leftarrow R_x + F_x, \qquad R_y \leftarrow R_y + F_y, \qquad R_z \leftarrow R_z + F_z, \tag{10}$$

$$M_{Ox} \leftarrow M_{Ox} + M'_x, \qquad M_{Oy} \leftarrow M_{Oy} + M'_y, \qquad M_{Oz} \leftarrow M_{Oz} + M'_z. \tag{11}$$

La încheierea ciclului, componentele forţei rezultante sunt deja calculate, în timp ce pentru cele ale momentului rezultant mai este necesară determinarea contribuţiei cuplurilor.

Datele cuplurilor (scalarii şi indicii capetelor segmentelor pe care acestea acţionează) se citesc, pe rând, într-un al doilea ciclu, după *j*=1,…, *m*.

La fel ca în cazul forţelor, pe măsură ce sunt citite, datele fiecărui cuplu sunt folosite pentru a calcula contribuţia acestuia la momentul rezultant. Şi în acest caz, deşi mărimile respective au fost notate în formulele de mai sus cu indicele „*j*“, pentru stocarea lor, se pot utiliza variabile neindexate, reutilizate la fiecare nou pas.

Astfel, la pasul *j*:

– se citesc datelor cuplului *j*, adică scalarul *M* al momentului acestuia şi indicii *P*, respectiv *Q*, ai capetelor segmentului care defineşte orientarea momentului;

– se determină componentele momentului acestuia cu formulele

$$C = \frac{M}{\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}}, \tag{12}$$

$$M''_x = C(x_Q - x_P), \qquad M''_y = C(y_Q - y_P), \qquad M''_z = C(z_Q - z_P); \tag{13}$$

– pe baza formulelor (6), componentele astfel calculate se adună la cele ale momentului rezultant,

$$M_{Ox} \leftarrow M_{Ox} + M''_x, \qquad M_{Oy} \leftarrow M_{Oy} + M''_y, \qquad M_{Oz} \leftarrow M_{Oz} + M''_z. \tag{14}$$

La încheierea celui de al doilea ciclu, componentele momentului rezultant sunt deja calculate.

4. EXEMPLE NUMERICE

a) Date (fig. 2):

$a = 3$; $b = 4$; $c = 2$;

$F_1 = 2$;

$F_2 = 5$;

$M_1 = \sqrt{29} = 5{,}385$.

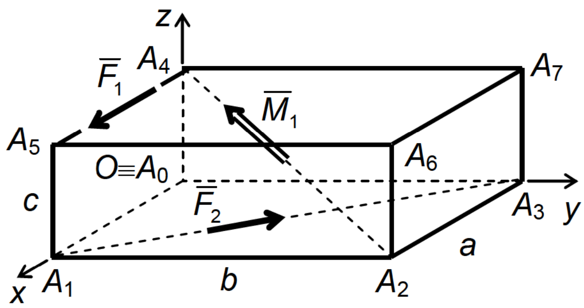

Fig. 2

Rezultate:

Forţa sau cuplul	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	M_{iOx}	M_{iOy}	M_{iOz}
F_1	2	0	0	0	4	0
F_2	-3	4	0	0	0	12
M_1	–	–	–	-3	-4	2
Σ	-1	4	0	-3	0	14

b) Date (fig. 3):

$a = 4$; $b = 12$; $c = 3$;

$F_1 = 3$;

$F_2 = 10$;

$F_3 = 13$;

$M_1 = 4$;

$M_2 = 26$.

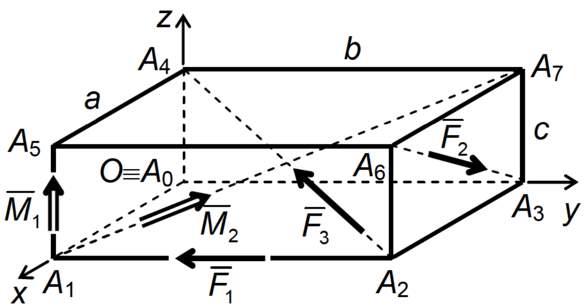

Fig. 3

Rezultate:

Forţa sau cuplul	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	M_{iOx}	M_{iOy}	M_{iOz}
F_1	0	-3	0	0	0	-12
F_2	-8	0	-6	-72	0	96
F_3	-4	-12	3	36	-12	0
M_1	–	–	–	0	0	4
M_2	–	–	–	-8	24	6
Σ	-12	-15	-3	-44	12	94