LABORATOR DE MECANICĂ INFORMATIZAT

Lucrarea 5

MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL GREU ÎN MEDIU REZISTENT

Prof. dr. ing. Andrei Craifaleanu

1. ENUNŢ

Se studiază problema unui punct material P de masă m, lansat de la suprafaţa Pământului cu viteza iniţială v_0, înclinată cu unghiul α (fig. 1). Punctul material cade pe suprafaţa Pământului în punctul A. Se consideră că suprafaţa Pământului este plană, iar câmpul gravitaţional uniform. Mişcarea este presupusă mai întâi în vid, deci fără rezistenţă la înaintare, iar apoi în aer, punctul material întâmpinând o rezistenţă la înaintare exprimată printr-o forţă de frecare vâscoasă liniară, deci opusă vitezei $\overline{v}$ şi proporţională în modul cu aceasta, printr-un constantă c, numită *coeficient de rezistenţă la înaintare*:

$$\left|\overline{F}_r\right| = c\left|\overline{v}\right| . \tag{1}$$

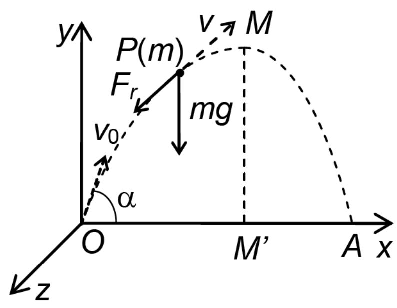

Fig. 1

Date:

m = masa punctului material;
v_0 = viteza de lansare a punctului material;
α = unghiul de lansare al punctului material;
c = coeficientul de rezistenţă la înaintare;
g = acceleraţia gravitaţională;
n = numărul maxim de iteraţii;
ε = parametrul de eroare.

Se cere:

Să se scrie un program care să determine
a) punctul M de înălţime maximă, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare (c=0);
b) bătaia OA, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare (c=0);
c) punctul M de înălţime maximă, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare ($c\neq0$);
d) bătaia OA, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare ($c\neq0$).

2. REZOLVARE

a) Punctul *M* de înălţime maximă, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare

În acest caz, ecuaţia fundamentală a dinamicii ia forma

$$m\overline{a} = m\overline{g}\,. \tag{2}$$

Se alege sistemul de referinţă cartezian din figura 1, având axa *Oy* verticală, iar axele *Ox* şi *Oz* în planul orizontal, cu *Ox* situată în planul vertical ce conţine vectorul $\overline{v}_0$.

Simplificând *m* şi proiectând această ecuaţie pe axele sistemului de referinţă, rezultă *ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului material fără rezistenţă la înaintare*:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g, \qquad \ddot{z} = 0\,. \tag{3}$$

Aceste ecuaţii diferenţiale se integrează cu condiţiile iniţiale

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, & y = 0, & z = 0 \\ \dot{x} = v_0 \cos\alpha, & \dot{y} = v_0 \sin\alpha, & \dot{z} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

rezultând *ecuaţiile de mişcare ale punctului material fără rezistenţă la înaintare*:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha, \qquad z = 0\,. \tag{5}$$

Determinând timpul din prima ecuaţie de mişcare (5) şi înlocuindu-l în cea de a doua, se obţine *ecuaţia traiectoriei, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare* (în planul *Oxy* ce o conţine):

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,. \tag{6}$$

Traiectoria este un arc de parabolă.

Punctul M de înălţime maximă, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare (fig. 1), coincide cu vârful parabolei, deci cu punctul în care se anulează panta tangentei la parabolă. Acest punct se determină din condiţia

$$x = x_M \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\,. \tag{7}$$

Înlocuind aceste valori în derivata ecuaţiei traiectoriei (6), se obţine

$$x_M = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha\, \mathrm{tg}\,\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\,. \tag{8}$$

Înălţimea maximă rezultă înlocuind valoarea (8) în ecuaţia traiectoriei (6):

$$y_M = y(x_M) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,. \tag{9}$$

b) Bătaia *OA*, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare

În acest caz, bătaia *OA* (fig. 1) se determină introducând în ecuaţia traiectoriei (6) condiţia

$$x = OA \quad \Rightarrow \quad y = 0\,. \tag{10}$$

Rezultă

$$OA_1 = 0, \quad OA_2 = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2x_M. \tag{11}$$

Din punct de vedere fizic, convine ultima soluţie.

c) Punctul *M* de înălţime maximă, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare
În acest caz, ecuaţia fundamentală a dinamicii ia forma

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{F}_r. \tag{12}$$

Forţa rezistentă $\overline{F}_r$ poate fi exprimată sub formă vectorială şi sub formă analitică:

$$\overline{F}_r = \left|\overline{F}_r\right| \cdot \frac{-\overline{v}}{|\overline{v}|} = -c|\overline{v}|\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|} = -c\overline{v} = -c\left(\dot{x}\overline{i} + \dot{y}\overline{j} + \dot{z}\overline{k}\right). \tag{13}$$

Se alege acelaşi sistem de referinţă ca şi în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare.
Proiectând ecuaţia (12) pe axele acestui sistem, rezultă *ecuaţiile diferenţiale ale mişcării punctului material cu rezistenţă la înaintare*,

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0, \qquad \ddot{y} + \beta\dot{y} = -g, \qquad \ddot{z} + \beta\dot{z} = 0, \tag{14}$$

unde s-a notat

$$\beta = \frac{c}{m}. \tag{15}$$

Ecuaţiile diferenţiale (14) sunt decuplate (fiecare conţine numai câte una dintre necunoscute), de ordinul II, liniare, cu coeficienţi constanţi, prima şi a treia omogene, iar a doua neomogenă.

Aceste ecuaţii diferenţiale se integrează cu condiţiile iniţiale (4), rezultând *ecuaţiile de mişcare ale punctului material cu rezistenţă la înaintare*:

$$x = \frac{v_0 \cos\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right), \qquad y = \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{\beta} + \frac{g}{\beta^2}\right)\left(1 - e^{-\beta t}\right) - \frac{g}{\beta}t, \qquad z = 0. \tag{16}$$

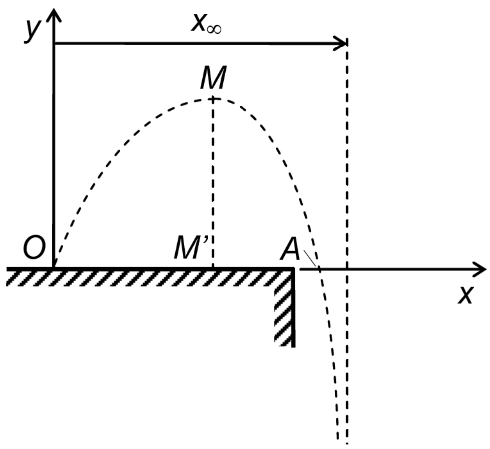

Fig. 2

Observaţie. Deoarece

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{\beta} = \frac{m v_0 \cos\alpha}{c}, \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty\,, \tag{17}$$

rezultă că, spre deosebire de cazul mişcării în vid, dacă mişcarea în aer are loc la marginea unei prăpăstii infinit de adânci (fig. 2), punctul material se va apropia oricât de mult de o dreaptă verticală situată la distanţa x_∞ de punctul de lansare. Această dreaptă este o asimptotă a traiectoriei.

Determinând timpul din prima ecuaţie de mişcare (16) şi înlocuindu-l în cea de a doua, se obţine *ecuaţia traiectoriei, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare* (în planul *Oxy* ce o conţine):

$$y = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{\beta v_0 \cos\alpha}\right)x + \frac{g}{\beta^2}\ln\left(1 - \frac{\beta x}{v_0\cos\alpha}\right). \tag{18}$$

Punctul M de înălţime maximă, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare (fig. 2), coincide cu punctul de maxim al traiectoriei, deci cu punctul în care se anulează panta tangentei la această curbă. Acest punct se determină din condiţia (7).

Înlocuind valorile impuse de această condiţie în derivata ecuaţiei traiectoriei (18), se obţine

$$x_M = x(t_M) = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g + \beta v_0 \sin\alpha}\ . \tag{19}$$

Înălţimea maximă rezultă înlocuind valoarea (19) în ecuaţia traiectoriei (18):

$$y_M = y(x_M) = \frac{v_0 \sin\alpha}{\beta} - \frac{g}{\beta^2}\ln\left(1 + \frac{\beta v_0 \sin\alpha}{g}\right). \tag{20}$$

d) Bătaia *OA*, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare

În acest caz, bătaia *OA* (fig. 2) se determină introducând în ecuaţia traiectoriei (18) condiţia (10).

Din punct de vedere matematic, aceasta revine la a rezolva ecuaţia transcendentă

$$f(OA) = 0\,, \tag{21}$$

în care funcţia $f(x)$ este reprezentată de membrul drept la ecuaţiei traiectoriei (18), prin urmare,

$$f(x) = \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{\beta v_0 \cos\alpha}\right)x + \frac{g}{\beta^2}\ln\left(1 - \frac{\beta x}{v_0\cos\alpha}\right). \tag{22}$$

Rădăcina ecuaţiei transcendente (21) se determină pe baza observaţiei că funcţia continuă $f(x)$, definită de formula (22), ia valori de semne opuse în capetele intervalului $[x_M, x_\infty]$. Într-adevăr, din relaţia (20), respectiv din cea de a doua relaţie (17):

$$f(x_M) = y_M > 0, \qquad f(x_\infty) = y_\infty = -\infty < 0\,. \tag{23}$$

Drept urmare, conform proprietăţii lui Darboux a funcţiilor continue, cunoscute din analiza matematică, în intervalul menţionat, funcţia are cel puţin o rădăcină. În cazul aplicaţiei de faţă, există o singură rădăcină, care este chiar bătaia *OA* a punctului material.

Această rădăcină poate fi determinată numeric, prin *metoda înjumătăţirii intervalului* (fig. 3).

Metoda constă în a căuta rădăcina unei funcţii f în intervalului [x_L, x_R], pe care aceasta îşi schimbă semnul, la mijloc, adică în punctul

$$x_i = \frac{x_L + x_R}{2} . \tag{24}$$

În acest scop, se calculează valoarea $f(x_i)$, care se poate afla într-unul din următoarele trei cazuri:

– este nulă sau foarte mică în modul (fig. 3 a), ceea ce înseamnă că valoarea (24) este rădăcina, respectiv o bună aproximaţie a acesteia;
– are semnul capătului stâng (fig. 3 b), deci căutarea trebuie reluată pe subintervalul drept (x_i, x_R);
– are semnul capătului drept (fig. 3 c), deci căutarea trebuie reluată pe subintervalul stâng (x_L, x_i).

Căutarea se încheie fie când se îndeplineşte condiţia din primul caz (situaţie în care metoda a reuşit), fie după parcurgerea unui număr maxim admis de iteraţii (situaţie în care metoda a eşuat).

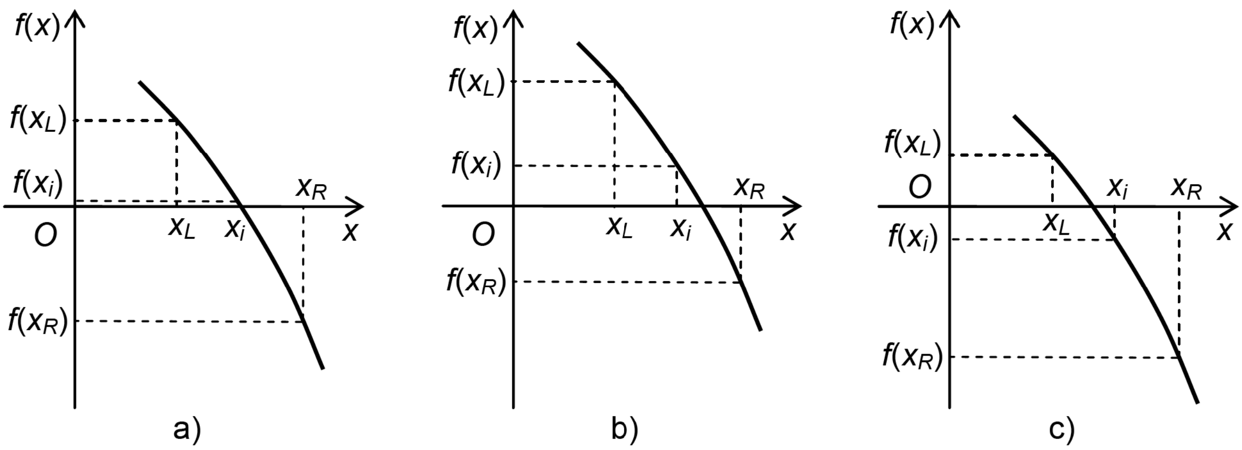

Fig. 3

3. INDICAŢII PENTRU PROGRAMARE

a) Punctul *M* de înălţime maximă, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare, se determină cu formulele (8) şi (9).

b) Bătaia *OA*, în cazul mişcării fără rezistenţă la înaintare, se determină cu ultima formulă (11).

c) Punctul *M* de înălţime maximă, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare, se determină cu formulele (19) şi (20).

d) Bătaia *OA*, în cazul mişcării cu rezistenţă la înaintare, se determină după cum urmează.

Se iniţializează

$$x_L = x_M , \qquad x_R = x_\infty , \tag{25}$$

unde x_M este definit de relaţia (19), iar x_∞ de prima relaţie (17);

Într-un ciclu după i=1,…, n, la pasul i:

- se calculează

$$x_i = \frac{x_L + x_R}{2};\tag{26}$$

- dacă $|f(x_i)| \le \varepsilon$ (fig. 3 a), unde parametrul de eroare ε este mic în raport cu y_M (de exemplu ε= y_M/1000), atunci calculul se încheie şi rădăcina căutată este

$$OA \cong x_i;\tag{27}$$

- dacă $f(x_i)>\varepsilon$ (fig. 3 b), se efectuează înlocuirea

$$x_L \leftarrow x_i\tag{28}$$

  şi calculul se reia la pasul următor (i+1);
- dacă $f(x_i)<-\varepsilon$ (fig. 3 c), se efectuează înlocuirea

$$x_R \leftarrow x_i\tag{29}$$

  şi calculul se reia la pasul următor (i+1).

Observaţie. Atunci când coeficientul c tinde către zero, mărimile specifice mişcării cu rezistenţă la înaintare tind către cele corespunzătoare, specifice mişcării fără rezistenţă la înaintare. Drept consecinţă, verificarea calculelor se poate face alegând o valoare mică pentru coeficientul de rezistenţă la înaintare c şi comparând mărimile corespunzătoare ale celor două tipuri de mişcări. Dacă valorile mărimilor respective sunt apropiate, calculele sunt verificate.

4. EXEMPLE NUMERICE

a) Date (fig. 1):
m = 1;
v_0 = 1;
α = 1;
c = 0,1;
g = 9,81;
n = 30;
ε = 0,00001.

Rezultate:

Cazul	x_M	y_M	OA
fără rezistenţă	0,04635	0,03609	0,09269
cu rezistenţă	0,04595	0,03588	0,09165

Soluţia aproximativă a fost găsită după 16 iteraţii.

b) Date (fig. 1):
= 1;
v_0 = 1;
α = 1;
c = 0,01;
g = 9,81;
n = 30;
ε = 0,00001.

Rezultate:

Cazul	x_M	y_M	OA
fără rezistenţă	0,04635	0,03609	0,09269
cu rezistenţă	0,04631	0,03607	0,09259

Soluţia aproximativă a fost găsită după 20 iteraţii.