LABORATOR DE MECANICĂ INFORMATIZAT

Lucrarea 2

CENTRUL DE MASĂ AL UNEI PLĂCI PLANE OMOGENE

Prof. dr. ing. Andrei Craifaleanu

1. ENUNŢ

Se consideră placa plană omogenă din figura 1, mărginită de parabola

$$y = \sqrt{qx}\ , \tag{1}$$

de axa *Ox* şi de dreapta verticală

$$x = a\ , \tag{2}$$

unde *q* este o constanta numită *parametrul parabolei*.

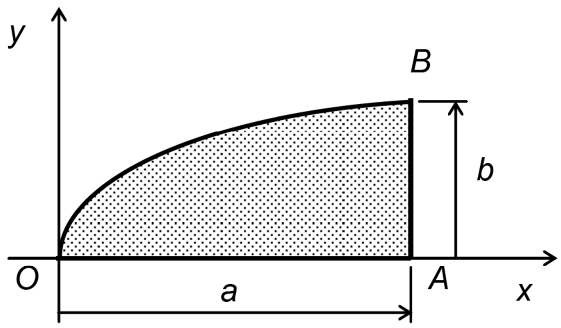

Fig. 1

Date:

a, b = baza, respectiv înălţimea plăcii;
n = parametrul de discretizare a bazei plăcii;
k = factorul de scară pentru reprezentarea grafică.

Se cere:

Să se scrie un program de calculator care

a) să determine parametrul q al parabolei;
b) să determine aria A a plăcii şi coordonatele x_C, y_C, ale centrului de masă al acesteia, utilizând formulele analitice;
c) să determine numeric aceleaşi mărimi, discretizând suprafaţa plăcii în triunghiuri;
d) să reprezinte grafic placa, sub formă discretizată.

2. REZOLVARE

a) **Determinarea parametrului parabolei** se efectuează punând condiţia ca punctul *B* să aparţină acesteia, adică punând condiţia ca cele două coordonate ale acestui punct să satisfacă ecuaţia (1):

$$b = \sqrt{qa}\ . \tag{3}$$

Rezultă

$$q = \frac{b^2}{a}. \tag{4}$$

b) Determinarea analitică a ariei şi a centrului de masă se efectuează cu formulele

$$A = \int_\Gamma \mathrm{d}A, \tag{5}$$

$$x_C = \frac{\int_\Gamma x'\mathrm{d}A}{\int_\Gamma \mathrm{d}A}, \quad y_C = \frac{\int_\Gamma y'\mathrm{d}A}{\int_\Gamma \mathrm{d}A} \tag{6}$$

în care *x*' , respectiv *y*', sunt coordonatele centrului de masă al elementului de suprafaţă cu aria d*A*, iar Γ este suprafaţa geometrică ocupată de placă.

Pentru calculul integralelor, se alege drept element de suprafaţă cu aria d*A*, fâşia *MNPQ*, mărginită de două drepte apropiate, paralele cu axa *Oy*, situate în raport cu aceasta la distanţele *x*, respectiv *x*+d*x* (fig. 2).

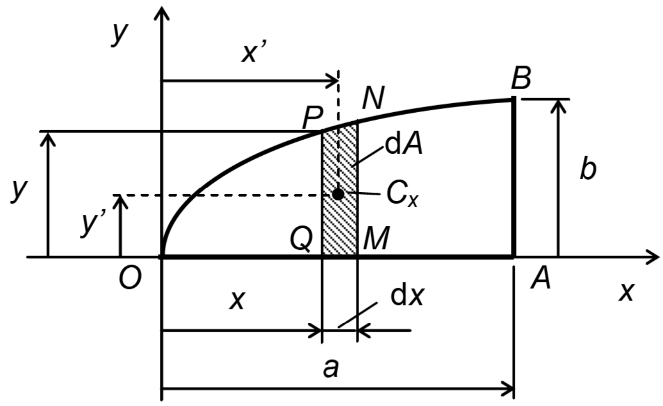

Fig. 2

Fâşia, de forma unui trapez curbiliniu, are baza infinitezimală

$$QM = \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Din acest motiv, ea poate fi aproximată prin trapezul rectiliniu *QMNP*, care, la rândul său, poate fi aproximat prin dreptunghiul cu baza *QM* şi înălţimea

$$PQ = y. \tag{8}$$

În consecinţă, aria fâşiei este

$$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \sqrt{qx}\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

unde s-a folosit ecuaţia parabolei (1).

Coordonatele centrului de masă al fâşiei sunt

$$x' = x + \frac{\mathrm{d}x}{2} = x, \quad y' = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{qx}}{2}, \tag{10}$$

unde, s-au neglijat termenii care conduc în integrale la infiniţi mici de ordin superior.

Rezultă:

$$A=\int_{\Gamma}\mathrm{d}A=\int_0^a\sqrt{qx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{q}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{q}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{a}}a^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}ab,\qquad(11)$$

$$\int_{\Gamma}x'\,\mathrm{d}A=\int_0^a x\sqrt{qx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{q}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\sqrt{q}\,x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt{a}}a^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}a^2b,\qquad(12)$$

$$\int_{\Gamma}y'\,\mathrm{d}A=\int_0^a\frac{\sqrt{qx}}{2}\sqrt{qx}\,\mathrm{d}x=\frac{q}{2}\int_0^a x\,\mathrm{d}x=\frac{q}{4}x^2\Big|_0^a=\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}a^2=\frac{1}{4}ab^2.\qquad(13)$$

Introducând aceste rezultate în formulele (6), se obţin coordonatele centrului de masă:

$$x_C=\frac{3}{5}a,\qquad y_C=\frac{3}{8}b.\qquad(14)$$

c) Determinarea numerică a ariei şi a centrului de masă se efectuează prin:

1. *discretizarea plăcii* (fig. 3), adică împărţirea acesteia într-un număr relativ mare de elemente geometrice simple, relativ mici; în aplicaţia de faţă, elementele simple sunt triunghiurile curbilinii obţinute prin
   - împărţirea suprafeţei plăcii în n trapeze curbilinii, $Q_iQ_{i+1}P_{i+1}P_i$;
   - subîmpărţirea fiecărui trapez curbiliniu în două triunghiuri curbilinii, prin trasarea unei diagonale; rezultă $2n$ triunghiuri curbilinii (dintre care primul este degenerat în segmentul OQ_1);

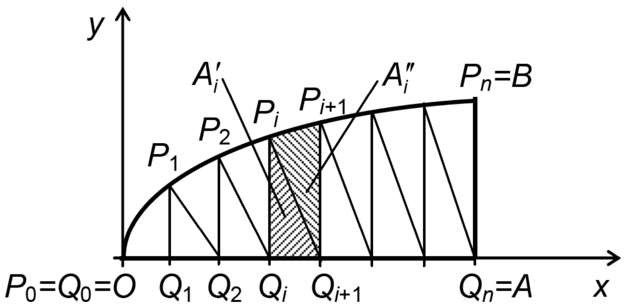

Fig. 3

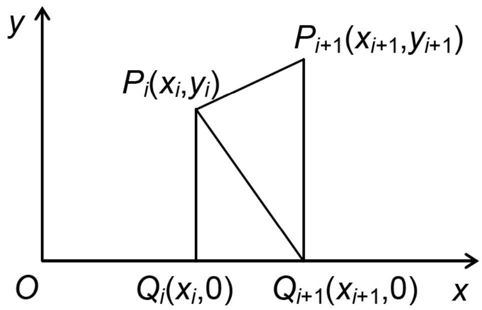

Fig. 4

2. *aproximarea triunghiurilor curbilinii* prin triunghiuri rectilinii (fig. 4); coordonatele punctelor Q_i şi P_i, care definesc vârfurile acestor triunghiuri sunt, respectiv,

$$x_{Qi}=x_i,\qquad y_{Qi}=0\qquad(15)$$

$$x_{Pi}=x_i,\qquad y_{Pi}=y_i,\qquad(16)$$

   în care, considerând punctele $Q_0, Q_1,\ldots, Q_n$ distribuite echidistant pe latura OA,

$$x_i=\frac{ia}{n},\qquad y_i=\sqrt{qx_i};\qquad(17)$$

3. *determinarea ariei şi a coordonatelor centrului de masă ale fiecărui triunghi* $Q_iQ_{i+1}P_i$, respectiv $P_{i+1}Q_{i+1}P_i$,

$$A_i' = \frac{1}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right) y_i\,, \qquad A_i'' = \frac{1}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right) y_{i+1}\,, \tag{18}$$

$$\begin{cases} x_{C\,i}' = \dfrac{x_{Q\,i} + x_{Q\,i+1} + x_{P\,i}}{3} = \dfrac{2x_i + x_{i+1}}{3} \\ y_{C\,i}' = \dfrac{y_{Q\,i} + y_{Q\,i+1} + y_{P\,i}}{3} = \dfrac{y_i}{3}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C\,i}'' = \dfrac{x_{P\,i+1} + x_{Q\,i+1} + x_{P\,i}}{3} = \dfrac{x_i + 2x_{i+1}}{3} \\ y_{C\,i}'' = \dfrac{y_{P\,i+1} + y_{Q\,i+1} + y_{P\,i}}{3} = \dfrac{y_i + y_{i+1}}{3}\,; \end{cases} \tag{19}$$

4. *determinarea aproximativă a ariei şi a centrului de masă al întregii plăci*, prin compunerea triunghiurilor,

$$A = \sum_{i=1}^{n} \left(A_i' + A_i''\right), \tag{20}$$

$$x_C = \frac{S_{Oyz}}{A}, \qquad y_C = \frac{S_{Ozx}}{A}, \tag{21}$$

unde

$$S_{Oyz} = \sum_{j=1}^{n} \left(A_i' x_{C\,i}' + A_i'' x_{C\,i}''\right), \qquad S_{Ozx} = \sum_{j=1}^{n} \left(A_i' y_{C\,i}' + A_i'' y_{C\,i}''\right). \tag{22}$$

d) Reprezentarea grafică a plăcii discretizate constă în desenarea pe ecran a fiecărui triunghi, prin segmentele ce îi definesc laturile.

Un segment oarecare, *ST*, se reprezintă cu ajutorul coordonatelor capetelor sale, *S* şi *T*.

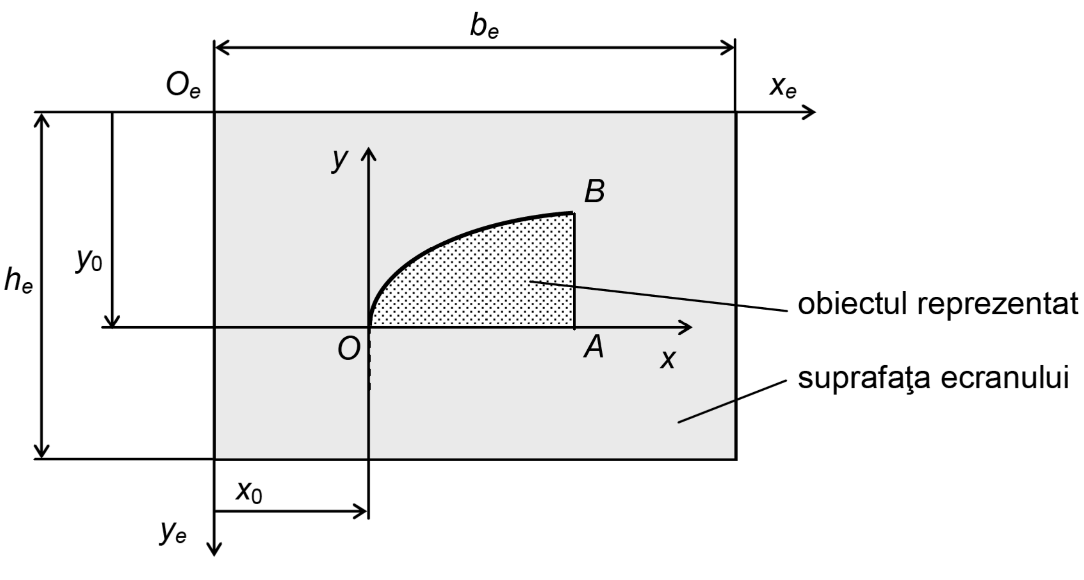

Fig. 5

Însă, reprezentările grafice pe ecranul monitorului se efectuează în sistemul de referinţă $O_e x_e y_e$ (fig. 5), care diferă de sistemul Oxy utilizat în calcule prin următoarele caracteristici:

– poziţia originii (O_e se află în colţul din stânga sus, în timp ce O trebuie plasat într-un punct ales astfel încât obiectul reprezentat să fie centrat pe ecran; coordonatele acestui punct în raport cu sistemul $O_e x_e y_e$ sunt x_0, y_0);

– orientarea axei verticale ($O_e y_e$ este orientată în jos, în timp ce Oy este orientată în sus);
– unitatea de măsură (în general, pentru $O_e x_e y_e$ se utilizează pixelul, iar pentru Oxy metrul).

Ca urmare, pentru reprezentarea grafică, este necesară transformarea coordonatelor punctelor care definesc obiectul reprezentat după relaţiile

$$x_e = x_0 + kx, \qquad y_e = y_0 - ky, \tag{23}$$

în care k este un factor de scară, iar x_0 şi y_0 sunt doi termeni de translaţie.

Pentru a plasa originea sistemului de referinţă Oxy în centrul ecranului, se aleg

$$x_0 = \frac{b_e}{2}, \qquad y_0 = \frac{h_e}{2}, \tag{24}$$

unde b_e şi h_e reprezintă lăţimea, respectiv înălţimea ecranului, măsurate in pixeli.

3. INDICAŢII PENTRU PROGRAMARE

a) Determinarea parametrului parabolei se efectuează cu formula (4).

b) Determinarea analitică a ariei şi a centrului de masă se efectuează cu formulele (11) şi (14).

c) Determinarea numerică a ariei şi a centrului de masă

În continuare, calculele se pot face fără a defini variabile indexate, deoarece toate mărimile notate cu indice din formulele de mai sus (x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}, A'_i, A''_i, $x'_{C\,i}$, $y'_{C\,i}$, $x''_{C\,i}$, $y''_{C\,i}$) pot fi stocate temporar în variabile neindexate (respectiv, x', y', x'', y'', A', A'', x'_C, y'_C, x''_C, y''_C), care se reutilizează pe măsură ce se parcurg una câte una cele n fâşii verticale.

Astfel, într-un ciclu după $i = 0,\ldots, n - 1$, la pasul i:

1. se calculează coordonatele punctelor P_i, respectiv P_{i+1},

$$x' = \frac{ia}{n}, \qquad y' = \sqrt{qx'}, \tag{25}$$

$$x'' = \frac{(i+1)a}{n}, \qquad y'' = \sqrt{qx''}; \tag{26}$$

2. pentru triunghiurile $Q_iQ_{i+1}P_i$, respectiv $P_{i+1}Q_{i+1}P_i$ (fig. 4), se calculează ariile şi coordonatele centrelor de masă,

$$A' = \frac{1}{2}(x'' - x')y', \qquad A'' = \frac{1}{2}(x'' - x')y'', \tag{27}$$

$$\begin{cases} x'_C = \dfrac{2x' + x''}{3} \\ y'_C = \dfrac{y'}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x''_C = \dfrac{x' + 2x''}{3} \\ y''_C = \dfrac{y' + y''}{3}; \end{cases} \tag{28}$$

3. se actualizează sumele (20) şi (22)

$$A \leftarrow A + A' + A'', \tag{29}$$

$$S_{Oyz} \leftarrow S_{Oyz} + A'x'_C + A''x''_C, \qquad S_{Ozx} \leftarrow S_{Ozx} + A'y'_C + A''y''_C. \tag{30}$$

La încheierea ciclului, aria aproximativă a plăcii, precum şi valorile aproximative ale mărimilor S_{Oyz} şi S_{Ozx} sunt deja calculate.

Coordonatele aproximative ale centrului de masă se determină, apoi, cu formulele (21).

Observaţie. Teoretic, metoda numerică este cu atât mai exactă, cu cât se aleg valori mai mari pentru parametrul de discretizare *n*. În practică, însă, depăşirea unei anumite limite de către acest parametru are ca efect mai degrabă creşterea erorii rezultatului final, datorită sporirii numărului de calcule, inerent afectate de erori.

d) Reprezentarea grafică a plăcii discretizate

Se aleg pentru termenii de translaţie x_0 şi y_0 valorile (24).

Într-un ciclu după $i = 0,\ldots, n - 1$, la pasul *i*:

1. se calculează coordonatele (25)-(26);
2. se aplică acestor coordonate transformările (23), rezultând coordonatele x'_e, y'_e, x''_e, y''_e;
3. se trasează segmentele Q_iP_i, Q_iQ_{i+1}, $Q_{i+1}P_{i+1}$, P_iP_{i+1}, $Q_{i+1}P_i$. definite în raport cu sistemul de referinţă $O_ex_ey_e$ de punctele
   - Q_i, de coordonate (x'_e, y_0),
   - Q_{i+1}, de coordonate (x''_e, y_0),
   - P_i, de coordonate (x'_e, y'_e),
   - P_{i+1} de coordonate (x''_e, y''_e).

Observaţie. Programarea reprezentării grafice este uşurată dacă etapele **c)** şi **d)** sunt combinate, astfel încât, pentru fiecare pereche de triunghiuri, calculul numeric al ariilor şi al coordonatelor centrului de masă este urmat imediat de desenarea segmentelor ce definesc laturile.

4. EXEMPLE NUMERICE

a) Date (fig. 1):

$a = 2$; $b = 1$;

$n = 20$;

$k = 100$.

Rezultate:

Metoda	A	x_C	y_C
analitică	1,333	1,200	0,375
numerică	1,329	1,204	0,376

b) Date (fig. 1):

$a = 2$; $b = 1$;

$n = 50$;

$k = 100$.

Rezultate:

Metoda	A	x_C	y_C
analitică	1,333	1,200	0,375
numerică	1,332	1,201	0,375