

LABORATOR DE MECANICĂ INFORMATIZAT

Lucrarea 4

PROBLEMA LUI CARDAN

Prof. dr. ing. Andrei Craifaleanu

1. ENUNȚ

Problema lui Cardan constă în studiul cinematic al mișcării plan-paralele a unei bare având un capăt, A , pe un plan orizontal și celălalt capăt, B , pe un plan vertical (fig. 1).

Poziția barei este definită de unghiul θ format de aceasta cu planul vertical.

Ecuția de mișcare a barei are forma

$$\theta = \omega_0 t, \quad (1)$$

în care ω_0 este o constantă dată.

Pe bară se află un punct D , la distanța λ de capătul A .

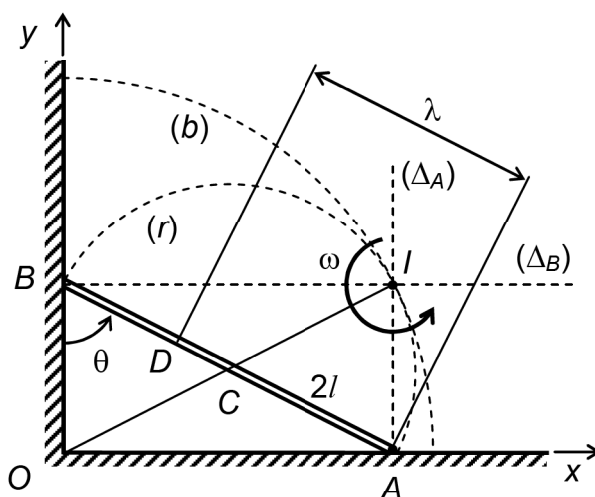


Fig. 1

Date:

l = semilungimea barei;

ω_0 = parametrul ecuației de mișcare (viteza unghiulară a barei);

n = numărul de puncte echidistante ale barei pentru care se reprezintă viteza și accelerația;

k' = factorul de scară al vitezelor;

k'' = factorul de scară al accelerațiilor;

Δt = pasul de timp între două poziții succesive ale barei.

Se cere:

Să se scrie un program de calculator care să reprezinte grafic animat

a) bara;

b) centrul instantaneu de rotație;

c) baza;

- d) rostogolitoarea;
- e) distribuția vitezelor;
- f) distribuția accelerațiilor.

2. REZOLVARE

Reprezentarea grafică animată a unui sistem constă în a afișa succesiv pe ecran imagini ale acestuia, realizate pe parcursul mișcării, în momente de timp echidistante:

$$t_0 = 0, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Pentru o valoare oarecare t a timpului, elementele geometrice necesare reprezentării sistemului se calculează după cum urmează.

a) Bara este determinată de punctele A și B , definite, respectiv, de coordonatele

$$x_A = 2l \sin \theta, \quad y_A = 0, \quad (3)$$

$$x_B = 0, \quad y_B = 2l \cos \theta. \quad (4)$$

Poziția unui punct D al barei, aflat la distanța λ de capătul A , este definită de coordonatele

$$x_D = (2l - \lambda) \sin \theta, \quad y_D = \lambda \cos \theta. \quad (5)$$

b) Centrul instantaneu de rotație este punctul I , de viteză nulă, al rigidului. Acest punct se află la intersecția perpendicularelor (Δ_A) și (Δ_B) , pe vitezele punctelor A , respectiv B . Coordonatele punctului I sunt:

$$x_I = x_A, \quad y_I = y_B. \quad (6)$$

c) Baza este locul geometric al centrului instantaneu de rotație I în raport cu sistemul de referință fix. Observând că patrulaterul $OAIB$ este dreptunghi, rezultă că punctul I se afla la distanța constantă $OI = 2l$ de punctul fix O , deci baza este cercul cu centrul în O și raza $2l$.

d) Rostogolitoarea este locul geometric al centrului instantaneu de rotație I în raport cu sistemul de referință legat de rigid. Deoarece diagonalele unui dreptunghi se intersectează la mijloc, punctul I se afla la distanța constantă $CI = l$ de mijlocul C al barei, deci rostogolitoarea este cercul cu centrul în C și raza l . Coordonatele punctului C sunt:

$$x_C = \frac{x_A}{2}, \quad y_C = \frac{y_B}{2}. \quad (7)$$

e) Distribuția vitezelor este definită de vitezele punctelor barei. Componentele vitezelor punctelor A , B , respectiv, D , sunt:

$$\dot{x}_A = 2l\omega_0 \cos \theta, \quad \dot{y}_A = 0, \quad (8)$$

$$\dot{x}_B = 0, \quad \dot{y}_B = -2l\omega_0 \sin \theta, \quad (9)$$

$$\dot{x}_D = (2l - \lambda)\omega_0 \cos \theta, \quad \dot{y}_D = -\lambda\omega_0 \sin \theta. \quad (10)$$

f) Distribuția accelerațiilor este definită de accelerațiile punctelor barei. Componentele accelerațiilor punctelor A , B , respectiv D , sunt:

$$\ddot{x}_A = -2l\omega_0^2 \sin \theta, \quad \ddot{y}_A = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{x}_B = 0, \quad \ddot{y}_B = -2l\omega_0^2 \cos \theta, \quad (12)$$

$$\ddot{x}_D = -(2l - \lambda)\omega_0^2 \sin \theta, \quad \ddot{y}_D = -\lambda\omega_0^2 \cos \theta. \quad (13)$$

3. INDICAȚII PENTRU PROGRAMARE

Afișarea succesivă se realizează în cadrul unui ciclu, în care, la fiecare pas, se efectuează următoarele operații:

- cu valoarea curentă a timpului t , se calculează unghiul θ și coordonatele punctelor ce definesc elementele geometrice necesare (capetele segmentelor, respectiv centrele cercurilor);
- se reprezintă grafic pe ecran elementele geometrice respective;
- se incrementează timpul,

$$t \leftarrow t + \Delta t; \quad (14)$$

- se întrerupe execuția programului un interval de timp $\Delta t'$ (ales, de exemplu, egal cu 50 ms), astfel încât să se permită formarea imaginii;
- se șterge imaginea de pe ecran, în vederea eliberării acestuia pentru reprezentarea sistemului la următorul moment de timp.

a) Bara se reprezintă desenând pe ecran segmentul de dreaptă definit de punctele A și B , ale căror coordonate sunt determinate de formulele (3), respectiv (4).

Se desenează, de asemenea, axele sistemului de referință, sub forma segmentelor de dreaptă MM' , respectiv NN' , definite de punctele $M(-2,25l; 0)$, $M'(2,25l; 0)$, respectiv $N(0; -2,25l)$, $N'(0; 2,25l)$.

b) Centrul instantaneu de rotație se reprezintă desenând pe ecran segmentele de dreaptă AI și BI , coordonatele punctelor A , B și I fiind determinate de formulele (3), (4), respectiv (6).

c) Baza se reprezintă desenând pe ecran cercul cu centrul de coordonate $(0,0)$ și raza $2l$.

d) Rostogolitoarea se reprezintă desenând pe ecran cercul cu centrul de coordonate (x_c, y_c) și raza l , coordonatele fiind determinate de formulele (7).

e) Distribuția vitezelor constă în reprezentarea vitezelor punctelor echidistante D_i de pe bară.

Astfel, în cadrul unui ciclu, după $i=0, \dots, n$, la pasul i :

- se efectuează înlocuirea

$$\lambda \leftarrow \frac{2il}{n}; \quad (15)$$

- se determină coordonatele punctului D_i , cu formulele (5);
- se determină componentele vitezei punctului D_i , cu formulele (10);
- se desenează pe ecran viteza astfel determinată, sub forma segmentului $D_i D_i'$, în care punctul D_i' are coordonatele

$$x'_D = x_D + k' \dot{x}_D, \quad y'_D = y_D + k' \dot{y}_D. \quad (16)$$

Observații

1. Punctul D_0 coincide cu A , iar punctul D_n coincide cu B . Drept urmare, pentru $\lambda=0$ ($i=0$) rezultă viteza punctului A , iar pentru $\lambda=1$ ($i=n$) rezultă viteza punctului B .
2. O reprezentare sugestivă se obține dacă se trasează și segmentul $A'B'$. Pentru acest segment, se va utiliza aceeași culoare ca și pentru viteze.
3. Reprezentarea vitezelor se poate efectua mai economic din punctul de vedere al numărului de calcule (fără a determina vitezele tuturor punctelor D_i), pe baza proprietății de liniaritate a distribuției vitezei pe un segment de dreaptă.

Astfel, pentru a reprezenta viteza punctului D_i , se determină:

- coordonatele punctelor A și B , cu formulele (3), respectiv (4);
- componentele vitezelor acestor puncte, cu formulele (8), respectiv (9);
- coordonatele vârfurilor A' și B' ale vitezelor celor două puncte, cu formulele

$$x'_A = x_A + k' \dot{x}_A, \quad y'_A = y_A + k' \dot{y}_A, \quad (17)$$

$$x'_B = x_B + k' \dot{x}_B, \quad y'_B = y_B + k' \dot{y}_B; \quad (18)$$

Apoi, în cadrul unui ciclu, după $i=0, \dots, n$, la pasul i , se determină:

- coeficienții care exprimă poziția punctului D_i față de capetele segmentului AB ,

$$\mu = \frac{n-i}{n}, \quad \nu = \frac{i}{n}; \quad (19)$$

- coordonatele punctului, D_i , cu formulele

$$x_D = \mu x_A + \nu x_B, \quad y_D = \mu y_A + \nu y_B; \quad (20)$$

- coordonatele vârfului D_i' ale vitezei acestui punct, cu formulele

$$x'_D = \mu x'_A + \nu x'_B, \quad y'_D = \mu y'_A + \nu y'_B. \quad (21)$$

f) Distribuția accelerațiilor se reprezintă analog cu cea a vitezelor.

Astfel, în cadrul unui ciclu, după $i=0, \dots, n$, la pasul i :

- se efectuează înlocuirea (15);
- se determină coordonatele punctului D_i , cu formulele (5);
- se determină componentele accelerației punctului D_i , cu formulele (13);
- se desenează pe ecran accelerația astfel determinată, sub forma segmentului $D_i D_i''$, în care punctele D_i'' au coordonatele

$$x''_D = x_D + k'' \ddot{x}_D, \quad y''_D = y_D + k'' \ddot{y}_D. \quad (22)$$

Observații

1. La fel ca și în cazul vitezelor, pentru $\lambda=0$ ($i=0$) se obține accelerația punctului A , iar pentru $\lambda=1$ ($i=n$) se obține accelerația punctului B .
2. La fel ca și în cazul vitezelor, o reprezentare sugestivă se obține dacă se trasează și segmentul $A''B''$. Pentru acest segment, se va utiliza aceeași culoare ca și pentru

accelearații.

3. Analog cu reprezentarea vitezelor, reprezentarea accelearațiilor se poate efectua pe baza proprietății de liniaritate a distribuției accelearației pe un segment de dreaptă.

Astfel, pentru a reprezenta accelearația punctului D_i , se determină:

- coordonatele punctelor A și B , cu formulele (3), respectiv (4);
- componentele accelearațiilor acestor puncte, cu formulele (11), respectiv (12);
- coordonatele vârfurilor A'' și B'' ale accelearațiilor celor două puncte, cu formulele

$$x_A'' = x_A + k'' \ddot{x}_A, \quad y_A'' = y_A + k'' \ddot{y}_A, \quad (23)$$

$$x_B'' = x_B + k'' \ddot{x}_B, \quad y_B'' = y_B + k'' \ddot{y}_B; \quad (24)$$

Apoi, în cadrul unui ciclu, după $i=0, \dots, n$, la pasul i , se determină:

- coordonatele punctului D_i , cu formulele (20);
- coordonatele vârfului D_i'' ale accelearației acestui punct, cu formulele

$$x_D'' = \mu x_A'' + \nu x_B'', \quad y_D'' = \mu y_A'' + \nu y_B''. \quad (25)$$

4. Reprezentarea distribuției accelearației se poate face într-un ciclu distinct de cel al vitezei, sau în cadrul aceluiași ciclu.

4. EXEMPLE NUMERICE

a) Date:

$$\begin{aligned} l &= 1; \\ \omega_0 &= 1; \\ n &= 25; \\ k' &= 0; \\ k'' &= 0; \\ \Delta t &= 0,0002. \end{aligned}$$

Rezultate:

Programul va reprezenta:

- bara,
- centrul instantaneu de rotație,
- baza și rostogolitoarea,
- fără*
- distribuția vitezelor,
- distribuția accelearațiilor.

b) Date:

$$\begin{aligned} l &= 1; \\ \omega_0 &= 1; \\ n &= 25; \\ k' &= 0,3; \\ k'' &= 0; \\ \Delta t &= 0,0002. \end{aligned}$$

Rezultate:

Programul va reprezenta:

- bara,
- centrul instantaneu de rotație,
- baza și rostogolitoarea,
- distribuția vitezelor,
- fără*
- distribuția accelearațiilor.

c) Date:

$$\begin{aligned} l &= 1; \\ \omega_0 &= 1; \\ n &= 25; \\ k' &= 0; \\ k'' &= 0,3; \\ \Delta t &= 0,0002. \end{aligned}$$

Rezultate:

Programul va reprezenta:

- bara,
- centrul instantaneu de rotație,
- baza și rostogolitoarea,
- distribuția accelearațiilor,
- fără*
- distribuția vitezelor.

d) Date:

$$l = 1;$$

$$\omega_0 = 1;$$

$$n = 25;$$

$$k' = 0,3;$$

$$k'' = 0,3;$$

$$\Delta t = 0,0002.$$

Rezultate:

Programul va reprezenta:

- bara,
- centrul instantaneu de rotație,
- baza și rostogolitoarea,
- distribuția vitezelor,
- distribuția accelerațiilor.