Fizica III – Electromagnetism

Aplicatii # 4
Teoremele campului electromagnetic (extragerea parametrilor R,L,C din modele de camp EM; modelare)

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina gabriela@lmn.pub.ro

As.dr.ing. Mihai Popescu mihai_p@lmn.pub.ro

S.l..dr.ing. Sorin Lup sorin@lmn.pub.ro

Teoremele campului EM – concepte si experimente virtuale

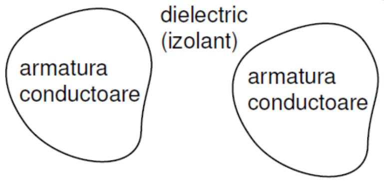
Experimente reale - in sedintele de aplicatii #5 si #6.

1. **Teorema condensatorului liniar**
   1. Enunt. Extragerea capacitatii.
   2. Capacitatea condensatorului plan parallel.
   3. Capacitatea condensatorului cilindric (cablu coaxial)
   4. Capacitatea liniei bifilare.
   5. Metoda generala de extragere a C folosind rezolvarea unei probleme de regim electrostatic (ES).
2. **Teorema rezistorului liniar**
   1. Enunt. Extragerea rezistentei/conductantei.
   2. Rezistenta unui conductor cu camp uniform.
   3. Rezistenta cablului coaxial.
   4. Rezistenta liniei bifilare.
   5. Metoda generala de extragere a R folosind rezolvarea unei probleme de regim electrokinetic (EC).
   6. Similitudinea ES – EC. Conductanta de pierderi a unui cablu coaxial.
3. **Teorema bobinei liniare**
   1. Enunt. Extragerea inductivitatii.
   2. Inductivitatea unui solenoid.
   3. Inductivitatea a unui cablu coaxial.
   4. Inductivitatea liniei bifilare.
   5. Metoda generala de extragere a L folosind rezolvarea unei probleme de regim magnetic stationar (MG).
4. **Modelarea unui cablu coaxial**
   1. Modele de circuit cu parametri concentrati.
   2. Descrierea si simularea modelelor in LTSpice.
   3. [Facultativ] Rezolvare analitica in regim armonic permanent. Matrice de impedanta/admitanta/transfer.

1. Teorema condensatorului liniar
1.1. Enunt. Extragerea capacitatii.

Condensator, definiţie

Condensator = dispozitiv alcătuit din două armături conductoare separate printr-un dielectric.



Obs:

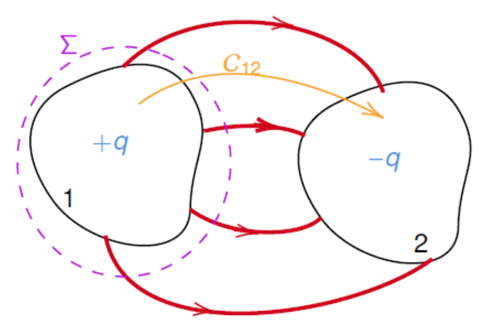
- Nu există restricţii legate de forma armăturilor sau plasarea lor în spaţiu;
- Armăturile sunt separate (nu se ating);
- Dielectricul este presupus izolant perfect.

Dacă o armătură este electrizată, atunci în jurul ei apare câmp electric (conform LFE). Vom nota q_1, q_2 sarcinile armăturilor.

Condensator încărcat

Un condensator este încărcat dacă

$$q_1 + q_2 = 0.$$



Vom nota
$q_1 = q > 0$ şi $q_2 = -q < 0$

Condensator liniar

Un condensator este liniar dacă dielectricul este liniar

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$$

Condensator liniar încărcat - mărimi globale

1. Sarcina unei armături (conform LFE)

$$q = \oint_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{d}A}$$

2. Tensiunea dintre armături

$$u = \int_{C_{12}} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{d}l}$$

Teorema condensatorului liniar - enunţ

Sarcina electrică cu care este încărcat un condensator liniar este proporţională cu tensiunea la bornele sale.

$$q \sim u$$

$\overline{D}$	$\sim$	$\overline{E}$	din liniaritate
q	$\sim$	$\overline{D}$	din LFE
u	$\sim$	$\overline{E}$	din definiţia tensiunii

$$\Rightarrow q \sim u$$

1. Teorema condensatorului liniar
1.1. Enunt. Extragerea capacitatii.

Capacitatea unui condensator

$$q = Cu$$

C - capacitatea condensatorului [F]

Obs:

1. C ar putea fi definită ca $C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{u}$ dar la condensatoarele liniare acest raport nu depinde nici de q nici de u;
2. La condensatoarele neliniare $C(q)$ sau $C(u)$;
3. La condensatoarele liniare C depinde de datele geometrice (dimensiunile şi forma armăturilor, distanţa dintre ele) şi de materialul dielectricului;
4. $C > 0$ este un parametru al condensatorului care descrie capacitatea sa de a se încărca cu sarcină electrică şi deci de a produce câmp electric.
5. Teorema condensatorului liniar poate fi privită ca o formă globală a legii de material $\overline{D} - \overline{E}$, iar capacitatea C poate fi privită ca un parametru global asociat permitivităţii electrice ε.

Se demonstreaza ca energia electrica acumulata intr-un condensator liniar este

$$W_e = \int_D \frac{\overline{D} \cdot \overline{E}}{2} dv = \frac{qu}{2} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Problema determinarii capacitatii unui condensator liniar:

Date:
- Geometrice (forma, dimensiunile)
- De material (permitivitatea in fiecare punct din dielectric)

Se cere:
- Expresia capacitatii.

1. Teorema condensatorului liniar
1.1. Enunt. Extragerea capacitatii.

Ideea:
Problema extragerii C se reduce la calculul campului electric.
Se presupune condensatorul incarcat, se calculeaza campul electric, apoi se calculeaza capacitatea.

Metoda liniara

1. Se pp. condesatorul incarcat cu q;
2. Se calculeaza campul electric $(\overline{D}, \overline{E})$;
3. Se calculeaza tensiunea dintre armaturi $u = \int_1^2 \overline{E} \cdot \overline{dl}$;
4. Se calculeaza capacitatea $\boxed{C = \frac{q}{u}.}$

sau

1. Se pp. o armatura de potential u si cealalta masa (ground, $V = 0$);
2. Se calculeaza campul electric $(\overline{D}, \overline{E})$;
3. Se calculeaza sarcina $q = \oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{dA}$ a armaturii de potential u;
4. Se calculeaza capacitatea $\boxed{C = \frac{q}{u}.}$

Metoda energetica

1. Se pp. condesatorul incarcat cu q;
2. Se calculeaza campul electric $(\overline{D}, \overline{E})$;
3. Se calculeaza energia acumulata in domeniu $W_e = \int_D \frac{\overline{D} \cdot \overline{E}}{2} dv$;
4. Se calculeaza capacitatea $\boxed{C = \frac{q^2}{2\, W_e}.}$

sau

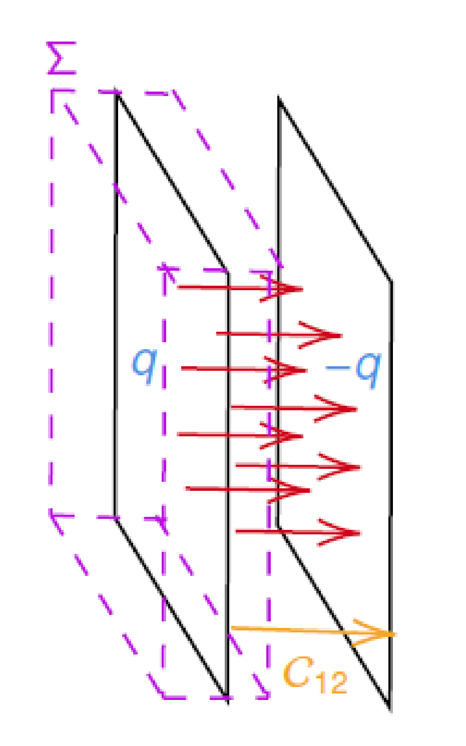
1. Se pp. o armatura de potential u si cealalta masa (ground, $V = 0$);
2. Se calculeaza campul electric $(\overline{D}, \overline{E})$;
3. Se calculeaza energia acumulata in domeniu $W_e = \int_D \frac{\overline{D} \cdot \overline{E}}{2} dv$;
4. Se calculeaza capacitatea $\boxed{C = \frac{2\, W_e}{u^2}.}$

La condensatoarele liniare, rezultatul nu depinde nici de q nici de u, ci doar de geometrie si de material.

1. Teorema condensatorului liniar
1.2. Capacitatea condensatorului plan paralel

Condensator plan paralel

Două armături conductoare, plane, paralele, de arie A, distanţa dintre ele fiind $d \ll \sqrt{A}$, sunt separate printr-un dielectric liniar de permitivitate ε.



1. Se presupune condensatorul încărcat, cu q şi $-q$ şi se determină câmpul electric.
   Vom neglija efectele de capăt şi vom presupune câmpul uniform.
2. Fie Σ ca în figură şi aplicăm LFE:

$$q = \oint_{\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{\mathrm{dA}} = \int_{S1} D \, \mathrm{dA} = DA$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{q}{A} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon A}$$

3. Se calculează tensiunea dintre armături

$$u = \int_{C_{12}} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{dl}} = \int_{C_{12}} E \mathrm{dl} = Ed = \frac{qd}{\varepsilon A}$$

4. Se calculează capacitatea $C = \frac{q}{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}}$

$$W_e = \int_{\Omega} w_e \, \mathrm{dv} = \int_{\Omega} \frac{\overline{D} \cdot \overline{E}}{2} \mathrm{dv} =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{D^2}{2\varepsilon} \mathrm{dv} = \frac{D^2}{2\varepsilon} Ad = \frac{q^2}{2\varepsilon A} d =$$

$$= \frac{q^2}{2C} = \frac{qu}{2} = \frac{Cu^2}{2}$$

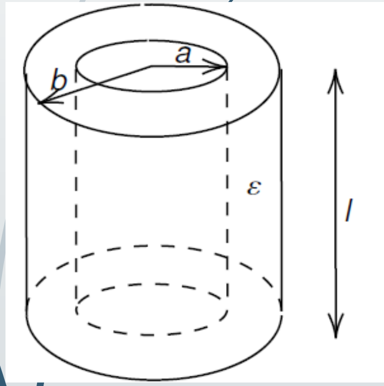
In expresia energiei, formulele cu rosu sunt generale, pentru orice fel de condensator liniar, nu numai pentru cel plan!

1. Teorema condensatorului liniar
1.3. Capacitatea condensatorului cilindric (cablul coaxial)

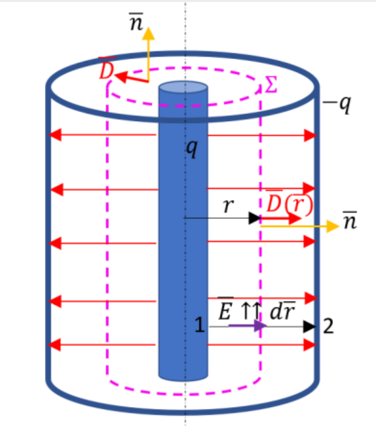
Condensator cilindric

Condensator cilindric = două armături conductoare, cilindrice, coaxiale, de lungime l şi raze a şi b, separate printr-un dielectric liniar de permitivitate ε.

$a, b \ll l$ ⇒ Campul poate fi presupus radial.



(vedeti si prezentarea P2)



1. Pp. armatura interioara incarcata cu q si cea exterioara cu $-q$.
2. Alegem suprafata Σ ca in figura (cilindru coaxial cu armaturile, de inaltime l. Aplicam LFE:

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \Rightarrow \oint_{D_\Sigma} \overline{D} \cdot \overline{dA} = q_{D_\Sigma} \Rightarrow D\, 2\,\pi r\, l = q$$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{q}{2\pi r l} \Rightarrow E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon} = \frac{q}{2\pi r l\, \varepsilon}$$

3. Se calculeaza tensiunea dintre armaturi

$$u = u_{12} = \int_1^2 \overline{E} \cdot \overline{dl} = \int_1^2 \overline{E} \cdot d\overline{r} = \int_a^b E\, dr$$

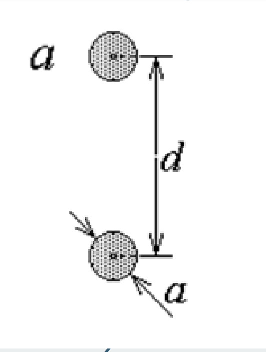
$$\Rightarrow u = \int_a^b \frac{q}{2\pi r l\, \varepsilon}\, dr = \frac{q}{2\pi l\, \varepsilon} \int_a^b \frac{1}{r}\, dr = \frac{q}{2\pi l\, \varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

4. Se calculeaza capacitatea $C = \frac{q}{u} = 2\,\pi \varepsilon l / \ln \frac{b}{a}$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} \Rightarrow \boxed{C_l = \frac{2\,\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}}$$

Capacitate lineica (pe unitatea de lungime) [F/m] a cablului coaxial

1. Teorema condensatorului liniar
1.4. Capacitatea liniei bifilare



Linia bifilară, formată din două conductoare identice de rază a, paralele la distanţa d ($d >> a$), separate printr-un dielectric de permitivitate ε.

Ideea: se pp condensatorul format incarcat cu q si $-q$, campul se determina prin superpozitia a doua campuri (fiecare calculat cu metoda Gauss), apoi se calculeaza tensiunea integrand pe un segment care uneste cele doua conductoare, aflat in planul conductoarelor, perpendicular pe ele.

$$\boxed{C_l = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{d-a}{a}} \approx \frac{\pi\varepsilon}{\ln\frac{d}{a}}}$$

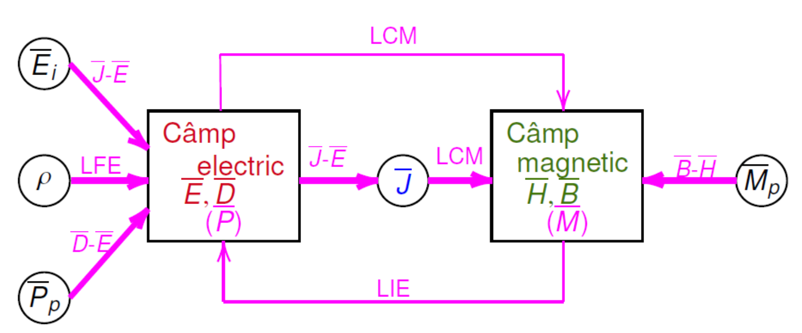
Capacitate lineica (pe unitatea de lungime) [F/m] a cablului bifilar.

Astfel de calcule analitice se pot face doar pentru configuratii simple, in care se poate spune cum este distribuita sarcina (datorita simetriilor sau particularitatilor geometriei).

1. Teorema condensatorului liniar
1.5. Metoda generala de extragere a C

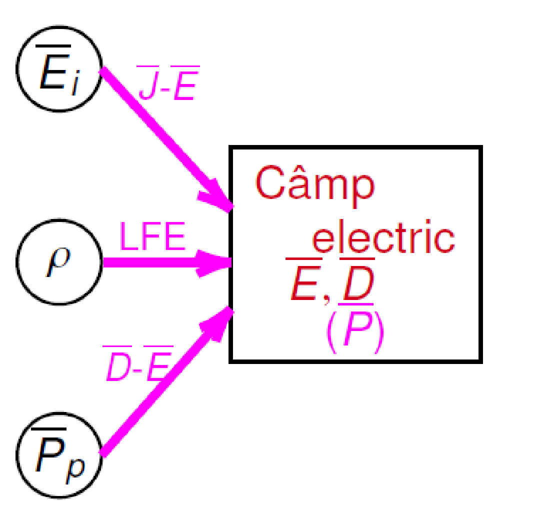
Se bazeaza pe rezolvarea ecuatiei diferentiale de ordin 2 asociata regimului electrostatic (ES).

Diagrama cauzala a EM, in regim general variabil.



Ipotezele regimului ES:
- Corpuri imobile
- Marimi invariabile in timp
- Nu exista transformari de energie
- Intereseaza campul electric

$$p = 0$$



Ec. de ord. 1

$$\operatorname{div} \overline{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$$

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} + \overline{P}_p$$

$p = \overline{J} \cdot \overline{E}$ ➡ $\overline{J} = 0$ $\quad \overline{J} = \sigma(\overline{E} + \overline{E}_i)$

➡ In izolatoare $\sigma = 0$ campul electric poate avea orice valoare.

➡ In conductoare $\sigma \neq 0$ $\quad \overline{E} + \overline{E}_i = 0$

(teorema conditiei de echilibru electrostatic in conductoare)

Daca $\overline{E}_i = 0$ atunci in conductoare campul electric este nul.

1. Teorema condensatorului liniar
1.5. Metoda generala de extragere a C

Ec. de ord. 2

V-potential electrostatic (scalar)

$\operatorname{div} \overline{D} = \rho$

$\operatorname{rot} \overline{E} = 0 \Rightarrow \exists V \quad a.i. \quad \overline{E} = -\operatorname{grad} V$

$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} + \overline{P}_p$

(dar pentru unicitate este necesara fixarea unui potential de referinta)

Conductoarele cu $\overline{E}_i = 0$ sunt echipotentiale, linile de camp sunt perpendicular pe ele.

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} V) = \operatorname{div} (\overline{P}_p) - \rho}$ (Ecuatie Poisson generalizata)

(Ecuatie Laplace) $\operatorname{div} (\operatorname{grad} V) = 0$

In dielectrici liniari, omogeni (ε nu depinde de punct) si cu surse de camp nule $\boxed{\Delta V = 0}$

Pentru buna formulare trebuie impuse conditii pe frontiera domeniului de calcul, in fiecare punct al frontierei. Acestea pot fi de tip Dirichlet (se impune valoarea potentialului) sau de tip Neumann (se impune valoarea derivatei dupa normala).

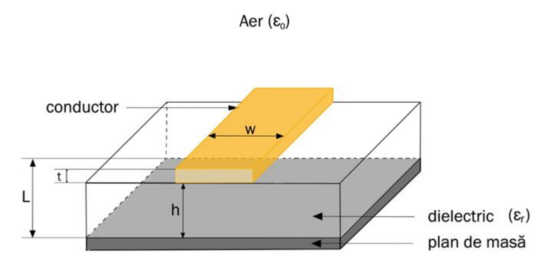
Excitatie in V aici $\overline{P}_p = 0$, $\rho = 0$ $\Rightarrow$ Rezolvarea ecuatiei Poisson generalizate cu conditii de frontiera $\Rightarrow V \Rightarrow \overline{E} = -\operatorname{grad} V \Rightarrow \overline{D} \Rightarrow C$

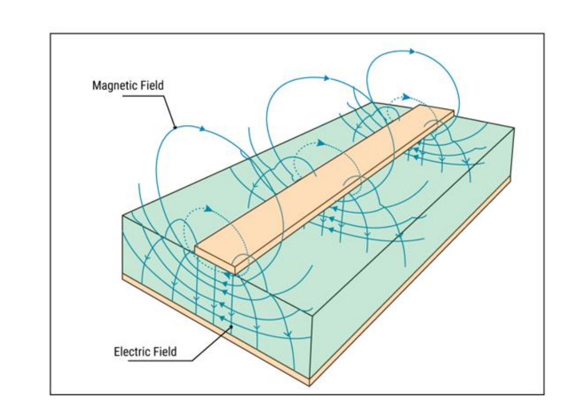
Liniar sau energetic

analitic (separarea variabilelor) sau numeric (FEM)

1. Teorema condensatorului liniar
1.5. Metoda generala de extragere a C

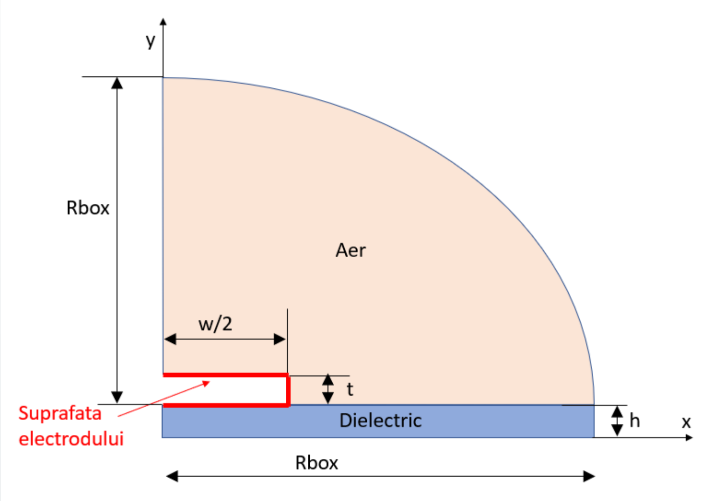
Exemplu – capacitatea lineica a unei linii microstrip

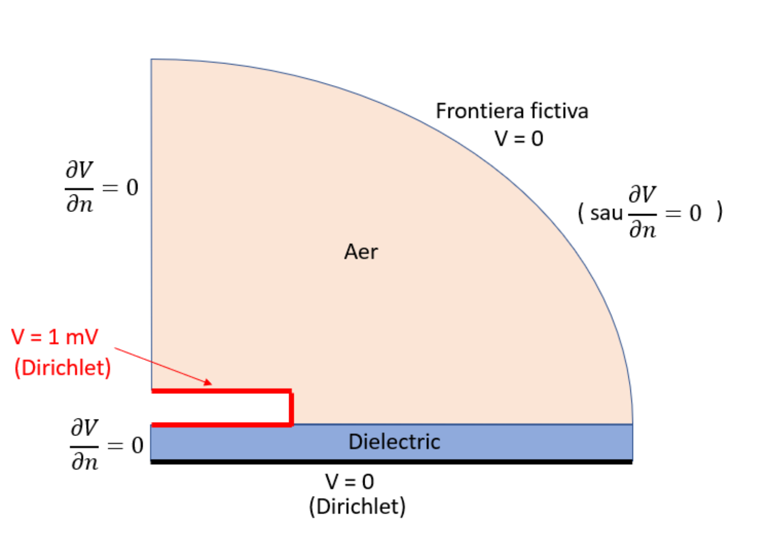




In ES – doar camp electric!

Model 2D, tine cont de simetrie.





Date:
- geometria: t, w, h
- material: ε_r

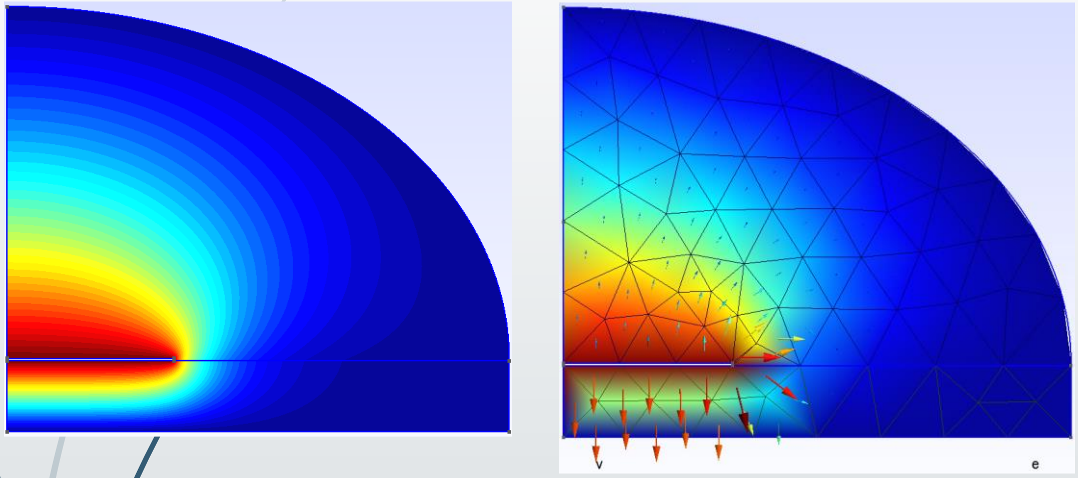
Se cere capacitatea

Nu are importanta ce valoare are potentialul electrodului.
Electrodul nu face parte din model. Suprafata lui face parte din frontiera Dirichlet.
FEM foloseste un domeniu marginit -> frontiera fictiva

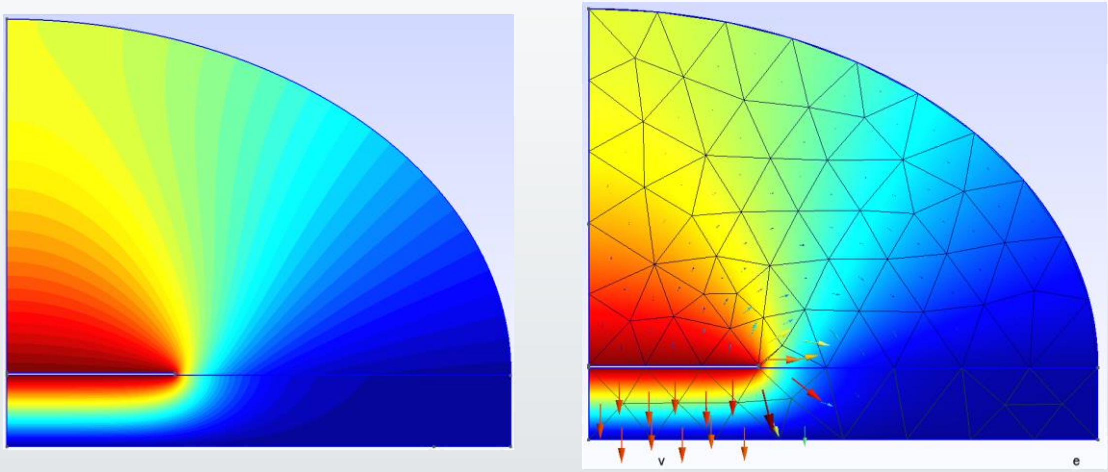
1. Teorema condensatorului liniar
1.5. Metoda generala de extragere a C

Simulari in Onelab https://onelab.info/ , cu o versiune modificata a acestui exemplu

https://gitlab.onelab.info/doc/tutorials/-/wikis/Electrostatics-with-floating-potentials



Aici frontiera fictiva are conditie Dirichlet nula.



Aici frontiera fictiva are conditie Neumann nula.

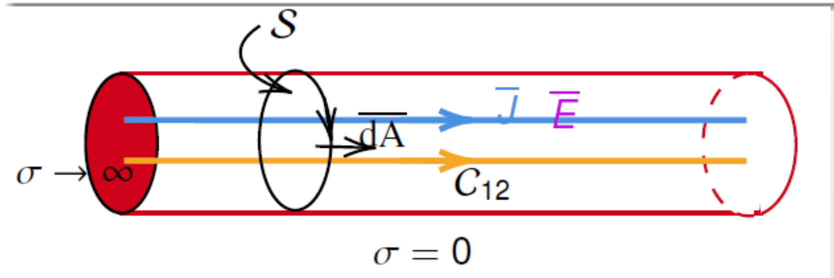
Aspecte numerice legate de FEM includ:
- Pozitia frontierei fictive
- Tipul de conditii pe aceasta frontiera
- Discretizarea domeniului geometric

Rbox	24h	12h	6h	3h	1.5h
Cl_Diriclet [F/m]	2.54326e-10	2.54396e-10	2.54297e-10	2.54388e-10	2.54579e-10
Cl_Neumann [F/m]	2.51562e-10	2.51534e-10	2.51254e-10	2.51334e-10	2.51426e-10
|Cl_D-Cl_N|/Cl_D	0.010867	0.011250	0.011966	0.012005	0.012385
|Cl_D-Cl_N|/Cl_N	0.010987	0.011378	0.012111	0.012151	0.012540

2. Teorema rezistorului liniar
2.1. Enunt. Extragerea rezistentei.

Rezistor, definiţie

Rezistor = dispozitiv alcătuit dintr-un conductor în care curentul poate intra şi din care curentul poate ieşi prin două părţi disjuncte de pe suprafaţa sa, numite *borne*. Bornele sunt considerate foarte bune conductoare (supraconductoare) astfel încât ele sunt echipotenţiale.



Supraconductor: $\sigma \to \infty \Rightarrow \overline{E} = \overline{0} \Rightarrow V = \text{constant}$
Izolant perfect: $\sigma = 0 \Rightarrow \overline{J} = \overline{0} \Rightarrow J_n = 0$

- Nu există restricţii legate de forma rezistorului sau plasarea lui în spaţiu;
- Bornele sunt separate (nu se ating);
- Suprafaţa conductorului care nu reprezintă bornele se învecinează cu un izolant perfect.

Rezistor liniar

Un rezistor este liniar dacă materialul conductorului este liniar

$$\overline{J} = \sigma \overline{E}$$

Rezistor liniar - mărimi globale

1. Intensitatea curentului ce-l străbate $i = \int_S \overline{J} \cdot \overline{dA}$
2. Tensiunea dintre borne $u = \int_{C_{12}} \overline{E} \cdot \overline{dl}$

Teorema rezistorului liniar - enunţ

Tensiunea electrică la bornele unui rezistor liniar este proporţională cu intensitatea curentului ce-l străbate.

$$u \sim i$$

$$\begin{array}{lcll} \overline{J} & \sim & \overline{E} & \text{din liniaritate} \\ i & \sim & \overline{J} & \text{din definiţia curentului} \\ u & \sim & \overline{E} & \text{din definiţia tensiunii} \end{array} \quad \Rightarrow u \sim i$$

2. Teorema rezistorului liniar
2.1. Enunt. Extragerea rezistentei.

Rezistenţa unui rezistor

$$u = Ri$$

R - rezistenţa rezistorului [Ω]

Obs:

1. R ar putea fi definită ca $R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{i}$ dar la rezistoarele liniare acest raport nu depinde nici de u, nici de i;
2. Se defineşte $G = 1/R$ - conductanţa rezistorului liniar; unitatea de măsură G [S].
3. La rezistoarele neliniare $R(i)$ sau $G(u)$;
4. La rezistoarele liniare R depinde de datele geometrice (dimensiunile şi forma conductorului, poziţia bornelor) şi de materialul conductorului;
5. $R > 0$ este un parametru al rezistorului care descrie rezistenţa întâmpinată de curent la trecerea lui prin dispozitiv.
6. Teorema rezistorului liniar poate fi privită ca o formă globală a legii de material $\bar{J} - \bar{E}$, iar conductanţa G poate fi privită ca un parametru global asociat conductivităţii σ.

Se demonstreaza ca puterea transferata unui resistor liniar este

$$P = \int_D \bar{J} \cdot \bar{E}\, dv = ui = Ri^2 = Gu^2 = \frac{i^2}{G} = \frac{u^2}{R}$$

Problema determinarii rezistentei unui rezistor liniar:

Date:
- Geometrice (forma, dimensiunile)
- De material (conductivitatea in fiecare punct din conductor)

Se cere:
- Expresia rezistentei sau conductantei.

2. Teorema rezistorului liniar
2.1. Enunt. Extragerea rezistentei.

Ideea:

Problema extragerii R se reduce la calculul campului electrocinetic.
Se presupune rezistorul in stare electrocinetica, se calculeaza campul, apoi se calculeaza rezistenta (sau conductanta).

Metoda liniara

1. Se pp. rezistorul strabatut de curentul i;
2. Se calculeaza campul electrocinetic $(\bar{J}, \bar{E})$;
3. Se calculeaza tensiunea dintre armaturi $u = \int_1^2 \bar{E} \cdot \overline{dl}$;
4. Se calculeaza conductanta $\boxed{G = \frac{i}{u}}$ sau rezistenta $R = \frac{u}{i}$.

sau

1. Se pp. o borna de potential u si cealalta masa (ground, $V = 0$);
2. Se calculeaza campul electrocinetic $(\bar{J}, \bar{E})$;
3. Se calculeaza intensitatea curentului $i = \int_S \bar{J} \cdot \overline{dA}$ printr-o sectiune transversala orientata in aceeasi directie ca tensiunea u;
4. Se calculeaza conductanta $\boxed{G = \frac{i}{u}}$ sau rezistenta $R = \frac{u}{i}$.

Metoda energetica

1. Se pp. rezistorul strabatut de curentul i;
2. Se calculeaza campul electrocinetic $(\bar{J}, \bar{E})$;
3. Se calculeaza puterea transferata domeniului $P = \int_D \bar{J} \cdot \bar{E}\, dv$;
4. Se calculeaza conductanta $\boxed{G = \frac{i^2}{P}}$.

sau

1. Se pp. o borna de potential u si cealalta masa (ground, $V = 0$);
2. Se calculeaza campul electrocinetic $(\bar{J}, \bar{E})$;
3. Se calculeaza puterea transferata domeniului $P = \int_D \bar{J} \cdot \bar{E}\, dv$;
4. Se calculeaza conductanta $\boxed{G = \frac{P}{u^2}}$.

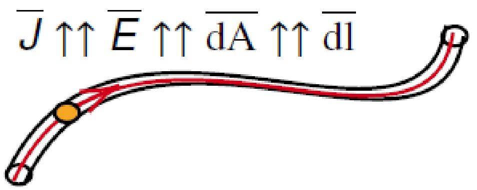
La rezistoarele liniare, rezultatul nu depinde nici de i nici de u, ci doar de geometrie si de material.

2. Teorema rezistorului liniar
2.2. Rezistenta unui conductor cu camp uniform

Rezistor filiform liniar

Rezistorul filiform liniar este un rezistor care are diametrul mult mai mic decât lungimea lui, iar materialul conductorului este liniar.

- *Geometria* este descrisă de curba sa mediană şi de felul în care variază aria secţiunii transversale $A(\overline{r})$ de-a lungul curbei mediane.
- *Materialul:* $\overline{J} = \sigma \overline{E}$



$$u = \int_{C_{12}} \overline{E} \cdot \overline{\mathrm{dl}} = \int_{C_{12}} \frac{\overline{J}}{\sigma} \cdot \overline{\mathrm{dl}} = \int_{C_{12}} \frac{J\,\mathrm{dl}}{\sigma}$$

$$i = \int_S \overline{J} \cdot \overline{\mathrm{dA}} = \int_S J\,\mathrm{dA} = J(\overline{r})\,A(\overline{r})$$

$$u = \int_{C_{12}} \frac{J\,\mathrm{dl}}{\sigma} = \int_{C_{12}} \frac{i\,\mathrm{dl}}{\sigma A} = i \int_{C_{12}} \frac{\mathrm{dl}}{\sigma A}$$

$$R = \int_{C_{12}} \frac{\mathrm{dl}}{\sigma A}$$

Daca firul este omogen (acelasi material si aceeasi sectiune de-a lungul curbei mediane):

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma A} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{\sigma A}{l}}$$

Formula este valabila si pentru conductoare liniare nefiliforme dar care au campul uniform.

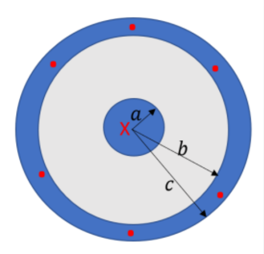
Puterea disipată de un rezistor liniar

$$P = \int_\Omega \overline{J} \cdot \overline{E}\,\mathrm{dv} = \int_{C_{12}} \overline{J} \cdot \overline{E}\,A\mathrm{dl} = i \int_{C_{12}} \overline{E}\,\mathrm{dl} = ui$$

$$P = Ri^2 \geq 0$$

2. Teorema rezistorului liniar
2.3. Rezistenta cablului coaxial

In c.c. – curentul se distribuie uniform in conductoare.

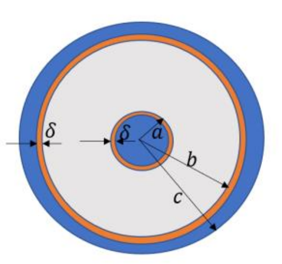


$$R = R_{\text{int}} + R_{\text{ext}} = \frac{l}{\sigma\pi a^2} + \frac{l}{\sigma(\pi c^2 - \pi b^2)} = \frac{l}{\sigma\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2}\right)$$

$$\boxed{R_{l,cc} = \frac{1}{\sigma\pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2}\right)} \quad \left[\frac{\Omega}{\text{m}}\right]$$

Rezistenta lineica, de c.c., a unui cablu coaxial.

In c.a., la frecvente mari, apare un efect pellicular pronuntat (curs C5).
Curentul se poate considera distribuit uniform dar numai la suprafata conductorului, acolo unde patrunde campul, pe distanta $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ numita adancime de patrundere.

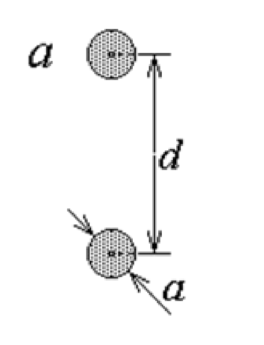


$$R = R_{\text{int}} + R_{\text{ext}} = \frac{l}{\sigma 2\pi a\,\delta} + \frac{l}{\sigma 2\pi b\,\delta} = \frac{l}{\sigma 2\pi\delta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\boxed{R_{l,ca-pp} = \frac{1}{\sigma 2\pi\delta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \quad \left[\frac{\Omega}{\text{m}}\right]$$

Rezistenta lineica, de c.a., a unui cablu coaxial, in cazul unui effect pellicular pronuntat.

2. Teorema rezistorului liniar
2.4. Rezistenta liniei bifilare



Linia bifilară, formată din două conductoare identice de rază a, paralele la distanţa d ($d >> a$), separate printr-un dielectric de permitivitate ε.

$$\boxed{R_{l,cc} = \frac{2}{\sigma \pi a^2}}$$

Rezistenta lineica, de c.c., a cablului bifilar.

$$\boxed{R_{l,ca-pp} = \frac{1}{\sigma \pi a\ \delta}}$$

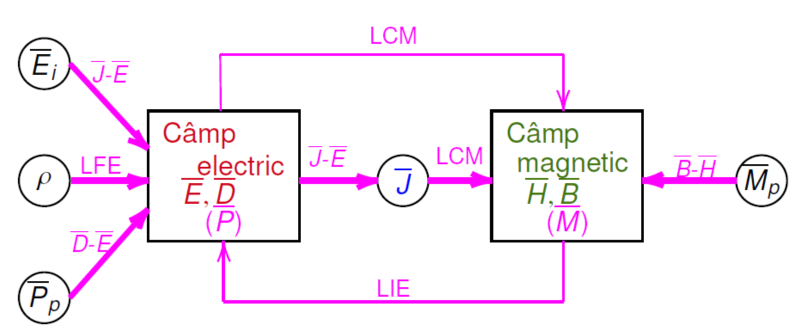
Rezistenta lineica, de c.a., a unui cablu bifilar, in cazul unui efect pelicular pronuntat.

Astfel de calcule analitice se pot face doar pentru configuratii simple, in care se poate spune cum este distribuit curentul (datorita simetriilor sau particularitatilor geometriei).

2. Teorema rezistorului liniar
2.5. Metoda generala de extragere a G (R)

Se bazeaza pe rezolvarea ecuatiei diferentiale de ordin 2 asociata regimului electrocinetic (EC).

Diagrama cauzala a EM, in regim general variabil.



Ec. de ord. 1

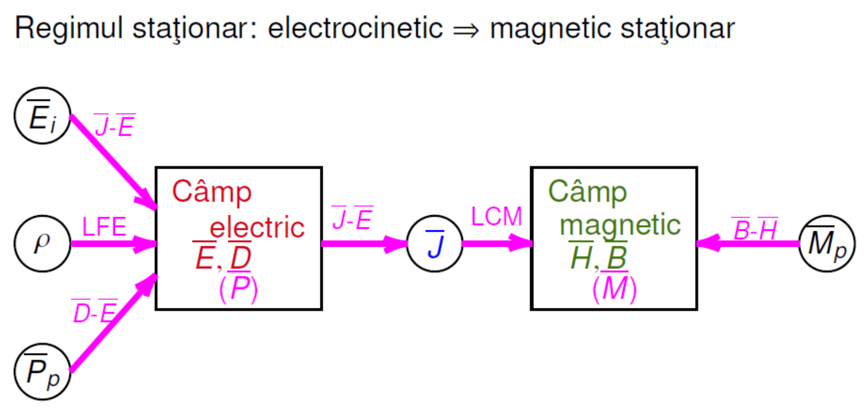
$$\operatorname{div} \bar{J} = 0$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0$$

$$\bar{J} = \sigma\left(\bar{E} + \bar{E}_i\right)$$

Ipotezele regimului EC:

- Corpuri imobile
- Marimi invariabile in timp
- Pot exista transformari de energie
- Intereseaza distributia curentului electric in conductoare masive.



2. Teorema rezistorului liniar
2.5. Metoda generala de extragere a G (R)

Ec. de ord. 2

V-potential electrocinetic (scalar)

$\operatorname{div} \bar{J} = 0$

$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \Rightarrow \exists V \quad a.i. \quad \bar{E} = -\operatorname{grad} V$

(dar pentru unicitate este necesara fixarea unui potential de referinta)

$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_i)$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = \operatorname{div}(\sigma \bar{E}_i)}$ (Ecuatie Poisson generalizata)

Pentru buna formulare trebuie impuse conditii pe frontiera domeniului de calcul, in fiecare punct al frontierei. Acestea pot fi de tip Dirichlet (se impune valoarea potentialului) sau de tip Neumann (se impune valoarea derivatei dupa normala).

Excitatie in V $\Rightarrow$ Rezolvarea ecuatiei Poisson generalizate cu conditii de frontiera $\Rightarrow$ V $\Rightarrow$ $\bar{E} = -\operatorname{grad} V$ $\Rightarrow$ $\bar{J}$ $\Rightarrow$ G

aici $\bar{E}_i = 0$

Liniar sau energetic

analitic (separarea variabilelor) sau numeric (FEM)

2. Teorema rezistorului liniar
2.6. Similitudinea ES-EC

EC seamana cu ES daca nu exista densitate de sarcina.

ES $(\rho = 0)$	EC
$\operatorname{div} \overline{D} = \rho$	$\operatorname{div} \overline{J} = 0$
$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$	$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$
$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} + \overline{P}_p$	$\overline{J} = \sigma\left(\overline{E} + \overline{E}_i\right)$
$\overline{E} = -\operatorname{grad} V$	$\overline{E} = -\operatorname{grad} V$
$\operatorname{div}\,(\varepsilon \operatorname{grad} V) = \operatorname{div}\left(\overline{P}_p\right)$	$\operatorname{div}\,(\sigma \operatorname{grad} V) = \operatorname{div}\left(\sigma\, \overline{E}_i\right)$

ES $(\rho = 0)$	EC
$\overline{D}$	$\overline{J}$
$\overline{E}$	$\overline{E}$
ε	σ
$\overline{P}_p$	$\sigma \overline{E}_i = \overline{J}_i$
V	V
u	u
ψ, q	i
C	$G = \dfrac{1}{R}$

2. Teorema rezistorului liniar
2.6. Conductanta de pierderi a unui cablu coaxial.

Similitudinea C-G permite calculul rezistentei intampinate de trecerea curentului electric printr-un conductor masiv.

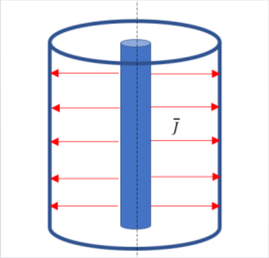
1. Se considera configuratia electrostatica similara;
2. Se calculeaza capacitatea C a acestei configuratii;
3. Se calculeaza R (inlocuind ε cu σ si inversand C).

$$\boxed{R = \left.\frac{1}{C}\right|_{\varepsilon\to\sigma}}$$

Exemple:

1) Condensatorul plan paralel: $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ ➡ Rezistenta unui fir: $R = \left.\frac{1}{C}\right|_{\varepsilon\to\sigma} = \frac{d}{\sigma A}$

2) Capacitatea lineica cablului coaxial ➡ Conductanta lineica de pierderi



$$C_l = \frac{2\,\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$G_l = \left.C_l\right|_{\varepsilon\to\sigma} = \frac{2\,\pi\sigma_d}{\ln\frac{b}{a}}$$

σ_d- conductivitatea dielectricului (pierderi)

Atentie!

La linii G descrie conductanta transverala de pierderi si este diferita de 1/R, R descriind rezistenta longitudinala a conductorului!

3. Teorema bobinei liniare
3.1. Enunt. Extragerea inductivitatii.

Bobina, definiţie

Bobina = dispozitiv alcătuit dintr-un conductor înfăşurat în aer sau în jurul unui material magnetic.

- Nu există restricţii legate de formă şi plasare în spaţiu.

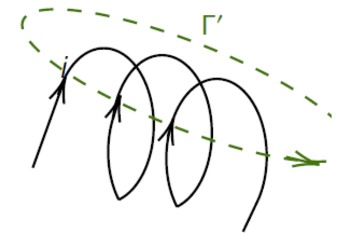
Bobina liniară

O bobină este liniară dacă miezul pe care este înfăsurată este liniar $\overline{B} = \mu \overline{H}$

Bobina liniară - mărimi globale

- 1) Fluxul total al bobinei $\varphi = \int_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A}$
  Γ este o curbă închisă care urmăreşte firul bobinei şi se închide pe la borne. Dacă această suprafaţă deschisă se descompune în suprafeţe deschise elementare, fiecare fiind mărginită de câte o spiră, atunci
  $$\varphi = \sum_{k=1}^{nr.sp.} \int_{S_k} \overline{B} \cdot \overline{\mathrm{d}A} = \sum_{k=1}^{nr.sp.} \varphi_k$$
  φ_k se numeşte flux fascicular. Dacă spirele sunt identice şi sunt plasate la fel în câmp atunci $\varphi = N\varphi_k$.

- 2) Curentul prin bobină i.
  Conform T. Ampere pe curba Γ′
  $$Ni = \int_{\Gamma'} \overline{H} \cdot \overline{\mathrm{d}l}$$



Teorema bobinei liniare - enunţ

Fluxul magnetic total al unei bobine liniare este proporţional cu intensitatea curentului ce o străbate. $\varphi \sim i$

$\overline{B}$	$\sim$	$\overline{H}$	din liniaritate
φ	$\sim$	$\overline{B}$	din definiţia fluxului
i	$\sim$	$\overline{H}$	din teorema lui Ampére

$\Rightarrow \varphi \sim i$

3. Teorema bobinei liniare
3.1. Enunt. Extragerea inductivitatii.

Inductivitatea unei bobine

$$\varphi = Li$$

L - inductivitatea bobinei [H]

Se demonstreaza ca energia magnetica acumulata intr-o bobina liniara este

$$W_m = \int_D \frac{\overline{B} \cdot \overline{H}}{2} dv = \frac{\varphi i}{2} = \frac{Li^2}{2} = \frac{\varphi^2}{2L}$$

Obs:

1. L ar putea fi definită ca $L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi}{i}$ dar la bobinele liniare acest raport nu depinde nici de φ nici de i;
2. La bobinele neliniare $L(i)$;
3. La bobinele liniare L depinde de datele geometrice (dimensiunile şi forma conductorului) şi de materialul miezului magnetic;
4. $L > 0$ este un parametru al bobinei care descrie capacitatea sa de a produce flux (câmp) magnetic.
5. Teorema bobinei liniare poate fi privită ca o formă globală a legii de material $\overline{B} - \overline{H}$, iar inductivitatea L poate fi privită ca un parametru global asociat permeabilităţii μ.

Problema determinarii inductivitatii unei bobine liniare:

Date:
- Geometrice (forma, dimensiunile)
- De material (permeabilitatea in fiecare punct din materialul magnetic)

Se cere:
- Expresia inductivitatii.

3. Teorema bobinei liniare
3.1. Enunt. Extragerea inductivitatii.

Ideea:
Problema extragerii L se reduce la calculul campului magnetic.
Se presupune bobina strabatuta de curent, se calculeaza campul magnetic, apoi se calculeaza inductivitatea.

Metoda liniara

1. Se pp. bobina strabatuta de curentul i;
2. Se calculeaza campul magneteic $(\overline{B}, \overline{H})$;
3. Se calculeaza fluxul magnetic $\varphi = \int_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{dA}$
4. Se calculeaza inductivitatea $\boxed{L = \frac{\varphi}{i}.}$

Se poate aplica pentru bobinele filiforme.
Curba Γ urmareste curba mediana a firului si se inchide pe la borne. Metoda liniara nu se poate aplica pentru bobinele care au conductoare masive (de exemplu cablul coaxial).

Metoda energetica

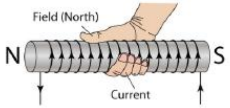
1. Se pp. bobina strabatuta de curentul i;
2. Se calculeaza campul magneteic $(\overline{B}, \overline{H})$;
3. Se calculeaza energia acumulata in domeniu $W_m = \int_D \frac{\overline{B} \cdot \overline{H}}{2} dv$;
4. Se calculeaza capacitatea $\boxed{\mathrm{L} = \frac{2\, W_m}{i^2}.}$

Metoda energetica este foarte importanta.

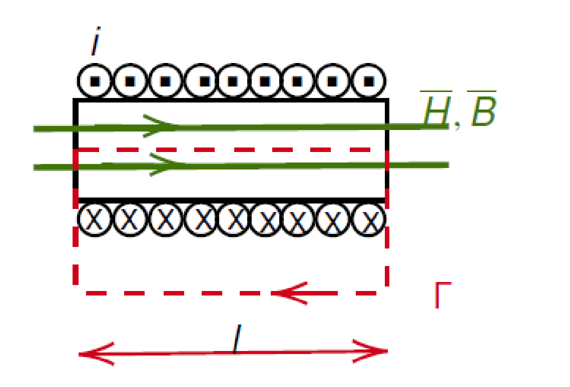
La bobinele liniare, rezultatul nu depinde nici de φ nici de i, ci doar de geometrie si de material.

3. Teorema bobinei liniare
3.2. Inductivitatea unui solenoid

Sa consideram solenoid infinit extins, bobinat strâns, într-un singur strat, cu n spire pe unitatea de lungime.



https://www.miniphysics.com/ss-magnetic-field-due-to-current-in-a-solenoid.html



$$W_m = \int_\Omega \frac{\overline{B}\cdot\overline{H}}{2} = \frac{\mu H^2}{2}Al = \frac{\mu}{2}\frac{N^2 i^2}{l^2}Al = \frac{Li^2}{2}$$

$$\boxed{W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{\varphi i}{2} = \frac{\varphi^2}{2L}}$$ (Relatii generale)

T. Ampere:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \oint_\Gamma \overline{H}\cdot\overline{\mathrm{dl}} = i_{S_\Gamma} \quad \Rightarrow \quad Hl = Ni \quad \Rightarrow \quad H = ni$$

$$\varphi = N\varphi_k = NBA = N\mu HA = N\mu A\frac{Ni}{l} = \frac{\mu N^2 Ai}{l} = \mu n^2 Ali$$

$$\boxed{L = \frac{\mu N^2 A}{l}} = \mu n^2 Al$$

Inductivitatea este proportionala cu patratul numarului de spire (rezultat general).

$$\boxed{L = \frac{N^2}{R_m}}$$

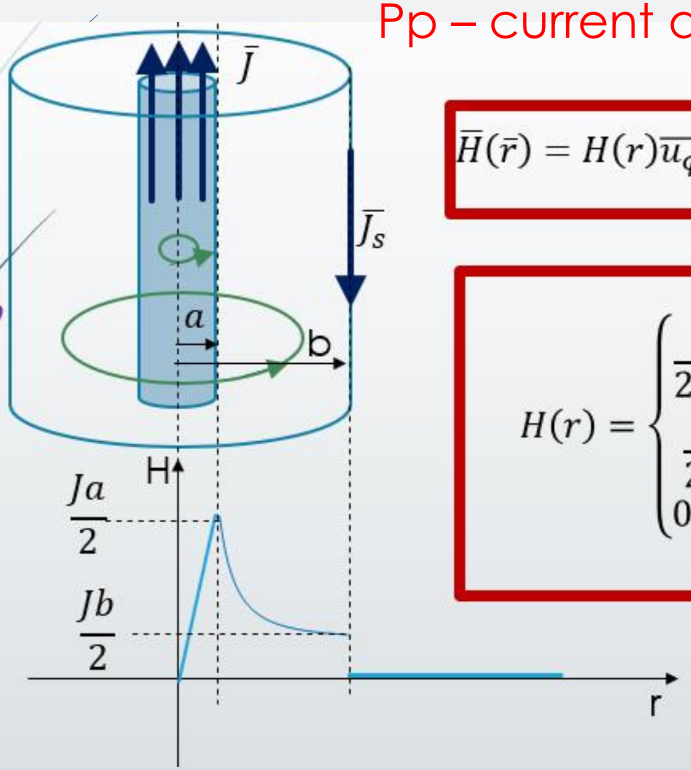
R_m Reluctanta magnetica $\left[\frac{1}{\mathrm{H}}\right]$

3. Teorema bobinei liniare
3.3. Inductivitatea unui cablu coaxial

Nu se poate calcula cu metoda liniara. Este obligatorie folosirea metodei energetice. Mai intai vom calcula campul magnetic produs de un curent I care trece prin cablu (se “duce” prin conductorul central si se “intoarce” prin manta). Vedeti prezentarea P2 pentru detalii.

Pp – current distribuit uniform!

Se da: J, Js
Raza a,b
unde
$J\,\pi\, a^2 = J_s\, 2\pi b$
Se cere: vectorul intesitatii campului magnetic



$$\boxed{\bar{H}(\bar{r}) = H(r)\overline{u_\phi}}$$

$$\boxed{H(r) = \begin{cases} \dfrac{i\, r}{2\,\pi\, a^2}, & r \in [0, a) \\ \dfrac{i}{2\,\pi\, r}, & r \in [a, b) \\ 0, & r \in (b, \infty) \end{cases}}$$

Notam l – lungimea cablului

$$W_m = \int_D \frac{\overline{B} \cdot \overline{H}}{2}\, dv = \frac{\mu_0}{2} \int_D H^2\, dv =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \int_0^a H^2\, 2\pi r l\, dr}_{W_{m,int}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \int_a^b H^2 2\,\pi r l\, dr}_{W_{m,ext}}$$

$$L = \frac{2\, W_m}{i^2} = \frac{2\left(W_{m,int} + W_{m,ext}\right)}{i^2} = L_{int} + L_{ext}$$

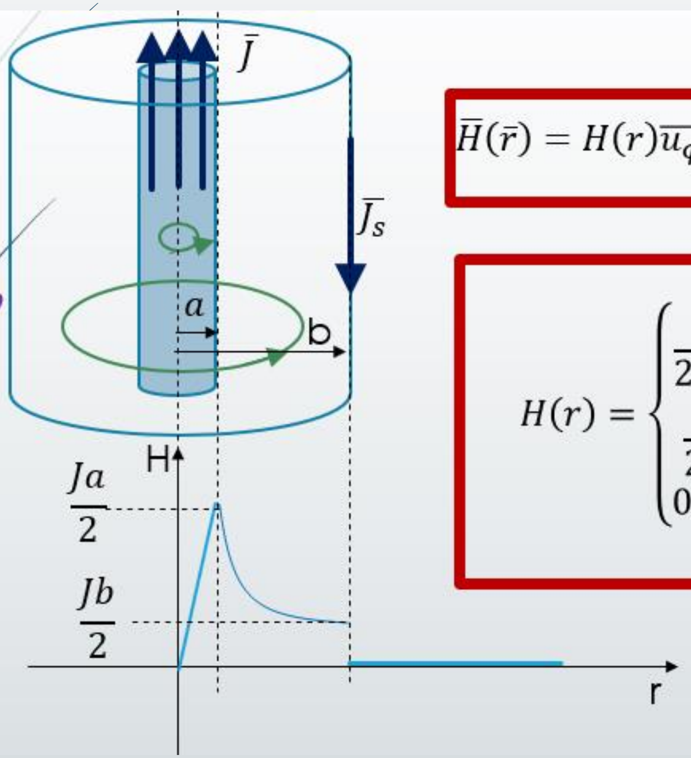
3. Teorema bobinei liniare
3.3. Inductivitatea unui cablu coaxial

$$W_{m,ext} = \frac{\mu_0}{2}\int_a^b H^2 2\,\pi r l\,dr = \frac{\mu_0}{2}\int_a^b \frac{i^2}{4\,\pi^2 r^2} 2\,\pi r l\,dr = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\,\pi}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow L_{ext} = \frac{2\,W_{m,ext}}{i^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L_{l,ext} = \frac{L_{ext}}{l} \qquad \boxed{L_{l,ext} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}$$

Se da: J, Js
Raza a,b
unde
$J\,\pi\,a^2 = J_s\,2\,\pi b$

Se cere:
vectorul
intesitatii
campului
magnetic



$$\boxed{\bar{H}(\bar{r}) = H(r)\overline{u_\phi}}$$

$$\boxed{H(r) = \begin{cases} \frac{i\,r}{2\,\pi\,a^2}, & r \in [0,a) \\ \frac{i}{2\,\pi\,r}, & r \in [a,b) \\ 0, & r \in (b,\infty) \end{cases}}$$

Pp – current distribuit uniform!

$$W_{m,int} = \frac{\mu_0}{2}\int_0^a H^2 2\,\pi r l\,dr$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\int_0^a \frac{i^2 r^2}{4\,\pi^2 a^4} 2\,\pi r l\,dr = \frac{\mu_0 i^2 l}{16\,\pi}$$

$$\boxed{L_{l,int} = \frac{\mu_0}{8\pi}}$$

3. Teorema bobinei liniare
3.3. Inductivitatea unui cablu coaxial

La frecvente inalte, cand apare efect pelicular pronuntat

$$L_l = L_{l,int} + L_{l,ext} \approx L_{l,ext} = \frac{\mu_d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Unde μ_d este permeabilitatea dielectricului

Reamintim

$$C_l = \frac{2\,\pi \varepsilon_d}{\ln \frac{b}{a}}$$

Unde ε_d este permitivitatea dielectricului

$$G_l = \frac{2\,\pi \sigma_d}{\ln \frac{b}{a}}$$

Unde σ_d este conductivitatea dielectricului

Permeanta geometrica a cablului coaxial.

$$\boxed{P = \frac{2\,\pi}{\ln \frac{b}{a}}}$$

La frecvente inalte, cu dielectric omogen

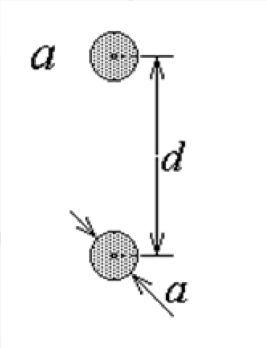
$$\boxed{\frac{C_l}{\varepsilon_d} = \frac{G_l}{\sigma_d} = \frac{\mu_d}{L_l} \triangleq P}$$

P- permeanta geometrica = marime adimensionala care depinde de forma dimensiunii transverale.

Pentru determinarea permeantei geometrice este suficienta rezolvarea analitica sau numerica a unei singure probleme de camp (ecuatia Laplace 2D satisfacuta de V in regim ES, pentru extragerea celor trei parametri lineici.

3. Teorema bobinei liniare
3.4. Inductivitatea liniei bifilare

Inductivitatea exterioara se poate calcula cu formula liniara.
Inductivitatea interioara nu se poate calcula decat cu metoda energetica.



Linia bifilară, formată din două conductoare identice de rază *a*, paralele la distanţa *d* (*d* >> *a*), plasate intr-un mediu cu permeabilitatea μ_d. Conductoarele au permeabilitatea μ_c.

$$\boxed{L_l = L_{l,ext} + L_{l,int}}$$

Inductivitatea lineica exterioara. $$\boxed{L_{l,ext} = \frac{\mu_d}{\pi}\ln\frac{d}{a}}$$

Inductivitatea lineica interioara, in cazul unei distributii uniforme de curent.

$$\boxed{L_{l,int-cc} = \frac{\mu_c}{4\pi}}$$

Inductivitatea lineica interioara, in cazul unui efect pelicular pronuntat ($\delta \ll a$).

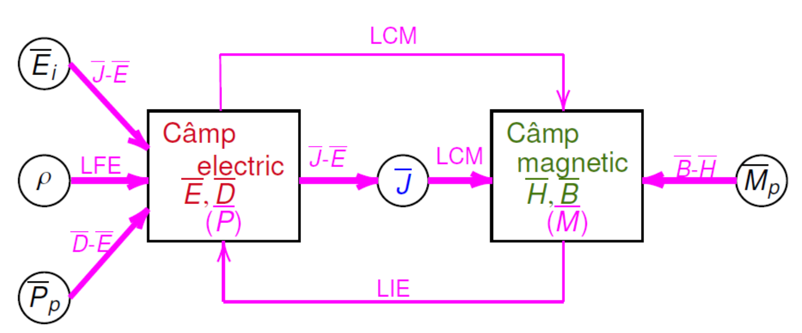
$$\boxed{L_{l,int-ca,pp} = \frac{\mu_c\delta}{\pi a}} \qquad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}$$

Adancimea de patrundere.

3. Teorema bobinei liniare
3.5. Metoda generala de extragere a L

Se bazeaza pe rezolvarea ecuatiei diferentiale de ordin 2 asociata regimului magnetic stationar (MG).

Diagrama cauzala a EM, in regim general variabil.



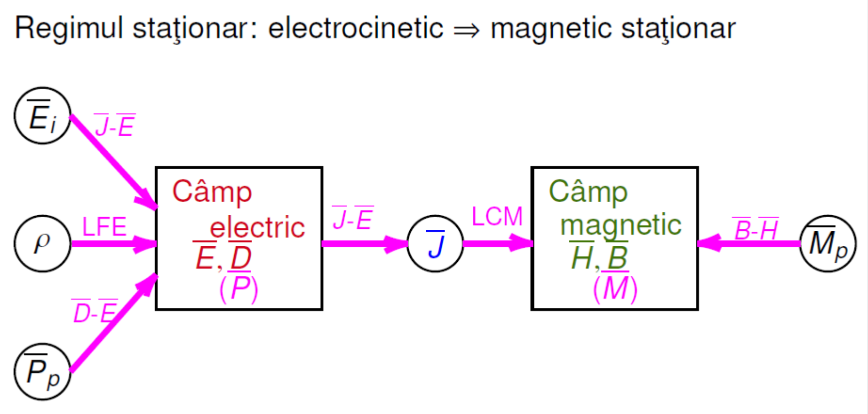
Ec. de ord. 1

$$\operatorname{div} \overline{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{J}$$

$$\overline{B} = \mu \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p$$

Ipotezele regimului MG:
- Corpuri imobile
- Marimi invariabile in timp
- Pot exista transformari de energie
- Intereseaza campul magnetic produs de distributii de current cunoscute



3. Teorema bobinei liniare
3.5. Metoda generala de extragere a L

Ec. de ord. 2

$\operatorname{div} \overline{B} = 0 \Rightarrow \exists \overline{A} \;\; a.i. \;\; \overline{B} = -\operatorname{rot} \overline{A}$

$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{J}$

$\overline{B} = \mu \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p$

$\overline{A}$ -potential magnetic vector

(Pentru unicitate este necesara impunerea unei conditii suplimentare pentru $\operatorname{div} \overline{A}$ numita "conditie de etalonare". De cele mai multe ori

$\operatorname{div} \overline{A} = 0$ - Conditie de etalonare Coulomb)

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}\left(\mu^{-1} \operatorname{rot} \overline{A}\right) = \overline{J} + \operatorname{rot}\left(\mu^{-1} \mu_0 \overline{M}_p\right)}$$

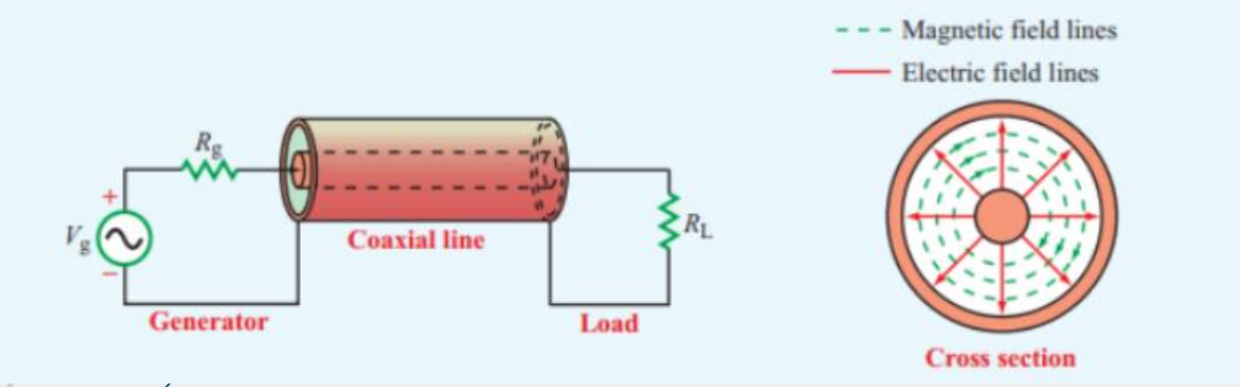
Pentru buna formulare trebuie impuse conditii pe frontiera domeniului de calcul, in fiecare punct al frontierei. Acestea pot fi de tip Dirichlet (se impune valoarea componentei tangentiale a potentialului, corespunde unui B_n) sau de tip Neumann (componenta tantentiala a rotorului potentialului magnetic vector, corepunde lui $\overline{H}_t$)

Excitatie in curent aici $\overline{M}_p = 0$ $\Rightarrow$ Rezolvarea ecuatiei diferentiale $\Rightarrow$ $\overline{A}$ $\Rightarrow$ $\overline{B} = -\operatorname{rot} \overline{A}$ $\Rightarrow$ $\overline{H}$ $\Rightarrow$ L

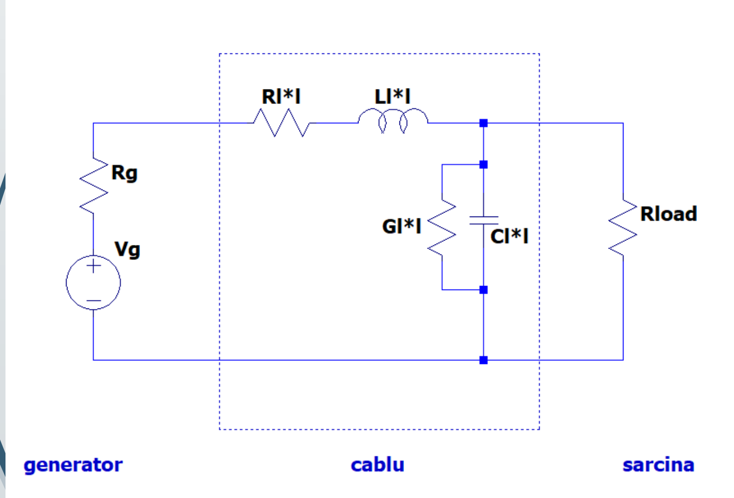
Liniar sau energetic

analitic (separarea variabilelor) sau numeric (FEM)

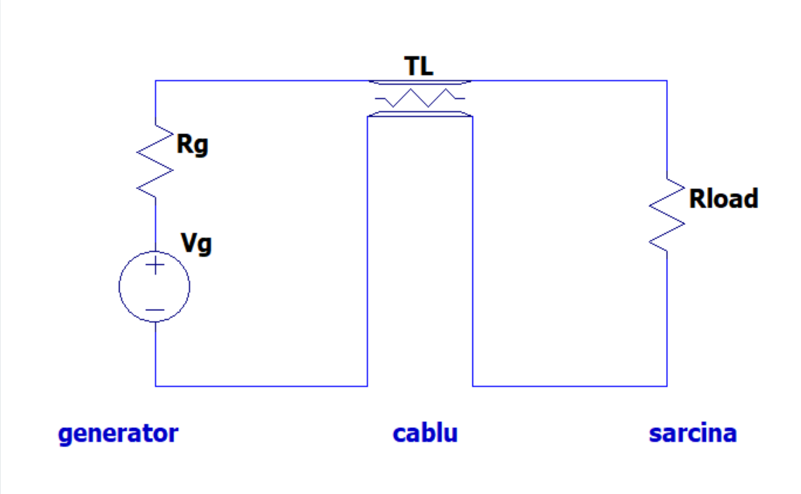
4. Modelarea unui cablu coaxial
4.1. Modele de circuit cu parametri concentrati



PP – generatorul are un semnal de frecventa mica/



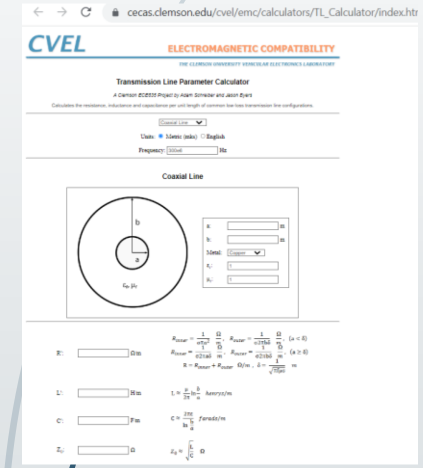
Vom simula acest circuit in LTSpice.
Pentru referinta vom folosi o linie de transmisie.



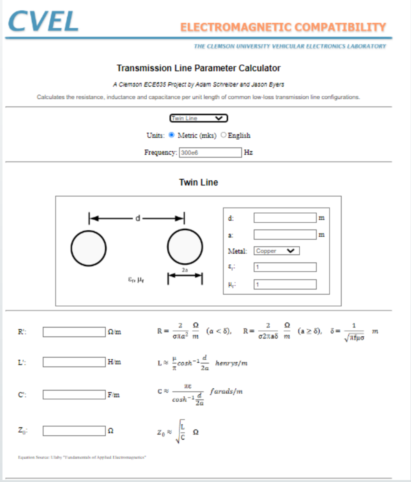
(detalii in C4, aici doar referinta)

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.1. Modele de circuit cu parametri concentrati

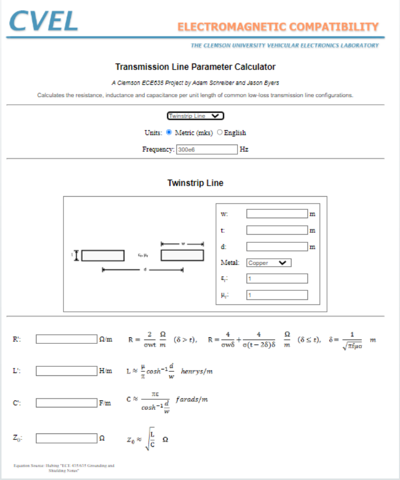
Modelarea inseamna mai intai extragerea parametrilor concentrati. Formule analitice ca cele prezentate in sectiunile 1,2,3 sunt disponibile si in calculatoare online, de exemplu la https://cecas.clemson.edu/cvel/emc/calculators/TL_Calculator/index.html



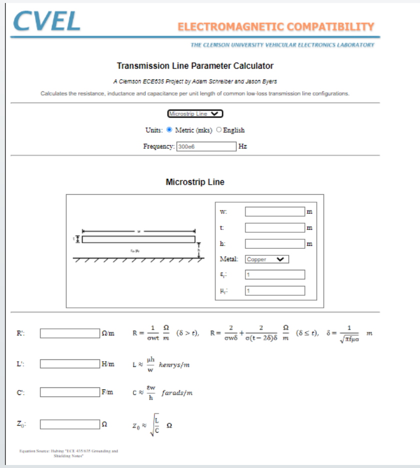
Coaxial line



Twin line



Twin strip line



Microstrip line

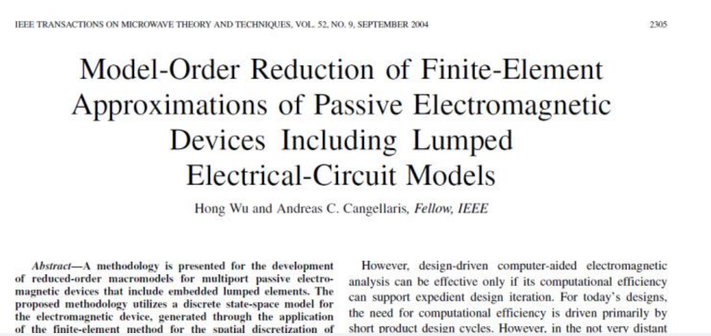
Vom vedea la curs ca se defineste impedanta cablului (in anumite conditii)

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \quad [\Omega]}$$

La un cablu coaxial (vedeti slide 29) $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_d}{\varepsilon_d}} \ln\frac{b}{a}$ - valori tipice intre 50 Ω si 100 Ω.

La aceleasi dimensiuni geometrice (l,a,d=b) o linie bifilara are impedanta dubla fata de cablul coaxial.

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.1. Modele de circuit cu parametri concentrati


IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 52, NO. 9, SEPTEMBER 2004 2305

Model-Order Reduction of Finite-Element Approximations of Passive Electromagnetic Devices Including Lumped Electrical-Circuit Models

Hong Wu and Andreas C. Cangellaris, *Fellow, IEEE*

Abstract—A methodology is presented for the development of reduced-order macromodels for multiport passive electromagnetic devices that include embedded lumped elements. The proposed methodology utilizes a discrete state-space model for the electromagnetic device, generated through the application of the finite-element method for the spatial discretization of

However, design-driven computer-aided electromagnetic analysis can be effective only if its computational efficiency can support expedient design iteration. For today's designs, the need for computational efficiency is driven primarily by short product design cycles. However, in the not very distant

Inspirat din articolul:

Hong Wu and A. C. Cangellaris, "Model-order reduction of finite-element approximations of passive electromagnetic devices including lumped electrical-circuit models," in *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 52, no. 9, pp. 2305-2313, Sept. 2004, doi: 10.1109/TMTT.2004.834582.

The first example considered is a **terminated air-filled coaxial cable**. The **length of the coaxial cable is 1 m** and its two electrodes are assumed to be perfectly conducting. **The radius of the inner circular cylindrical electrode is 4 mm. The inner radius of the outer circular cylindrical electrode is 8 mm**. The cable is terminated at its **far end by a lumped circuit that includes a 100-pF capacitor in series with the parallel combination of a 5- resistor with a 10-nH inductor**. In addition, on the **driving end of the cable, a 5- shunt resistor is present connecting the two electrodes.** A TL model for this system is straightforward to set up and analyze. For the purposes of macromodeling, what is of interest **is the frequency-dependent input impedance of the resulting circuit.**

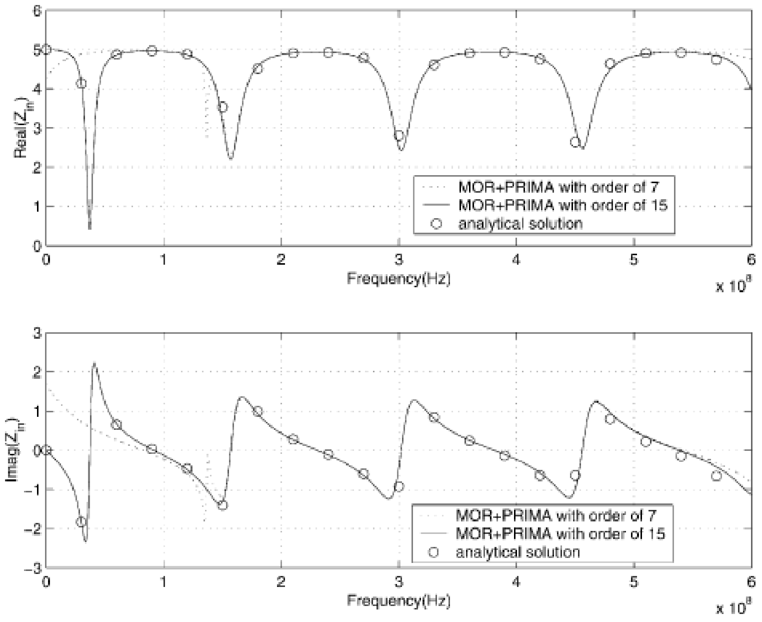
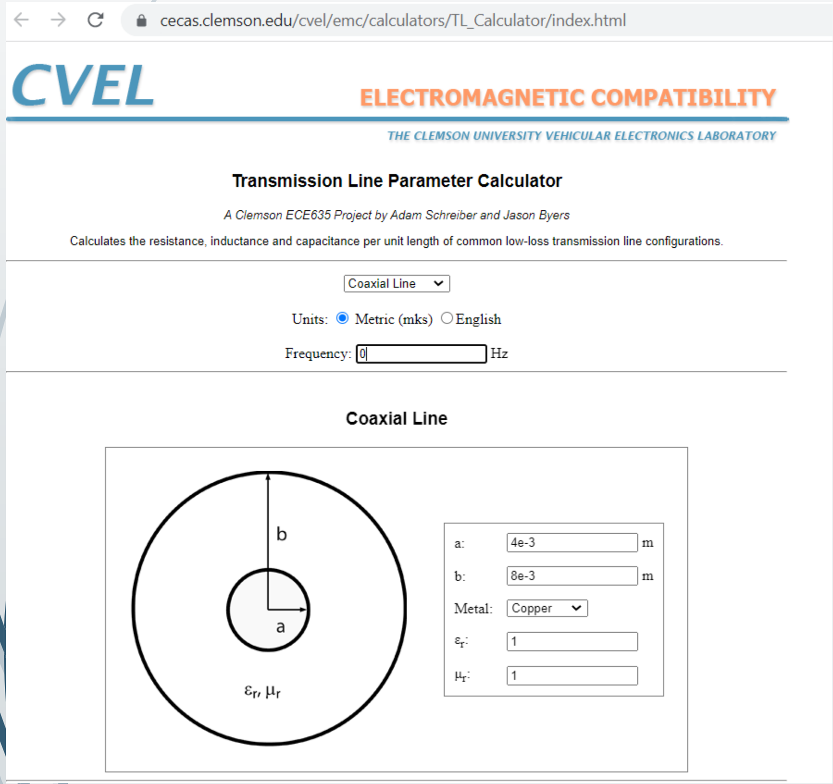
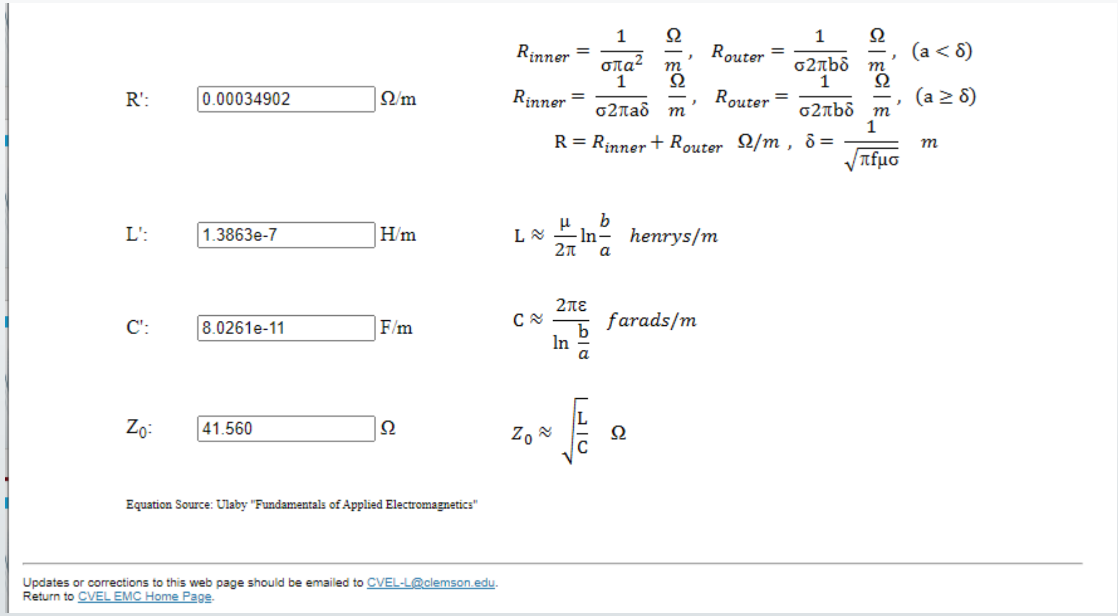


Fig. 1. Input impedance of a terminated coaxial cable.

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.1. Modele de circuit cu parametri concentrati

https://cecas.clemson.edu/cvel/emc/calculators/TL_Calculator/index.html





Vom considera un model fara pierderi cu

$$L_l = 1.3863 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

$$C_l = 8.0261 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F/m}$$

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.1. Modele de circuit cu parametri concentrati

Alternativ

Editor - D:\Gabriela\cursuri\Fizica3Electromagnetism_2022_2023\P4_teoreme_extragereRLC\matlab\parametri_coax.m

parametri_coax.m

```
% Calculeaza parametrii lineici, impedanta, viteza de propagare
% si timpul de intarziere pentru un cablu coaxial fara pierderi
% Date: geometria a,b,len
%       proprietatile de material: epsilon, mu
% Se calculeaza:
%       parametrii lineici Ll, Cl
%       impedanta Z0
%       viteza de propagare v
%       timpul de intarziere Td
% geometrie
mm = 1e-3;
m = 1;
a = 4*mm;  % raza conductorului interior
b = 8*mm;  % raza mantalei
len = 1*m; % lungimea cablului
P = 2*pi/log(b/a); % permeanta geometrica
% material
eps0 =  8.854187812813e-12; % F/m - permitivitatea vidului
mu0 = 4*pi*1e-7;            % H/m - permeabilitatea vidului
epsr = 1;
mur = 1;
eps_d = eps0*epsr; % F/m permitivitatea dielectricului
mu_d = mu0*mur;    % H/m permeabilitatea dielectricului
% parametrii lineici
Cl = eps_d*P; % F/m - capacitatea lineica
Ll = mu_d/P;  % H/m - inductivitatea lineica
% impedanta
Z0 = sqrt(Ll/Cl);  % Ohm - impedanta cablului
v = 1/sqrt(Ll*Cl); % m/s - viteza de propagare a semnalului
Td = len/v; % s - intarzierea semnalului
```

```
clc
fprintf("Ll = %g H/m \n",Ll);
fprintf("Cl = %g F/m \n",Cl);
fprintf("Z0 = %g Ohm \n",Z0);
fprintf("v = %g m/s \n",v);
```

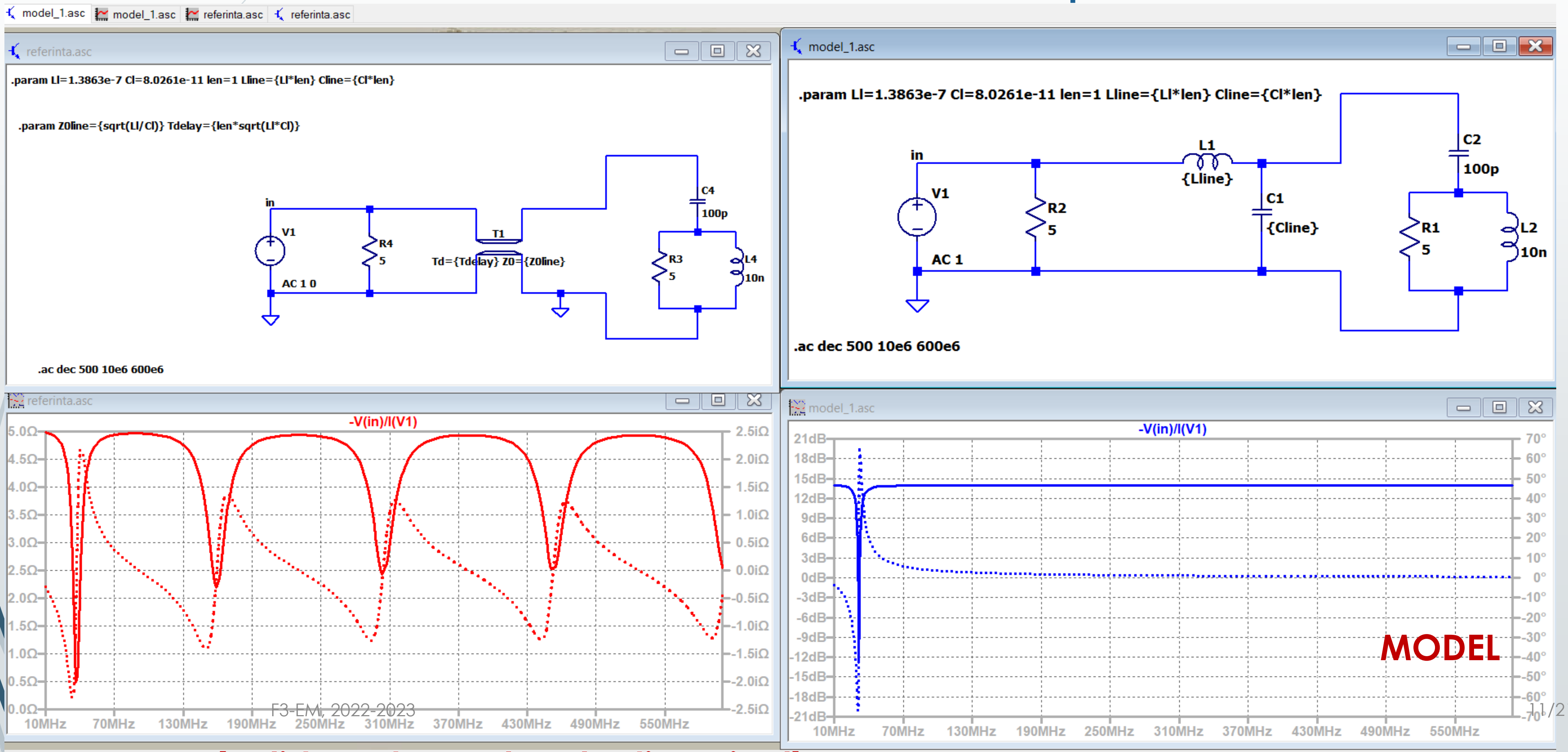
Command Window

```
Ll = 1.38629e-07 H/m
Cl = 8.02607e-11 F/m
Z0 = 41.5601 Ohm
v = 2.99792e+08 m/s
Td = 3.33564e-09 s
>>
```

(cod disponibil pe moodle)

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in frecventa [10MHz,600MHz]



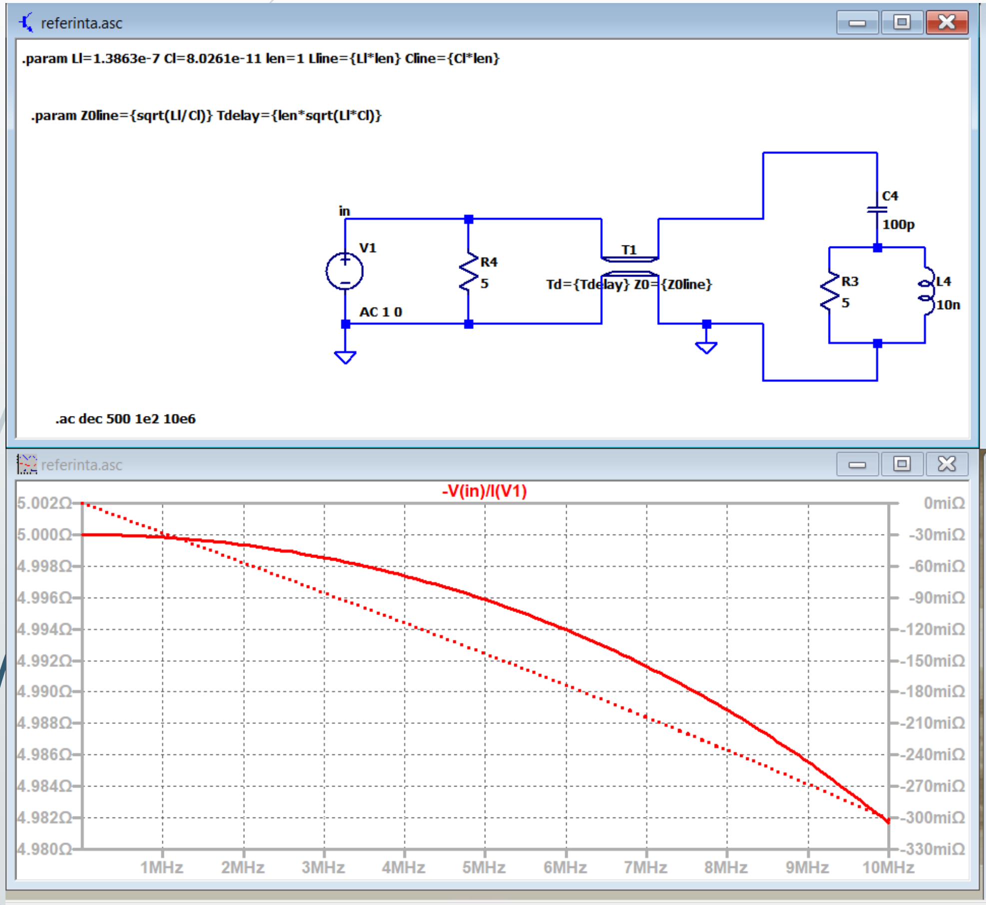
REFERINTA (validate de rezultatele din articol)

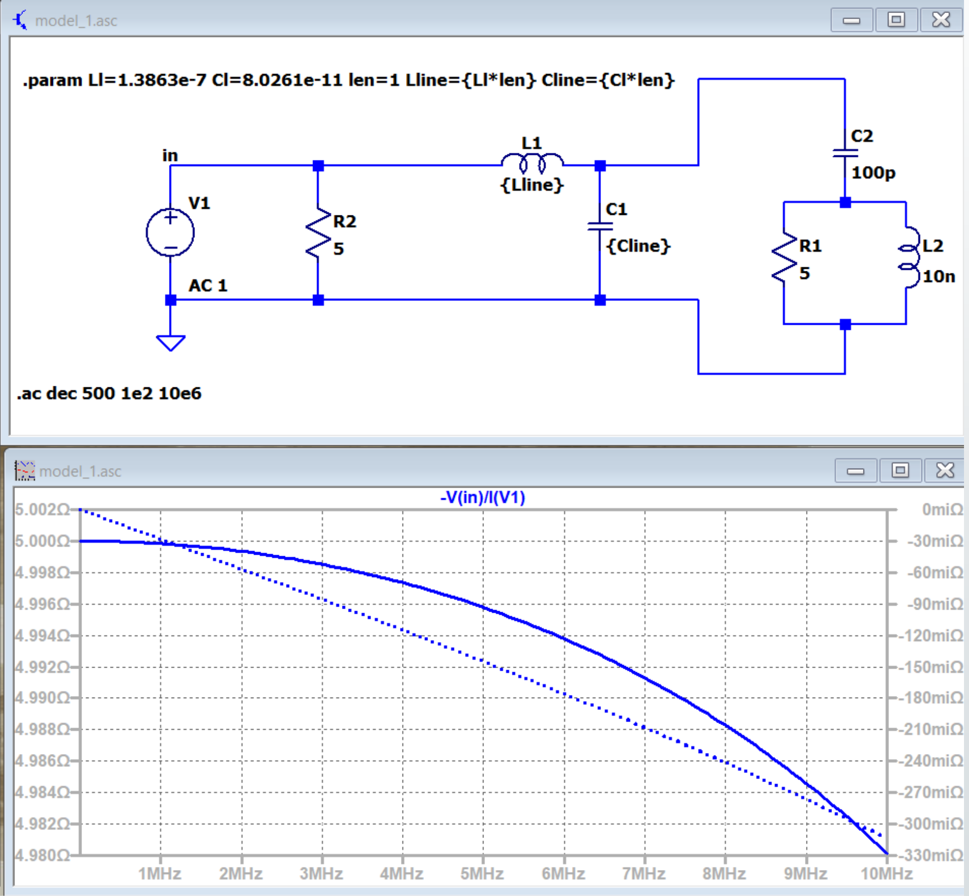
Nu e potrivit pentru frecvente > 1 MHz.

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in frecventa

[100 Hz,10MHz]





Rezultate similare.
Ar fi util sa le vizualizam pe acelasi grafic.

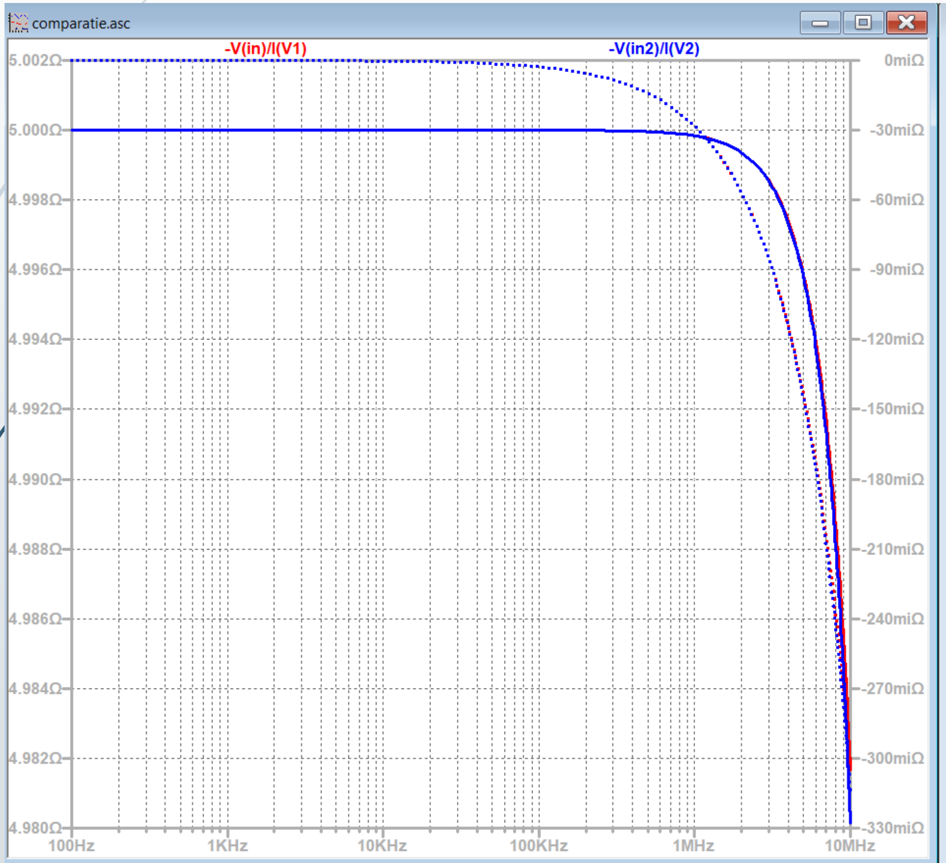
REFERINTA

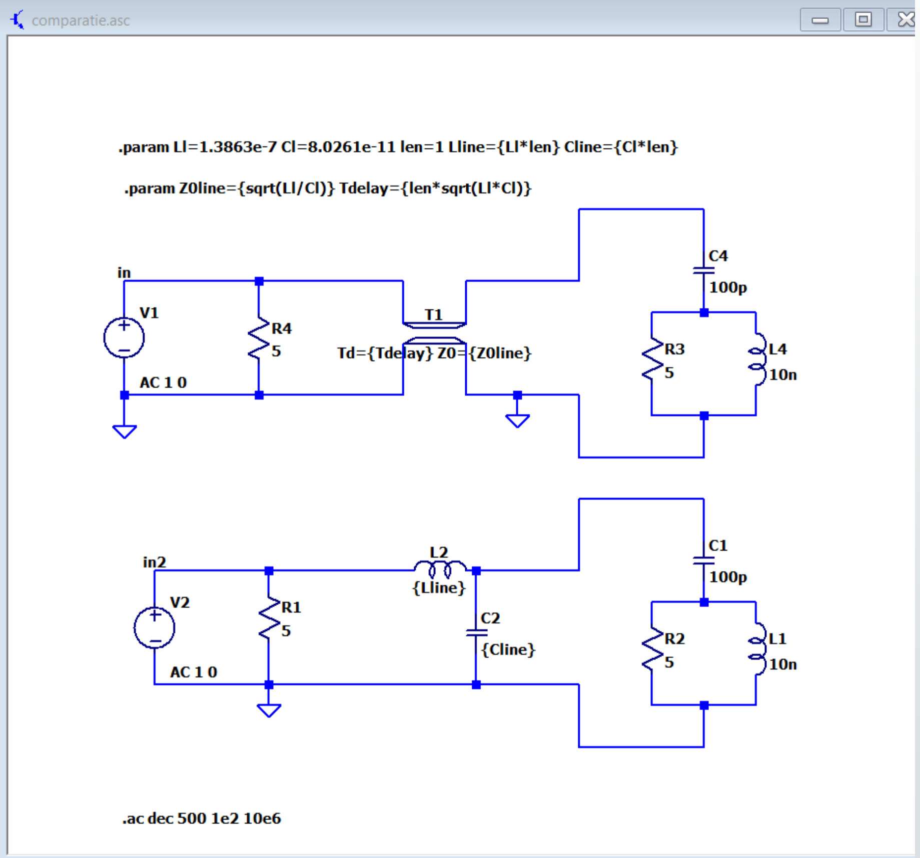
MODEL

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in frecventa

[100 Hz,10MHz]



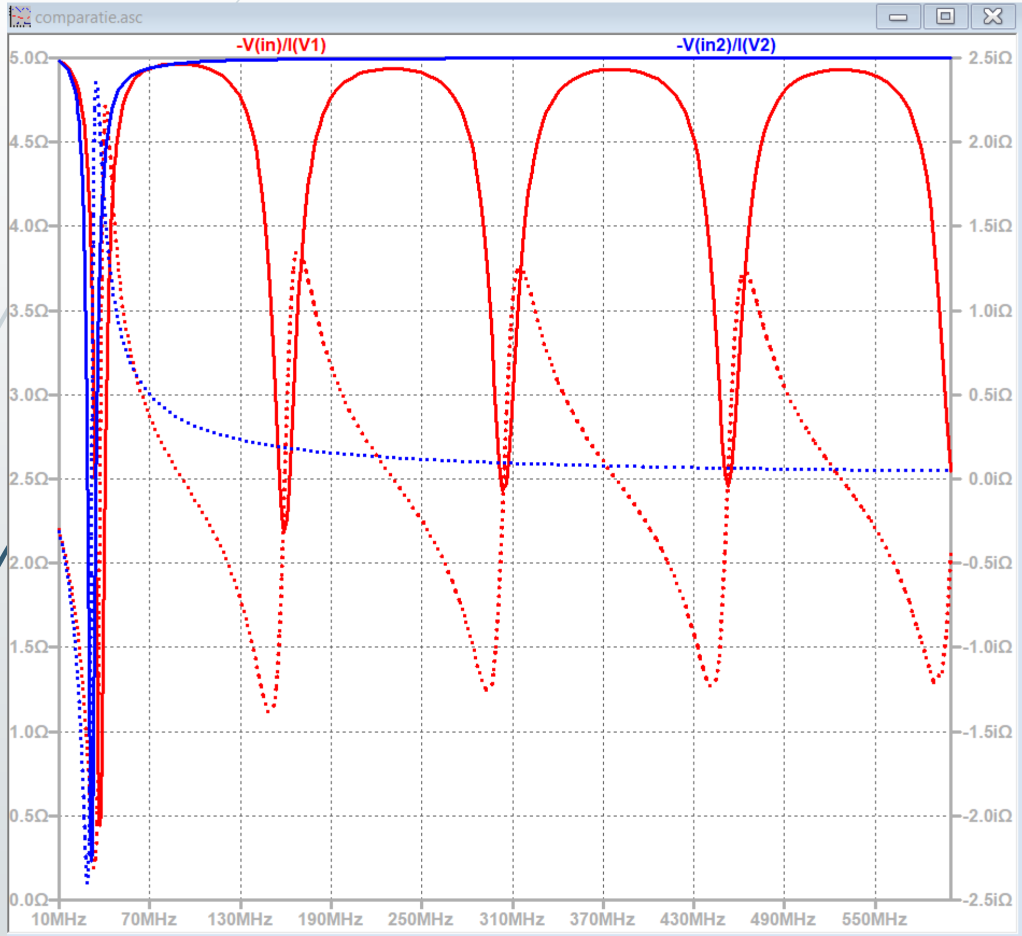


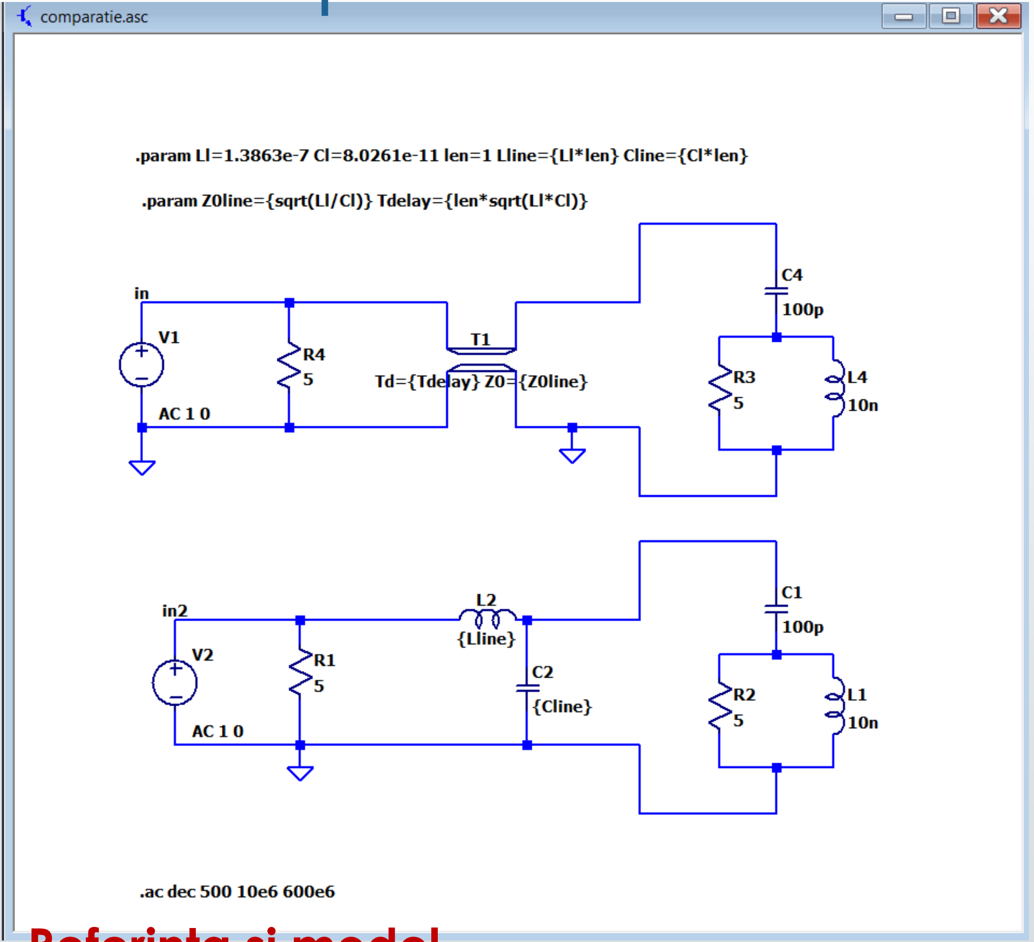
Referinta si model

(Pentru a putea realiza mai usor comparatiile – circuitele sunt descrise in acelasi fisier)

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in frecventa [10MHz,600MHz]

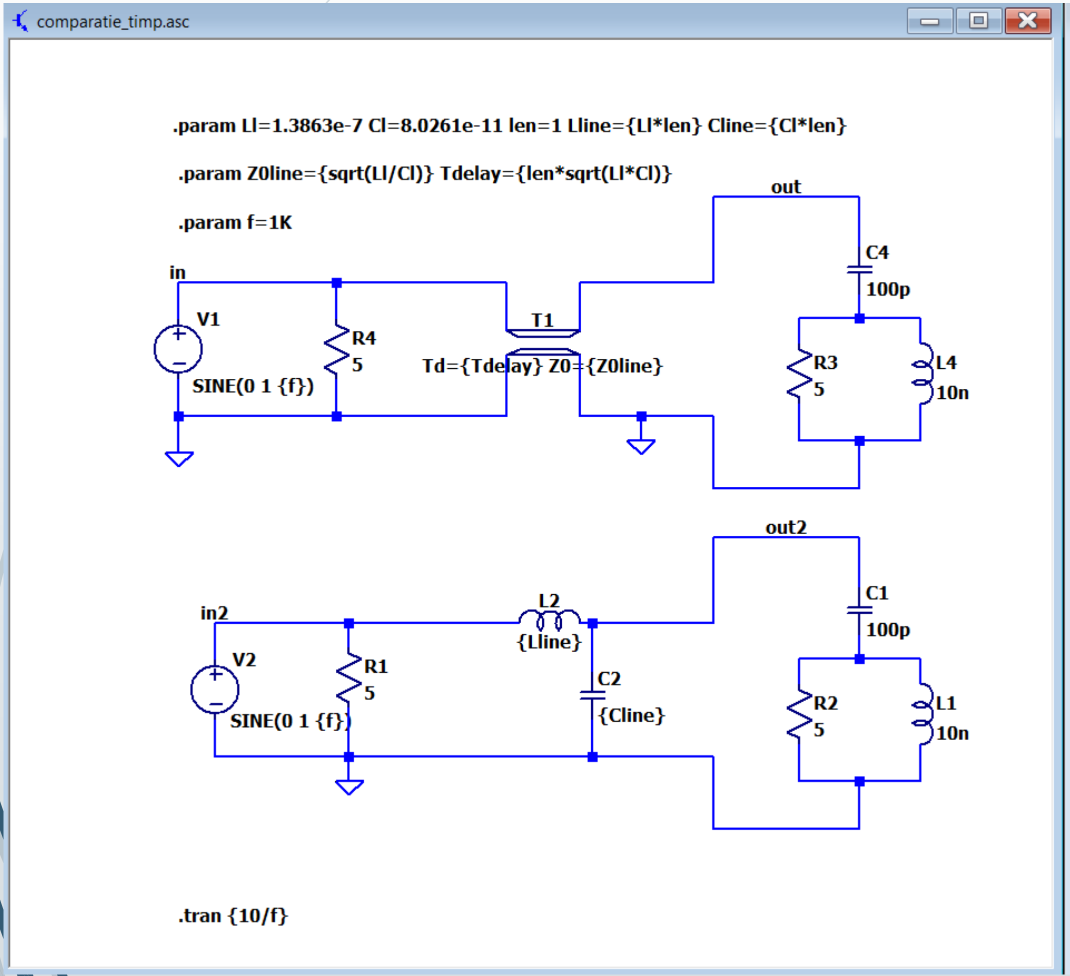


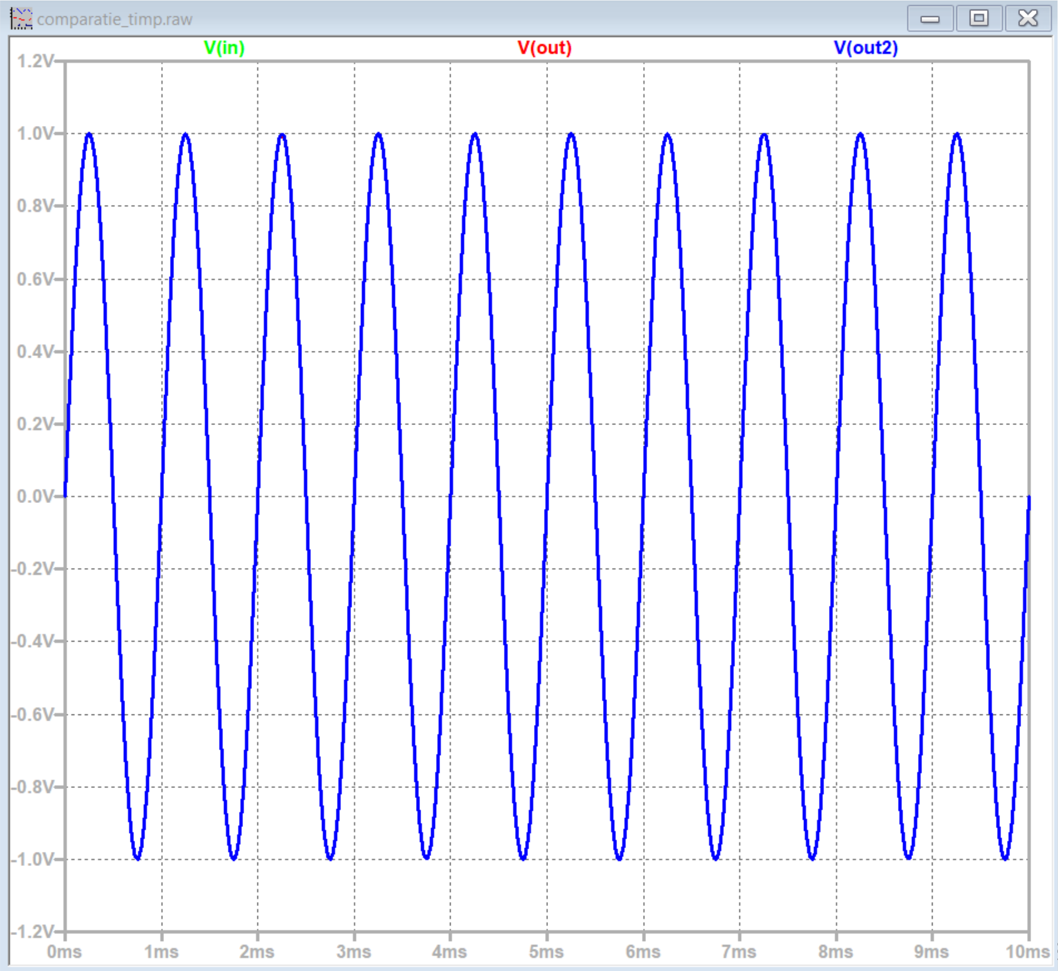


Referinta si model

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in timp



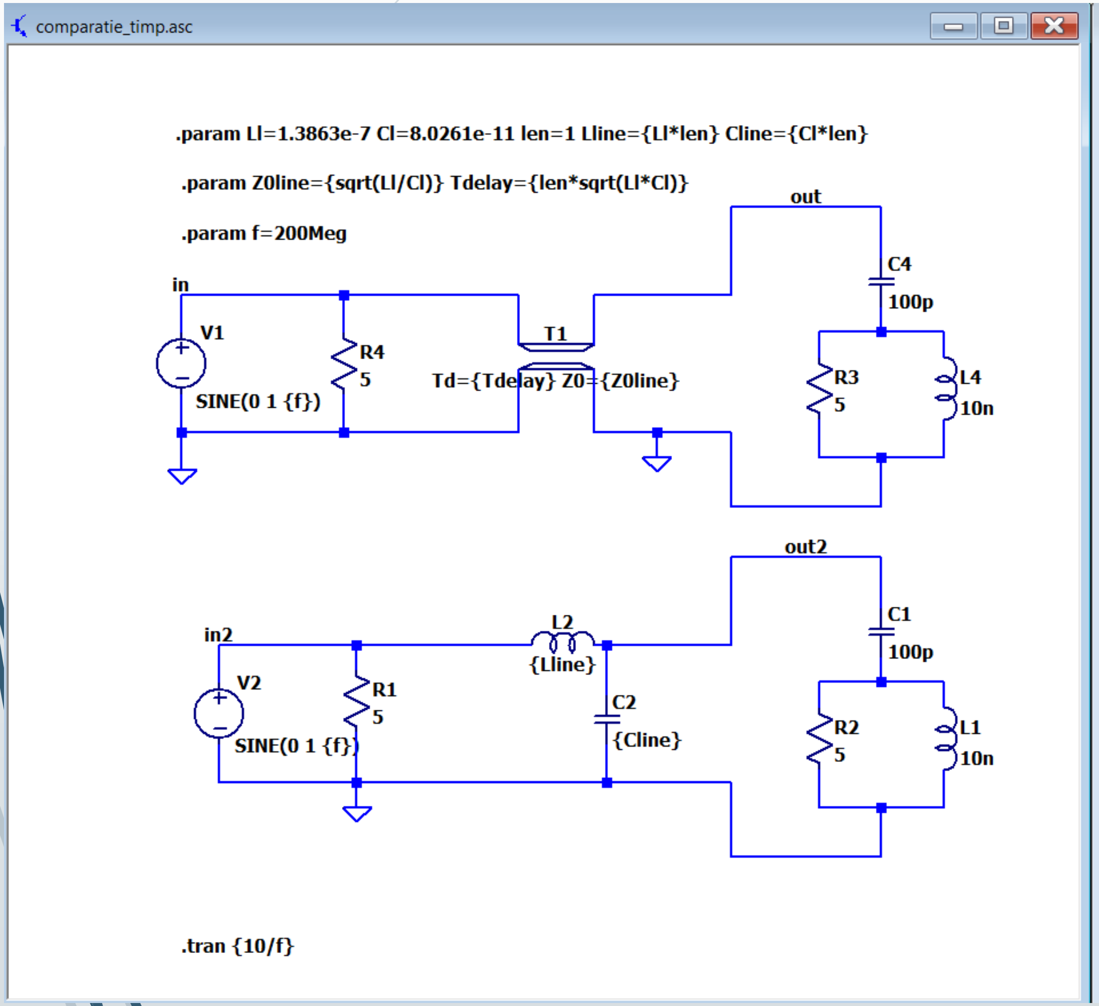


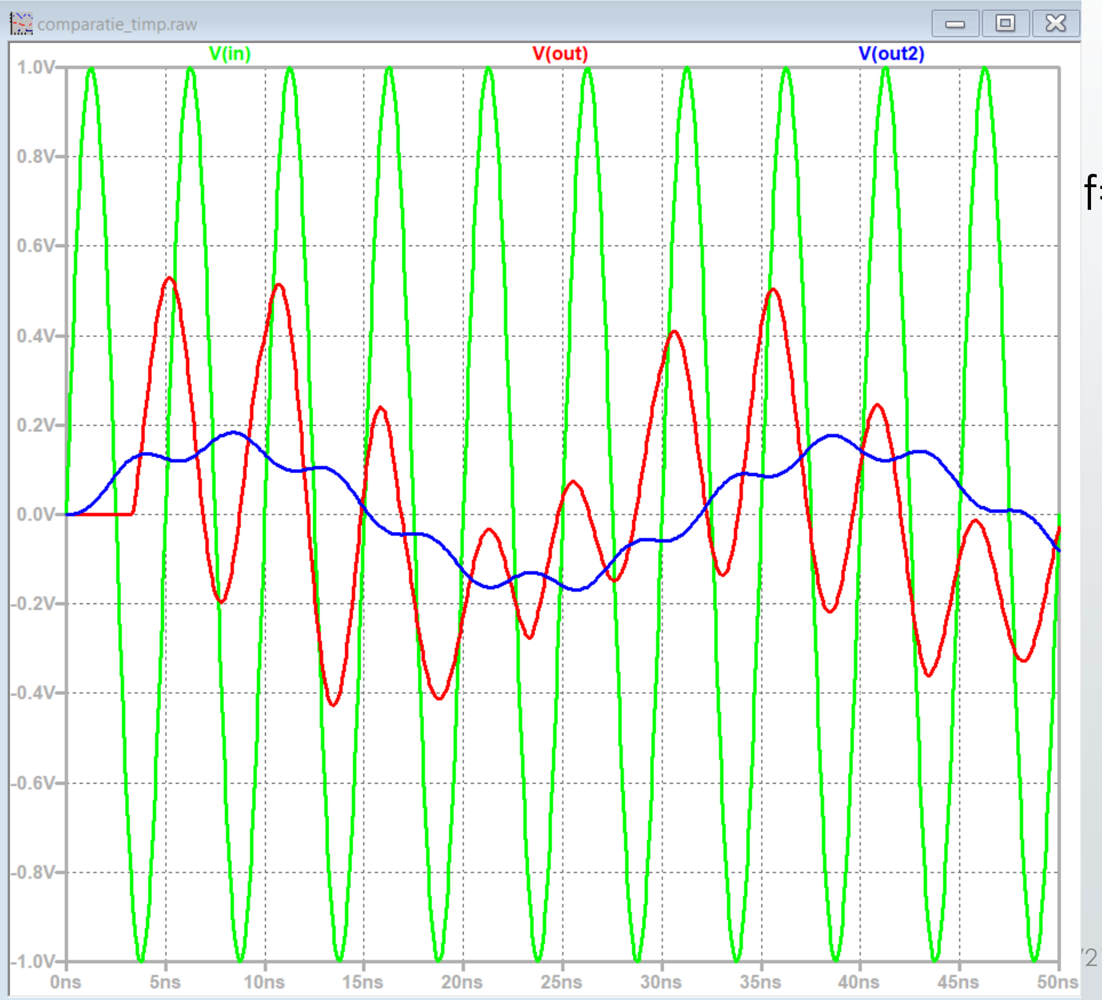
f= 1kHz

Toate semnale sunt identice

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in timp

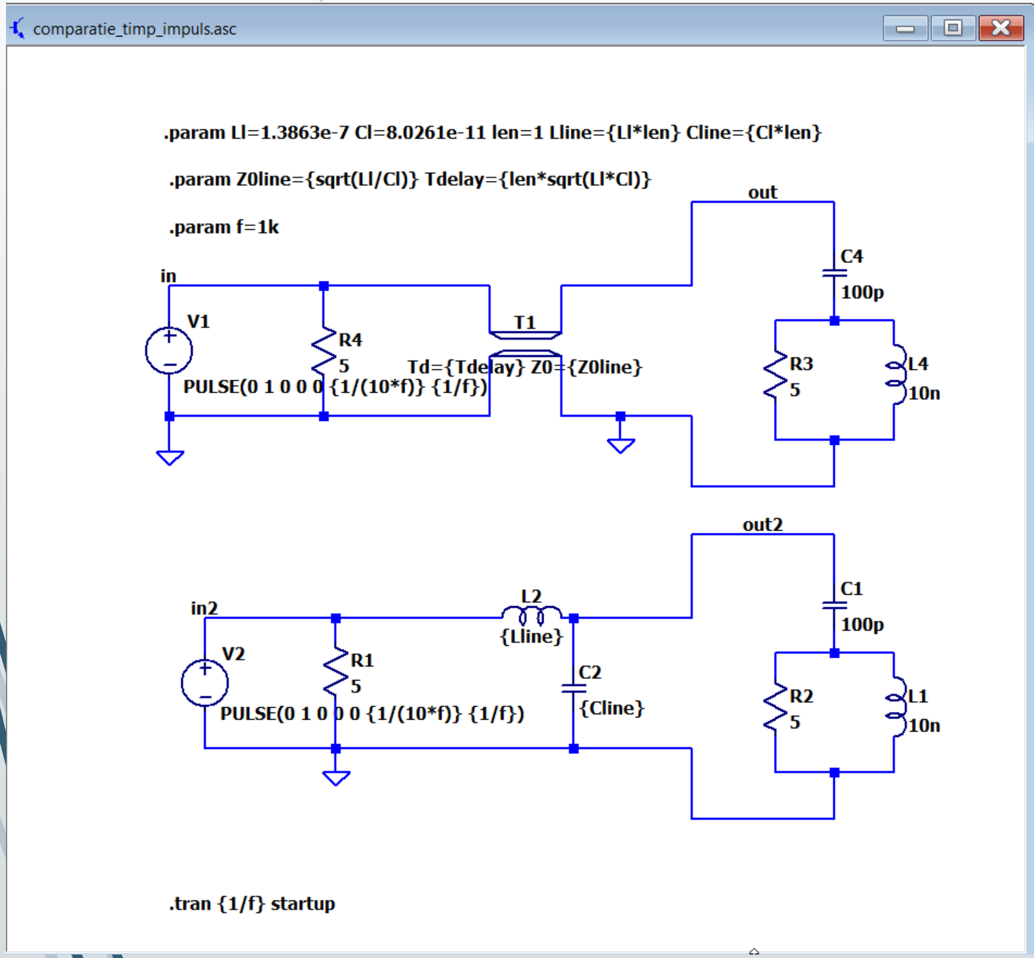


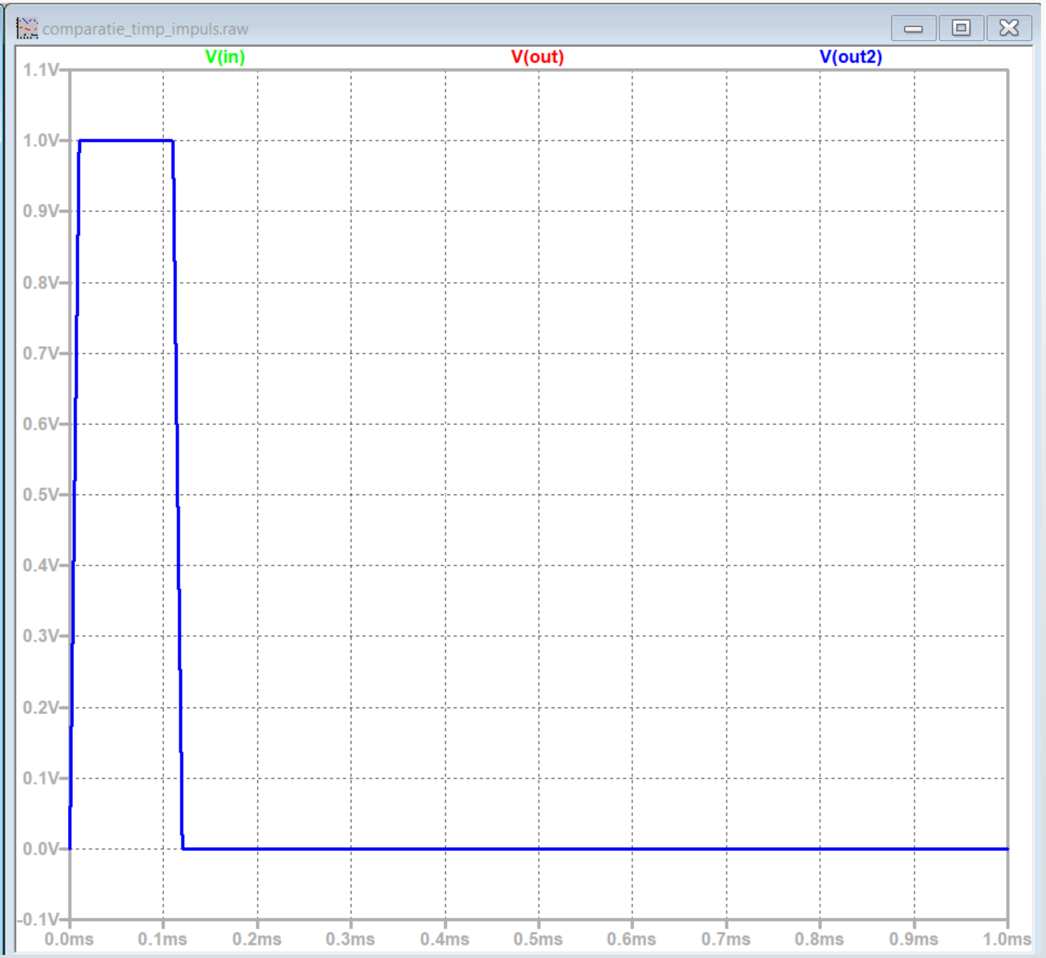


f= 200MHz

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in timp

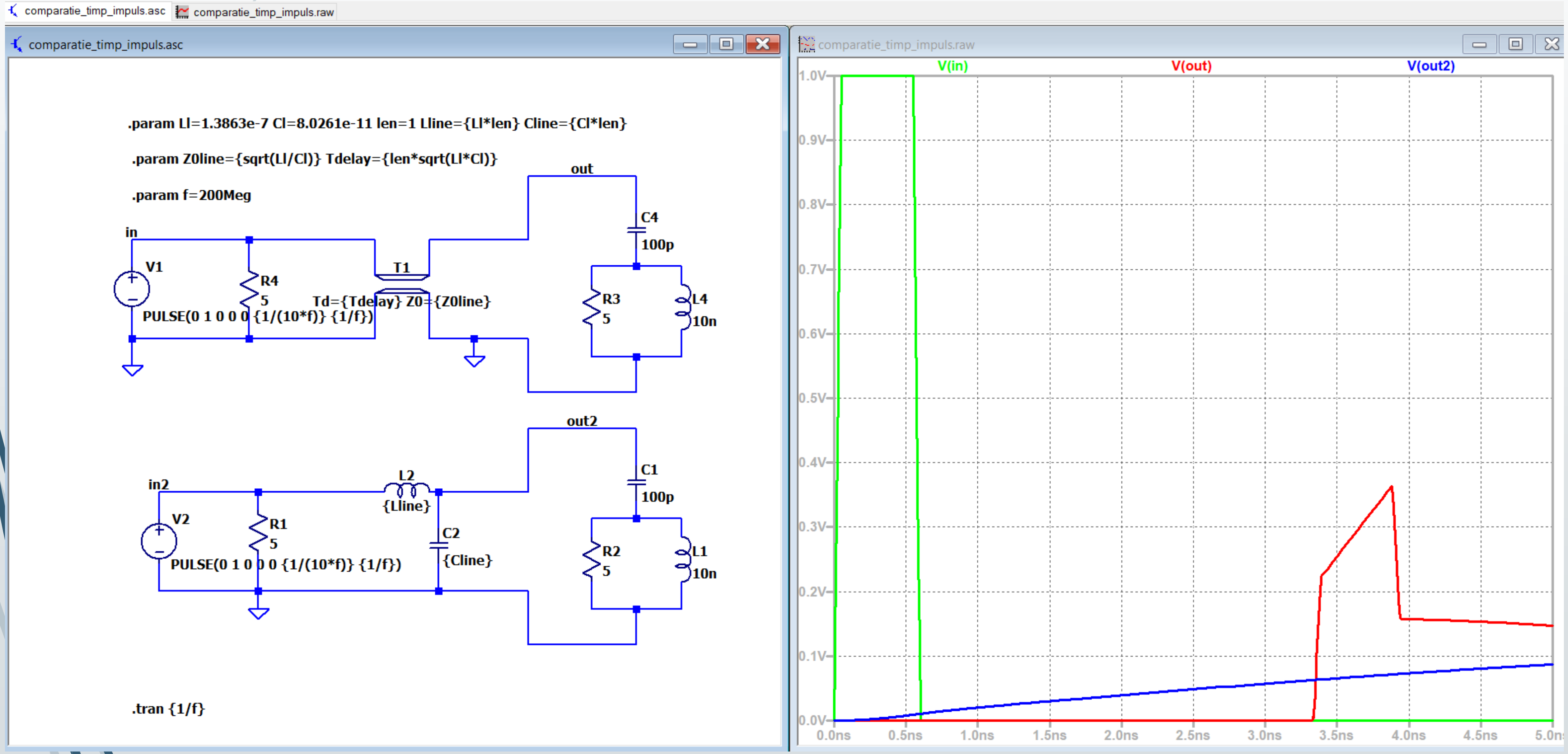




Impuls, frecventa mica

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.2. Modele si simulari in LTSpice

Simulari in timp



Impuls, frecventa mare

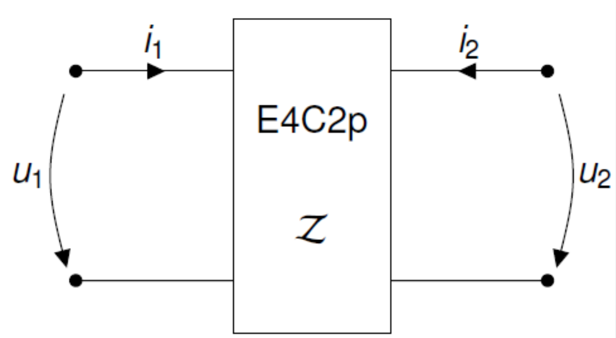
Se vede Td de 3.3 ns.

Modelul cu parametri concentrati nu este bun pentru aceasta freventa.

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.3. Rezolvare analitica in r.a.p.[facultativ]

Reamintire de la ELTH – elemente cuadripolare de tip diport:

- Control in current:



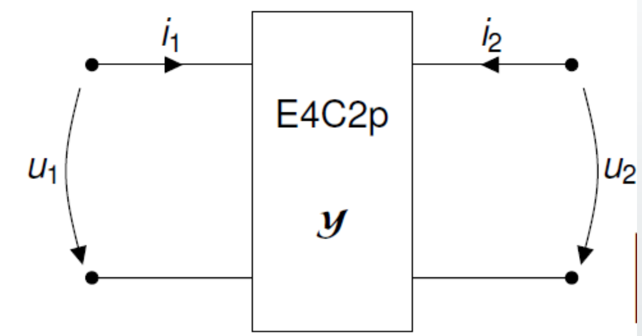
Element cuadripolar de tip diport. Dacă pentru ambele porturi se adoptă regula de la receptoare, atunci, relaţia constitutivă este dată de (1).

$$\mathbf{u} = \mathcal{Z}\mathbf{i} \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Matrice de impedanta

- Control in tensiune:



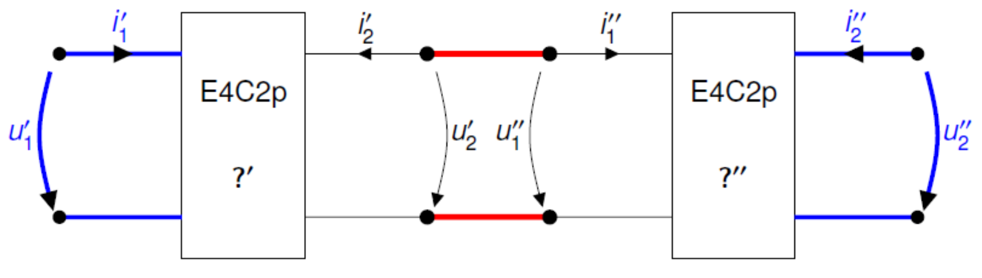
Element cuadripolar de tip diport. Dacă pentru ambele porturi se adoptă regula de la receptoare, atunci, relaţia constitutivă este dată de (10).

$$\mathbf{i} = \mathcal{Y}\mathbf{u} \qquad (10)$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Matrice de admitanta

- Conexiune in cascada.



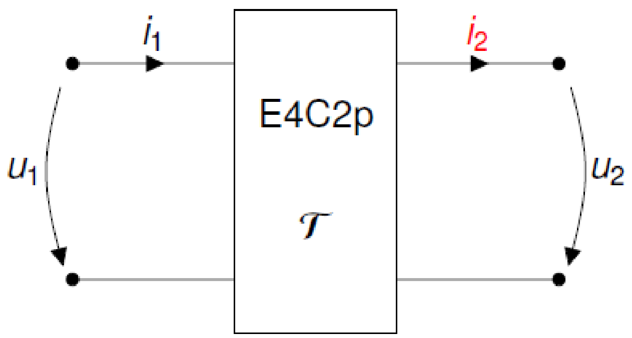
$$\begin{aligned} -i'_2 &= i''_1 \\ u'_2 &= u''_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

MINUS !

Matrice de transfer

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.3. Rezolvare analitica in r.a.p.[facultativ]

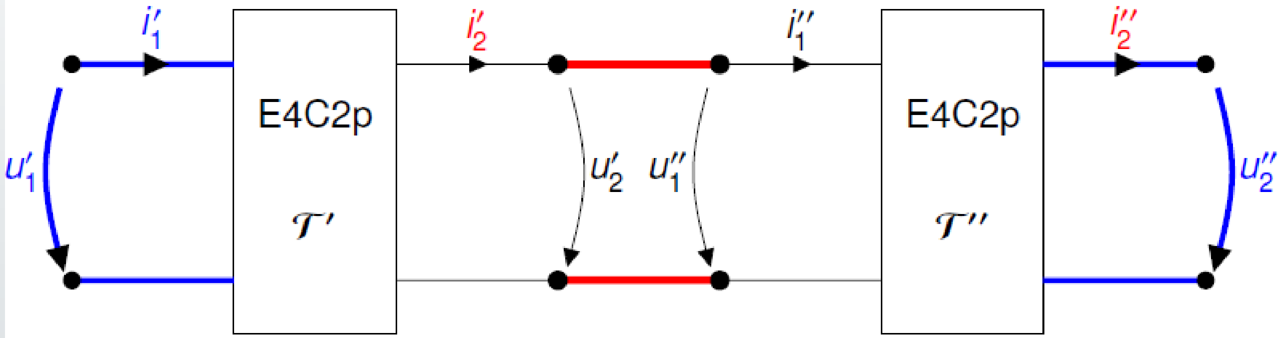


Element cuadripolar de tip diport. Portul 1 este în regula de la receptoare şi portul 2 este în regula de la generatoare. Relaţia constitutivă este dată de (22).

$$\mathbf{p1} = \mathcal{T}\,\mathbf{p2} \qquad (22)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

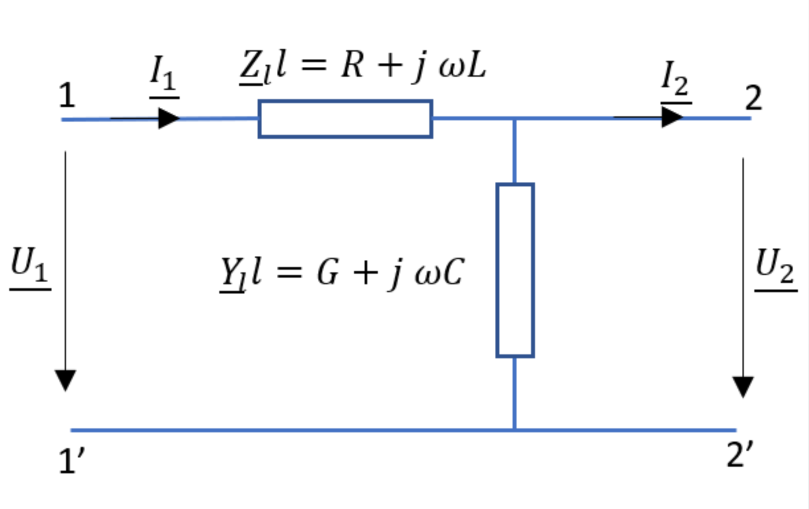
Avantajul folosirii matricei de transfer:



Conexiunea în lanţ (cascadă) a două E4C2p. $\mathcal{T} = \mathcal{T}'\mathcal{T}''$

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.3. Rezolvare analitica in r.a.p.[facultativ]

Exemplu – determinarea matricei de transfer pentru modelul de circuit simplu al unui cablu:



$$\begin{bmatrix} \underline{U_1} \\ \underline{I_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U_2} \\ \underline{I_2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{U_1} = (R + j\omega L)\left[\underline{I_2} + (G + j\omega C)\underline{U_2}\right] + \underline{U_2}$$

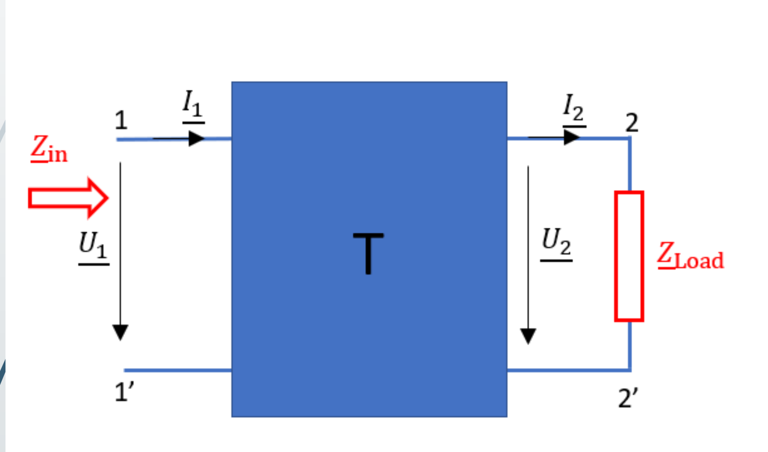
$$\underline{I_1} = (G + j\omega C)\,\underline{U_2} + \underline{I_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= (R + j\,\omega\,L)(G + j\,\omega\,C) + 1 \\ B &= (R + j\,\omega\,L) \\ C &= (G + j\,\omega\,C) \\ D &= 1 \end{aligned}}$$

(*1)

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.3. Rezolvare analitica in r.a.p.[facultativ]

Sa pp ca la poarta de iesire a diportului se conecteaza o sarcina. Sa calculam impedanta echivalenta la poarta de intrare a diportului.

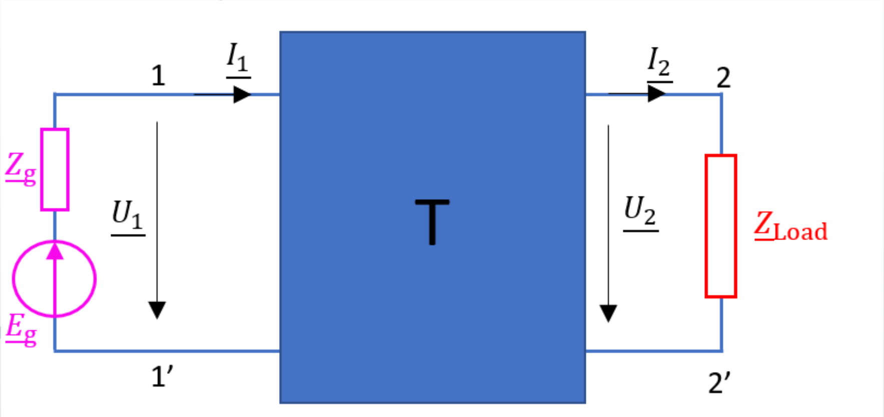


$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

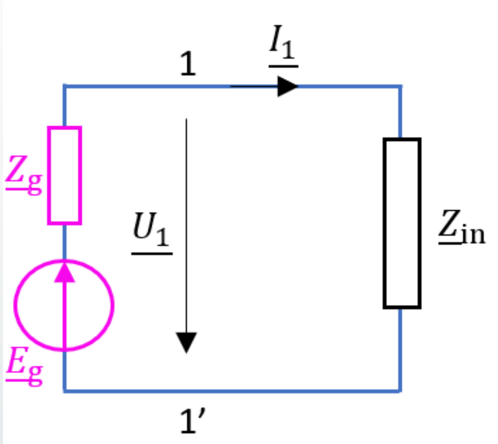
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{\text{Load}} \underline{I}_2$$

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{in}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{A\, \underline{U}_2 + B\, \underline{I}_2}{C\, \underline{U}_2 + D\, \underline{I}_2} = \frac{A\, \underline{Z}_{\text{Load}} + B}{C\, \underline{Z}_{\text{Load}} + D}} \quad (*2)$$

4. Modelarea unui cablu coaxial
4.3. Rezolvare analitica in r.a.p.[facultativ]



Echiv fata de intrare cu



marimile de intrare

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_{in}}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{in}\,\underline{I}_1$$

(*3)

marimile de iesire

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}$$

(*4)

Formulele (*1,*2,*3,*4) pot fi implementate usor in vederea obtinerii unor caracteristici de frecventa.

CONCLUZIE

Parametrii lineici depind de datele geometrice si de material si ei se determina prin rezolvarea unei probleme de camp electromagnetic.

Ei determina:

- ***intarzierea si perturbarea semnalului transmis pe linie, deci si***
- ***frecventa maxima la care poate fi folosit un cablu pentru transmiterea datelor digitale.***

Notare

- Rezolvati quiz-ul P4.

- Pentru bonus (pana in saptamana 14)
  - – crearea unor figuri/animatii proprii illustrative pentru cursul de EM, folosind coduri proprii si instrumente software mai performante, de exemplu https://vtk.org/, https://www.paraview.org/
  - - realizarea unor experimente virtuale/reale care sa ilustreze conceptele discutate.