# Calculul valorilor proprii şi vectorilor proprii prin metodele puterii. Metoda Householder

## Noțiuni teoretice

Pentru început, vom introduce conceptele de valoare şi vector propriu folosind următoarea definiţie: fiind dată o matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ se numeşte valoare proprie a matricei A dacă există un vector nenul $x \in \mathbb{C}^n$, numit vector propriu asociat valorii proprii $\lambda \in \mathbb{C}$, astfel încât:

$$Ax = \lambda x.$$

Sistemul liniar omogen $Ax = \lambda x$ admite soluţii nenule dacă şi numai dacă $det(\lambda I_n - A) = 0$. Polinomul $p(\lambda) = det(\lambda I_n - A)$, de gradul $n$, se numeşte *polinomul caracteristic* al matricei $A$ iar ecuația $p(\lambda) = 0$ se numeşte *ecuaţie caracteristică* a matricei $A$. Valorile proprii ale unei matrice sunt zerourile polinomului caracteristic $p(\lambda)$.

*Spectrul de valori proprii* al matricei $A$ este dat de mulţimea

$$\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}.$$

Mai mult, numărul real $\rho(A) = \max\limits_{\lambda_i \in \lambda(A)} (|\lambda_i|)$ defineşte *raza spectrală* a matricei $A$.

*Transformarea de asemănare* se defineşte după cum urmează: spunem că matricele $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sunt asemenea dacă există o matrice nesingulară $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ astfel încât

$$B = TAT^{-1}.$$

În cazul în care matricele $A$ si $B$ sunt asemenea, au loc următoarele proprietăţi:

- Matricele $A$ şi $B$ au aceleaşi valori proprii adică $\lambda(A) = \lambda(B)$. Prin urmare, transformarea de asemănare păstrează spectrul de valori proprii al matricei $A$.
- Dacă $x \in \mathbb{C}^n$ este un vector propriu al matricei $A$, asociat cu valoarea proprie $\lambda$, atunci $y = Tx \in \mathbb{C}^n$ este vector propriu al matricei $B$, pentru aceeaşi valoarea proprie $\lambda$.

Pentru orice matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ există o matrice unitară $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ astfel încât matricea $S = Q^T AQ \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitar asemenea cu $A$ este superior triunghiulară.

În cazul real, pentru orice matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ există o matrice ortogonală $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ astfel încât matricea $S = Q^T AQ \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal asemenea cu $A$ are o structură cvasi-superior triunghiulară:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & ... & S_{1q} \\ 0 & S_{22} & ... & S_{2q} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & S_{qq} \end{bmatrix}$$

unde blocurile diagonale $S_{ii}, i = 1 : q$ sunt matrice $1 \times 1$ sau $2 \times 2$. Matricele de dimensiune $2 \times 2$ au valorile proprii complexe. Matricea S se numeşte *forma Schur reală* a matricei $A$.

În cele ce urmează, vom descrie matematic două proprietăți asociate valorilor proprii ale matricei $A$:

- $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} A(i,i) = tr(A)$
- $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$

Funcţia OCTAVE care calculează valorile şi vectorii proprii pentru o matrice oarecare $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ este *eig*. Un exemplu de utilizare al acestei funcții este următorul: $[V, L] = eig(A)$, unde matricea diagonală $L$ conţine pe diagonala principală valorile proprii ale matricei $A$ iar coloanele matricei $V$ reprezintă vectorii proprii ai matricei $A$.

## Determinarea vectorilor şi valorilor proprii

În continuare, vom studia câteva metode numerice pentru a determina valorile şi vectorii proprii ale unei matrice.

### Metoda puterii directe

Fie matricea $A \in R^{n\times n}$ pentru care considerăm spectrul de valori proprii $\lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ şi mulţimea de vectori proprii $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, de normă euclidiană unitară, ai matricei A. Mai mult, presupunem că $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Fie $y \in \mathbb{C}^n$ un vector de normă euclidiană unitară având o componentă nenulă pe direcţia vectorului propriu $x_1 \in X$.

Metoda puterii directe presupune definirea şirului vectorial $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ şi a şirului numeric $\left(\lambda^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, după cum urmează:

$y^{(0)} = y$

Pentru $k = 1, 2, ...max$

$z \leftarrow A \cdot y^{(k-1)}$

$y^{(k)} \leftarrow \frac{z}{\|z\|_2}$

$\lambda^{(k)} \leftarrow (y^{(k)})^T A y^{(k)}$

Astfel, şirul numeric $\left(\lambda^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge către valoarea proprie dominantă, în timp ce şirul vectorial $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge către vectorul propriu unitar asociat cu valoarea proprie dominantă. Metoda puterii directe converge oricum am alege vectorul $y$ inițial.

### Metoda puterii inverse

Metoda puterii inverse reprezintă metoda puterii directe aplicată matricei $B = (A-\mu I)^{-1}$. Matricea $B$ va avea o valoarea proprie dominantă dacă valoare $\mu$ (numită valoare de "deplasare") este o aproximaţie, chiar şi grosieră, a unei valori proprii $\lambda$ a matricei $A$.

Algoritmul metodei puterii inverse este:

$y^{(0)} = y$

Pentru $k = 1, 2, ...max$

Se rezolvă sistemul liniar $(A - \mu I)z = y^{(k-1)}$

$y^{(k)} \leftarrow \frac{z}{\|z\|_2}$

$\lambda^{(k)} \leftarrow (y^{(k)})^T A y^{(k)}$

$\mu = \lambda^{(k)}$

Pentru a creşte viteza de convergenţă a algoritmului, valoarea de deplasare $\mu$ este modificată de la o iteraţie la alta, utilizând aproximaţia curentă $\mu = \lambda^{(k)}$ a valorii proprii $\lambda$ a matricei A. Această variantă, este cunoscută sub denumirea de *iterarea câtului Rayleigh*. În metoda puterii inverse, şirul $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent către vectorul propriu al matricei $A$, asociat valorii proprii $\lambda$.

### Metoda deflației

Metoda deflației se foloseşte doar în cazul matricelor simetrice, cu elemente reale. Folosind metoda puterii directe se determină valoarea proprie dominantă şi vectorul propriu corespunzător. Pentru a afla celelalte perechi proprii se procedează astfel:

- Iniţial avem o matrice A cu vectorii proprii $x_1, x_2, ..., x_n$ şi valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Pe $\lambda_1$ şi $x_1$ îi calculăm folosind metoda puterii directe.
- Construim matricea $B = (I_n - x_1 y^T)A$, cu $y$ ales astfel încât $x_1 y^T = 1$. Această matrice va avea valorile proprii $\{0, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n\}$ şi vectorii proprii $\{x_1, z_2, z_3, ..., z_n\}$, unde $z_i = x_i - y^T x_i x_1$, $\forall i = 2 : n$.
- Dacă din matricea $B$ eliminăm prima linie şi prima coloană, matricea obţinută, de rang $n-1$, își păstrează perechile proprii mai puţin prima pereche proprie $(0, x_1)$. Pe matricea redusă, putem aplica acelaşi procedeu, obţinându-se valoarea proprie dominantă $\lambda_2$. Procesul continuă până se obţin toate valorile proprii ale matricei iniţiale.

### Metoda Householder

Metoda propune o procedură de construcţie iterativă a unui şir de matrice ortogonal asemenea cu matricea iniţială şi rapid convergent către forma Schur reală. Dacă prin metodele puterii se obțineau aproximări ale valorilor şi vectorilor proprii, prin metoda Householder se urmăreşte obţinerea formei Schur reale, care conţine valorile proprii exacte.

Toate versiunile algoritmului QR sunt organizate în două etape:

1. etapa directă, de reducere a matricei date la forma superior Hessenberg prin transformări ortogonale de asemănare;
2. etapa iterativă, de construcţie recurentă a unui şir de matrice convergent către

forma Schur reală.

- **Algoritmul QR cu deplasare explicită cu paşi simpli**
  Considerăm matricea $H$ ca fiind o matrice superior Hessenberg. Algoritmul este următorul:
  $H_0 = H$
  Pentru $k = 0, 1, 2, ...$
  $H_k - \mu_k I_n = Q_k R_k$
  $H_{k+1} = Q_k R_k + \mu_k I_n$
  Pentru o alegere convenabilă a lui $\mu_k$ se poate demonstra că metoda converge rapid către forma Schur reală a matricei $H$. De aceea, la fiecare pas facem atribuirea: $\mu_k = h_{nn}^{(k)}$. Astfel, algoritmul va fi următorul:
  $\mu = h_{nn}$
  $H = H - \mu I_n$
  Pentru $j = 1 : n - 1$
  Se determină rotaţia plană $P_{j,j+1}$ astfel încât $(P_{j,j+1}^T H)_{j+1,j} == 0$
  $H = P_{j,j+1}^T H$
  Pentru $j = 1 : n - 1$
  $H = H P_{j,j+1}$
  $H = H + \mu I_n$
- **Algoritmul QR cu deplasare explicită cu paşi dubli**
  Pentru depăşirea dificultăţilor legate de absenţa convergenţei şirului QR creat de utilizarea paşilor simpli atunci când matricea are valori proprii complexe, se adoptă aşa numita strategie a paşilor dubli QR care comprimă într-o singură iteraţie doi paşi simpli QR succesivi. Algoritmul este următorul:
  Pentru $k = 1, 2, ...$
  $s = h_{n-1,n-1} + h_{n,n}$
  $p = h_{n-1,n-1} h_{nn} - h_{n,n-1} h_{n-1,n}$
  Se calculează $M = H^2 - sH + pI_n$
  Se factorizează $M = QR$
  $H = Q^T H Q$

# Probleme propuse

## Problema 1

Fie matricea tridiagonală:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & ... & ... & ... \\ b_2 & a_2 & c_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ ... & ... & ... & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

.

Se construieşte şirul de polinoame:

$p_0(\lambda) = 1$

$p_1(\lambda) = \lambda - a_1$

$p_n(\lambda) = (\lambda - a_n)p_{n-1}(\lambda) - b_n c_{n-1} p_{n-2}(\lambda)$

a) Arătaţi că $p_n(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei $A$.

b) Scrieţi o funcţie OCTAVE care calculează valorile şi vectorii proprii ale matricei $A$.

## Problema 2

Să se demonstreze pentru o matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ proprietăţile următoare:

a) $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right\}$;

b) $\sigma(A - \mu I_n) = \{\lambda_i - \mu\}, \forall \mu \in \mathbb{R}$;

c) $\sigma(A^k) = \left\{\lambda_i^k\right\}, \forall k \in \mathbb{N}$

d) $\sigma((A - \mu I_n)^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda_i - \mu}\right\}, \forall \mu \in \mathbb{R}$.

## Problema 3

Calculaţi valorile şi vectorii proprii ai unui reflector Householder.

Indicaţie: $G^T u = e_1 G$ - este un reflector. Coloanele lui $G$ sunt vectori proprii.

## Problema 4

Pentru matricea:

$$A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ c^2 + s^2 = 1$$

calculaţi valorile şi vectorii proprii.

## Problema 5

Să se scrie o funcţie Octave pentru a implementa metoda puterii directe.

## Problema 6

Să se scrie o funcţie Octave pentru a implementa metoda puterii inverse.