Metode Runge-Kutta pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale

Noţiuni teoretice

Fiind date:

- intervalul $I = [x_0, x_0 + a] \subset R$
- funcţia continuă $f : I \times R \to R$ care asociază fiecarui punct (x, y) din domeniul de definiţie un număr real $f(x, y)$
- ecuaţia diferențială $y' = f(x, y)$

problema diferenţială de ordinul 1 constă în determinarea funcţiei $y : I \to R$ astfel încât pentru $\forall x \in I$ avem relaţia:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Problema diferenţială de ordinul 1 cu condiţii iniţiale (numită şi problema Cauchy) constă în rezolvarea ecuaţiei diferenţiale $y'(x) = f(x, y(x))$ ştiind condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, $y_0 \in R$.

În cele ce urmează, presupunem că funcţia f satisface condiţia Lipschitz, fapt ce asigură existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy:

$$\forall x \in I,\, \forall u, v \in R^n, \exists L > 0 \text{ astfel încât } |f(x, u) - f(x, v)| < L\,|u - v|$$

Metode de tip Runge-Kutta

O metodă numerică folosită pentru rezolvarea ecuţiilor diferenţiale este metoda Runge-Kutta. Această metodă este o *metodă cu paşi separaţi*, caracterizată prin faptul că aproximaţia soluţiei la pasul următor $i+1$ ţine cont doar de informaţia de la pasul curent i, astfel:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_h \\ \\ y_{i+1} = y_i + h f_h(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, ... \end{cases}$$

şi având condiţiile de consistenţă:

$$\lim_{h \to 0} \lambda_h = \lambda; \quad \lim_{h \to 0} f_h = f.$$

Funcţia $f_h(x, y)$ se determină urmând paşii:

- considerăm punctele distincte
$$x_{ij} = x_{i0} + u_j h$$
care împart intervalul $I = [x_i, x_{i+1}]$ în q subintervale, unde $u_j \in [0, 1]$, $u_0 = 0$, $u_q = 1$;
- se calculează aproximaţiile soluţiei în punctele introduse x_{ij} folosind relaţiile:
$$\begin{cases} y_{i0} = y_i \\ \\ y_{ij} = y_i + h \sum_{l=0}^{j-1} K_{jl} f(x_{il}, y_{il}), \quad j = 1 : q \end{cases}$$

Pentru a determina punctele introduse x_{ij} şi constantele K_{jl} se impune condiţia ca în dezvoltarea Taylor a lui y_{ij} după puterile lui h, termenii astfel obtinuţi să coincidă cu cât mai mulţi termeni din dezvoltarea Taylor a soluției exacte. O metoda Runge-Kutta este de *ordin p*, dacă în cele două dezvoltări termenii coincid până la h^p inclusiv. Mai mult, numărul subintervalelor q defineşte *rangul* metodei Runge-Kutta.

Metoda Runge-Kutta de ordin 1 şi rang 1 este:

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i \\ \\ y_{i1} = y_i + h u_1 f(x_{i0}, y_{i0}) \end{cases}$$

Metoda Runge-Kutta de ordin 2 şi rang 2 este:

$$\begin{cases} y_{i0} = y_i \\ \\ y_{i1} = y_i + h u_1 f(x_{i0}, y_{i0}) \\ \\ y_{i2} = y_i + h(1 - \frac{1}{2u_1}) f(x_{i0}, y_{i0}) + \frac{h}{2u_1} f(x_{i1}, y_{i1}) \end{cases}$$

Particularizând valoarea lui $u_1 \in [0,1]$ obţinem:

- metoda tangentei ameliorate, pentru $u_1 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x_{i1} = x_{i0} + u_1 h = x_i + \frac{h}{2} \\ y_{i1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_{i1}, y_{i1}) \end{cases}$$

- metoda Heun, pentru $u_1 = \frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} x_{i1} = x_i + \frac{2}{3} h \\ y_{i1} = y_i + \frac{2}{3} h f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} f(x_i, y_i) + \frac{3h}{4} f(x_{i1}, y_{i1}) \end{cases}$$

- metoda Euler-Cauchy, pentru $u_1 = 1$:

$$\begin{cases} x_{i1} = x_i + h \\ y_{i1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i), f(x_{i1}, y_{i1})] \end{cases}$$

În mod uzual, se utilizează o metodă Runge-Kutta de ordin 4 pentru care avem relaţia:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

unde:

$K_1 = h f(x_i, y_i)$

$K_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2})$

$K_3 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2})$

$K_4 = h f(x_i + h, y_i + K_3)$

Probleme propuse

Problema 1

Să se scrie un program OCTAVE care să rezolve o ecuaţie diferenţială de ordin 1 folosind metoda tangentei ameliorate. Programul primeşte ca date de intrare: a, b - capătul superior, respectiv inferior al intervalului de integrare; n - numărul de puncte; $y0$ - condiţia iniţială; f - funcţia $f(x, y)$. Rezultatul programului va fi y, reprezentând vectorul aproximaţiilor soluţiei ecuaţiei diferenţiale.

Date de intrare:	**Date de ieşire:**
$a = 0, b = 3, n = 10, y0 = 0.5, @functie$	$y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.215691 \\ -0.074489 \\ -0.421686 \\ -0.883347 \\ -1.521975 \\ -2.390099 \\ -3.495294 \\ -4.751827 \\ -5.952477 \\ -6.811686 \end{bmatrix}$

unde am considerat funcţia $f(x, y)$ definită astfel:

```
function rez = functie(x, y)
   rez = y*sin(x)-1;
endfunction
```

Listing 1: Exemplu de funcţie de integrat.

Problema 2

Să se scrie program OCTAVE care să rezolve o ecuaţie diferenţială de ordin 1 folosind metoda Runge-Kutta de ordin 4. Programul primeşte ca date de intrare: a, b - capătul superior, respectiv inferior al intervalului de integrare; n - numărul de puncte; $y0$ - condiţia iniţială; f - funcţia $f(x, y)$. Rezultatul programului va fi y, reprezentând vectorul aproximaţiilor soluţiei ecuaţiei diferenţiale.

Date de intrare:	**Date de ieşire:**
$a = 0, b = 3, n = 10, y0 = 0.5, @functie$	$y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.213770 \\ -0.079085 \\ -0.431524 \\ -0.902985 \\ -1.557599 \\ -2.447435 \\ -3.575427 \\ -4.847639 \\ -6.051285 \\ -6.905223 \end{bmatrix}$

Problema 3

Să se scrie un program OCTAVE care să rezolve o ecuaţie diferenţială de ordin 1 folosind metoda Euler-Cauchy. Programul primeşte ca date de intrare: a, b - capătul superior, respectiv inferior al intervalului de integrare; n - numărul de puncte; $y0$ - condiţia iniţială; f - funcţia $f(x, y)$. Rezultatul programului va fi y, reprezentând vectorul aproximaţiilor soluţiei ecuaţiei diferenţiale.

Problema 4

Să se scrie un program OCTAVE care să rezolve o ecuaţie diferenţială de ordin 1 folosind metoda Heun. Programul primeşte ca date de intrare: a, b - capătul superior, respectiv inferior al intervalului de integrare; n - numărul de puncte; $y0$ - condiţia iniţială; f - funcţia $f(x, y)$. Rezultatul programului va fi y, reprezentând vectorul aproximaţiilor soluţiei ecuaţiei diferenţiale.

Problema 5

Să se scrie un program OCTAVE care să rezolve un sistem de 2 ecuaţii diferenţiale de ordin 1 folosind metoda Runge-Kutta de ordin 4. Ambele ecuaţii diferenţiale se rezolvă pe intervalul delimitat de parametrii a şi b, într-un număr de n puncte; $y10$, $y20$ reprezintă condiţia iniţială a primei ecuaţii diferenţiale, respectiv celei de-a doua; $f1$, $f2$ reprezintă prima funcţie a sistemului, respectiv cea de-a doua funcţie. Programul va avea ca rezultat vectorii $y1$ şi $y2$ (vectorul aproximaţiilor soluţiei asociată primei ecuaţii diferenţiale, respectiv celei de-a doua).

$function\ [y1\ y2] =$ `Runge_Kutta4_sistem`$(a,\ b,\ n,\ y10,\ y20,\ f1,\ f2)$