

Transformarea Fourier Rapidă (FFT)

Noțiuni teoretice

Transformarea Fourier rapidă

Interpolarea unui set de date alcătuit din $2m$ puncte folosind tehnica de calcul directă necesită efectuarea unui număr mare de operații (aproximativ $(2m)^2$ operații de înmulțire și $(2m)^2$ operații de adunare), motiv pentru care și eroarea obținută în cazul unui număr mare de puncte este foarte mare.

Tehnica directă presupune determinarea polinomului de interpolare trigonometrică pentru cele $2m$ puncte (x_j, y_j) , cu

$$x_j = -\pi + (j/m)\pi,$$

pentru oricare $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$ folosind formula următoare:

$$S_m(x) = \frac{a_0 + a_m \cos mx}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

unde:

- $a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j$, pentru oricare $k = 0, 1, \dots, m$
- $b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$, pentru oricare $k = 1, 2, \dots, m - 1$

Metoda alternativă de a determina forma polinomului de interpolare trigonometrică necesită $O(m \log_2 m)$ operații de înmulțire și $O(m \log_2 m)$ operații de adunare. Astfel, numărul de operații necesare pentru obținerea polinomului de interpolare trigonometrică devine de ordinul miilor, atunci când setul de date este de ordinul miilor, spre deosebire de calculul direct, unde numărul de operații este de ordinul milioane.

Metoda poartă numele de transformata Fourier rapidă (Fast Fourier Transform). În locul evaluării directe a constantelor a_k și b_k , transformarea Fourier rapidă modifică valoarea coeficienților complecși c_k în:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} c_k e^{ikx}$$

unde $c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}$, pentru oricare $k = 0, 1, \dots, 2m-1$.

Odată constantele c_k determinate, a_k și b_k pot fi calculate folosind formula lui *Euler*: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

În plus, pentru orice valoare întreagă a lui n :

$$e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n.$$

astfel încât $a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k$, cu precizarea că atât b_0 și b_m sunt egale cu 0 și nu contribuie la rezultatul final.

Presupunând că $m = 2^p$ (m este o putere a lui 2), pentru orice $k = 0, 1, \dots, m-1$, vom avea:

$$c_k + c_{k+m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} + \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{i(k+m)\pi j/m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} (1 + e^{\pi i j}).$$

Dar

$$1 + e^{\pi i j} = \begin{cases} 2 & \text{dacă } j \text{ este par} \\ 0 & \text{dacă } j \text{ este impar} \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că doar m termeni sunt diferiți de 0 și contribuie la rezultatul final.

Dacă înlocuim indicele j cu $2j$ atunci când scriem suma, vom obține:

$$c_k + c_{k+m} = 2 \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi(2j)/m},$$

echivalent cu relația:

$$c_k + c_{k+m} = 2 \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)}.$$

În mod similar,

$$c_k - c_{k+m} = 2e^{ik\pi/m} \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)}$$

Atât c_k și c_{k+m} pot fi determinate din cele două relații. Procesul va lua sfârșit după $p+1$ iterații.

Probleme rezolvate

Problema 1

Aplicați transformarea Fourier rapidă asupra unui set de $8 = 2^3$ puncte (x_j, y_j) , unde $x_j = -\pi + j\pi/4$, cu $j = 0, 1, \dots, 7$. Comparați numărul de operații folosite în cadrul tehnicii de calcul directe a polinomului de interpolare trigonometrică cu numărul de operații necesare în cadrul transformării Fourier rapide.

Soluție:

În acest caz, $2m = 8$, deci $m = 4 = 2^2$ și $p = 2$.

$S_4(x) = \frac{a_0 + a_4 \cos 4x}{2} + \sum_{k=1}^3 (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, unde

$a_k = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^7 y_j \cos kx_j$ și $b_k = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^7 y_j \sin kx_j$, pentru oricare $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Definim transformarea Fourier ca fiind:

$\frac{1}{4} \sum_{j=0}^7 c_k e^{ikx}$, unde $c_k = \sum_{j=0}^7 y_j e^{ik\pi j/4}$, pentru $k = 0, 1, \dots, 7$.

Pentru a determina constantele a_k și b_k vom folosi relația $a_k + ib_k = \frac{1}{4} e^{-ik\pi} c_k$.

Folosind calculul direct, obținem constantele c_k :

$$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$$

$$c_1 = y_0 + \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_1 + iy_2 + \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_3 - y_4 - \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_5 - iy_6 - \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_7$$

$$c_2 = y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 + y_4 + iy_5 - y_6 - iy_7$$

$$c_3 = y_0 + \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_1 - iy_2 + \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_3 - y_4 - \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_5 + iy_6 - \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_7$$

$$c_4 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7$$

$$c_5 = y_0 - \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_1 + iy_2 - \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_3 - y_4 + \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_5 - iy_6 + \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_7$$

$$c_6 = y_0 - iy_1 - y_2 + iy_3 + y_4 - iy_5 - y_6 + iy_7$$

$$c_7 = y_0 - \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_1 - iy_2 - \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_3 - y_4 + \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)y_5 + iy_6 + \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)y_7$$

Pentru că, în acest caz, setul de date este unul mic, mulți dintre coeficienții termenilor y_i sunt egali cu 1 sau cu -1 . Pentru a putea compara număr de operații necesare, vom lua în considerare și înmulțirile cu 1 și cu -1 . Astfel, sunt necesare 64 de înmulțiri/împărțiri și 56 operații de adunare/scădere pentru obținerea constantelor c_0, c_1, \dots, c_7 folosind calculul direct.

Pentru a determina primul pas din transformarea Fourier rapidă, vom defini:

$$d_0 = \frac{c_0 + c_4}{2} = y_0 + y_2 + y_4 + y_6$$

$$d_1 = \frac{c_0 - c_4}{2} = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$$

$$d_2 = \frac{c_1 + c_5}{2} = y_0 + iy_2 - y_4 - iy_6$$

$$d_3 = \frac{c_1 - c_5}{2} = \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)(y_1 + iy_3 - y_5 - iy_7)$$

$$d_4 = \frac{c_2 + c_6}{2} = y_0 - y_2 + y_4 - y_6$$

$$d_5 = \frac{c_2 - c_6}{2} = i(y_1 - y_3 + y_5 - y_7)$$

$$d_6 = \frac{c_3 + c_7}{2} = y_0 - iy_2 - iy_4 + iy_6$$

$$d_7 = \frac{c_3 - c_7}{2} = \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)(y_1 - iy_3 - y_5 + iy_7)$$

Pentru cel de-al doilea pas din transformarea Fourier rapidă, vom defini:

$$e_0 = \frac{d_0 + d_4}{2} = y_0 + y_4$$

$$e_1 = \frac{d_0 - d_4}{2} = y_2 + y_6$$

$$e_2 = \frac{id_1 + d_5}{2} = i(y_1 + y_5)$$

$$e_3 = \frac{id_1 - d_5}{2} = i(y_3 + y_7) \quad e_4 = \frac{d_2 + d_6}{2} = y_0 - y_4$$

$$e_5 = \frac{d_2 - d_6}{2} = i(y_2 - y_6)$$

$$e_6 = \frac{id_3 + d_7}{2} = \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)(y_1 - y_5)$$

$$e_7 = \frac{id_3 - d_7}{2} = i\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)(y_3 - y_7)$$

Cel de-al treilea pas ($3 = p + 1$) al transformării presupune definirea:

$$f_0 = \frac{e_0 + e_4}{2} = y_0$$

$$f_1 = \frac{e_0 - e_4}{2} = y_4$$

$$f_2 = \frac{ie_1 + e_5}{2} = iy_2$$

$$f_3 = \frac{ie_1 - e_5}{2} = iy_6$$

$$f_4 = \frac{(\frac{i+1}{\sqrt{2}})e_2 + e_6}{2} = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_1$$

$$f_5 = \frac{(\frac{i+1}{\sqrt{2}})e_2 - e_6}{2} = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_5$$

$$f_6 = \frac{(\frac{i-1}{\sqrt{2}})e_3 + e_7}{2} = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_3$$

$$f_7 = \frac{(\frac{i-1}{\sqrt{2}})e_3 - e_7}{2} = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_7$$

Valorile c_0, c_1, \dots, c_7 , d_0, d_1, \dots, d_7 , e_0, e_1, \dots, e_7 , f_0, f_1, \dots, f_7 sunt independente de setul de puncte și depind doar de valoarea lui $m = 4$. Pentru fiecare valoare m , există un set unic de constante c_k, d_k, e_k, f_k , cu $k = 0, 1, \dots, 7$. Calculele anterioare nu sunt neapărat necesare în cadrul unei aplicații.

În cele ce urmează vom prezenta calculele necesare pentru determinarea polinomului de interpolare trigonometrică folosind transformata Fourier rapidă:

Determinarea valorilor f_k :

$$f_0 = y_0; f_1 = y_4; f_2 = iy_2; f_3 = iy_6;$$

$$f_4 = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_1; f_5 = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_5; f_6 = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_3; f_7 = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_7;$$

Determinarea valorilor e_k :

$$e_0 = f_0 + f_1; e_1 = -i(f_2 + f_3); e_2 = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})(f_4 + f_5); e_3 = -(\frac{i+1}{\sqrt{2}})(f_6 + f_7);$$

$$e_4 = f_0 - f_1; e_5 = f_2 - f_3; e_6 = f_4 - f_5; e_7 = f_6 - f_7;$$

Determinarea valorilor d_k :

$$d_0 = e_0 + e_1; d_1 = -i(e_2 + e_3); d_2 = e_4 + e_5; d_3 = -i(e_6 + e_7);$$

$$d_4 = e_0 - e_1; d_5 = e_2 - e_3; d_6 = e_4 - e_5; d_7 = e_6 - e_7;$$

Determinarea valorilor c_k :

$$c_0 = d_0 + d_1; c_1 = d_2 + d_3; c_2 = d_4 + d_5; c_3 = d_6 + d_7;$$

$$c_4 = d_0 - d_1; c_5 = d_2 - d_3; c_6 = d_4 - d_5; c_7 = d_6 - d_7;$$

Analizând numărul de operații necesare în acest caz, vom obține 24 de înmulțiri / împărțiri și 24 de operații de adunare / scădere.

Probleme propuse

Problema 1

Implementați în OCTAVE algoritmul de determinare al polinomului de interpolare trigonometrică pentru $2m$ puncte (x_j, y_j) , cu $x_j = -\pi + (j/m)\pi$, pentru oricare $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$, folosind transformarea Fourier rapidă. Datele de intrare sunt: m putere a lui 2, unde $2m$ este numărul de puncte din setul de date; valorile $y_0, y_1, \dots, y_{2m-1}$. Datele de ieșire sunt: valorile complexe $c_0, c_1, \dots, c_{2m-1}$.

Problema 2

Determinați polinomul de interpolare trigonometrică de grad 5, pe intervalul $[0, 3]$, pentru setul de date $(j/5, f(j/5))$ cu $j = 0, 1, \dots, 9$, unde:

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + \tan(x - 1).$$