Metoda Romberg. Cuadraturi Gaussiene

Noţiuni preliminare

Ne propunem să calculăm în mod aproximativ valorile $I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$ și $D[f] = f^{(p)}(x_0)$, în condiţiile:

- funcţia f este continuă pe $[a, b]$;
- primitiva F nu este cunoscută;
- funcţia f este cunoscută numai prin valorile $f(x_i)$ pe care le ia într-un număr restrâns de puncte $x_i,\ i = 0 : N$.

Definim o metodă aproximativă de integrare astfel:

$$I_N[f] = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} \cdot f(x_{iN})$$

Metoda aproximativă de aproximare este convergentă dacă

$$\lim_{N\to\infty} |I[f] - I_N[f]| = 0.$$

Cuadraturi Gaussiene

Metodele de tip Newton-Cotes au gradul de valabilitate N (sunt exacte pentru polinoame până la gradul N inclusiv). Dacă în formula aproximativă de integrare:

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN})$$

se aleg nodurile x_{iN} ca rădăcini ale unui polinom ortogonal, definit în mod unic în raport cu a, b şi funcţia pondere w(x), gradul de valabilitate al formulei devine $2N+1$.

Coeficienţii A_{iN} se vor determina impunând ca formula să aibă grad de valabilitate N (să fie exactă pentru funcţiile $1, x, \cdots, x^N$). Acest fapt conduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare.

Pentru polinoamele ortogonale uzuale, se obţin următoarele formule de integrare:

- Cebâşev ordin 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(cos \frac{(2i+1)\pi}{2N} \right)$$

- Legendre

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN}), \ A_{iN} = \frac{2\left(1-x_{iN}^2\right)}{N^2 L_{N-1}^2 (x_{iN})}$$

- Laguerre

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN}), \ A_{iN} = \frac{x_{iN}}{(N+1)^2 G_{N+1}^2 (x_{iN})}$$

- Hermite

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N} A_{iN} f(x_{iN}), \ A_{iN} = \frac{2^{N+1} N! \sqrt{\pi}}{H_{N+1}^2 (x_{iN})}$$

Metoda Romberg

Se formează matricea:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & & & \\ I_{21} & I_{22} & & \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ I_{N1} & I_{N2} & \cdots & I_{NN} \end{bmatrix}$$

în care prima coloană $I_{11}, I_{21}, \cdots, I_{N1}$ reprezintă estimările integralelor calculate cu formula compusă Simpson, considerând $2^0, 2^1, \cdots, 2^{N-1}$ intervale. I_{N1} poate fi obţinut prin recurenţă din $I_{N-1,1}$ cu formula:

$$I_{N,1} = \frac{1}{2}\left[I_{N-1,1} + \frac{b-a}{2^{N-1}}\sum_{i=1,\Delta i=2}^{2^N-1} f\left(a + \frac{b-a}{2^N}i\right)\right]$$

Elementele din coloana j se calculează cu relaţia de recurenţă:

$$I_{k,j} = \frac{4^{j-1}I_{k,j-1} - I_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1}, j = 2:n, k = j:n$$

Fiecare coloană converge către I, cu atât mai rapid cu cât este situată mai la dreapta. Pentru o coloană j, calculul iterativ este oprit în momentul în care $|I_{k,j} - I_{k-1,j}| < \varepsilon \cdot |I_{k,j}|$.

Probleme rezolvate

Problema 1

Calculaţi aproximativ integrala $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Soluţie:

Ca prim pas, facem schimbarea de variabilă $t = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$.

$x = 0 \Rightarrow t = -1$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

Atunci integrala devine:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{2\sqrt{\left(\frac{t+1}{2}\right)\left(1-\frac{t+1}{2}\right)}}dt = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}dt = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^4}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Identificăm

$$f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^4, \quad w(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Din formula de integrare Cebâşev, avem:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(cos(x_i)\right), \quad x_i = \frac{(2i+1)\pi}{2N}.$$

Deoarece f este un polinom de grad 4, vrem ca formula utilizată pentru aproximare să aibă grad de valabilitate ≥ 4, folosind cât mai puţine puncte.

Alegem $N = 3$, iar gradul de valabilitate va fi 5.

$$x_0 = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_2 = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În final, formula de integrare devine:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}\right)^4\right].$$

Problema 2

Se consideră integrala

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

Determinați formula de integrare

$$I \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3).$$

Precizaţi gradul de valabilitate al formulei.

Soluţie:

În formula de integrare gaussiană:

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i),$$

nodurile x_i sunt determinate din condiţia de ortogonalitate a polinomului $\pi(x) = \prod_{i=0}^{N}(x-x_i)$ cu un polinom oarecare de grad mai mic decât cel al lui π, în particular x^k. Avem astfel:

$\int_a^b \pi(x)\cdot w(x)\cdot x^k dx = 0, \quad k = 0 : n-1.$

În cazul nostru,

$\pi(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad w(x) = 1$

$\int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right) x^k dx = 0, \quad k = 0 : 2$, care conduce la sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + 2c = 0 \\ \frac{2}{3}b = -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = 0 \end{cases}$$, cu soluţia $a = c = 0, b = -\frac{3}{5}$.

$\pi(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, cu rădăcinile $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Pentru determinarea coeficienţilor a_1, a_2, a_3 impunem condiţia ca formula de integrare să fie exactă pentru funcţiile 1, x, x^2. Astfel:

$f(x) = 1 : \qquad \int_{-1}^{1} dx = a_1 + a_2 + a_3 = 2$

$f(x) = x : \qquad \int_{-1}^{1} x dx = -\sqrt{\frac{3}{5}}a_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}a_3 = 0$

$f(x) = x^2 : \qquad \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{3}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3 = \frac{2}{3}$

De aici, găsim că $a_1 = a_3 = \frac{5}{9}, \quad a_2 = \frac{8}{9}$.

În final, formula de integrare devine:

$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, iar gradul ei de valabilitate este 5.

Probleme propuse

Problema 1

Implementaţi în OCTAVE metoda Romberg şi aproximaţi cu ajutorul ei integrala $\int_3^5 x\log(x)dx$.

Problema 2

Se consideră formula de integrare:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3) + b_1 f(-1) + b_2 f(1).$$

Determinaţi x_i, a_i, $i = 1:3$ şi b_j, $j = 1:2$ astfel încât formula să aibă grad maxim de valabilitate.

Indicaţie: Nodurile x_1, x_2, x_3 se determină din condiţiile de ortogonalitate

$$\int_{-1}^{1} \pi(x)\rho(x)x^k dx = 0, \qquad k = 0:2,$$

în care $\pi(x) = \prod_{i=1}^{3}(x - x_i)$, $\rho(x) = (x-1)(x-2)$.

Problema 3

Se consideră formula de integrare:

$$\int_{0}^{a} f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + b_1 f(0) + b_2 f(a).$$

Determinaţi x_i, a_i, b_i, $i = 1:2$ astfel încât formula să aibă grad de valabilitate maxim.

Indicaţie: Nodurile x_1 şi x_2 se determină din condiţiile de ortogonalitate

$$\int_{-1}^{1}(x-x_1)(x-x_2)x(x-a)x^k dx = 0, \qquad k = 0:1.$$

Coeficienţii se determină impunând formulei de integrare un grad de valabilitate corespunzător.

Problema 4

Pentru formula de integrare:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} a_i f(x_i),$$

să se arate că dacă integrarea se face prin cuadratură Gaussiană, atunci

$$a_i = \int_a^b w(x)l_i^2(x)dx,$$

în care l_i reprezintă multiplicatorii din formula de interpolare Lagrange.

Problema 5

Formula de integrare Gauss-Radau are forma:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=0}^{N} a_i f(x_i),$$

este exactă pentru polinoame de grad $\leq N$ şi utilizează ca abscise x_i zerourile polinomului $T_{N+1}(x) - T_N(x)$.

a) Dezvoltaţi o formulă de integrare cu $N = 3$.

b) Scrieţi o funcţie OCTAVE care implementează metoda de integrare pentru N oarecare.