Metode predictor-corector pentru integrarea ecuaţiilor diferenţiale

Noţiuni teoretice

Metodele cu paşi separaţi sunt utilizate datorită simplităţii lor şi a faptului că necesită puţine informaţii iniţiale. Ele au dezavantajul lipsei de precizie.

O altă categorie de metode folosite pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale este reprezentată de *metodele cu paşi legaţi* (numite şi *metode multipas*). Metodele cu paşi legaţi folosesc mai multe informaţii iniţiale deci sunt mai precise decât metodele cu paşi separaţi. Există două tipuri de metode cu paşi legaţi: *metode explicite* şi *metode implicite*. În cele ce urmează, folosim notaţia: $y_k = y(x_k)$ şi $f_k = f(x_k, y_k)$.

O metodă explicită, cunoscută sub numele de metoda Adams-Bashforth, are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^{r} c_j \nabla^j f_k$$

O metodă implicită, cunoscută sub numele de metoda Adams-Moulton, are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=0}^{r} d_j \nabla^j f_{k+1}$$

Numărul r defineşte ordinul metodei cu paşi legaţi. Dezvoltând diferenţele regresive se obţine o recurenţă liniară, general valabilă pentru metodele cu paşi legaţi, de forma:

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_j y_{k-j} + h \sum_{j=-1}^{r-1} \beta_j f_{k-j}$$

unde dacă $\beta_{-1} = 0$ se obţine relaţia pentru metoda Adams-Bashforth, altfel se obţine relaţia pentru metoda Adams-Moulton. Pentru a determina coeficienţii α_j, β_j, vom impune condiţia următoare: soluţia exactă $y(x)$ a relaţiei generale pentru metodele cu paşi legaţi să fie adevarată pentru polinoamele $1, x, x^2, ...$. Mai mult, se aleg punctele intermediare $x_{k-r+1}, ..., x_{k+1}$ echidistante cu $h = 1$ şi originea în x_{k-r+1}.

Prin îmbinarea unei metode explicite cu una implicită se obţin *metode predictor-corector*. Metodele predictor-corector presupun folosirea metodei explicite pentru predicţia unei valori y_{k+1} iar aceasta valoare se corecteză, ulterior, prin metoda implicită.

Astfel, putem aplica metoda Adams-Bashforth de ordin 3 pentru a calcula $y_{k+1}^{(p)}$ (y_{k+1} prezis, de unde provine şi superscriptul (p)):

$$y_{k+1}^{(p)} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$$

Mai departe, putem corecta valoarea $y_{k+1}^{(p)}$ folosind metoda Adams-Moulton de ordin 2 şi se obţine $y_{k+1}^{(c)}$ (y_{k+1} corectat, de unde provine şi superscriptul (c)):

$$y_{k+1}^{(c)} = y_k + \frac{h}{12}[5f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(p)}) + 8f_k - f_{k-1}]$$

Probleme rezolvate

Problema 1

Determinaţi coeficienţii formulelor explicite şi implicite de tip Adams, de ordin 3.

Soluţie:

Metoda Adams-Bashforth de ordin 3 are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h(\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2})$$

Pentru început, alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3$. Prin urmare, obţinem:

$y = 1 \Rightarrow f = y^{'} = 0 \Rightarrow 1 = 1$

$y = x \Rightarrow f = y^{'} = 1 \Rightarrow 3 = 2 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$

$y = x^2 \Rightarrow f = y^{'} = 2x \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (4\beta_0 + 2\beta_1) \Rightarrow 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5$

$y = x^3 \Rightarrow f = y^{'} = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + (12\beta_0 + 3\beta_1) \Rightarrow 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19$

Se formează sistemul:

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5 \\ 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19 \end{cases}$$

cu soluţia $\beta_0 = \frac{23}{12}, \beta_1 = \frac{-4}{3}, \beta_2 = \frac{5}{12}$.

Astfel, obţinem forma finală pentru metoda Adams-Bashforth de ordin 3:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2})$$

Metoda implicită Adams-Moulton de ordin 3 are forma:

$$y_{k+1} = y_k + h(\beta_{-1}f_{k+1} + \beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2})$$

Alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3, x^4$. Prin urmare, obţinem:

$y = 1 \Rightarrow f = y^{'} = 0 \Rightarrow 1 = 1$

$y = x \Rightarrow f = y^{'} = 1 \Rightarrow 3 = 2 + (\beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1$

$y = x^2 \Rightarrow f = y^{'} = 2x \Rightarrow 3^2 = 2^2 + (6\beta_{-1} + 4\beta_0 + 2\beta_1) \Rightarrow 6\beta_{-1} + 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5$

$y = x^3 \Rightarrow f = y^{'} = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + (27\beta_{-1} + 12\beta_0 + 3\beta_1) \Rightarrow 27\beta_{-1} + 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19$

$y = x^4 \Rightarrow f = y^{'} = 4x^3 \Rightarrow 3^4 = 2^4 + (108\beta_{-1} + 32\beta_0 + 4\beta_1) \Rightarrow 108\beta_{-1} + 32\beta_0 + 4\beta_1 = 65$

Se formează sistemul:

$$\begin{cases} \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1 \\ 6\beta_{-1} + 4\beta_0 + 2\beta_1 = 5 \\ 27\beta_{-1} + 12\beta_0 + 3\beta_1 = 19 \\ 108\beta_{-1} + 32\beta_0 + 4\beta_1 = 65 \end{cases}$$

cu soluţia $\beta_{-1} = \frac{9}{24}, \beta_0 = \frac{19}{24}, \beta_1 = \frac{-5}{24}, \beta_2 = \frac{1}{24}$.

Atunci, forma finală pentru metoda Adams-Moulton de ordin 3 este:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} - f_{k-2})$$

Problema 2

Pentru rezolvarea problemei diferenţiale cu condiţii iniţiale: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, se foloseşte următoarea formulă explicită, respectiv implicită:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{k-j}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{2} \beta_j f_{k+1-j}$$

a) Determinaţi coeficienţii β astfel încât formulele să aibă gradul de valabilitate maxim.

b) Definiţi o metodă predictor-corector folosind aceste formule.

Soluţie:

a) Pentru formula:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h(\beta_0 f_k + \beta_1 f_{k-1} + \beta_2 f_{k-2})$$

alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3$. Avem:

$y = 1 \Rightarrow f = y^{'} = 0 \Rightarrow 1 = 1$

$y = x \Rightarrow f = y^{'} = 1 \Rightarrow 3 = 1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_1 = 2$

$y = x^2 \Rightarrow f = y^{'} = 2x \Rightarrow 3^2 = 1^2 + (4\beta_0 + 2\beta_1) \Rightarrow 4\beta_0 + 2\beta_1 = 8$

$y = x^3 \Rightarrow f = y^{'} = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 1^3 + (12\beta_0 + 3\beta_1) \Rightarrow 12\beta_0 + 3\beta_1 = 26$

Sistemul obţinut are soluţia $\beta_0 = \frac{7}{3}, \beta_1 = \frac{-2}{3}, \beta_2 = \frac{1}{3}$. Prin urmare, prima formulă are forma:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(7f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2})$$

Pentru formula:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h(\beta_0 f_{k+1} + \beta_1 f_k + \beta_2 f_{k-1})$$

alegem punctele: $x_{k-2} = 0, x_{k-1} = 1, x_k = 2, x_{k+1} = 3$ cu $h = 1$. Dorim ca formula să fie exactă pentru polinoamele $1, x, x^2, x^3$. Avem:

$y = 1 \Rightarrow f = y^{'} = 0 \Rightarrow 1 = 1$

$y = x \Rightarrow f = y^{'} = 1 \Rightarrow 3 = 1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) \Rightarrow \beta_0 + \beta_1 + \beta_1 = 2$

$y = x^2 \Rightarrow f = y^{'} = 2x \Rightarrow 3^2 = 1^2 + (6\beta_0 + 4\beta_1 + 2\beta_2) \Rightarrow 6\beta_0 + 4\beta_1 + 2\beta_2 = 8$

$y = x^3 \Rightarrow f = y^{'} = 3x^2 \Rightarrow 3^3 = 1^3 + (27\beta_0 + 12\beta_1 + 3\beta_2) \Rightarrow 27\beta_0 + 12\beta_1 + 3\beta_2 = 26$

Sistemul obţinut are soluţia $\beta_0 = \frac{1}{3}, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_2 = \frac{1}{3}$. Prin urmare, a doua formulă are forma:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1})$$

b) Formula explicită furnizează predicţia:

$$y_{k+1}^{(p)} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(7f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2})$$

iar formula implicită corectează această valoare, astfel:

$$y_{k+1}^{(c)} = y_{k-1} + \frac{h}{3}[f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(p)}) + 4f_k + f_{k-1}]$$

Probleme propuse

Problema 1

Scrieţi o funcţie OCTAVE care să rezolve o ecuaţie diferenţială de ordin 1 folosind metoda predictor-corector obţinută prin îmbinarea unei metode Adams-Bashforth de ordin 3 cu o metoda Adams-Moulton de ordin 2 (vezi secţiunea *Noţiuni teoretice*). Valorile iniţiale ale soluţiei se vor aproxima folosind metoda Runge-Kutta de ordin 4. Funcţia va avea următorii parametrii de intrare: a, b - capătul superior, respectiv inferior al intervalului de integrare; n - numărul de puncte; $y0$ - condiţia iniţială; f - funcţia de integrat $f(x, y)$. Rezultatul funcţiei va fi y, reprezentând vectorul aproximaţiilor soluţiei ecuaţiei diferenţiale.

Date de intrare:	**Date de ieşire:**
$a = 0, b = 3, n = 10, y0 = 0.5, @functie$	$y = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.213770 \\ -0.079085 \\ -0.431703 \\ -0.903119 \\ -1.557205 \\ -2.445785 \\ -3.571678 \\ -4.841284 \\ -6.043362 \\ -6.899990 \end{bmatrix}$

unde am considerat funcţia $f(x, y)$ definită astfel:

```
function rez = functie(x, y)
   rez = y*sin(x)-1;
endfunction
```

Listing 1: Exemplu de funcţie de integrat.

Problema 2

Pentru problema diferenţială cu condiţii iniţiale: $y' = f(y, t), y(t_0) = y_0$, se consideră formula aproximativă de integrare:

$$y_{k+1} = y_k + h(\alpha_1 y'_{k+1} + \alpha_0 y'_k) + h^2(\beta_1 y''_{k+1} + \beta_0 y''_k)$$

Determinaţi $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ şi β_1 astfel încât formula să aibă gradul de valabilitate cât mai mare.

Problema 3

Pentru problema diferenţială cu condiţii iniţiale: $y' = f(y, t)$, $y(t_0) = y_0$:

a) Calculaţi coeficienţii formulelor explicite şi implicite de tip Adams, de ordin 2.

b) Definiţi cu cele două formule o metodă predictor-corector şi scrieţi o funcţie în OCTAVE care implementează această metodă.