

第一章 概率

§ 1 引言

§ 2 样本空间

§ 3 概率测度 (probability measure)

§ 4 概率计算: 计数方法

§ 5 条件概率

§ 6 独立性

概率论公理化的三种学派

① 1921年以凯恩斯(J. M. Keynes)为代表的“主观概率学派”

凯恩斯主张把任何命题都看作事件,例如“明天将下雨”,“土星上有生命”等等都是事件,人们对这些事件的可信程度就是概率,而与随机试验无关,通常称为**主观概率**.

② 1928年以冯·米泽斯(von Mises)为代表的“客观概率学派”

米泽斯定义事件的概率为该事件出现的频率的极限,而作为公理就必须把这一极限的存在作为第一条公理,通常称为**客观概率**.

③ 1933年以柯尔莫哥洛夫为代表的“以测度论为基础的概率公理化体系”

目前,绝大多数教科书都是采用柯尔莫哥洛夫的概率公理化体系.

概率论 研究随机现象的统计规律性的数学学科



问题一 什么是统计规律性？

统计规律性是指在大量试验中呈现出的数量规律



问题二 什么是概率？

用频率来刻画

概率是指刻画随机事件在一次试验中发生的可能性大小的数量指标，这个数量指标应该满足：

① 它是事件固有的，不随人们主观意愿而改变；可以在相同条件下通过大量重复试验予以识别和检验

② 符合常情：事件发生可能性大，该值就大，反之就小；不可能事件的值最小(0)；必然事件的值最大(1)

频率

令 设 A 为一随机事件，在相同条件下进行 n 次重复试验

$n_A = n$ 次试验中 A 发生的次数

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称 n_A 为事件 A 的 **频数**， $f_n(A)$ 为事件 A 的 **频率**。

频率的一般特性

- ① 一般地 n 越大，则 n_A 越大
- ② $n_A, f_n(A)$ 的值是“随机的”
- ③ $0 \leq f_n(A) \leq 1$

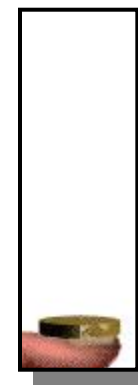
 **问** 频率是否有统计规律性？

实例一 “抛硬币” 试验

将一枚硬币连续抛 n 次，记

$$H = \{ \text{出现正面} \}$$

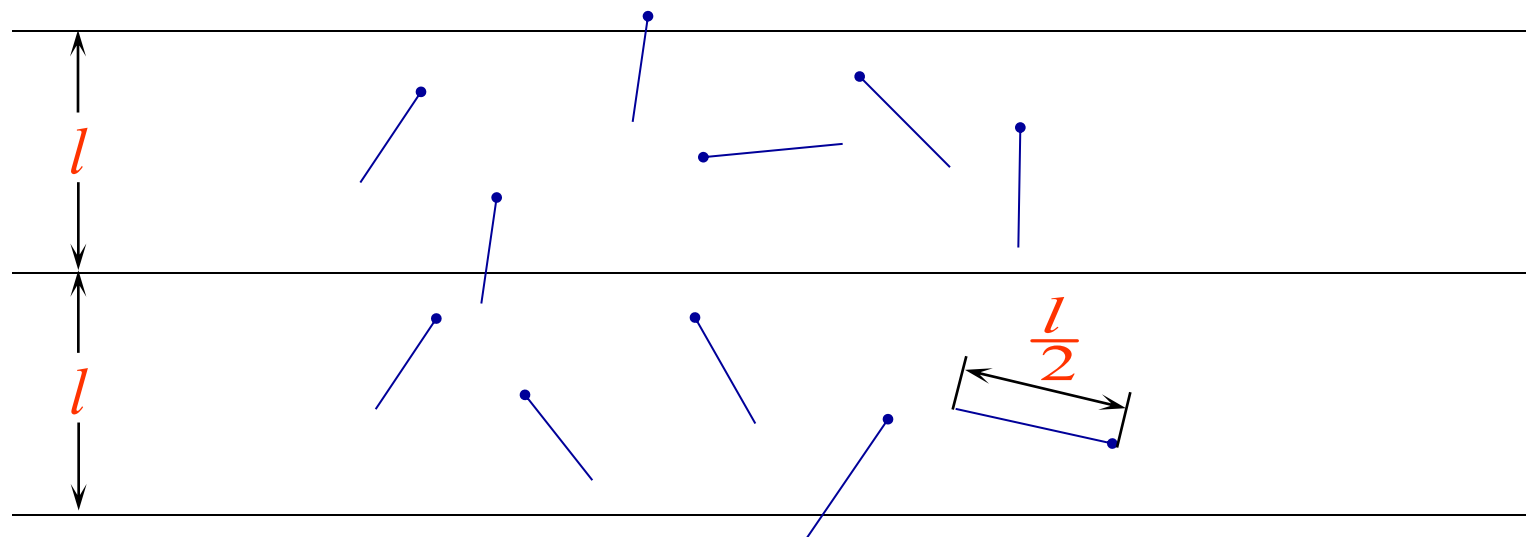
问 $f_n(H)$ 有什么规律？



历史上有名的“抛硬币” 试验

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4048	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

实例二 “蒲丰投针试验”



记投针的总数为 n , 针与平行线相交的次数为 n_A

则

$$\frac{n_A}{n} \approx \frac{1}{\pi}$$

$$\therefore \frac{n}{n_A} \approx \pi$$

<http://www.math.uah.edu/stat/apps/BufonNeedleExperiment.html>

实例三 考察英语文章中26个字母出现的频率, 当观察次数 n 较大时, 每个字母出现的频率呈现稳定性, 下面是 Dewey 统计了438023个字母得到的统计表

字母	频率	字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.1268	R	0.0594	M	0.0244	K	0.0060
T	0.0978	H	0.0573	W	0.0214	X	0.0016
A	0.0788	L	0.0394	Y	0.0202	J	0.0010
O	0.0776	D	0.0389	G	0.0187	Q	0.0009
I	0.0707	U	0.0280	P	0.0186	Z	0.0006
N	0.0706	C	0.0268	B	0.0156		
S	0.0634	F	0.0256	V	0.0102		

字母统计表的应用 ? 密码破译

实例四 在“掷骰子”试验中，记事件

$$A_i = \{\text{出现 } i \text{ 点}\}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$



将一颗骰子连续掷 n 次， $f_n(A_i)$ 有什么规律？

分析 如果一颗骰子六个面是均匀的，则当 n 很大时有应有

$$f_n(A_i) = \frac{n_{A_i}}{n} \approx \frac{1}{6} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

随机事件的统计规律性

当 n 很大时, 事件 A 的频率 $f_n(A)$ 接近一个常数

$$\underline{f_n(A) \rightarrow p \quad (n \rightarrow +\infty)}$$

频率的稳定性

注 ① 常数 p 就是事件 A 发生的可能性大小, 即概率

② 由于频率的取值是“随机的”, 那么极限

$$f_n(A) \rightarrow p \quad (n \rightarrow +\infty)$$

是什么意思值得研究 (第五章讨论该问题)

频率的基本性质

1 $0 \leq f_n(A) \leq 1$

2 $f_n(\Omega) = 1$

3 若 A_1, A_2, \dots, A_m
事件

$$\forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m \\ A_i \cap A_j = \Phi$$

是两两不相容则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i)$$

有限可加性

这三条性质刻画了频率的本质特征，启发我们定义事件的概率

频率的基本性质

① $0 \leq f_n(A) \leq 1$

② $f_n(\Omega) = 1$

③ 若 A_1, A_2, \dots, A_m 是两两不相容事件

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i)$$

有限可加性

概率的公理化定义

定义 设 \mathcal{A} 为样本空间 Ω 上的事件域, $\forall A \in \mathcal{A}$, 若存在实数 $P(A)$ 与之对应, 且满足

① 非负性: $P(A) \geq 0$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)

② 规范性: $P(\Omega) = 1$

③ 可列可加性: 对两两不相容的事件列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

σ 可加性

则称 $P(A)$ 为事件 A 的 **概率**, 称 $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ 为 **概率空间**.

概率的公理化定义

定义 设 \mathcal{A} 为样本空间 Ω 上的事件域, $\forall A \in \mathcal{A}$, 若存在实数 $P(A)$ 与之对应, 且满足

① 非负性: $P(A) \geq 0$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)

② 规范性: $P(\Omega) = 1$

③ 可列可加性: 对两两不相容的事件列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad \sigma\text{可加性}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**, 称 $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ 为**概率空间**.

注记

- ① 1933年苏联的柯尔莫哥洛夫在测度论基础上提出的概率论公理化体系
- ② 概率是定义在事件域上的特殊函数
- ③ 物体的长度, 区域的面积都具有“非负性”与“可加性”, 故“概率”实际上是对“事件”发生可能性大小的一种“度量”

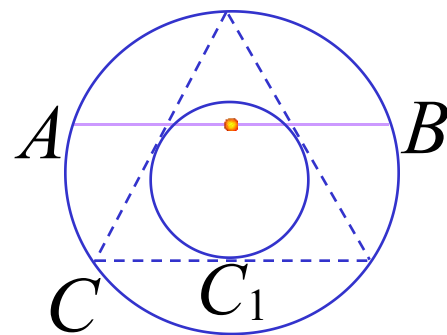
例 (贝特朗奇论) 在半径为 r 的圆 C 内“任意”作一弦, 试求此弦长度 l 大于圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}r$ 的概率 p .

解一: 作半径为 $r/2$ 的同心圆 C_1

设弦 AB 的中点 M “任意”落于圆 C_1 内

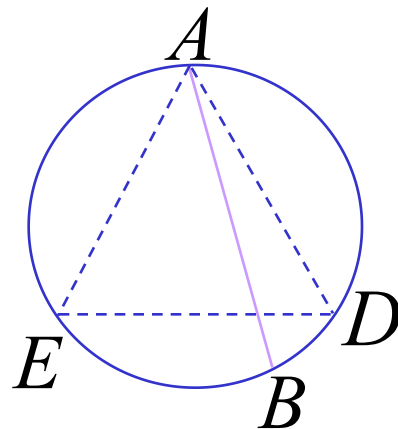
若 M 落于圆 C_1 内, 则 $l > \sqrt{3}r$, 于是

$$p = \frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$



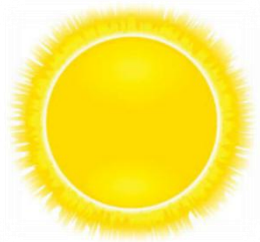
解二: 设弦 AB 的一端 A 固定于圆周上, 另一端任意. 考虑等边 $\triangle ADE$, 如 B 落于角 A 对应的弧 DE 上, 则 $l > \sqrt{3}r$, 于是

$$p = \frac{DE \text{ 的弧长}}{\text{圆周长}} = \frac{1}{3}$$



$\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$

例 设某地夏季天气只有3种状态：晴、阴(多云)、雨. 已知晴的可能性是阴的2倍，雨的可能性只有阴的一半，问三种天的概率为多少？



2

$$\frac{2}{2+1+1/2}$$

$$\frac{4}{7}$$



1

$$\frac{1}{2+1+1/2}$$

$$\frac{2}{7}$$

 $\frac{1}{2}$

$$\frac{1/2}{2+1+1/2}$$

$$\frac{1}{7}$$



归一化

概率的基本性质

性质① $P(\Phi) = 0$

$$\because \Phi = \Phi \cup \Phi \cup \dots$$

$$\therefore P(\Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) + \dots$$

因为概率为实数, 故 $P(\Phi) = 0$.

性质② 若 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两不相容的事件, 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

有限可加性

$$\because \bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \Phi \cup \Phi \dots$$

故由可列可加性, 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(\Phi) + P(\Phi) + \dots = 0 \\ &= P(A_1) + \dots + P(A_n) \end{aligned}$$

性质 ③ 若 $A \subset B$, 则

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$P(B) \geq P(A)$$

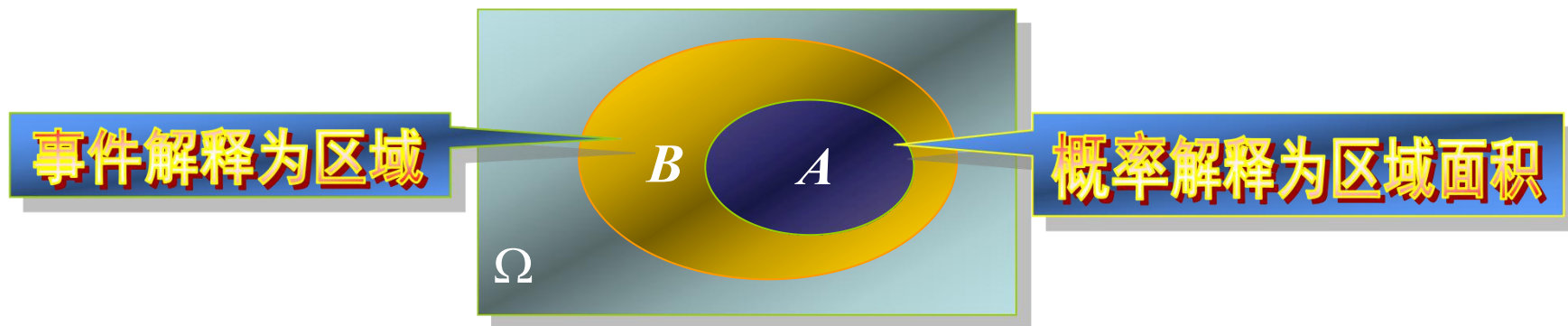
$$\because A \subset B \quad \therefore B = A \cup (B - A)$$

因 $A, B - A$ 互不相容, 故由有限可加性有

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

再由概率非负性得 $P(B) \geq P(A)$

事件与概率的图示



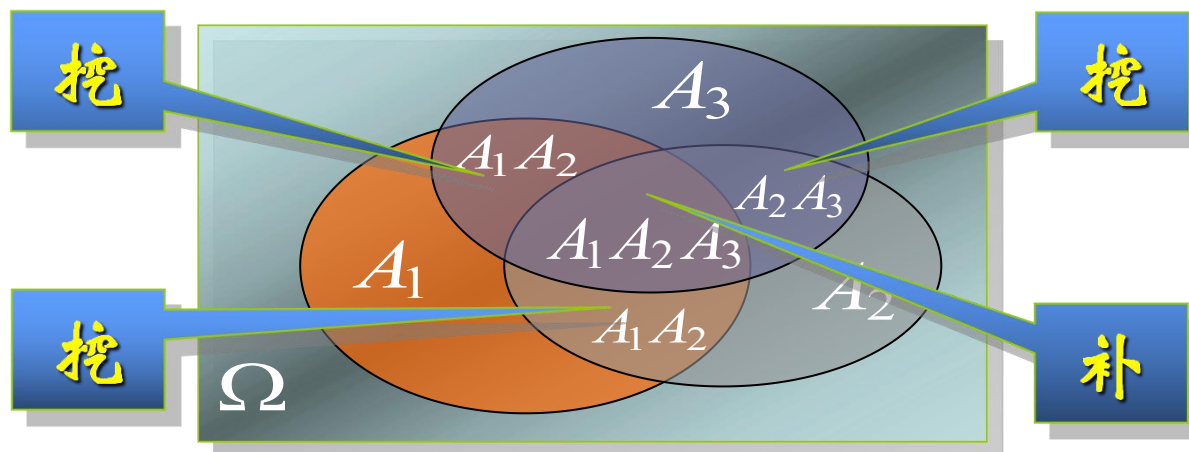
性质④ $0 \leq P(A) \leq 1$

性质⑤ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质③ (加法定律) 对任何事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

对于三事件 A_1, A_2, A_3 有



$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) \\ &\quad + P(A_1A_2A_3) \end{aligned}$$

挖补原理 多事件的加法定律

对于 n 个事件, 有

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\
 & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) \\
 & - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} P(A_i A_j A_k A_l) \\
 & + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)
 \end{aligned}$$

减二

全加

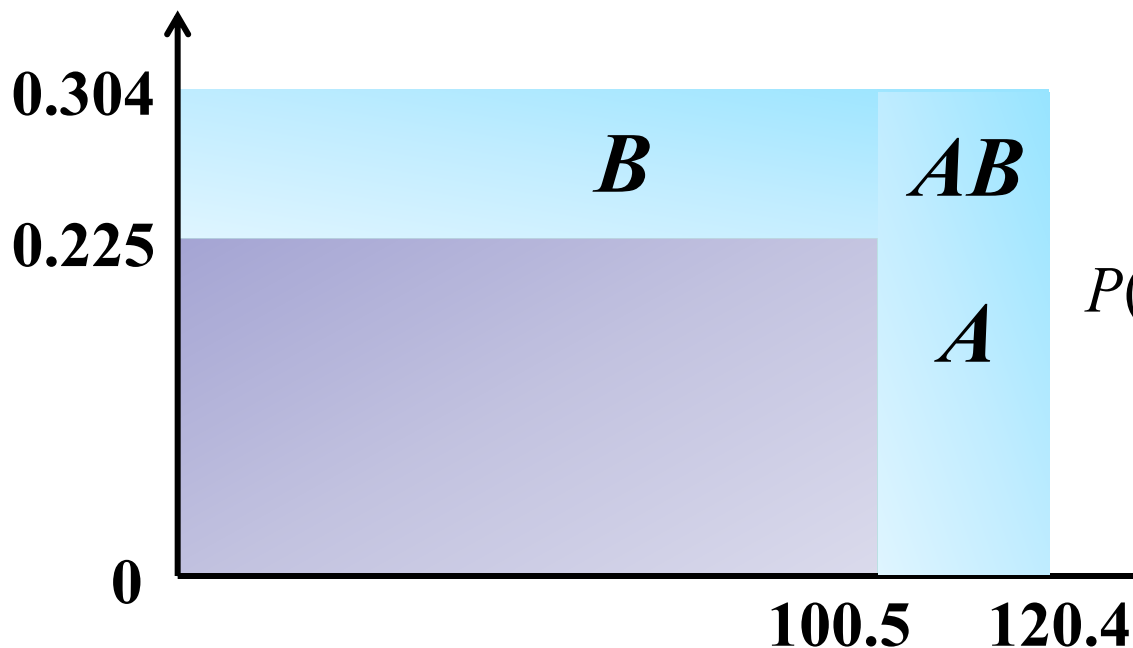
加三

减四

挖补规律: 加奇减偶

例 已知空气中PM2.5含量一般在0.0-120.4 ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)之间, SO_2 含量一般在0.000-0.304 (ppm)之间, 假设在上述范围内取值为等可能的. 一般认为, PM2.5含量在 $100.5\mu\text{g}/\text{m}^3$ 以上或 SO_2 含量在0.225ppm以上为对人体有害. 问空气质量为有害的概率是多少?

SO_2 含量(ppm)



$$P(A)=0.165$$

$$P(B)=0.260$$

$$P(AB)=0.043$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0.382 \end{aligned}$$

或利用对立事件计算



课后作业

P20: 4, 7

补充题: ↵

1. 设 A, B, C 是三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$,

$P(AC) = \frac{1}{8}$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率. ↵

2. 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$, 且 $P(A) = p$. 求 $P(B)$. ↵

↵

END