

第一章 概率

§ 1 引言

§ 2 样本空间

§ 3 概率测度

§ 4 概率计算：计数方法

§ 5 条件概率

§ 6 独立性 (independence)



问题的背景

抛甲、乙两枚硬币，观察正反面出现的情况，则样本空间是 $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$

记事件 $A = \{\text{甲出现正面}\}$, $B = \{\text{乙出现正面}\}$

从直观上看

A, B 之间是没有任何关系的, 它们具有 “独立性”

从数学上看

$$A, B \text{ “独立”} \iff P(A | B) = P(A), P(B | A) = P(B)$$

$$\iff P(AB) = P(A | B)P(B)$$

$$= P(B | A)P(A) = P(A)P(B)$$

定义 设 A, B 是两个事件, 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

 **问** A, B 独立与 A, B 不相容有什么关系?

分析 A, B 独立 $\iff P(AB) = P(A)P(B)$

A, B 不相容 $\iff AB = \emptyset$

故当 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 时

A, B 独立
 A, B 不相容
 }
 不能同时成立

 **问** 若 A, B 独立, 问 \bar{A}, \bar{B} 是否独立?

分析 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则

$$P(AB) = P(A)(1 - P(\bar{B})) = P(A) - P(A)P(\bar{B})$$

$$\therefore P(A)P(\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A - AB) = P(A\bar{B})$$

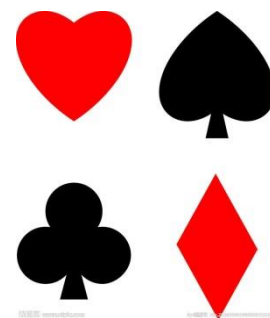
故 A, \bar{B} 独立, 从而 \bar{A}, B 独立, \bar{A}, \bar{B} 独立.

例 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记
 $A = \{ \text{抽到K} \}$, $B = \{ \text{抽到的牌是黑色的} \}$,
问事件 A 、 B 是否独立？

解 由于 $P(A)=4/52=1/13$, $P(B)=26/52=1/2$,
 $P(AB)=2/52=1/26$.

可见, $P(AB)=P(A)P(B)$,

故 事件 A 、 B 独立.



再一次说明：独立与不相容没有关系

小练习：独立与不相容的区别和联系

I. 设 A 、 B 为不相容事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$ ，
下面四个结论中，正确的是

- | | |
|-----------------|---------------------|
| 1. $P(B A)>0$ | 2. $P(A B)=P(A)$ |
| 3. $P(A B)=0$ ✓ | 4. $P(AB)=P(A)P(B)$ |

II. 设 A 、 B 为独立事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$ ，
下面四个结论中，正确的是 (1, 2, 4)

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| 1. $P(B A)>0$ ✓ | 2. $P(A B)=P(A)$ ✓ |
| 3. $P(A B)=0$ | 4. $P(AB)=P(A)P(B)$ ✓ |

三个事件的独立性

定义 设 A, B, C 是三个事件, 若

$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(CA) &= P(C)P(A) \end{aligned} \right\}$$

两两独立

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A, B, C 相互独立(独立).

 n 个事件的独立性

定义 若 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) 满足

$$\underline{P(A_{i_1}A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})}$$

$$(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, k = 2, \dots, n)$$

则称事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立(独立).

两两独立
三三独立
.....




思考几个问题



$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(CA) = P(C)P(A)$$

}  A, B, C 相互独立 ?

否!

反例：两两独立与相互独立的关系

例如 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$,

$C = \{\omega_1, \omega_4\}$, 则 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 并且,

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B),$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C),$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)P(C).$$

即事件 A 、 B 、 C 两两独立.

但是 $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C).$



思考几个问题

1
$$\left. \begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(CA) &= P(C)P(A) \end{aligned} \right\} \rightarrow A, B, C \text{ 相互独立}$$

否!

2 必然事件 Ω 与任何事件 A 是否独立?

不可能事件 Φ 与任何事件 A 是否独立?

3 事件 { 甲患感冒 } 与 { 乙患感冒 } 能否认为是独立的?

注意:

条件概率与事件独立性通常是根据实际意义来确定的

例 设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%,
求混合100个人的血清中含有肝炎病毒的概率.

解 记

$A_i = \{ \text{第 } i \text{ 个人血清含肝炎病毒} \}, i = 1, 2, \dots, 100$

则所求概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{100} A_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{100} \bar{A}_i}\right)$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n B_k} = \bigcap_{k=1}^n \bar{B}_k, \quad \overline{\bigcap_{k=1}^n B_k} = \bigcup_{k=1}^n \bar{B}_k$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{100} \bar{A}_i\right)$$

$$= 1 - 0.996^{100}$$

$$\approx 0.33$$

根据实际问题
判断事件独立性

问题：设计试验次数（分组方法）

例 设一支步枪击中目标的概率为 $p = 0.001$, 试求 n 支枪齐射能击中目标的概率.

解 记 $A_i = \{ \text{第 } i \text{ 支枪击中目标} \}, (i = 1, 2, \dots, n)$

易知 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 所求概率为

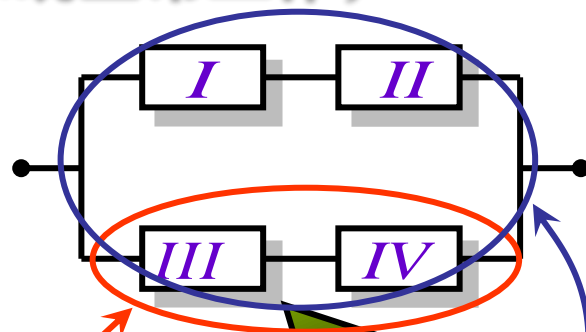
$$\begin{aligned} p_n &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \\ &= 1 - (1 - p)^n = 1 - 0.999^n \end{aligned}$$

n	1000	2000	3000	4000	5000
p_n	0.632	0.865	0.950	0.982	0.993

可见即使 p 很小, 但只要试验不断进行下去, 小概率事件几乎必然要发生

系统可靠性概念：系统可靠性 = $P\{\text{系统正常工作}\}$

例 某系统由四个部件 I, II, III, IV 构成(见图). 设每个部件的可靠性均为 p , 且四个部件是相互独立的. 求整个系统的可靠性.



解 记 $A = \{\text{整个系统正常工作}\}$
 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个部件正常工作}\}$

I、II 串联
 III、IV 串联
 } 并联

则

$$A = A_1 A_2 \cup A_3 A_4$$

于是整个系统的可靠性为

相互独立

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 A_2 \cup A_3 A_4) \\ &= P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) - P(A_1 A_2 \cap A_3 A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1 A_2)P(A_3 A_4) \\ &= p^2 + p^2 - p^2 p^2 = p^2(2 - p^2) \end{aligned}$$

例 1、2、3号高炮同时对飞机进行射击,三门炮击中飞机的概率分别为0.4、0.5、0.7. 飞机被一门炮击中而被击落的概率为0.2, 被两门炮击中而被击落的概率为0.6, 若被三门炮击中,飞机必定被击落. 求飞机被击落的概率.

解 记 $A = \{ \text{飞机被击落} \}$

$A_i = \{ \text{飞机被 } i \text{ 门炮击中} \}, i = 0, 1, 2, 3$

$B_j = \{ \text{第 } j \text{ 门炮击中飞机} \}, j = 1, 2, 3$

则 $A_1 = B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \cup \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3 \cup \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3, P(A_1) = 0.36$

$A_2 = B_1 B_2 \bar{B}_3 \cup \bar{B}_1 B_2 B_3 \cup B_1 \bar{B}_2 B_3, P(A_2) = 0.41$

$A_3 = B_1 B_2 B_3, P(A_3) = 0.14$

由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^3 P(A | A_i) P(A_i) \\ &= 0 + 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14 = 0.458 \end{aligned}$$

小结

独立性

定义 设 A, B 是两个事件, 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A, B **相互独立**, 简称 A, B **独立**.

条件概率与事件独立性通常是根据实际意义来确定的

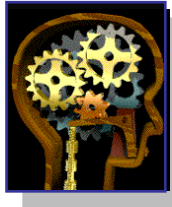
独立性的应用:

分组试验设计

系统可靠性

不相容与独立的关系

两两独立与相互独立的关系



课后作业

P24: 68, 71, 74, 77, 79