第三章 联合分布

§1 引言：联合累积分布函数
§2 (二维)离散随机变量
§3 (二维)连续随机变量
§4 独立随机变量
§5 条件分布
§6 联合分布随机变量函数
§7 极值和顺序统计量

二维连续型随机变量

设 r.v (X,Y) 的联合分布函数(joint CDF)为

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

若存在非负可积函数 $f(x,y)\ge 0$ 使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \quad (\forall\ (x,y)\in R^2)$$

则称 (X,Y) 为二维连续型r.v, $f(x,y)$ 称为**概率密度函数(密度函数、密度)**, 或称为 X,Y 的**联合概率密度(joint pdf)**.

由高等数学知:
$F(x,y)$ 是连续函数

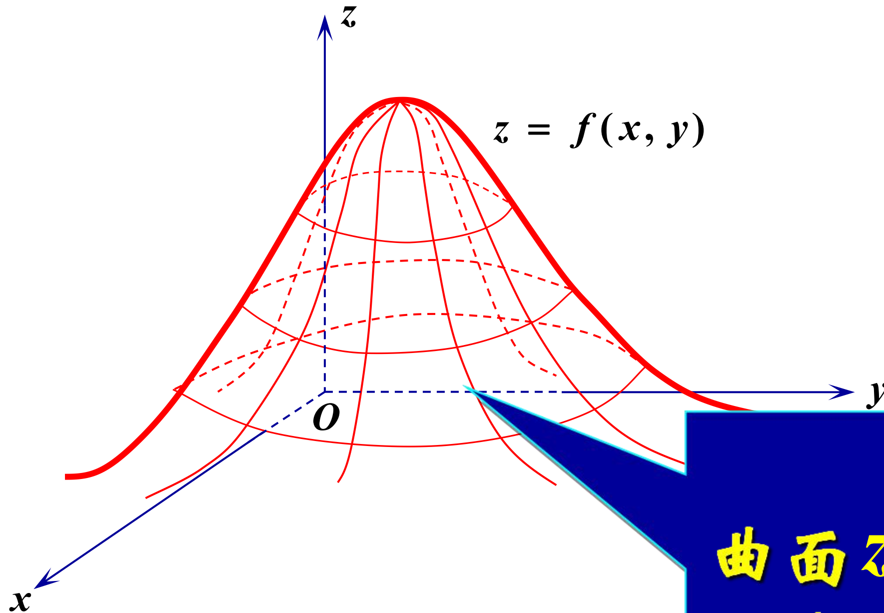
密度函数的基本性质

① $f(x,y) \geq 0 \quad (\forall (x,y) \in R^2)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = 1$

密度函数的本质特征

几何意义



曲面 $z = f(x,y)$ 与

围成的"山丘"的体

密度函数的基本性质

① $f(x,y) \geq 0 \quad (\forall (x,y) \in R^2)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv = 1$

密度函数的本质特征

③ $\forall D \subset R^2$

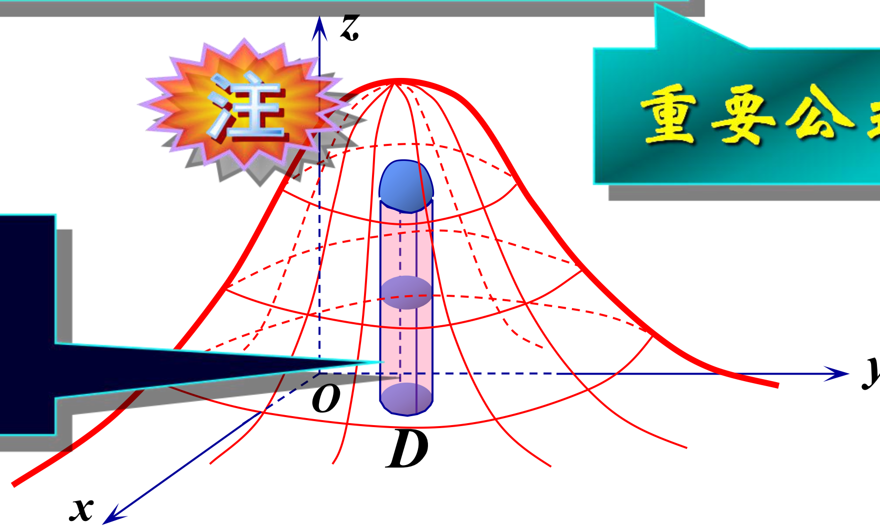
由逐段光滑曲线围成的平面区域

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

重要公式

注

$P\{(X,Y)\in D\} =$ 曲顶柱体体积



密度函数的基本性质

① $f(x,y)\geq 0 \quad (\forall (x,y)\in R^2)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv=1$

密度函数的本质特征

③ $\forall\ D\subset R^2$

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

④ 在 $f(x,y)$ 的连续点处，有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

由性质(4)，在 $f(x,y)$ 的连续点处，有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x\,\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\,\Delta y}$$

故当 $\Delta x\Delta y$ 充分小时，有

$$P\{x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$$

例 设 r.v (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

① 确定常数 k;

② 求分布函数 $F(x,y)$;

③ 计算概率 $P\{Y\le X\}$.

解 ① $\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$

$$=k\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(2x+y)}dxdy$$

$$=k\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$=\frac{k}{2}$$

$\therefore\ k=2$

例 设 r.v (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

① 确定常数 k;

② 求分布函数 $F(x,y)$;

③ 计算概率 $P\{Y\le X\}$.

解 ② $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$

$$=\begin{cases} \int_0^x\int_0^y 2e^{-(2u+v)}dudv, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2\int_0^x e^{-2u}du\cdot\int_0^y e^{-v}dv, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 设 r.v (X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

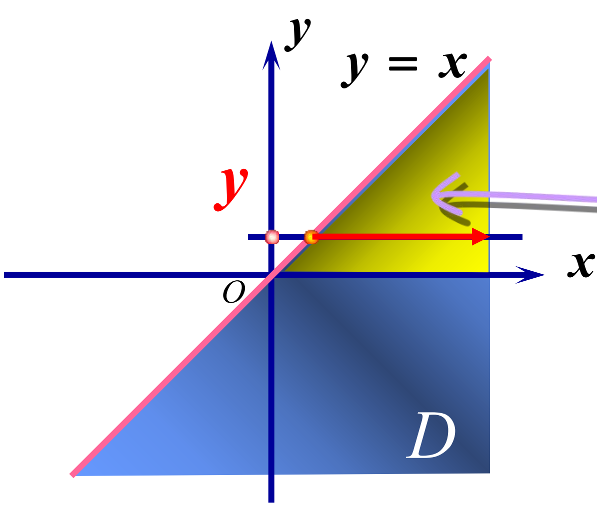
① 确定常数 k;

② 求分布函数 $F(x,y)$;

③ 计算概率 $P\{Y\le X\}$.

解 ③ 记 $D=\{(x,y)\mid y\le x, x,y\in(-\infty,\infty)\}$

$$\therefore \quad P\{Y\le X\}=P\{(X,Y)\in D\}$$



$$=\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D\cap\{x>0,\, y>0\}} 2e^{-(2x+y)}dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dx$$

$$=\frac{1}{3}$$

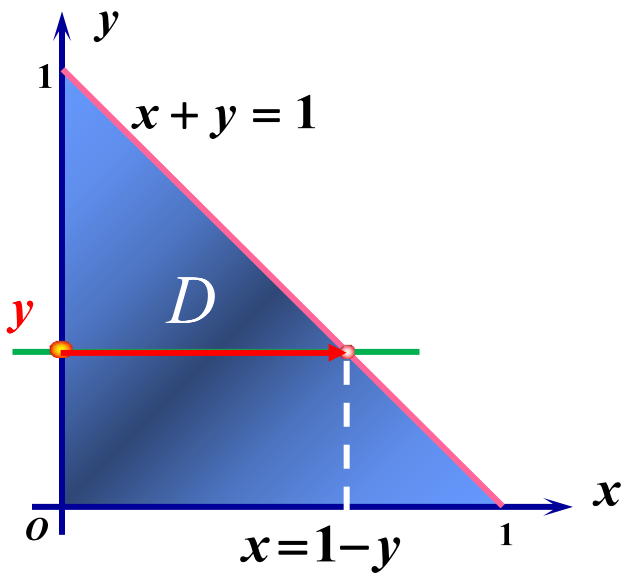
例 设 r.v (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

计算概率 $P\{X+Y\le 1\}$.

解

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy$$



$$=\iint\limits_{D:\begin{cases}x+y\le 1\\ x>0,y>0\end{cases}} 2e^{-(2x+y)}dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}2e^{-(2x+y)}dx$$

$$=1-2e^{-1}+e^{-2}$$

几个约定：

$$(X,Y) \sim F(x,y)$$

表示二维 r.v (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$

$$(X,Y) \sim f(x,y)$$

表示二维 r.v (X,Y) 的概率函数为 $f(x,y)$

对于离散型 r.v 它表示频率函数(PMF),
对于连续型 r.v 它表示密度函数(PDF).

对于 n 维r. v也采用相应的记号：

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

二维连续型随机变量的边际分布密度

设 (X,Y) 的分布函数和密度函数分别为

$$F(x,y),\ f(x,y)$$

则r.v X的分布函数为

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)dy\right)du$$

故r.v X的密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

同理 Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dx\right)dv$$

Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx \qquad (-\infty<y<+\infty)$$

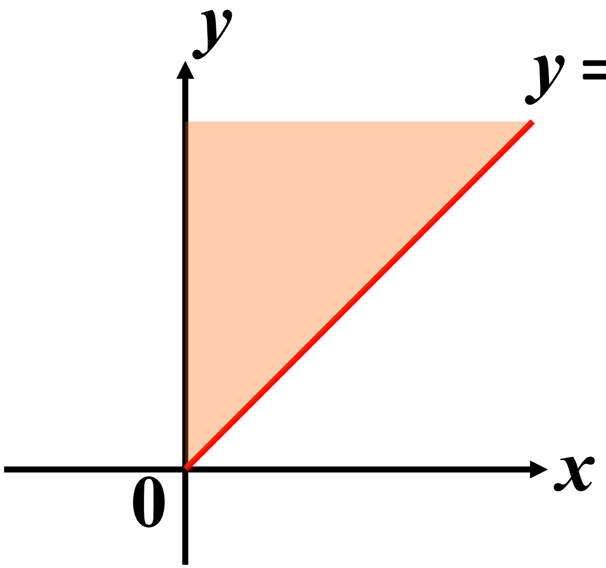
定义 称 $f_X(x)$为 (X,Y)关于 X的**边际密度(函数)**.

称 $f_Y(y)$为 (X,Y)关于 Y的**边际密度(函数)**.

例 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求(X,Y)关于 X 和 Y 的边际概率密度.



x暂时固定

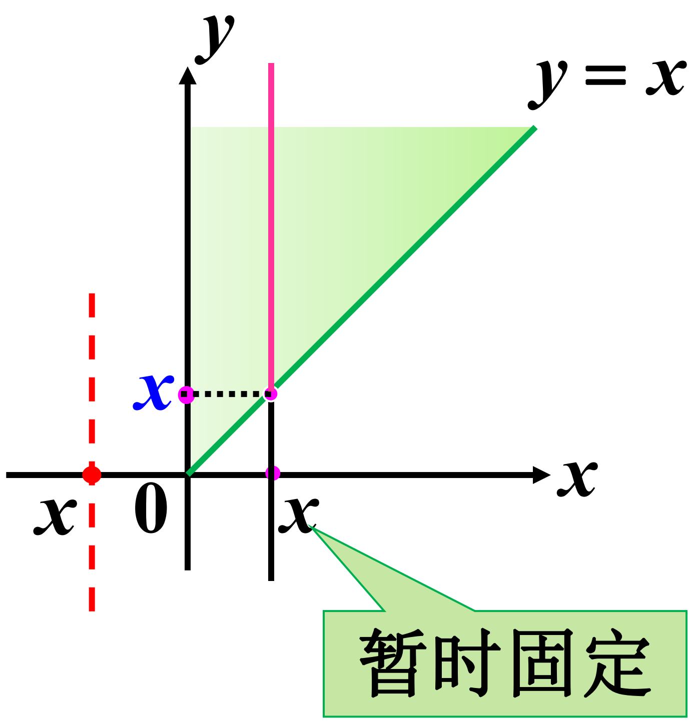
解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当 $x\le 0$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy=0$

当 $x>0$ 时,

$$f_X(x)=\int_{x}^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$=e^{-y}\Big|_{+\infty}^{x}=e^{-x}$$



故

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$$

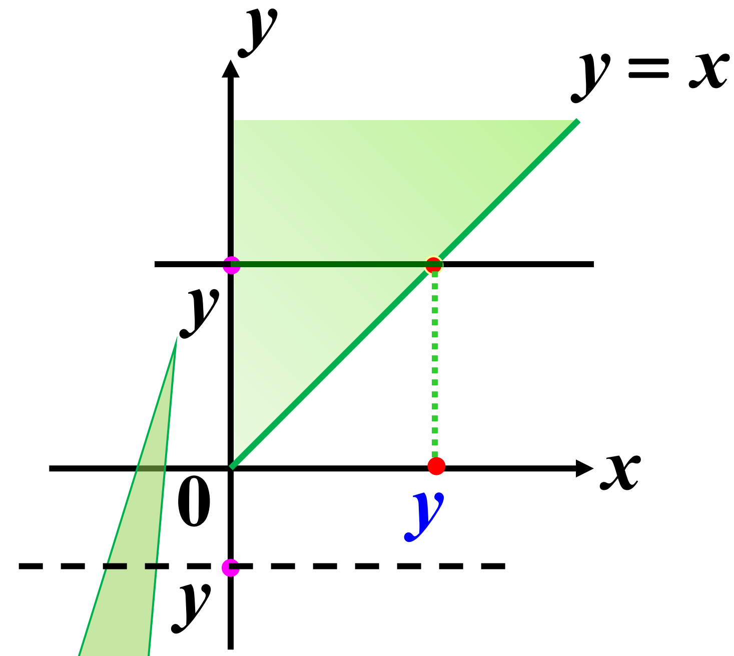
y暂时固定

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

当 $y\le 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx=0$

当 $y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}\,dx=ye^{-y}$$



暂时固定

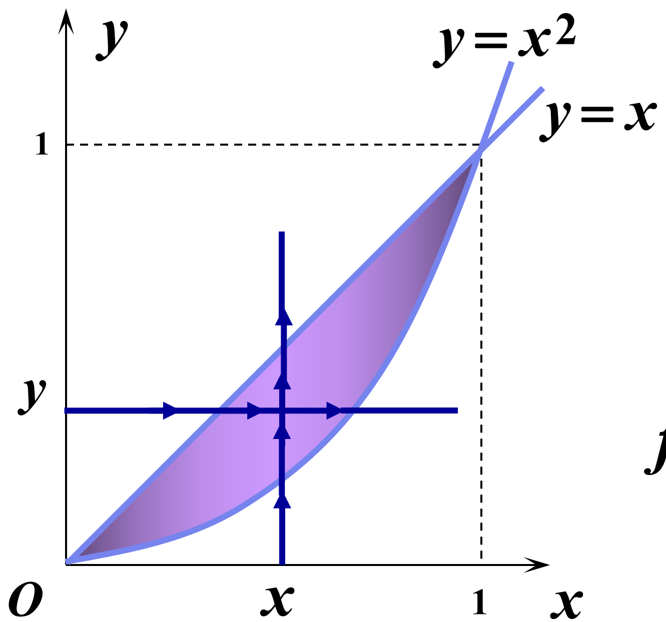
故

$$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

例 设(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 6, & x^2 \le y \le x \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求边际密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 (如图)



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases} \int_{x^2}^{x} 6dy, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 6x(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6(\sqrt{y}-y), & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

n维连续型随机变量的边际密度函数

设 X, Y, Z 的联合密度函数为

$$f(x, y, z)$$

则r.v X 的一维边际密度函数是

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

r.v X 和 Y 的二维边际密度函数是

$$f_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\mathrm{d}z$$

例 (Farlie-Morgenstern族)

设 $F(x)$和$G(y)$都是一维连续型分布函数, 可以证明, 对于任意的 α, 只要满足 $|\alpha|\le 1$, 就有

$$H(x,y)=F(x)G(y)\{1+\alpha[1-F(x)][1-G(y)]\}$$

是二元连续型分布函数.

其边际分布为

$$H(x,\infty)=F(x) \qquad H(\infty,y)=G(y)$$

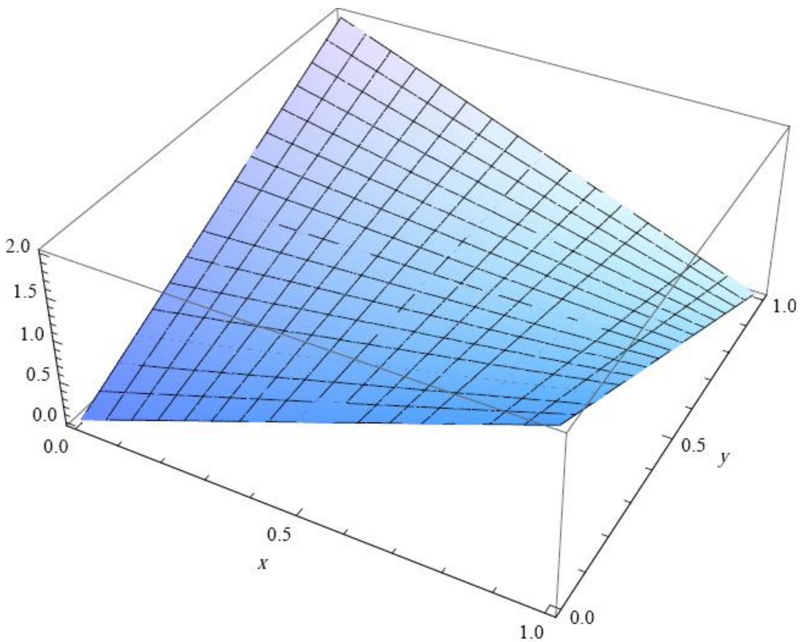
按这种方式, 可以构造给定边际分布的无数个不同的二维联合分布.

$$H(x,y)=F(x)G(y)\{1+\alpha[1-F(x)][1-G(y)]\}$$

例如, 取$F(x)$和$G(y)$都是[0,1]上的均匀分布.

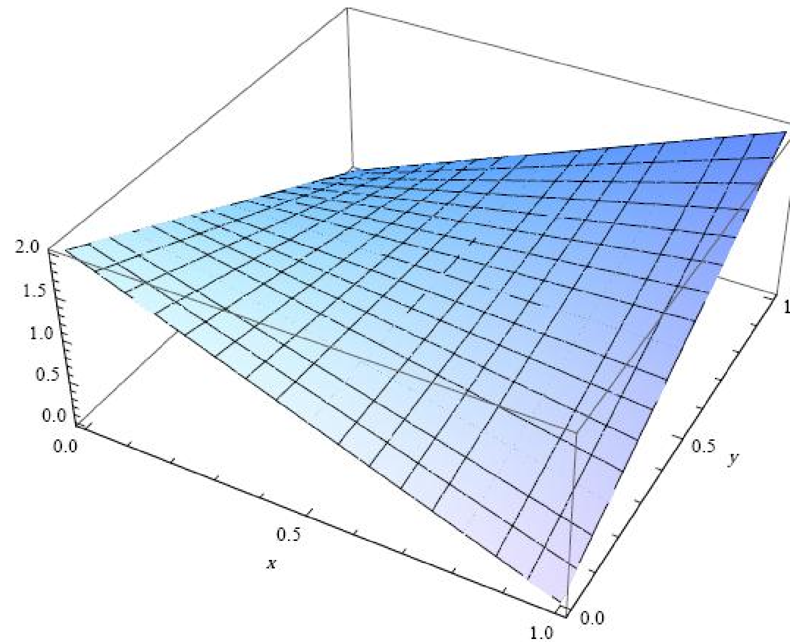
此时, $F(x)=x,\ 0\le x\le 1;\ \ G(y)=y,\ 0\le y\le 1.$

取不同的 α:



$\alpha=-1$

$h(x,y)=2x+2y-4xy$



$\alpha=1$

$h(x,y)=2-2x-2y+4xy$

$0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1.$

连接函数(copula)：边际分布为均匀分布的联合累积分布函数, 记为 $C(u, v)$.

具有性质：

1、$C(u, v)$ 关于每个变量都是非降的;

2、 $P\{U \le u\} = C(u,1) = u, \quad C(1,v) = v.$

3、讨论具有密度函数的连接函数, 此时

$$c(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v) \ge 0.$$

连接函数(copula)：边际分布为均匀分布的联合累积分布函数, 记为 $C(u, v)$.

具有性质:

4、假设 X 和 Y 是分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$的连续r.v. , 则 $U=F_X(X)$ 和 $V=F_Y(Y)$ 是均匀分布r.v.

对于连接函数$C(u, v)$, 考虑定义联合分布

$$F_{XY}(x, y)=C(F_X(x), F_Y(y))$$

则其边际分布为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

相应的密度为 $f_{XY}(x, y)=c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y)$

说明: 由两个边际分布和**任意**连接函数, 可以构造出相同边际分布的联合分布, 即: **边际分布不能决定联合分布**, 两个变量的相依性由连接函数控制.

二维正态分布

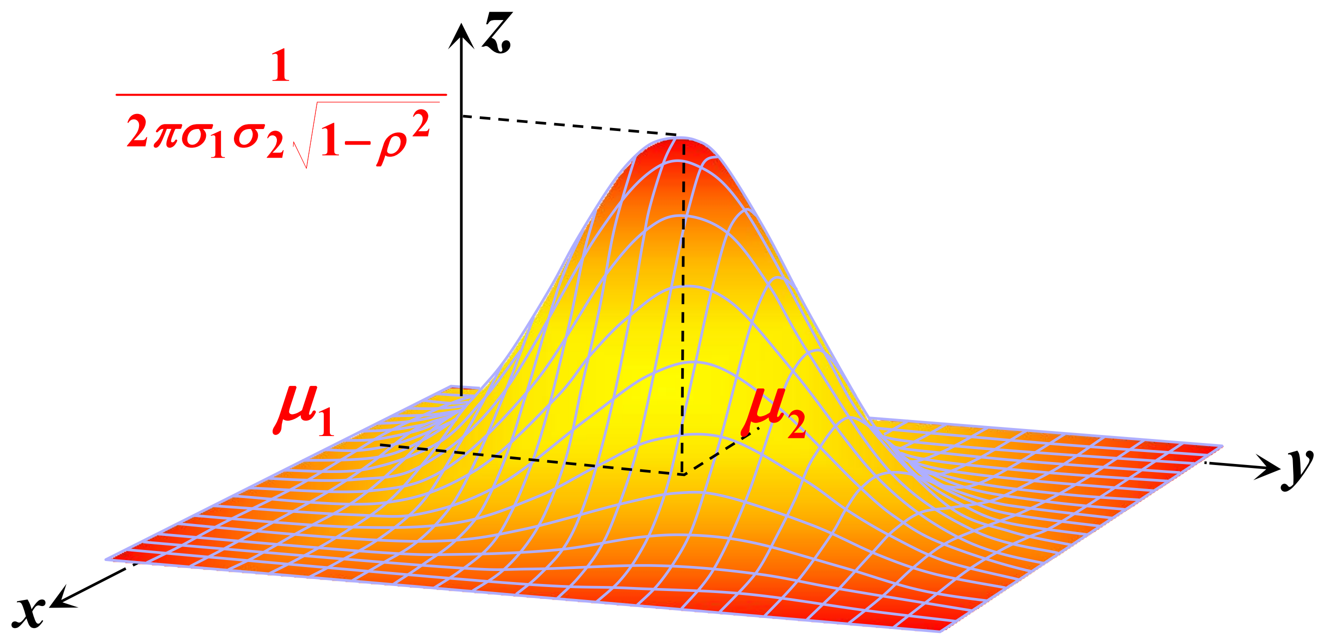
若 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

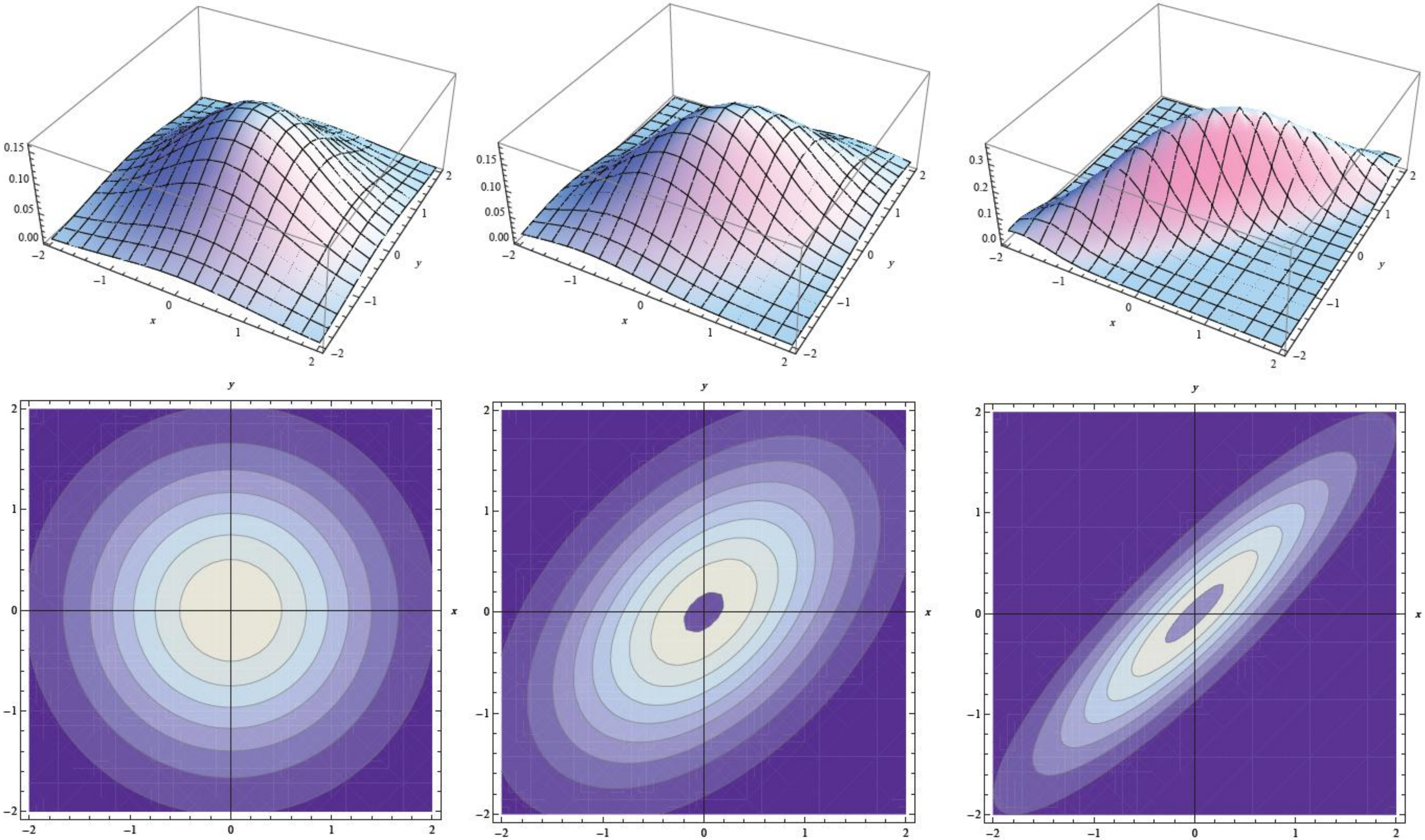
则称 (X,Y) 服从参数为 $(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的**二维正态分布**，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

其中各参数满足 $-\infty<\mu_1<+\infty,-\infty<\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1.$

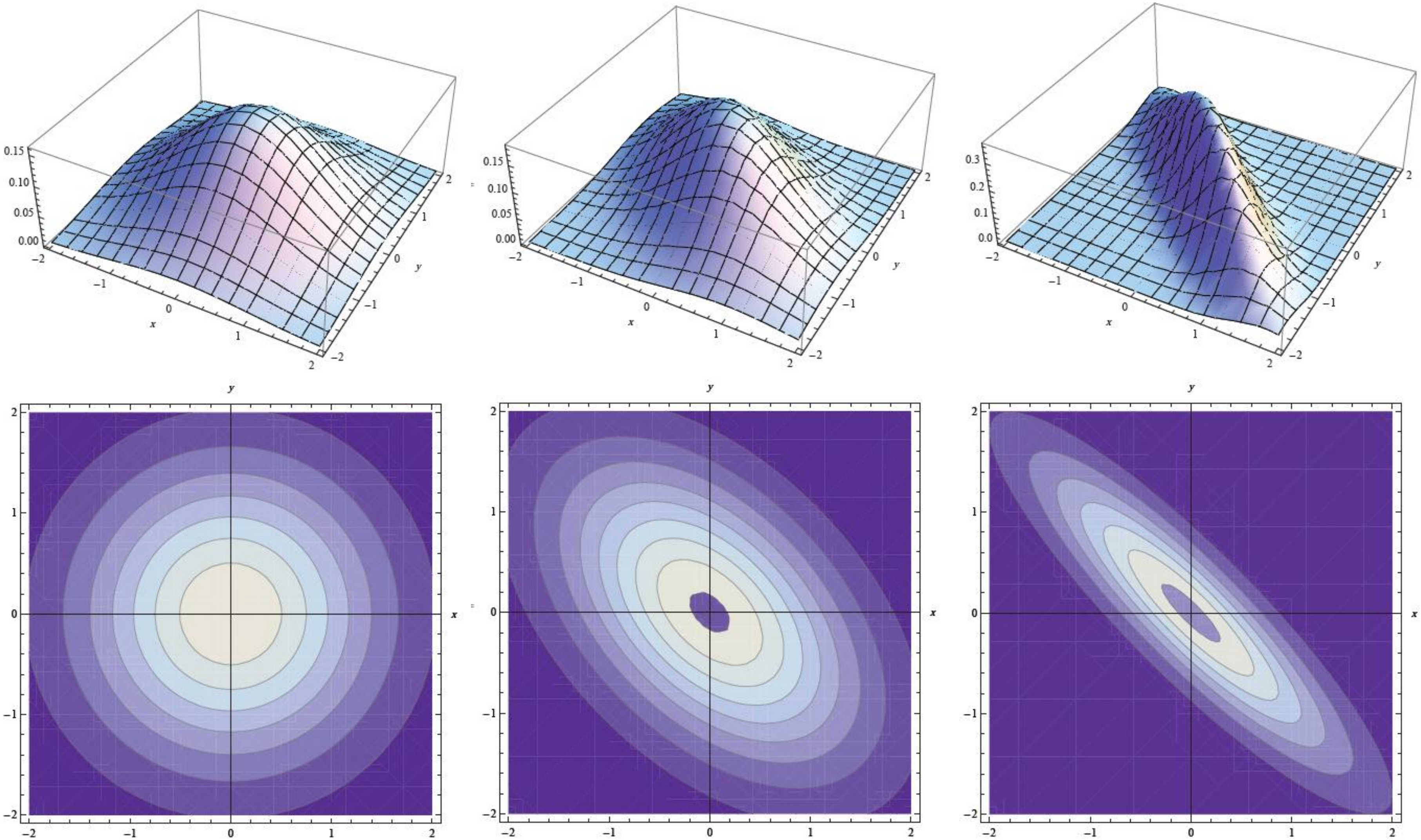


$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 的二维正态密度



$\rho = 0$ $\rho = 0.5$ $\rho = 0.9$

$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 的二维正态密度



$\rho = 0$ $\rho = -0.5$ $\rho = -0.9$

定理 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\ ,\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

证 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$\times[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

定理 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\ ,\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

证 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

令 $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)=t$

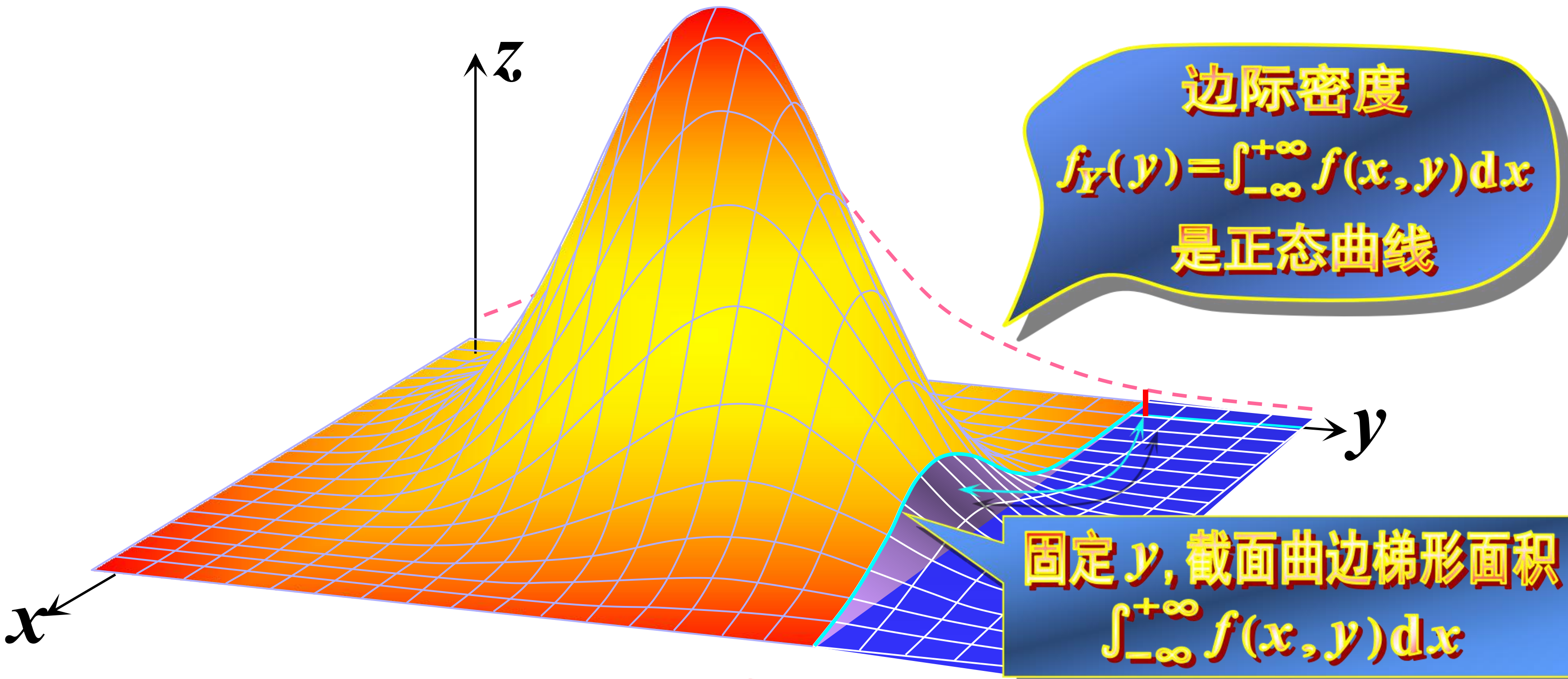
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$\therefore\ X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 同理可证 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

正态密度的图形及边际密度的几何意义



问 由 X,Y 的边际分布能否确定联合分布？

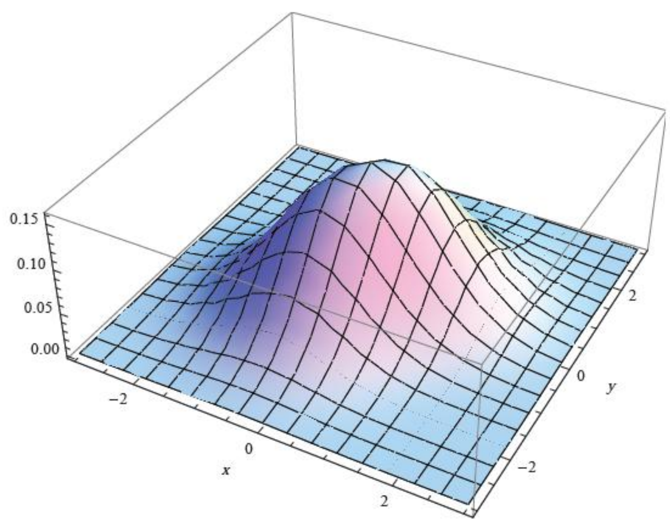
取边际密度都为 N(0,1) 的正态分布

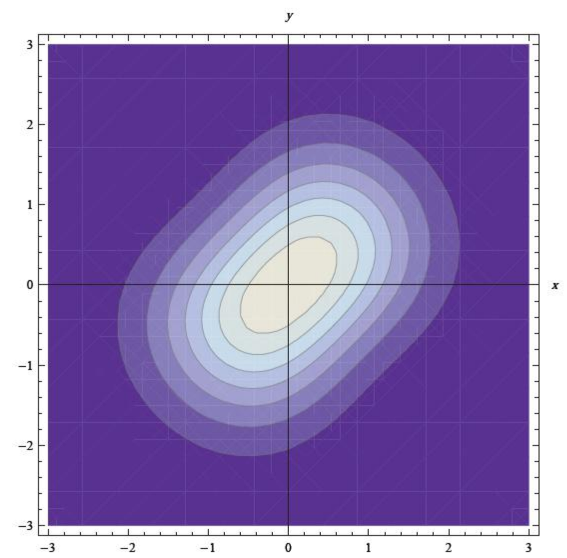
利用密度为 $c(u,v)=2-2u-2v+4uv$ 的连接函数

则二维联合密度函数为

$$f(x,y)=(2-2\Phi(x)-2\Phi(y)+4\Phi(x)\Phi(y))\varphi(x)\varphi(y)$$

具有边际正态，但不是二维正态密度.





课后作业

P76：5、6、7、8，补充题1，2

1. 设二维连续随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$
F(x,y)=\begin{cases} k(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}
$$

求边缘密度函数及 $P(1<X<3,\ 1<Y<2)$。

2. 设二维连续随机变量(X,Y)的概率密度为

$$
f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x,y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}
$$

(1) 求边缘密度函数; (2) 求 $P(X>Y)$;

(3) 求 $P(X<0.5)$