第二章 随机变量

§1　离散随机变量

§2　连续随机变量

§3　随机变量的函数

(functions of a random variable)

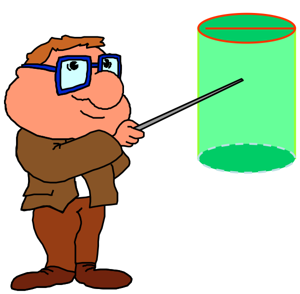
§3 随机变量的函数

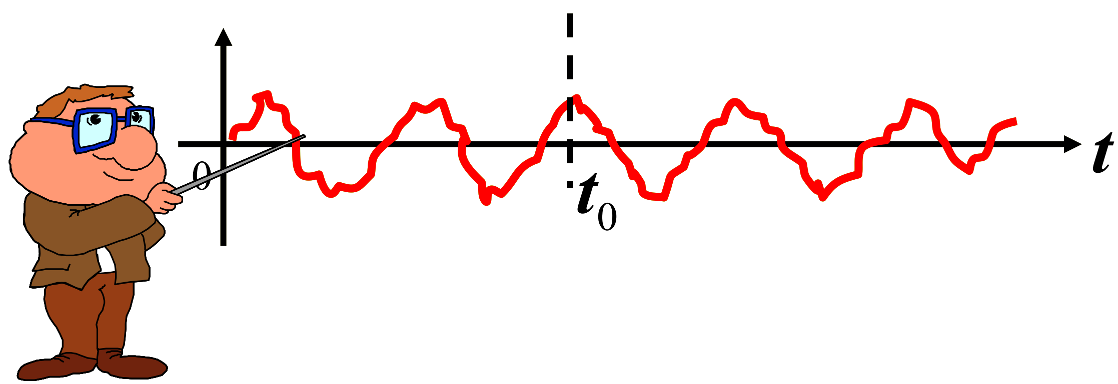
实际背景

例 在加工机件时，只能测得工件的直径 d，然而我们关心的是工件的截面面积 A. 如果知道 r.v d 的分布，问如何求r.v A的分布?

例 在某电路中，电流 I 是一个r.v. 当电流通过一个10Ω的电阻时，问在该电阻上消耗的功率是多少?

一般地，若 X 是r.v, $g(x)$ 是一个函数，则 $Y=g(X)$ 也是r.v. 问怎样求 Y 的分布?





(一) 离散型随机变量函数的频率函数

例 求 $Y=(X-1)^2$ 的频率函数，其中 r.v X 的频率函数为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

离散型— 离散型

解 $Y=(X-1)^2$ 的频率函数为

Y	4	1	0	1
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

0.7

设r.v X 的频率函数为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y=g(X)$ 的频率函数为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	

有些 $g(x_k)$ 值相同

相应的概率值合并相加

例 设r.v $X \sim U(0,1)$,定义

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 < X \le 0.25 \\ 1, & 0.25 < X \le 0.75 \\ 2, & 0.75 < X < 1 \end{cases}$$

连续型—离散型

求r.v Y 的频率函数.

解 $\because X \sim U(0,1)$ $\therefore$ Y的频率函数为

$$P\{Y=0\} = P\{0 < X \le 0.25\}$$

$$= \int_0^{0.25} 1 \cdot dx = 0.25$$

$$P\{Y=1\} = P\{0.25 < X \le 0.75\} = 0.50$$

$$P\{Y=2\} = P\{0.75 < X < 1\}$$

$$= P\{0.75 < X \le 1\} = 0.25$$

即 Y 的频率函数为

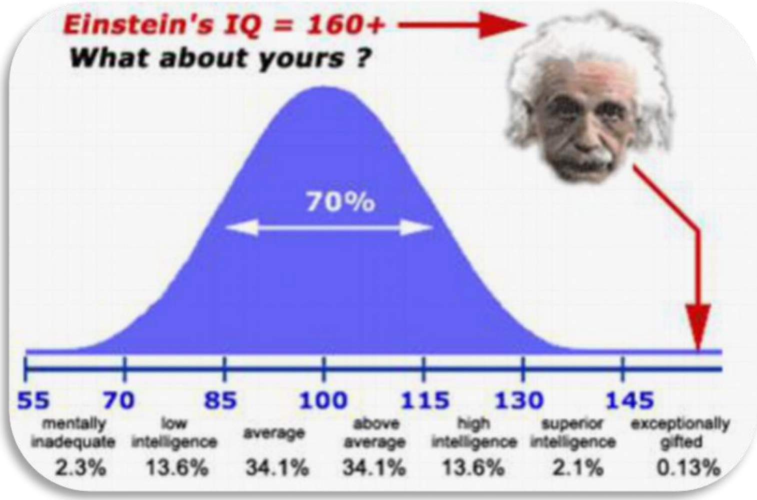
Y	0	1	2
p_k	0.25	0.50	0.25

例 (儿童智商)

设儿童智商 $X \sim N(100, 100)$, 将儿童按智商分为3类, 类标号 Y 规定如下:

$$Y = \begin{cases} 1, & X > 110 \\ 0, & 90 < X \le 110 \\ -1, & X \le 90 \end{cases}$$

求 Y 的频率函数.



Y	-1	0	1
p_k	0.16	0.68	0.16

(二) 连续型随机变量函数的分布

例 设 r.v X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 r.v $Y=2X+8$ 的密度函数.

解 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}=F_X(\frac{y-8}{2})$$

$F_X(g^{-1}(y))$

$$\therefore\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{y-8}{2}, & 0<\dfrac{y-8}{2}<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_X'(g^{-1}(y))=(g^{-1}(y))'f_X(g^{-1}(y))$$

(二)连续型随机变量函数的分布

问题 设 r.v X的概率密度函数为$f_X(x)$, r.v $Y=a+bX$, 求 r.v Y 的概率密度函数.

分析

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{a+bX\le y\}$$

① $b>0$时:

$$F_Y(y)=P\left\{X\le \frac{y-a}{b}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}} f_X(x)dx$$

从而有

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{b}\cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

(二) 连续型随机变量函数的分布

问题 设 r.v X的概率密度函数为$f_X(x)$, r.v $Y=a+bX$, 求 r.v Y 的概率密度函数.

分析

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{a+bX\le y\}$$

② $b<0$时:

$$F_Y(y)=P\left\{X\ge\frac{y-a}{b}\right\}=1-\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}}f_X(x)dx$$

从而有

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=-\frac{1}{b}\cdot f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

(二)连续型随机变量函数的分布

基本流程： 求r.v $Y=g(X)$的概率密度函数.

① 求r.v Y的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

② 转化为关于r.v X 的概率计算问题

需用到函数 $y=g(x)$的性质！

③ 求导 $f_Y(y)=F_Y'(y)$

问题 设r.v X 的概率密度函数为$f_X(x)$, $y=g(x)$单调递增且处处可导, 求 r.v $Y=g(X)$的概率密度函数.

分析

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$y=g(x)$单调递增

$$F_Y(y)=P\{X\le g^{-1}(y)\}$$

$$=\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx$$

$y=g(x)$ 处处可导

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left[g^{-1}(y)\right]'$$

讨论

① 若 r.v X 有取值范围(a,b)，则 $f_Y(y)$有定义域

$$g(a) < y < g(b)$$

② 为何要求 $y = g(x)$严格递增？

若不然，如何求 $g^{-1}(y)$？

③ 若 $y = g(x)$严格单调递减，有什么结论？

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = -f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left[g^{-1}(y)\right]'$$

$$= f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|$$

定理 设r.v X的密度函数为$f(x)$,又$y=g(x)$是严格单调函数,其反函数$h(y)=g^{-1}(y)$连续可导,则$Y=g(X)$的密度函数为

严格单调增(或单调减)

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|\cdot f(h(y)), & h(y)\text{有意义}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例 设$X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,求$Y=\mathrm{tg}X$的密度函数.

解 记$y=\mathrm{tg}x$,则

$$h(y)=\mathrm{arctg}y,\ h'(y)=\frac{1}{1+y^2}\quad(-\infty<y<\infty)$$

$\therefore$ Y的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=|h'(y)|\cdot f_X(h(y))$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}\quad(-\infty<y<\infty)$$

Cauchy分布

例 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $Y = aX+b$ 的密度函数, 其中 $a\ (\neq 0), b$ 为常数.

解 记 $y = ax+b$, 则

$$h(y) = \frac{y-b}{a},\ h'(y) = \frac{1}{a} \quad (-\infty < y < \infty)$$

$\therefore$ Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = |h'(y)| \cdot f_X(h(y)) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(h(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(|a|\sigma)^2}}$$

$$\therefore \quad aX+b \sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$$

重要结论

正态r. v的线性函数仍是正态r. v

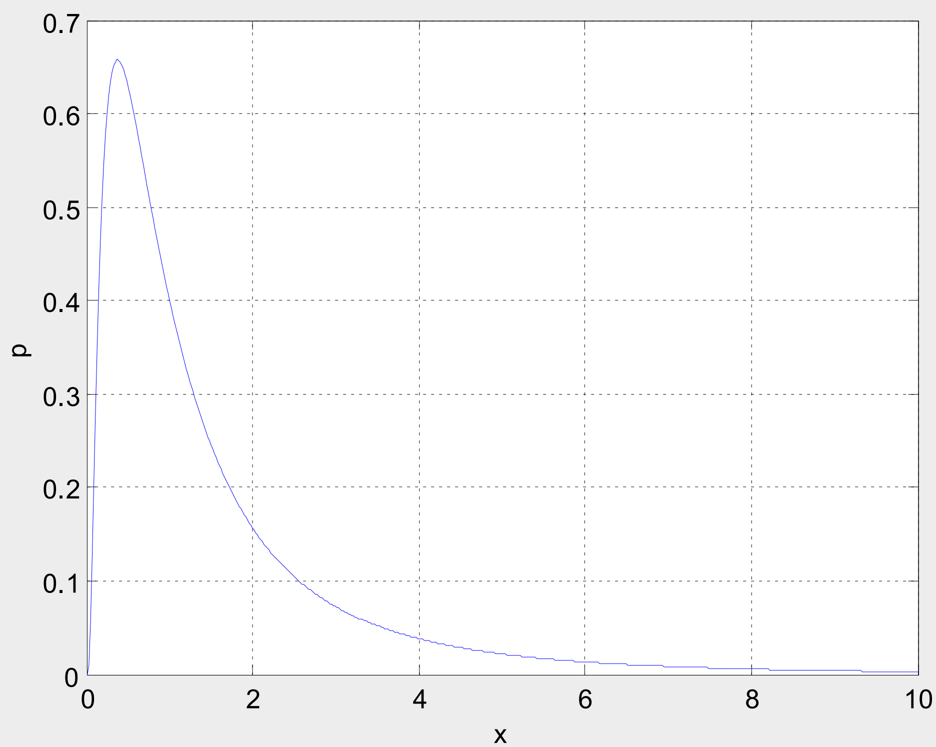
例 （股票价格）考虑时间 u 后股票价格S_u，已知 $S_u=S_0e^{X_u}$，而 $X_u\sim N(u\mu,u\sigma^2)$，$S_0$为常数，求$S_u$的密度函数 $f_S(s)$.

解 $h(S)=\ln\dfrac{S}{S_0}$，$h'(S)=\dfrac{1}{S}$，故

$$f_S(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi u\sigma^2}\,s}e^{-\frac{(\ln\frac{s}{S_0}-u\mu)^2}{2u\sigma^2}}$$

注 $\dfrac{S_u}{S_0}$ 称服从参数为$(u\mu,u\sigma^2)$的对数正态分布，记为 $LN(u\mu,u\sigma^2)$.

```
x = (0:0.02:10);
y = lognpdf(x,0,1);
plot(x,y); grid;
xlabel('x'); ylabel('p')
```



例 设 $X \sim U(0,1)$, 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

问 记 $y = e^x$, 怎样确定其反函数 ?

分析 当 $y > 0$ 时，$y = e^x$ 的反函数为

$$h(y) = \ln y \quad (y > 0)$$ ✗

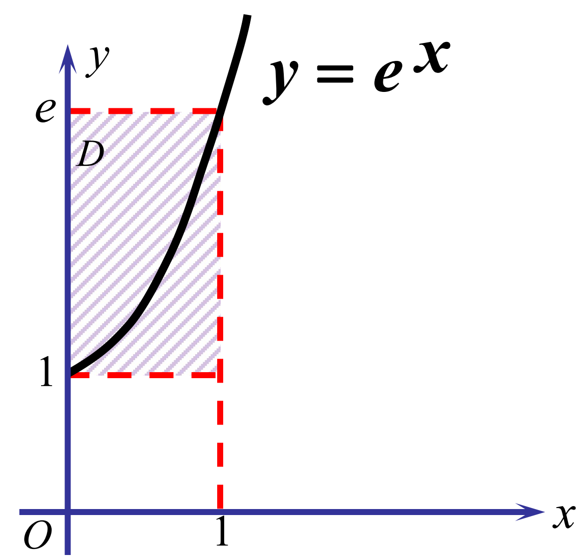
正确的分析 $\because$ $X \sim U(0,1)$, 表明 r.v X 几乎只在 $(0,1)$ 上取值,

故 $y = e^x$ 的反函数存在的区域是

$$D: 0 < x < 1, 1 < y < e$$

其反函数为

$$h(y) = \ln y \quad (1 < y < e)$$



例 设 $X \sim U(0,1)$, 求 $Y = e^X$ 的概率密度.

解 记 $y = e^x$, 则当 $1 < y < e$ 时, 反函数是

$$h(y) = \ln y \quad (1 < y < e)$$

$\therefore$ Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| \cdot f_X(h(y)), & 1 < y < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{1}, & 1 < y < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

下面讨论直接计算法

例 设 $X \sim U(0,1)$, 求$Y = e^X$的概率密度.

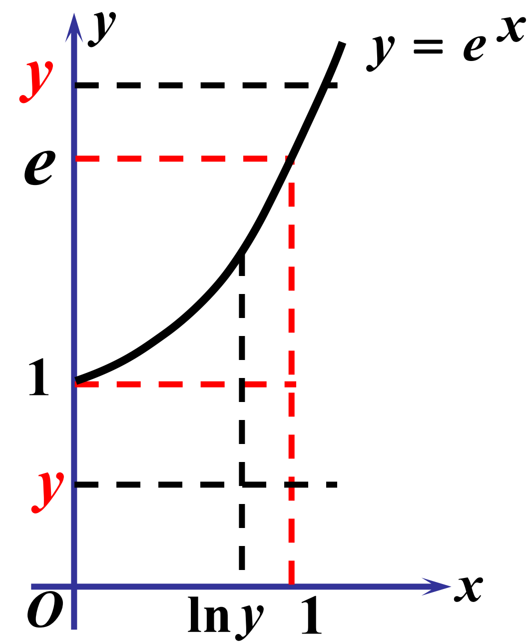
解 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{e^X \le y\}$$

$$= \begin{cases} 1\,, & y \ge e \\ \int_0^{\ln y} 1 \cdot dx\,, & 1 < y < e \\ 0\,, & y \le 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f_Y(y) = \begin{cases} F_Y'(y)\,, & 1 < y < e \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,, & 1 < y < e \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases}$$



问题 若 $y = g(x)$ 没有单调性,有什么结论？

问题 设r.v X 的概率密度函数为$f_X(x)$，r.v $Y=X^2$ 求r.v Y 的概率密度函数.

分析

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx-\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}}f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X\left(\sqrt{y}\right)\left[\sqrt{y}\right]'-f_X\left(-\sqrt{y}\right)\left[-\sqrt{y}\right]'$$

讨论 函数 $y=g(x)=x^2$ 是分段严格单调的

$$\begin{cases} y=g_1(x)=x^2, x>0 \text{ 严格递增} \\ y=g_2(x)=x^2, x<0 \text{ 严格递减} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g_1^{-1}(y)=\sqrt{y},\quad g_2^{-1}(y)=-\sqrt{y}$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$=f_X\left(g_1^{-1}(y)\right)\left[g_1^{-1}(y)\right]'-f_X\left(g_2^{-1}(y)\right)\left[g_2^{-1}(y)\right]'$$

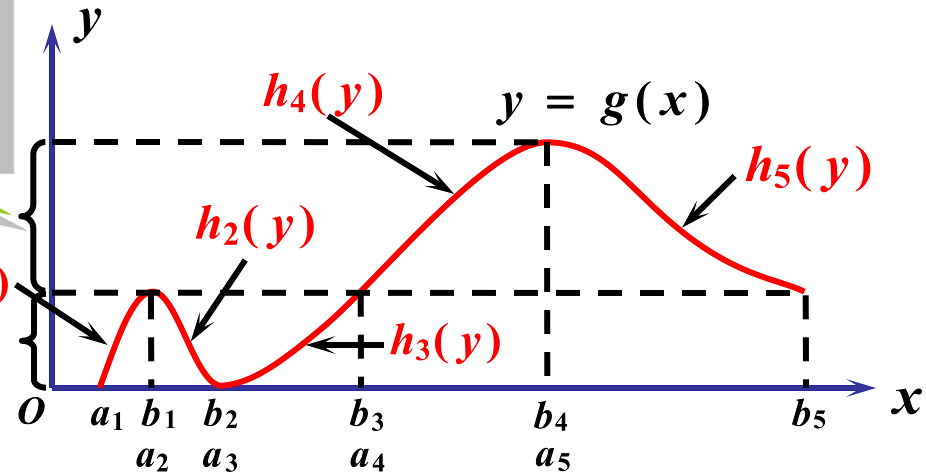
$$=\sum_{k=1}^{2} f_X\left(g_k^{-1}(y)\right)\left|\left[g_k^{-1}(y)\right]'\right|$$

推广的定理

定理 设 r.v X 的密度函数为 $f(x)$,又函数$g(x)$在互不相交的区间$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots$上逐段严格单调，且其反函数 $h_1(y),h_2(y),\cdots$ 均连续可导, 则$Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}|h_i'(y)|\cdot f(h_i(y))\ , & h_1(y),h_2(y),\cdots \text{有意义}\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

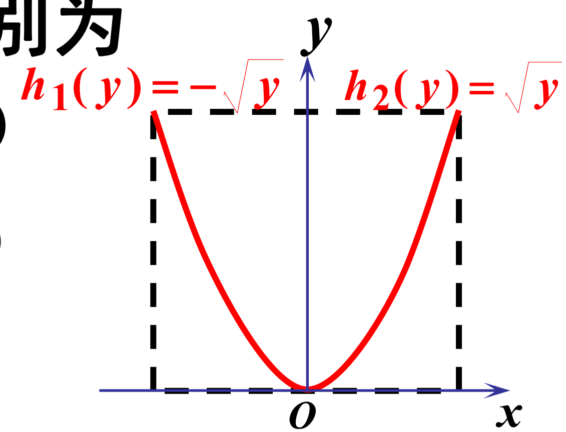
使得反函数有意义的 y 有两部分



例 设 $X \sim N(0,1)$, 求 $Y = X^2$ 的密度函数.

解 记 $g(x) = x^2$, 则 $g(x)$在 $(-\infty, 0)$上严格单调减少, 而在 $(0,\infty)$上严格单调增加，其反函数分别为

$$h_1(y) = -\sqrt{y}\ ,\ h_2(y) = \sqrt{y} \qquad (y > 0)$$



且 $$h_1'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad h_2'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad (y > 0)$$

$\therefore$ Y的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h_1'(y)|\varphi(h_1(y)) + |h_2'(y)|\varphi(h_2(y)), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} + \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

均匀分布与其它连续分布的关系

设 r.v. X 的密度为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$.

其中 $F(x)$ 在某区间 I 上严格递增, I 的左端点处 F=0, 右端点处 F=1. I 可以是有界区间, 也可以是无界区间.

因此, $F^{-1}(x)$ 在 I 上都有定义.

① 令 $Z = F(X)$, 那么 $Z \sim U(0,1)$.

$$P\{Z \le z\} = P\{F(X) \le z\}$$

$$= P\{X \le F^{-1}(z)\}$$

$$= F(F^{-1}(z)) = z$$

均匀分布与其它连续分布的关系

② 令 $U \sim \mathrm{U}(0,1)$, $X = F^{-1}(U)$, 那么X的分布函数是$F(x)$.

$$P\{X \le x\} = P\{F^{-1}(U) \le x\} = P\{U \le F(x)\} = F(x)$$

例： 生成给定分布的伪随机数

要生成分布函数为 $F(x)$ 的r.v., 只需将 F^{-1} 作用在均匀分布的随机数上即可.

例 为生成来自于指数分布的r.v., 可以取

$$T = -\ln V / \lambda, \qquad \text{其中 } V \sim \mathrm{U}(0,1).$$

课后作业

P49:54、59、64、补充题1,2,3,4

补充题1　设随机变量 X 的频率函数为

X	-2	-1	0	1	2
P	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

求 $Y=X^2$ 的频率函数.

补充题2　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

补充题3

设$P\{X=k\}=\left(\frac{1}{2}\right)^k, k=1,2,\ldots,$ 令

$$Y=\begin{cases}1, & \text{当}X\text{取偶数时}\\ -1, & \text{当}X\text{取奇数时}.\end{cases}$$

求随机变量 X 的函数 Y 的分布律.

补充题4

设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布，试求随机变量$Y=e^{2x}$,的概率密度$f_Y(y)$.