第三章 联合分布

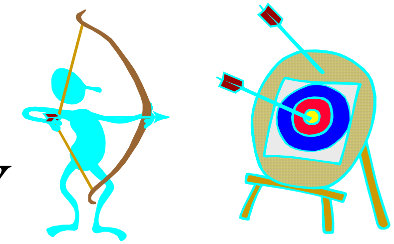
§1 引言：联合累积分布函数

多维随机变量的实际背景

例 人的身高 H 与体重 W

某地区的气温 X、气压 Y 与湿度 Z

射击中落点横向偏差 X 与纵向偏差 Y



……

问题 能不能将上述r.v单独分别进行研究？

分析 一般人的身高与体重

$$\underline{H \sim N(\cdot\,,\cdot\,),\quad W \sim N(\cdot\,,\cdot\,)}$$

但身高与体重之间有一定关系.

气象指标中的气温、气压与湿度也是相关联的.

导弹射程误差与落点的横向偏差及纵向偏差都有关.

由于同一对象的不同指标之间往往是有一定联系的，所以应该把它们作为一个整体来看待。

二维随机变量的概念

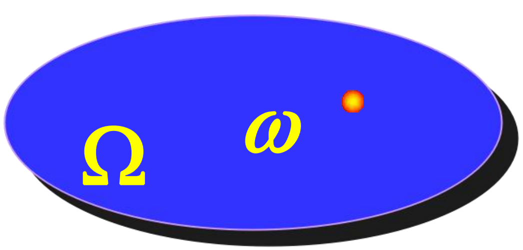
设Ω为样本空间，$X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)\quad(\omega\in\Omega)$

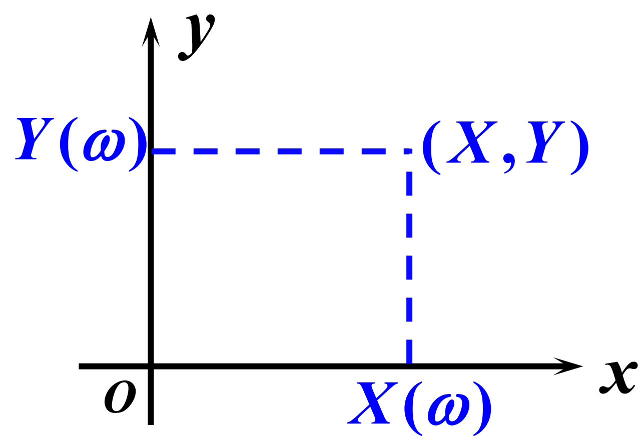
是定义在Ω上的两个r.v，记

$$(X,Y)\triangleq(X(\omega),\ Y(\omega))\quad(\omega\in\Omega)$$

称(X,Y)为**二维随机变量（向量）.**

注 一个试验产生的二维随机变量可视为向二维平面“投掷”一个“随机点”





定义 设(X,Y)为二维r.v，$\forall\ x,y\in(-\infty,\infty)$，定义

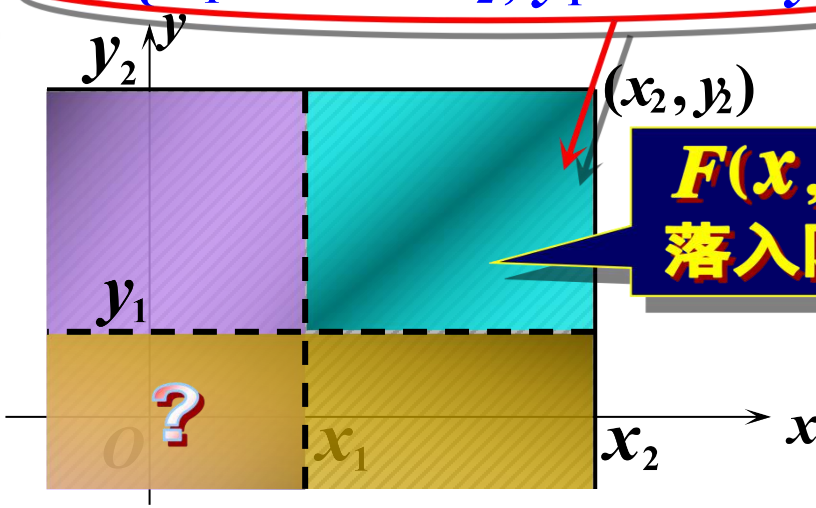
$$F(x,y) \triangleq P(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}) \triangleq P\{X\le x, Y\le y\}$$

则称$F(x,y)$为二维r.v (X,Y)的**累积分布函数**，或称为X与Y的**联合累积分布函数.**

问 如何利用分布函数计算概率

几何意义

$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$?



$F(x,y)$表示随机点(X,Y)落入阴影区域的概率

$$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$$
$$= F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

分布函数 $F(x,y)$ 的基本性质

① 任意固定x_0，$F(x_0, y)$是y 的单调不减函数
任意固定y_0，$F(x, y_0)$是x 的单调不减函数

② $0 \le F(x, y) \le 1$，且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0 \quad (\forall\ x, y)$$

③ $F(x, y) = F(x, y+0)$，即$F(x, y)$关于y右连续
$F(x, y) = F(x+0, y)$，即$F(x, y)$关于x右连续

④ $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

$$= P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

注 性质①②③④是分布函数的本质特征

注意：

分布函数$F(x, y)$的性质(4)不能由前三条性质推出.

反例：令

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geq -1\\ 0, & x+y< -1\end{cases}$$

显然$F(x, y)$满足(1)(2)(3)三条性质，

但它不满足(4)，因为

$$F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)=1-1-1+0<0.$$

这说明性质(4)不能由前三条性质推出，故定义一个二元函数为联合分布函数时性质(4)不能省去.

n维随机向量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是定义在样本空间Ω上的 n个r.v, 则称

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为n维随机变量或n维随机向量.

称 n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为 n维随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数， 或称为 r.v $X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布(函数).

二维随机变量的基本分类
$\left\{ \begin{array}{l} \text{二维离散型 r.v} \\ \text{二维连续型 r.v} \end{array} \right.$