# 第三章 联合分布

§1 引言：联合累积分布函数

§2 (二维)离散随机变量

§3 (二维)连续随机变量

§4 独立随机变量

§5 条件分布

§6 联合分布随机变量函数

§7 极值和顺序统计量

(Extrema and Order Statistics)

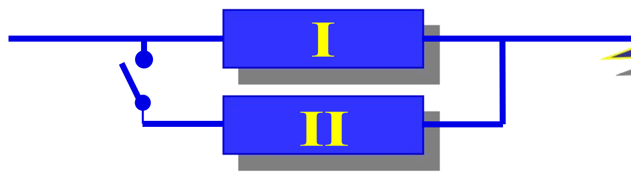
# §7 极值和顺序统计量



## 实际背景

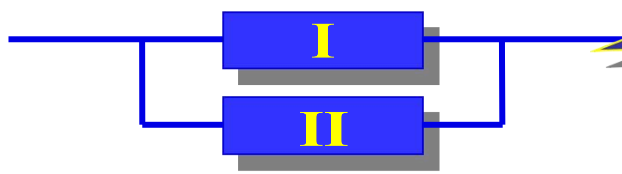
设有两个部件 I、II, 其工作寿命分别为 $X,Y$

**冷冗余系统：** 部件 I 坏了, 换上备用部件 II 继续工作



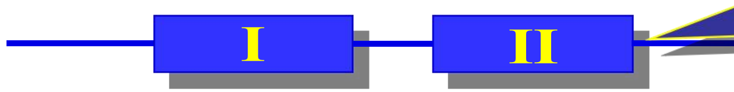

系统寿命 $X+Y$

**热冗余系统：** 部件I、II 并联同时工作, 仅当两个部件都损坏时，整个系统才失效




系统寿命 $\max\{X,Y\}$

**串联系统：** 部件I、II 串联同时工作, 只要有一个部件损坏，整个系统就失效




系统寿命 $\min\{X,Y\}$

问题 怎样确定上述各系统的寿命？

## (一) 极值 max(X, Y), min(X, Y) 的分布

① 设 $X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$，且 $X, Y$ 相互独立，则

$$
\begin{aligned}
F_{\max}(z) &= P\{\max(X,Y) \le z\} \\
&= P\{X \le z, Y \le z\} \\
&= P\{X \le z\} \cdot P\{Y \le z\} \\
&= F_X(z) \cdot F_Y(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\min}(z) &= P\{\min(X,Y) \le z\} \\
&= 1 - P\{\min(X,Y) > z\} \\
&= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\
&= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \\
&= 1 - [1 - P\{X \le z\}] \cdot [1 - P\{Y \le z\}] \\
&= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]
\end{aligned}
$$

# §7 极值和顺序统计量



## (一) 极值 $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ 的分布

① 设 $X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$, 且 $X, Y$ 相互独立，则

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)]$$

② 设 $X_i \sim F_{X_i}(x), i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$F_{\max}(z) = P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\}$$

$$= F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{\min}(z) = P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\}$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(z)]$$

③ 特别当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布于 $F(x)$ 时有

$$F_{\max}(z) = F^n(z)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

问题 question 设$X,Y$独立同分布，具有密度$f(x)$，怎样求 $\max(X,Y)$，$\min(X,Y)$ 的密度？

分析

$$\because \quad F_{\max}(z)=F^2(z)$$

$$\therefore \quad f_{\max}(z)=2f(z)F(z)=2f(z)\int_{-\infty}^{z}f(t)dt$$

$$\because \quad F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^2$$

$$\therefore \quad f_{\min}(z)=2f(z)[1-F(z)]=2f(z)[1-\int_{-\infty}^{z}f(t)dt]$$

同理可推广，求出$n$个独立同分布的r.v.的极值的密度.

$$\boxed{f_{\max}(z)=nf(z)[F(z)]^{n-1}}$$

$$\boxed{f_{\min}(z)=nf(z)[1-F(z)]^{n-1}}$$

**例** 体育馆的大屏幕由信号处理机和显示屏构成，它们的寿命分别为 $X,Y$，若它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$. 试求大屏幕系统的寿命 $Z$ 的概率密度.

**解** 大屏幕系统寿命 $Z=\min(X,Y)$，由独立性有

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

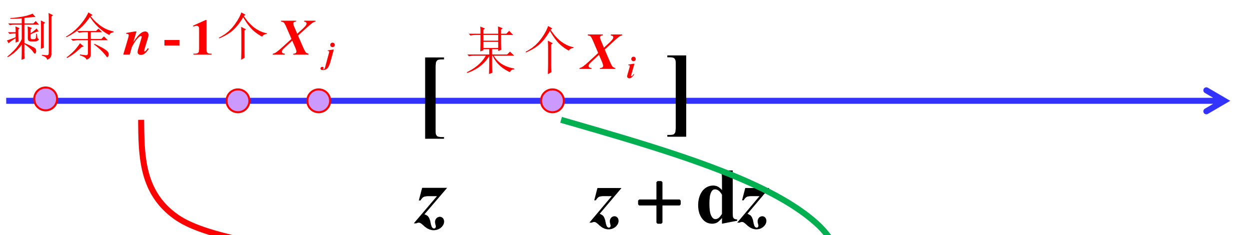
$$\therefore\quad f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

可见指数分布的串联系统仍服从指数分布

其失效率是每个部件的失效率之和

设 $X_i(i=1,\dots,n)\sim f(x)$ 且相互独立,怎样求 $Z=\max(X_1,\dots,X_n)$ 的密度?

## 微分思路




对于充分小的区间 $[z,z+\mathrm{d}z]$:

$$P\{z\le Z\le z+\mathrm{d}z\}=n[F(z)]^{n-1}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=f_{\max}(z)\mathrm{d}z$$

故 $$\boxed{f_{\max}(z)=nf(z)[F(z)]^{n-1}}$$

## (二) 顺序统计量 $X_{(k)}$ 的分布

设 $X_i(i=1,\ldots,n) \sim f(x)$ 是独立同分布的连续型r.v.

将 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 由小到大排列为 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$

**顺序统计量** $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$

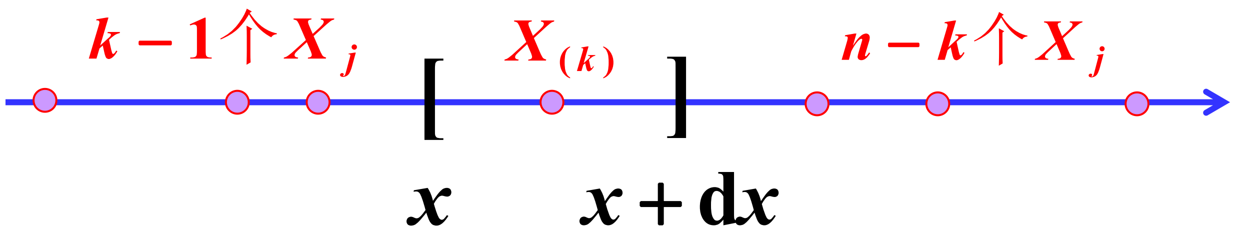
**最小值** $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

**最大值** $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

若 $n$ 是奇数 $n=2m+1$, 则 $X_{(m+1)}$ 称为中位数(median).


如何求 $X_{(k)}$ 的密度?

## 微分思路




对于充分小的区间$[x, x+\mathrm{d}x]$

$$P\{x \le X_{(k)} \le x+\mathrm{d}x\}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!1!(n-k)!}F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}f(x)dx$$

$$= f_k(x)\mathrm{d}x$$

故 $$\boxed{f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}f(x)F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}}$$

$$f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}f(x)F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}$$

若$X_i(i=1,\dots,n)\sim \mathrm{U}[0,1]$且相互独立, 则$X_{(k)}$的密度

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k},\quad 0\le x\le 1$$

$$\sim \mathrm{Beta}(k,n-k+1)$$

由于密度函数积分等于1, 因此得到

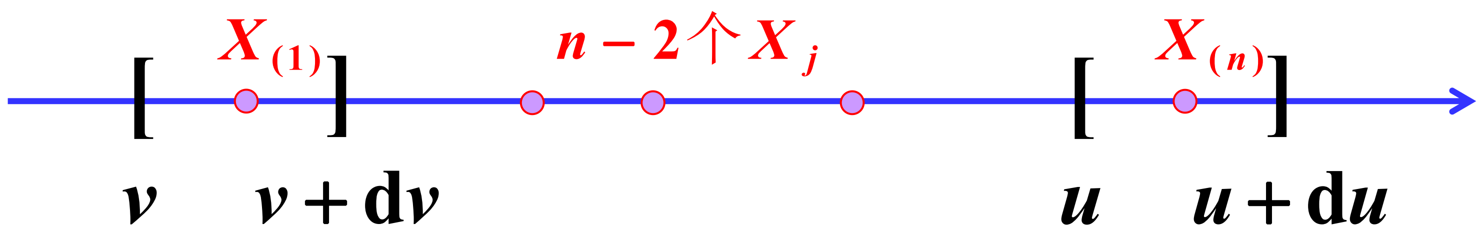
$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}\mathrm{d}x=\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

贝塔密度用来刻画[0,1]区间上的r.v.:

$$f(u)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1},\quad 0\le u\le 1$$

设 $V = X_{(1)}, U = X_{(n)}$，怎样求二者的联合密度？

## 微分思路



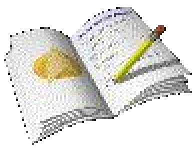

$$P\{v \le X_{(1)} \le v+\mathrm{d}v, u \le X_{(n)} \le u+\mathrm{d}u\}$$

$$= n(n-1)\cdot[F(u)-F(v)]^{n-2}\cdot f(v)\mathrm{d}v\cdot f(u)\mathrm{d}u$$

$$= f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

故 $\boxed{f(u,v) = n(n-1)f(v)f(u)[F(u)-F(v)]^{n-2}, \quad u \ge v}$

对于均匀分布，$f(u,v) = n(n-1)(u-v)^{n-2}, \quad 1 \ge u \ge v \ge 0$



## 课后作业

**P81：70，补充题1，2**

1. 从 1,2,3 中一次任取两个数，第一个数为 X，第二个为 Y， 记 Z=max(X,Y), 求(X,Y) 和(X,Z) 的联合频率函数和边缘频率函数。

2. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量， 服从 N(0,1)，令 Z=min(X,Y)，求 Z 的分布函数。

END