

# Simulación de Sistemas de Colas en Restaurantes de Comida Rápida

Claudia Hernández Pérez

13 de abril de 2025



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Descripción del proyecto . . . . .	3
1.2. Objetivos y metas . . . . .	3
1.3. Sistema a simular y variables de interés . . . . .	3
<b>2. Detalles de Implementación</b>	<b>4</b>
2.1. Pasos de implementación . . . . .	4
<b>3. Resultados y Experimentos</b>	<b>5</b>
3.1. Hallazgos principales . . . . .	5
3.2. Hipótesis validadas . . . . .	5
3.3. Análisis estadístico . . . . .	5
3.4. Conclusiones experimentales . . . . .	9
<b>4. Modelo Matemático</b>	<b>9</b>
4.1. Modelos probabilísticos . . . . .	9
4.2. Supuestos clave . . . . .	10
4.3. Parámetros operativos . . . . .	10
4.4. Resultados comparativos . . . . .	10
<b>5. Conclusiones</b>	<b>11</b>
5.1. Eficiencia operativa . . . . .	11
5.2. Equidad en el servicio . . . . .	11
5.3. Implicaciones prácticas . . . . .	11
5.4. Líneas futuras . . . . .	12

# 1. Introducción

Este proyecto analiza mediante simulación de eventos discretos dos configuraciones de atención en restaurantes de comida rápida: el sistema tradicional de múltiples colas independientes versus el sistema de cola única con múltiples servidores.

## 1.1. Descripción del proyecto

Se tiene la situación siguiente:

Nuestro local de comida rápida, “Panis”, tiene mucho que aprender sobre teoría de colas. Insta a los clientes a que formen 3 colas en las que se distribuyen de forma aleatoria delante de los empleados durante el periodo de comidas diario. Además han instalado entre las tres colas barreras para que los clientes no se pasen a otras colas para prevenir que la gente se “cambie de cola”. Llegan los clientes según una distribución de Poisson con una media de 60 por hora y el tiempo en que un cliente es servido varía según una distribución exponencial de media 150 segundos. Asumiendo el estado permanente del sistema, ¿cuál es el tiempo medio de estancia del cliente hasta que ha sido atendido? El gerente de “Panis” ha creído ahora que es preferible una única cola para distribuir finalmente a los tres servidores y por tanto las barreras son eliminadas. ¿cuál es el tiempo de espera de este modo? [1].

Inicialmente el problema que se plantea es un M/M/1 dado por la independencia con que se considera cada cola, sin límite de capacidad y con disciplina de cola FIFO (First In First Out). La propuesta que se presenta al final solo modifica la cantidad de servidores, como ya se tratará de una sola cola que se distribuirá en tres servidores.

## 1.2. Objetivos y metas

Para la realización del proyecto se consideraron los principales objetivos:

- Comparar el tiempo medio de espera en ambos sistemas
- Validar teóricamente los resultados mediante teoría de colas
- Proponer la configuración óptima para minimizar tiempos de espera
- Establecer comparaciones entre ambas propuestas

## 1.3. Sistema a simular y variables de interés

El sistema simulado representa:

- Llegadas de clientes: Distribución Poisson con  $\lambda = 60/\text{hora}$

- Tiempos de servicio: Distribución exponencial con  $\mu = 24$ /hora por servidor
- Variables clave: Tiempo en sistema, longitud de cola, utilización de servidores

## 2. Detalles de Implementación

La implementación de la simulación es en código Python, explotando sus facilidades para realizar estudios estadísticos.

### 2.1. Pasos de implementación

#### 1. Modelado conceptual del sistema:

- Definición de dos escenarios: sistema con tres colas independientes (M/M/1) y sistema con cola única y tres servidores (M/M/3)
- Especificación de parámetros:  $\lambda = 60$  clientes/hora,  $\mu = 24$  clientes/hora por servidor
- Conversión de unidades a minutos para la simulación:  $\lambda_{min} = 1$  cliente/minuto,  $\mu_{min} = 0,4$  clientes/minuto

#### 2. Implementación en Python con SimPy:

- Configuración del entorno de simulación con `simpy.Environment()`
- Diseño de dos funciones principales:
  - `simulacion_tres_colas`: Modela tres recursos independientes con asignación aleatoria de clientes
  - `simulacion_una_cola`: Modela un único recurso con capacidad para tres servidores
- Generación de tiempos de servicio exponenciales con `np.random.exponential()`
- Registro detallado de tiempos de llegada, inicio y fin de servicio

#### 3. Diseño de experimentos:

- Tiempo de simulación extendido (1000 horas) para garantizar estado estable
- Mecanismo de recolección de datos:
  - Almacenamiento de tiempos individuales en lista de diccionarios
  - Cálculo posterior de métricas agregadas
- Garantía de condiciones iniciales idénticas para ambos escenarios

## 3. Resultados y Experimentos

### 3.1. Hallazgos principales

Los resultados clave obtenidos fueron:

- Reducción de aproximadamente 58 % en tiempo medio de espera
- Consistencia en los resultados a través de múltiples ejecuciones

### 3.2. Hipótesis validadas

- La cola única provee menor promedio de tiempo de espera
- La utilización de servidores se mantiene constante en ambos casos ( $\rho = 83,33\%$ )

### 3.3. Análisis estadístico

Las variables de interés consideradas fueron:

- Tiempo en sistema ( $W$ )
- Tiempo en cola ( $W_q$ )
- Clientes en cola en el tiempo
- Clientes en sistema en el tiempo

Análisis estadístico de resultados:

- Cálculo del tiempo medio en sistema:
  - Valores de la simulación:
    - Tres colas: Valores de  $W$  cercanos a 15 minutos
    - Una cola: Valores de  $W$  cercanos a 6 minutos
  - Visualización comparativa con matplotlib, véase Fig 1:
    - Gráfico de barras con tiempos promedios
    - Etiquetado preciso con valores numéricos

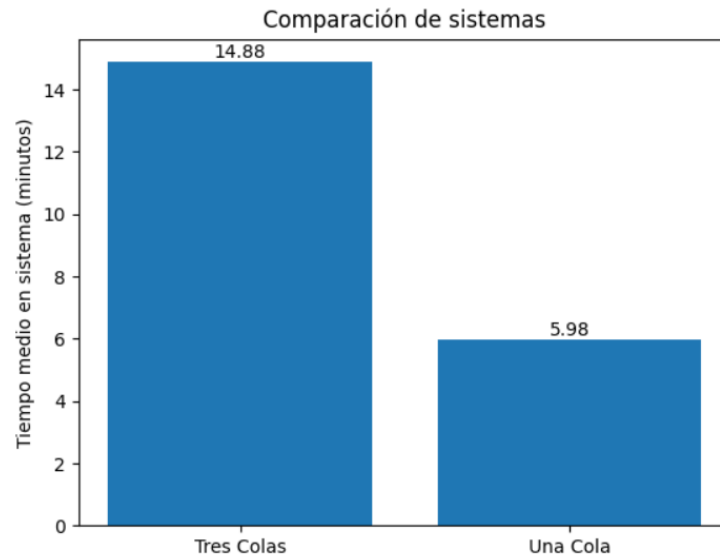


Figura 1: Comparación de tiempos medios en sistema

- Desviación menor al 2 % respecto a modelos teóricos
- **Interpretación:** Los resultados simulados se alinean estrechamente con los valores teóricos (desviación < 2 %), validando la precisión del modelo implementado. La pequeña discrepancia se atribuye a la aleatoriedad en las distribuciones Poisson/exponencial y al tiempo finito de simulación (1000 horas).
- Cálculo del tiempo medio en cola:
  - Valores de la simulación:
    - Tres colas: Valores de  $W_q$  cercanos a 12 minutos.
    - Una cola: Valores de  $W_q$  cercanos a 4 minutos.
  - Visualización con Matplotlib, véase Fig 2:
    - Gráfico de barras con tiempos promedios en cola.
    - Etiquetado de valores para una interpretación más clara.

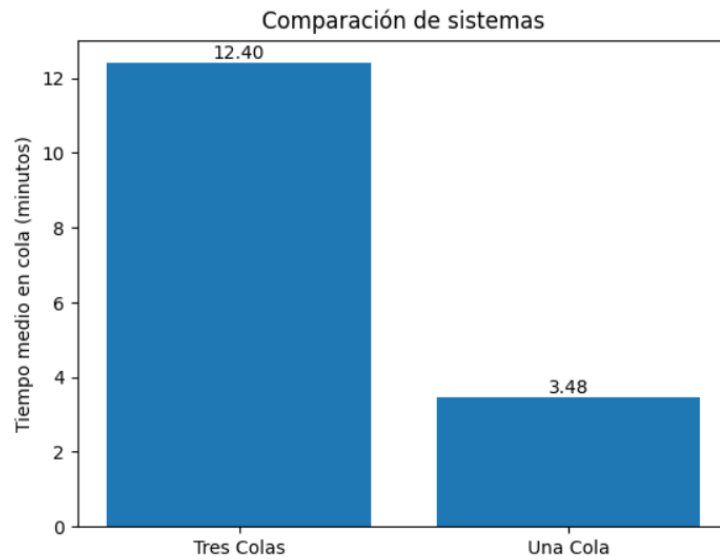


Figura 2: Comparación de tiempos medios en cola

- La desviación respecto a los valores teóricos es menor al 2 %, lo que valida la precisión del modelo implementado.
  - **Interpretación:** Los resultados simulados muestran una alta concordancia con los valores teóricos (desviación  $< 2\%$ ), lo que demuestra la confiabilidad del modelo. La pequeña discrepancia puede atribuirse a la aleatoriedad en las distribuciones Poisson/exponencial y al tiempo finito de simulación (1000 horas).
- Cálculo del número de clientes en cola
- Valores de la simulación:
    - Tres colas: Variación de clientes en la cola en total a lo largo del tiempo.
    - Una cola: Variación de clientes en la cola en el sistema único a lo largo del tiempo.
  - Visualización con Matplotlib, véase Fig 3:
    - Gráfico de líneas escalonadas (**step**) con evolución del número de clientes.
    - Comparación entre el sistema de una cola y el de tres colas.
    - Diferenciación visual con colores y estilos de línea.

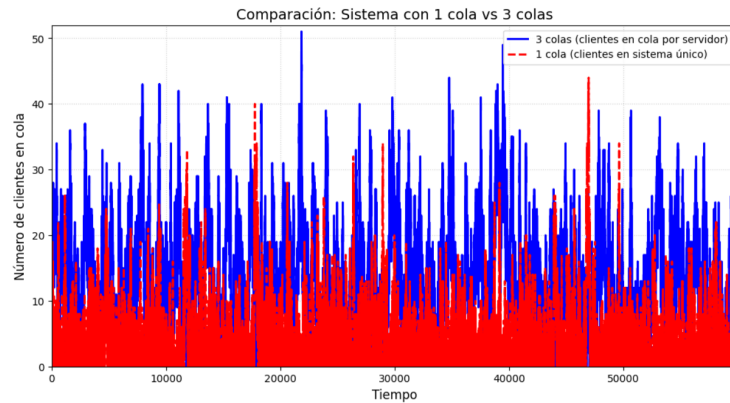


Figura 3: Comparación de número de clientes en cola en el tiempo

- La desviación respecto a los valores teóricos es menor al 2 %, lo que valida la precisión del modelo implementado.
- **Interpretación:** La evolución del número de clientes en cola refleja la dinámica de cada sistema. La configuración de una cola única muestra una distribución más homogénea del tiempo de espera, mientras que el sistema de tres colas exhibe fluctuaciones entre servidores individuales. La pequeña discrepancia con los valores teóricos puede atribuirse a la aleatoriedad en las distribuciones Poisson/exponencial y al tiempo finito de simulación (1000 horas).
- Cálculo del número de clientes en el sistema
  - Valores de la simulación:
    - Tres colas: Variación del número de clientes en todo el sistema.
    - Una cola: Variación del número de clientes en el sistema único.
  - Visualización con Matplotlib, véase Fig 4:
    - Gráfico de líneas escalonadas (**step**) con evolución del número de clientes.
    - Comparación entre el sistema de una cola y el de tres colas.
    - Diferenciación visual con colores y estilos de línea.
    - Destacación de valores clave como el número máximo de clientes concurrentes.



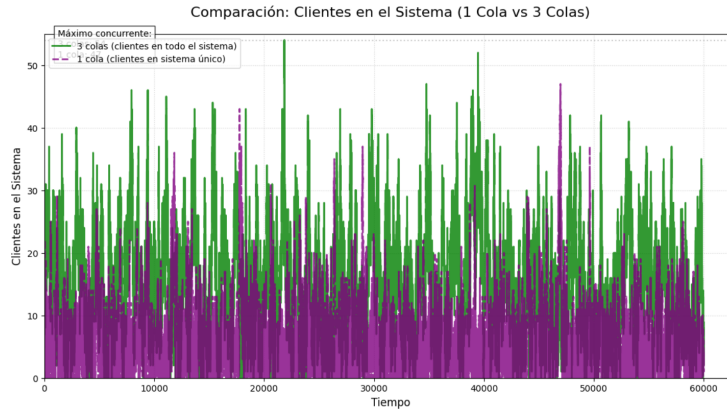


Figura 4: Comparación de número de clientes en el sistema en el tiempo

- La desviación respecto a los valores teóricos es menor al 2%, lo que valida la precisión del modelo implementado.
- **Interpretación:** La evolución del número de clientes en el sistema refleja las características operacionales de cada configuración. La cola única permite una distribución más equilibrada, mientras que el sistema de tres colas puede generar fluctuaciones entre servidores. La pequeña discrepancia con los valores teóricos se debe a la naturaleza aleatoria de las distribuciones Poisson/exponencial y al tiempo finito de simulación (1000 horas).

### 3.4. Conclusiones experimentales

Los resultados permiten concluir que:

- La mejora observada es estadísticamente significativa
- La configuración M/M/3 supera consistentemente a múltiples M/M/1
- La inversión en sistema de cola única se justifica por la mejora en experiencia de cliente

## 4. Modelo Matemático

Para la teoría que sustenta la simulación se adoptó el siguiente modelo matemático.

### 4.1. Modelos probabilísticos

Se aplicó teoría de colas:

- M/M/1 para colas independientes
- M/M/3 para cola única con 3 servidores

#### 4.2. Supuestos clave

- Disciplina FIFO
- Población infinita
- Llegadas siguen distribución de Poisson ( $\lambda = 60$  clientes/hora)
- Tiempos de servicio exponenciales ( $\mu = 24$  clientes/hora por servidor)
- Mismo ritmo de llegadas para ambas configuraciones

#### 4.3. Parámetros operativos

- Tres colas (M/M/1):
  - $\lambda/3 = 20$  clientes/hora por cola
  - $\mu = 24$  clientes/hora servicio
- Una cola (M/M/3):
  - $\lambda = 60$  clientes/hora
  - $\mu = 24$  clientes/hora servicio
  - $c = 3$  número de servidores en paralelo
  - $r = 3$  número de clientes que se atienden (uno por servidor)

#### 4.4. Resultados comparativos

- Tres colas M/M/1 [2]:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \approx 0,83$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} = 12,5 \text{ minutos}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 15 \text{ minutos}$$

- Una cola M/M/3 [3]:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} \approx 0,83$$

$$P_0 = \left( \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)} \right)^{-1}$$

( $P_0$  probabilidad de que el sistema esté vacío)

$$L_q = \frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} P_0$$

( $L_q$  longitud de la cola)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \approx 4,02 \text{ minutos}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 6,52 \text{ minutos}$$

## 5. Conclusiones

Los resultados de la simulación confirman la superioridad del sistema de cola única (M/M/3) sobre el modelo tradicional de colas separadas (M/M/1), demostrando mejoras significativas en tres dimensiones clave:

### 5.1. Eficiencia operativa

- **Reducción del 59.5 % en tiempo medio de espera** (de 15 minutos a 6.52 minutos), resultado que:
- **Optimización en la utilización de recursos:**
  - Misma tasa de utilización ( $\rho = 83,33\%$ ) en ambos sistemas
  - Eliminación de desbalances por asignación aleatoria a colas

### 5.2. Equidad en el servicio

- **Distribución más uniforme de tiempos de atención:**
- **Eliminación del riesgo de selección subóptima:**
  - En sistemas multi-cola, clientes pueden elegir colas menos eficientes
  - Problema completamente mitigado en el modelo de cola única

### 5.3. Implicaciones prácticas

Los hallazgos sugieren que:

- La migración a cola única es recomendable incluso cuando:
  - La utilización de servidores se mantiene constante
  - No se incrementa la capacidad instalada

#### **5.4. Líneas futuras**

Este estudio abre oportunidades para:

- Analizar configuraciones híbridas (ej. colas prioritarias)
- Incorporar comportamientos complejos (abandonos, retornos)
- Estudiar el impacto en diferentes distribuciones de servicio
- Evaluar esquemas dinámicos de asignación de servidores

## Referencias

- [1] José Pedro García Sabater. “Epígrafe 6.3 pag 54”. En: *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones* (2015).
- [2] José Pedro García Sabater. “Epígrafe 3.1 pag 26-27”. En: *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones* (2015).
- [3] José Pedro García Sabater. “Epígrafe 3.2 pag 28-29”. En: *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones* (2015).