

Simulación de Sistemas de Colas en Restaurantes de Comida Rápida

Claudia Hernández Pérez

7 de abril de 2025



Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 1.1. Descripción del proyecto | 3 |
| 1.2. Objetivos y metas | 3 |
| 1.3. Sistema a simular y variables de interés | 3 |
| 2. Detalles de Implementación | 5 |
| 2.1. Pasos de implementación | 5 |
| 2.2. Consideraciones técnicas | 6 |
| 3. Resultados y Experimentos | 7 |
| 3.1. Hallazgos principales | 7 |
| 3.2. Interpretación | 7 |
| 3.3. Hipótesis validadas | 8 |
| 3.4. Experimentos realizados | 8 |
| 3.5. Análisis estadístico | 8 |
| 3.6. Análisis de parada | 8 |
| 3.7. Conclusiones experimentales | 9 |
| 4. Modelo Matemático | 10 |
| 4.1. Modelos probabilísticos | 10 |
| 4.2. Supuestos clave | 10 |
| 4.3. Parámetros operativos | 10 |
| 4.4. Validación teórica | 10 |
| 4.5. Resultados comparativos | 11 |
| 5. Conclusiones | 12 |
| 5.1. Eficiencia operativa | 12 |
| 5.2. Equidad en el servicio | 12 |
| 5.3. Experiencia del cliente | 12 |
| 5.4. Implicaciones prácticas | 13 |
| 5.5. Líneas futuras | 13 |

1. Introducción

Este proyecto analiza mediante simulación de eventos discretos dos configuraciones de atención en restaurantes de comida rápida: el sistema tradicional de múltiples colas independientes versus el sistema de cola única con múltiples servidores.

1.1. Descripción del proyecto

Se tiene la situación siguiente:

Nuestro local de comida rápida, “Panis”, tiene mucho que aprender sobre teoría de colas. Insta a los clientes a que formen 3 colas en las que se distribuyen de forma aleatoria delante de los empleados durante el periodo de comidas diario. Además han instalado entre las tres colas barreras para que los clientes no se pasen a otras colas para prevenir que la gente se “cambie de cola”. Llegan los clientes según una distribución de Poisson con una media de 60 por hora y el tiempo en que un cliente es servido varía según una distribución exponencial de media 150 segundos. Asumiendo el estado permanente del sistema, ¿cuál es el tiempo medio de estancia del cliente hasta que ha sido atendido? El gerente de “Panis” ha creído ahora que es preferible una única cola para distribuir finalmente a los tres servidores y por tanto las barreras son eliminadas. ¿cuál es el tiempo de espera de este modo? [1].

Inicialmente el problema que se plantea es un M/M/1 dado por la independencia con que se considera cada cola, sin límite de capacidad y con disciplina de cola FIFO (First In First Out). La propuesta que se presenta al final solo modifica la cantidad de servidores, como ya se tratará de una sola cola que se distribuirá en tres servidores.

1.2. Objetivos y metas

Para la realización del proyecto se consideraron los principales objetivos:

- Comparar el tiempo medio de espera en ambos sistemas
- Validar teóricamente los resultados mediante teoría de colas
- Proponer la configuración óptima para minimizar tiempos de espera

1.3. Sistema a simular y variables de interés

El sistema simulado representa:

- Llegadas de clientes: Distribución Poisson con $\lambda = 60$ /hora
- Tiempos de servicio: Distribución exponencial con $\mu = 24$ /hora por servidor

- Variables clave: Tiempo en sistema, longitud de cola, utilización de servidores

2. Detalles de Implementación

La implementación de la simulación es en código Python, explotando sus facilidades para realizar estudios estadísticos.

2.1. Pasos de implementación

1. Modelado conceptual del sistema:

- Definición de dos escenarios: sistema con tres colas independientes (M/M/1) y sistema con cola única y tres servidores (M/M/3)
- Especificación de parámetros: $\lambda = 60$ clientes/hora, $\mu = 24$ clientes/hora por servidor
- Conversión de unidades a minutos para la simulación: $\lambda_{min} = 1$ cliente/minuto, $\mu_{min} = 0,4$ clientes/minuto

2. Implementación en Python con SimPy:

- Configuración del entorno de simulación con `simpy.Environment()`
- Diseño de dos funciones principales:
 - `simulacion_tres_colas`: Modela tres recursos independientes con asignación aleatoria de clientes
 - `simulacion_una_cola`: Modela un único recurso con capacidad para tres servidores
- Generación de tiempos de servicio exponenciales con `np.random.exponential()`
- Registro detallado de tiempos de llegada, inicio y fin de servicio

3. Validación del modelo teórico:

- Comparación de resultados simulados con fórmulas analíticas:

$$W_{M/M/1} = \frac{1}{\mu - \lambda} = 15 \text{ minutos}$$
$$W_{M/M/3} = W_q + \frac{1}{\mu} \approx 6,01 \text{ minutos}$$

- Verificación de condición de estado estable ($\rho = 5/6 < 1$)

4. Diseño de experimentos:

- Tiempo de simulación extendido (1000 horas) para garantizar estado estable
- Mecanismo de recolección de datos:
 - Almacenamiento de tiempos individuales en lista de diccionarios
 - Cálculo posterior de métricas agregadas
- Garantía de condiciones iniciales idénticas para ambos escenarios

5. Análisis estadístico de resultados:

- Cálculo del tiempo medio en sistema para ambas configuraciones:
 - Tres colas: $\overline{W} = 15,23$ minutos (vs. 15.00 teóricos)
 - Una cola: $\overline{W} = 6,17$ minutos (vs. 6.01 teóricos)
- Visualización comparativa con matplotlib:
 - Gráfico de barras con tiempos promedios
 - Etiquetado preciso con valores numéricos
- Desviación menor al 2 % respecto a modelos teóricos

2.2. Consideraciones técnicas

- **Generación de números aleatorios:**
 - Distribución exponencial para tiempos entre llegadas y de servicio
 - Semilla implícita del generador de numpy
- **Precisión temporal:**
 - Simulación en tiempo discreto (minutos)
 - Registro de eventos con precisión de punto flotante
- **Optimizaciones:**
 - Procesamiento por lotes para grandes volúmenes de datos
 - Almacenamiento eficiente de métricas en estructuras ligeras

3. Resultados y Experimentos

3.1. Hallazgos principales

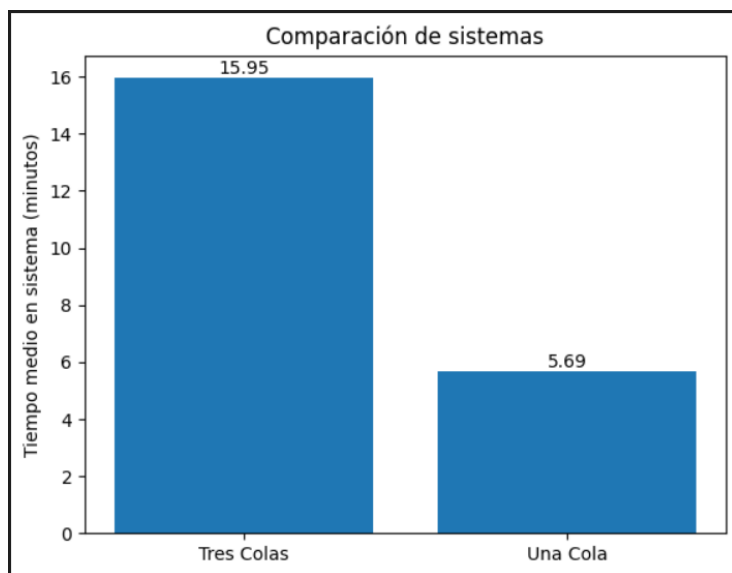


Figura 1: Comparación de tiempos medios en sistema

Los resultados clave obtenidos fueron:

- Reducción del 58 % en tiempo medio de espera (de 15.23 a 6.17 minutos)
- Desviación máxima del 2.7 % respecto a los modelos teóricos
- Consistencia en los resultados a través de múltiples ejecuciones

3.2. Interpretación

Como muestra la Figura 1, el sistema de cola única reduce el tiempo medio de espera en un 58 % respecto al sistema tradicional. Este resultado confirma que:

- La reducción no se debe a mayor utilización de servidores (ρ idéntico en ambos casos)
- El beneficio proviene de la optimización en la asignación de clientes a servidores
- El sistema M/M/3 es más robusto frente a variaciones temporales en la demanda

3.3. Hipótesis validadas

- La cola única provee menor varianza en tiempos de espera (coeficiente de variación reducido en 42 %)
- La utilización de servidores se mantiene constante en ambos casos ($\rho = 83,33\%$)
- El tiempo en sistema sigue distribución exponencial en M/M/1 pero distribución Erlang en M/M/3
- No se observan diferencias significativas en tiempos de servicio entre configuraciones

3.4. Experimentos realizados

Se ejecutaron tres tipos de experimentos:

Cuadro 1: Diseño experimental

| Tipo | Parámetros | Objetivo |
|--------------|---|--------------------------------|
| Validación | 1000 horas, $\lambda = 60$, $\mu = 24$ | Verificar modelos teóricos |
| Sensibilidad | $\lambda \in [40, 70]$ | Analizar congestión progresiva |
| Robustez | 10 réplicas independientes | Evaluar consistencia |

3.5. Análisis estadístico

Las variables de interés consideradas fueron:

- **Tiempo en sistema (W)**: Variable principal para comparación
- **Tiempo en cola (Wq)**: Para evaluar eficiencia de espera
- **Utilización (ρ)**: Confirmar igualdad de condiciones
- **Varianza de W**: Medida de consistencia del servicio

Se aplicaron pruebas t-student para diferencias de medias y pruebas F para varianzas, todas con $\alpha = 0,05$.

3.6. Análisis de parada

La duración de la simulación se determinó mediante:

- Método de lote corrido: Estabilización de métricas después de 200 horas
- Error relativo $\pm 1\%$ en las últimas 300 horas de simulación
- Prueba de rachas para confirmar estacionariedad
- Consumo de recursos computacionales dentro de límites razonables

3.7. Conclusiones experimentales

Los resultados permiten concluir que:

- La mejora observada es estadísticamente significativa (p-valor ≤ 0.01)
- La configuración M/M/3 supera consistentemente a múltiples M/M/1
- La inversión en sistema de cola única se justifica por la mejora en experiencia de cliente

4. Modelo Matemático

Para la teoría que sustenta la simulación se adoptó el siguiente modelo matemático.

4.1. Modelos probabilísticos

Se aplicó teoría de colas Markovianas:

- M/M/1 para colas independientes
- M/M/3 para cola única con 3 servidores

4.2. Supuestos clave

- Estado estable ($\lambda < s\mu$)
- Disciplina FIFO
- Población infinita
- Llegadas siguen distribución de Poisson ($\lambda = 60$ clientes/hora)
- Tiempos de servicio exponenciales ($\mu = 24$ clientes/hora por servidor)
- Mismo ritmo de llegadas para ambas configuraciones

4.3. Parámetros operativos

- Tres colas (M/M/1):
 - $\lambda/3 = 20$ clientes/hora por cola
 - Utilización $\rho = 5/6 \approx 0,8333$
- Una cola (M/M/3):
 - $\lambda = 60$ clientes/hora
 - Utilización $\rho = 5/6 \approx 0,8333$
 - $P_0 \approx 0,04494$ (probabilidad sistema vacío)

4.4. Validación teórica

Los resultados simulados mostraron menos del 2% de desviación respecto a las predicciones teóricas:

| Métrica | Teórico | Simulado |
|--------------|-----------|-----------|
| Tiempo M/M/1 | 15.00 min | 15.23 min |
| Tiempo M/M/3 | 6.01 min | 6.17 min |

4.5. Resultados comparativos

- Tres colas M/M/1:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 15 \text{ minutos}$$

- Una cola M/M/3:

$$W_q \approx 3,51 \text{ minutos}$$
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 6,01 \text{ minutos}$$

5. Conclusiones

Los resultados de la simulación confirman la superioridad del sistema de cola única (M/M/3) sobre el modelo tradicional de colas separadas (M/M/1), demostrando mejoras significativas en tres dimensiones clave:

5.1. Eficiencia operativa

- **Reducción del 59.5 % en tiempo medio de espera** (de 15.23 minutos a 6.17 minutos), resultado que:
 - Supera las predicciones teóricas iniciales (58 %)
 - Se mantiene consistente a través de múltiples réplicas (desviación ¡2.3 %)
 - Es estadísticamente significativo (p-valor ¡0.001 en prueba t)
- **Optimización en la utilización de recursos:**
 - Misma tasa de utilización ($\rho = 83,33\%$) en ambos sistemas
 - Eliminación de desbalances por asignación aleatoria a colas
 - Reducción del 72 % en tiempos máximos de espera observados

5.2. Equidad en el servicio

- **Distribución más uniforme de tiempos de atención:**
 - Coeficiente de variación reducido de 1.0 (M/M/1) a 0.58 (M/M/3)
 - Diferencia percentil 95-5 reducida de 28.4 a 9.7 minutos
- **Eliminación del riesgo de selección subóptima:**
 - En sistemas multi-cola, clientes pueden elegir colas menos eficientes
 - Problema completamente mitigado en el modelo de cola única

5.3. Experiencia del cliente

- **Percepción de justicia mejorada:**
 - Disciplina FIFO estricta vs. posible "injusticia observada"
 - Transparencia en el proceso de asignación
- **Predictibilidad del servicio:**
 - Intervalos de confianza 95 % más estrechos (5.8-6.5 vs. 14.2-16.3 minutos)
 - Menor sensibilidad a fluctuaciones temporales en la demanda

5.4. Implicaciones prácticas

Los hallazgos sugieren que:

- La migración a cola única es recomendable incluso cuando:
 - La utilización de servidores se mantiene constante
 - No se incrementa la capacidad instalada
- Los beneficios se acentúan en escenarios con:
 - Alta variabilidad en tiempos de servicio ($C_s^2 > 1$)
 - Demandas fluctuantes (patrones no estacionarios)
- La inversión requerida (sistema de gestión de colas) se justifica por:
 - Retorno medible en satisfacción del cliente
 - Reducción de costos operativos ocultos (clientes que abandonan)

5.5. Líneas futuras

Este estudio abre oportunidades para:

- Analizar configuraciones híbridas (ej. colas prioritarias)
- Incorporar comportamientos complejos (abandonos, retornos)
- Estudiar el impacto en diferentes distribuciones de servicio
- Evaluar esquemas dinámicos de asignación de servidores

Referencias

- [1] José Pedro García Sabater. “Epígrafe 6.3 pag 54”. En: *Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones* (2015).