Estatística descritiva

O que é a Estatística?

É um conjunto de técnicas apropriadas para recolher, classificar, apresentar e interpretar dados recolhidos numa experiência, previamente planificada, para auxílio na tomada de decisões.

Conceitos básicos

População: conjunto de todos os objectos com uma ou mais características em comum, que se pretendem estudar.

- Cada elemento da população é uma unidade estatística
- O número de elementos da população designa-se por dimensão da população e representa-se por N
- A dimensão da população pode ser finita ou infinita

População

Exemplos:

- Alunos de uma escola
- Potenciais eleitores para umas eleições

População

Parâmetros: Características numéricas que descrevem a população. Estas características são, em geral, desconhecidas.

Exemplos:

- Alunos de uma escola
  - Altura média dos alunos
  - Classificações médias obtidas a Estatística…
- Potenciais eleitores para umas eleições
  - Proporção de eleitores decididos a votar
  - Idade média dos eleitores…

População

Nem sempre é possível estudar exaustivamente todos os elementos de uma população! Porquê?

- Pode a população ter dimensão infinita (ex. a população das temperaturas em todos os pontos da cidade)
- Pode o estudo da população levar à destruição da mesma (ex. a população dos fósforos numa caixa)
- Pode o estudo da população ser muito dispendioso em tempo ou dinheiro (ex. sondagem exaustiva de todos os eleitores)

Conceitos básicos

Amostra: Subconjunto finito da população.

O número de elementos que fazem parte da amostra designa-se por dimensão da amostra e representa-se por n

Amostra

Exemplos:

- Alunos de uma escola
  - Amostra de 100 alunos dessa escola

- Potenciais eleitores para umas eleições
  - Amostra de 1000 potenciais eleitores para essas eleições

Amostra

Estatística: Característica numérica que descreve a amostra. Calcula-se o valor da estatística a partir dos valores observados na amostra. Utiliza-se a estatística para estimar um parâmetro desconhecido.

Amostra - Estatística

Exemplos:

- Alunos de uma escola
  - Altura média dos 100 alunos da amostra

- Potenciais eleitores para as eleições
  - Proporção de eleitores que estão decididos a votar, dos 1000 eleitores da amostra

Amostra

Será importante a fase da recolha da amostra?

Sim, pois a amostra deve ser representativa quanto possível da população de onde foi extraída, para que as conclusões possam estender-se a toda a população.

Uma amostra não representativa diz-se **enviesada**.

Amostra

Exemplo

- Utilizar uma amostra constituída por 10 benfiquistas, para prever o vencedor de um jogo do Benfica-Sporting.

- Utilizar uma amostra constituída por leitores de uma revista especializada, para tirar conclusões sobre a população em geral.

Amostra

Exercício: Diga porque é que as seguintes situações representam más amostras:

- Para saber qual o candidato mais votado, para a Câmara de determinada cidade, auscultou-se a opinião dos clientes de determinado supermercado.
- Para conhecer a situação financeira das empresas têxteis portuguesas, verificou-se a situação das empresas que tiveram maior volume de exportações, no último ano.

Censo *vs* Sondagem

Censo ou Recenseamento - estudo estatístico em que se observa toda a população.

Exemplos: recenseamento da população (2021); censo para o serviço militar.

Sondagem - estudo estatístico em que se estuda uma amostra da população

Exemplos: preferência musical dos alunos de uma Escola; índice de audiência de um programa da TV.

Estatística descritiva *vs* inferência estatística

- Estatística Descritiva: conjunto de métodos estatísticos que visam sintetizar e representar de forma compreensível a informação contida nos dados.

- Inferência Estatística: conjunto de métodos estatísticos que visam caracterizar (ou inferir sobre) uma população a partir da informação obtida da amostra.

Variável estatística

Característica da população que se pretende estudar – pode tomar vários valores possíveis.

Cada um desses valores é denominado categoria ou classe

Variável estatística

Uma variável, enquanto representar apenas a característica e não estiver concretizada em nenhum elemento, representa-se habitualmente por uma letra maiúscula. Quando se pretende representar o valor da variável para um indivíduo em particular utiliza-se a respectiva letra minúscula.

Exemplo:

X - representa a hemoglobina no sangue;

x =14.2 - representa a hemoglobina de um certo indivíduo.

Variável estatística - Tipo

Qualitativas – são aquelas que estão relacionadas com uma qualidade e apresentam-se com várias modalidades

Exemplo: cor dos olhos, estado civil

Quantitativas – são aquelas a que é possível atribuir um valor numérico e apresentam-se com diferentes intensidades ou valores

Exemplo: o número diário de nascimentos no hospital da Guarda

Variável estatística - qualitativa

Escala Nominal: apresentam-se em diferentes categorias, não ordenáveis.

Exemplos:

- Estado civil dos empregados de uma empresa;
- Religião;
- Cor de cabelos;
- Sexo dos indivíduos de uma população; (**característica dicotómica** ou **binária)**
- Numa sondagem de opinião, a resposta à pergunta "É a favor da despenalização da eutanásia?" (**característica dicotómica** ou **binária)**

Variável estatística - qualitativa

Escala Ordinal: as diversas categorias possuem uma ordem intrínseca.

Exemplos:

- O sistema de graduação militar: Soldado, Cabo, Sargento
- Num inquérito de opinião pede-se às pessoas que classifiquem um determinado produto como sendo: muito fraco, fraco, razoável, bom ou muito bom.
- Classificação dos clientes de um banco, segundo o volume de capital que movimentam mensalmente: pouco importantes, importantes ou muito importantes.
- Classificação dos alunos de uma escola segundo a sua altura: baixos (menos de 155 cm), médios (entre 155 e 170 cm) ou altos (mais de 170 cm).

Variável estatística - quantitativa

Discretas - assumem valores num conjunto finito ou infinito numerável

Exemplo: o número diário de nascimentos no hospital da Guarda

Contínuas - assumem qualquer valor num intervalo de números reais

Exemplo: altura de um aluno da ESTG

Variáveis discretas *vs* contínuas

Fronteira pouco clara:

Dados discretos podem ter uma gama de valores tão dispersa que na prática funcionam como se fossem contínuos.

Exemplos:

- O nº de células contidas em 1 ml de sangue.
- O nº de peixes que entra diariamente no rio Tejo, trazido pelas marés.

Variáveis discretas *vs* contínuas

Dados contínuos são registados com precisão finita (seja grande ou pequena) e na prática são discretos.

Exemplos:

- A idade de uma pessoa, em anos.
- O diâmetro de uma semente de papoila, em décimas de mm.

Exercício:

Classifique como qualitativa (nominal ou ordinal) ou quantitativa (discreta ou contínua) as variáveis:

1. Número de filhos de um casal;
2. Grupo sanguíneo;
3. Temperatura mínima diária;
4. Classificações obtidas no 3º ciclo do ensino básico;
5. Grupo etário (crianças, jovens, adultos, idosos);
6. Comprimento das orelhas de um cão;
7. Categorias taxonómicas de plantas e animais;
8. Pulsação.

Exercício:

Soluções:

1. Quantitativa discreta;
2. Qualitativa ordinal;
3. Quantitativa contínua;
4. Quantitativa discreta;
5. Qualitativa ordinal;
6. Quantitativa contínua;
7. Qualitativa ordinal;
8. Quantitativa discreta.

Organização dos dados

O que fazer com os dados recolhidos?

Primeira etapa: resumo dos dados

Organização dos dados

- Tabela de frequências (absolutas e relativas)
- Representações gráficas
  - Dados qualitativos
    - Diagrama de barras
    - Diagrama circular
  - Dados quantitativos
    - Discretos
      - Diagrama de barras
    - Contínuos
      - Histograma
      - Diagrama Caixa de Bigodes

Organização dos dados

Tabela é um quadro que resume um conjunto de observações.

Frequência absoluta (f_i):

Número de elementos de cada uma das categorias ou classes i

Frequência relativa (f_{r_i}):

Proporção de elementos de cada uma das categorias ou classes i. É dada pelo quociente entre a frequência absoluta e a dimensão da amostra, ou seja:

$$f_{r_i} = \frac{f_i}{n}$$

Organização dos dados

Para confirmar que as frequências estão bem calculadas, basta verificar que

A soma das frequências absolutas é igual à dimensão da amostra

e

A soma das frequências relativas é igual a 1

Organização dos dados

Categoria ou Classe	f_i	f_{r_i}
C_1	n_1	$\frac{n_1}{n}$
C_2	n_2	$\frac{n_2}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_p	n_p	$\frac{n_p}{n}$
Total	n	1

Organização dos dados

Exemplo:

Perguntou-se a cada um dos 25 funcionários de uma loja qual o tipo de música ambiente que preferiam ouvir durante o expediente. Os resultados foram os seguintes:

R C J P C P J J P R P O R

J R R P R O P O C N P P

onde C- Clássica, P- Pop, R- Rock, J- Jazz,

O- Outro tipo de música e N - Nenhum tipo

Organização dos dados

Exemplo:

Preferência Musical	f_i	f_{r_i}
Clássica (C)	3	0,12
Pop (P)	8	0,32
Rock (R)	6	0,24
Jazz (J)	4	0,16
Outro (O)	3	0,12
Nenhum (N)	1	0,04
Total	25	1

Organização dos dados

Podemos também apresentar na tabela de frequências a **frequência absoluta acumulada** e a **frequência relativa acumulada**, que se obtêm adicionando as frequências absolutas e relativas, respectivamente.

Organização dos dados

Categoria ou classe	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
C_1	n_1	$f_{r_1} = \frac{n_1}{n}$	n_1	f_{r_1}
C_2	n_2	$f_{r_2} = \frac{n_2}{n}$	$n_1 + n_2$	$f_{r_1} + f_{r_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_p	n_p	$f_{r_p} = \frac{n_p}{n}$	$n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$	$f_{r_1} + f_{r_2} + \cdots + f_{r_p} = 1$
Total	n	1	-	-

Organização dos dados

Exemplo:

Numa turma do 10º ano, os alunos registaram o nº de irmãos, tendo-se obtido a seguinte amostra:

1 2 2 1 3 0 0 1 1 2 1 1 1 0 0 3 4 3 1 2

Elabore a tabela de frequências.

Organização dos dados

Exemplo:

Nº irmãos	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
0	4	0,20	4	0,20
1	8	0,40	4+8=12	0,2+0,4=0,6
2	4	0,20	16	0,80
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Total	20	1	-	-

Organização dos dados

Exemplo:

Quantos alunos têm:

a) Menos de 3 irmãos

16

Nº irmãos	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
0	4	0,20	4	0,20
1	8	0,40	12	0,60
2	4	0,20	16	0,80
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Total	20	1	-	-

Organização dos dados

Exemplo:

Quantos alunos têm:

a) Menos de 3 irmãos

b) Pelo menos 2 irmãos

20-12

ou 4+3+1

Nº irmãos	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
0	4	0,20	4	0,20
1	8	0,40	12	0,60
2	4	0,20	16	0,80
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Total	20	1	-	-

Organização dos dados

Exemplo:

Qual a percentagem de alunos com:

a) 2 irmãos

$0{,}20 \times 100\% = 20\%$

Nº irmãos	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
0	4	0,20	4	0,20
1	8	0,40	12	0,60
2	4	0,20	16	0,80
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Total	20	1	-	-

Organização dos dados

Exemplo:

Qual a percentagem de alunos com:

a) 2 irmãos

b) Menos de 2 irmãos

$0{,}60 \times 100\% = 60\%$

Nº irmãos	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
0	4	0,20	4	0,20
1	8	0,40	12	0,60
2	4	0,20	16	0,80
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Total	20	1	-	-

Organização dos dados

Exemplo:

Qual a percentagem de alunos com:

a) 2 irmãos

b) Menos de 2 irmãos

c) Pelo menos 3 irmãos

(1-0,8) ×100%=20%

Nº irmãos	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
0	4	0,20	4	0,20
1	8	0,40	12	0,60
2	4	0,20	16	0,80
3	3	0,15	19	0,95
4	1	0,05	20	1
Total	20	1	-	-

Organização dos dados em classes

Para o caso de os dados serem contínuos ou discretos com valores muito distintos é usual proceder-se ao agrupamento dos dados em **intervalos de classes**.

Organização dos dados em classes

Classe:

É um intervalo da forma [a,b[ou]a,b] que representa um conjunto de valores que a variável estatística pode tomar

Amplitude da classe:

É a distância entre o limite superior e o limite inferior, ou seja,

$$\text{Amplitude} = b - a$$

Organização dos dados em classes

Valor característico:

É o ponto médio da classe e calcula-se por

$$\frac{a+b}{2}$$

Organização dos dados em classes

As questões que se colocam são:

Qual o número de classes a considerar?

Qual a amplitude de classe a considerar?

Organização dos dados em classes

Qual o número de classes (k) a considerar?

- Regra de Sturges: $k \cong 1 + 3{,}3 \log_{10} n$

- $k \cong \sqrt{n}$

Organização dos dados em classes

Qual a amplitude de classe a considerar?

$$\boldsymbol{amplitude\ de\ classe} = \frac{\boldsymbol{maior\ observa\text{ção} - menor\ observa\text{ção}}}{\boldsymbol{n\text{ú}mero\ de\ classes}}$$

Organização dos dados em classes

Etapas para a construção da tabela de frequências:

1) Definição das classes

a) Determinar o número de classes **k**

b) Determinar a amplitude da amostra (máximo - mínimo)

c) Dividir esta amplitude pelo número de classes, **k**

d) Tomar para amplitude de classe, **h**, um valor aproximado por excesso do valor obtido em c)

e) Construir as classes de modo que tenham todas a mesma amplitude e cuja união contenha todos os elementos da amostra

2) Contagem do número de elementos de cada classe.

Organização dos dados em classes

Os intervalos das classes devem ser:

- **mutuamente exclusivos** – um indivíduo não pode ser classificado em duas classes em simultâneo

- **exaustivos** – nenhum indivíduo pode ficar sem classificação

Organização dos dados em classes

Exemplo: O tempo necessário para executar determinada cirurgia foi cronometrado (em minutos), tendo sido feitas 60 observações:

35 27 29 38 41 30 43 39 23 26 28 33 23 31 31

29 31 35 33 35 24 35 25 38 41 41 35 36 34 35

31 45 28 36 36 46 47 26 43 39 37 38 34 39 28

30 22 20 47 34 47 35 34 38 33 37 30 35 26 39

Obtenha a tabela de frequências para os dados.

Organização dos dados em classes

nº de classes = $1 + 3{,}3\log_{10} 60 \cong 7$

maior observação = 47 e menor observação = 20

amplitude de classe = $\frac{47-20}{7} \cong 4$

limite inferior da 1ª classe = 20

Organização dos dados em classes

Tempo	f_i	f_{r_i}	F_i	F_{r_i}
[20,24[	4	0,07	4	0,07
[24,28[	6	0,10	10	0,17
[28,32[	12	0,20	22	0,37
[32,36[	15	0,25	37	0,62
[36,40[	13	0,22	50	0,84
[40,44[	5	0,08	55	0,92
[44,48[	5	0,08	60	1
Total	60	1		

Representação gráfica dos dados

Gráfico de barras

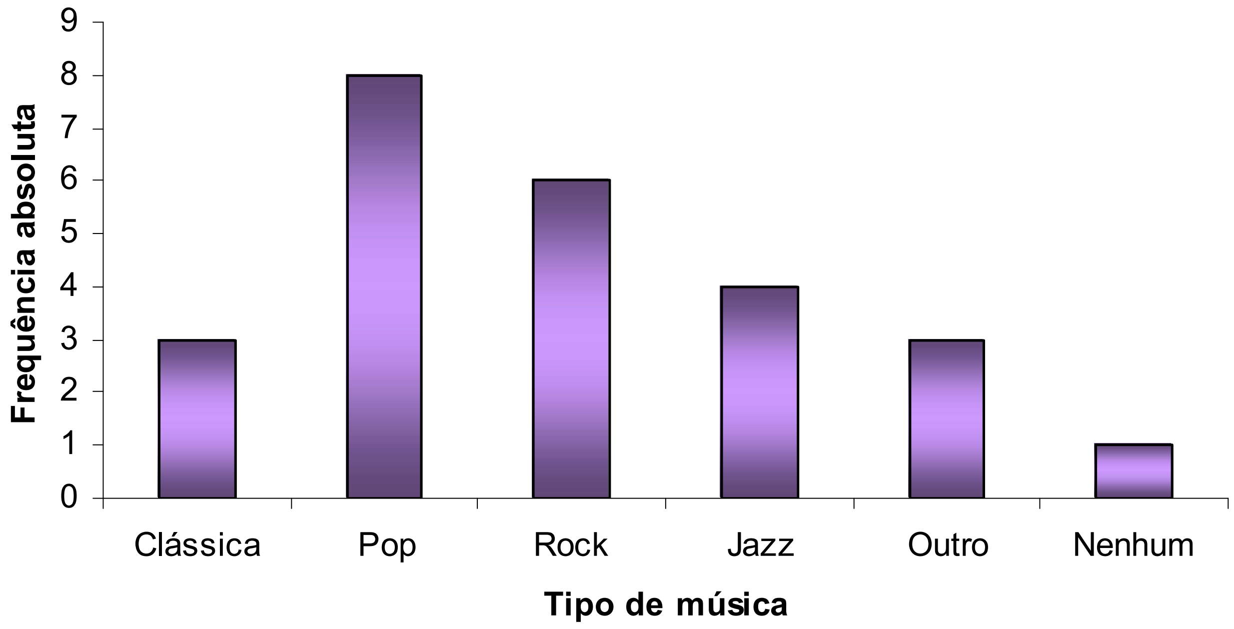
A metodologia a seguir na construção do gráfico de barras é:

1) Ordenar a amostra e considerar para classes/categorias os diferentes valores. Marcar essas classes/categorias no eixo dos XX (horizontal) do sistema de eixos coordenados.

2) Nos pontos onde se consideram as classes/categorias, marcar barras de altura igual à frequência absoluta ou relativa da classe/categoria.

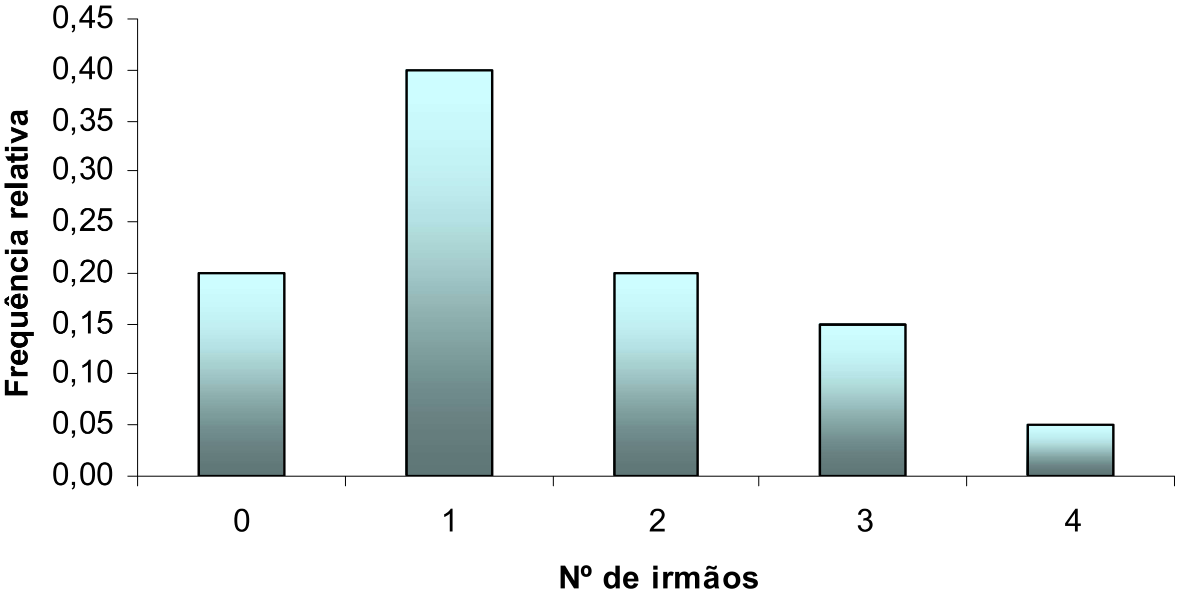
Representação gráfica dos dados

Exemplo: O gráfico de barras que representa a distribuição do tipo de música ambiente preferida pelos funcionários da loja tem o seguinte aspecto:



Representação gráfica dos dados

Exemplo: O gráfico de barras que representa a distribuição do número de irmãos dos alunos da turma considerada tem o seguinte aspecto:



Representação gráfica dos dados

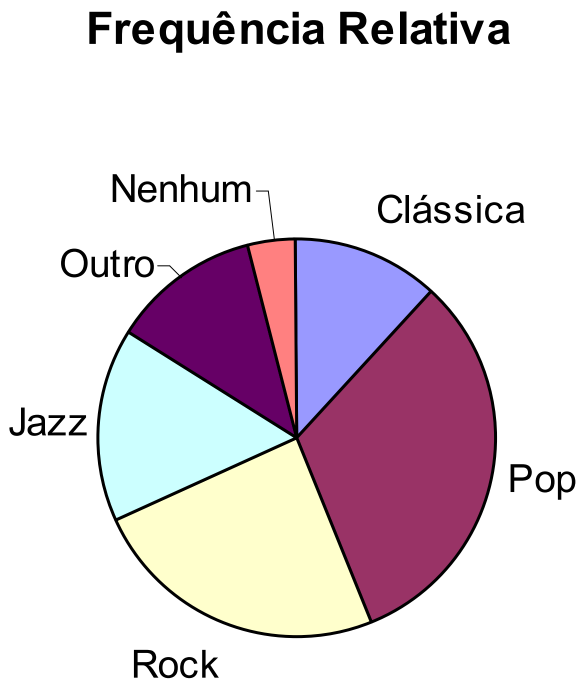
Diagrama circular

É constituído por um círculo, em que se apresentam vários sectores circulares, tantos quantas as classes ou categorias consideradas na tabela de frequências.

Os ângulos dos sectores são proporcionais às frequências das classes ou categorias.

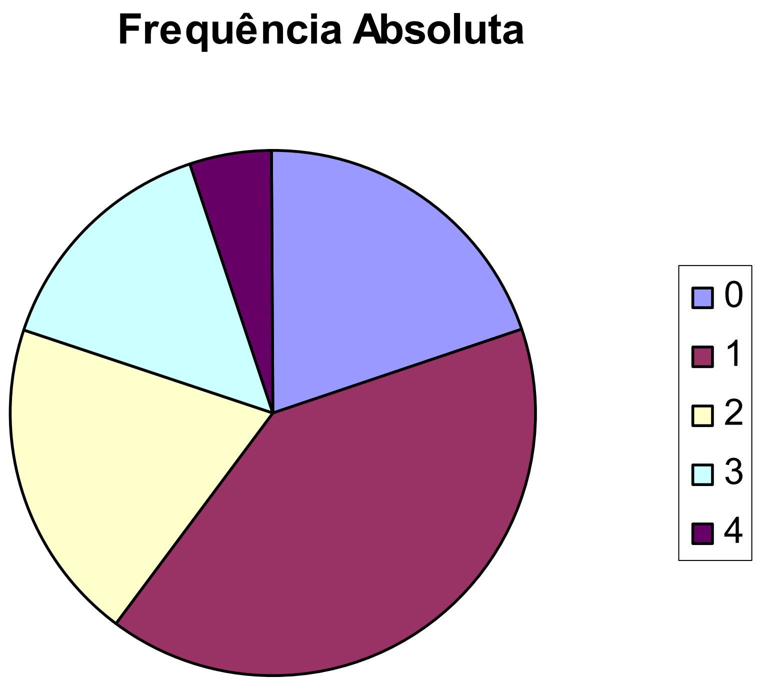
Representação gráfica dos dados

Exemplo: O gráfico circular que representa a distribuição do tipo de música ambiente dos funcionários da loja tem o seguinte aspecto:



Representação gráfica dos dados

Exemplo: O gráfico circular que representa a distribuição do número de irmãos dos alunos da turma considerada tem o seguinte aspecto:



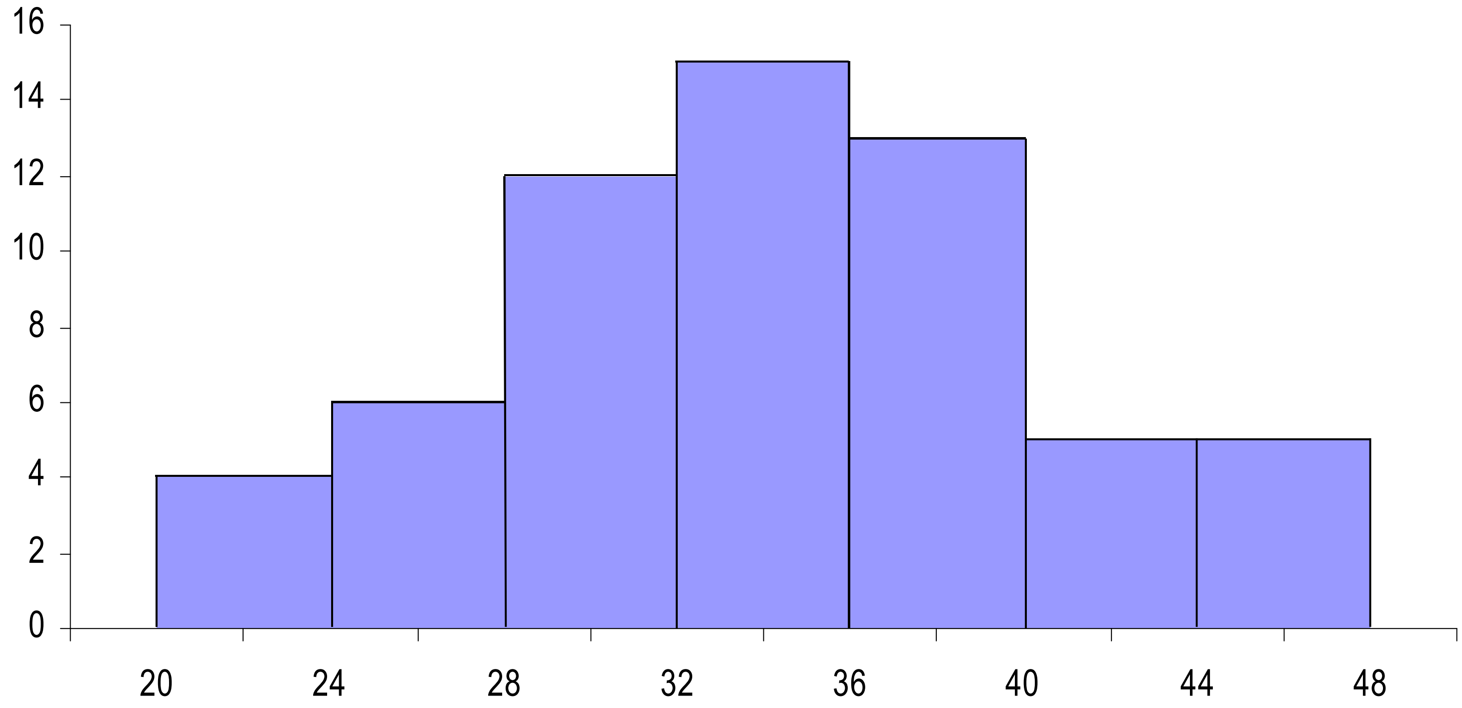
Representação gráfica dos dados

Histograma

É formado por rectângulos adjacentes, tendo por base um intervalo de classe e por altura a frequência absoluta ou relativa

Representação gráfica dos dados

Exemplo: O histograma que representa a distribuição da frequência absoluta, do tempo de duração de uma dada cirurgia tem o seguinte aspecto:



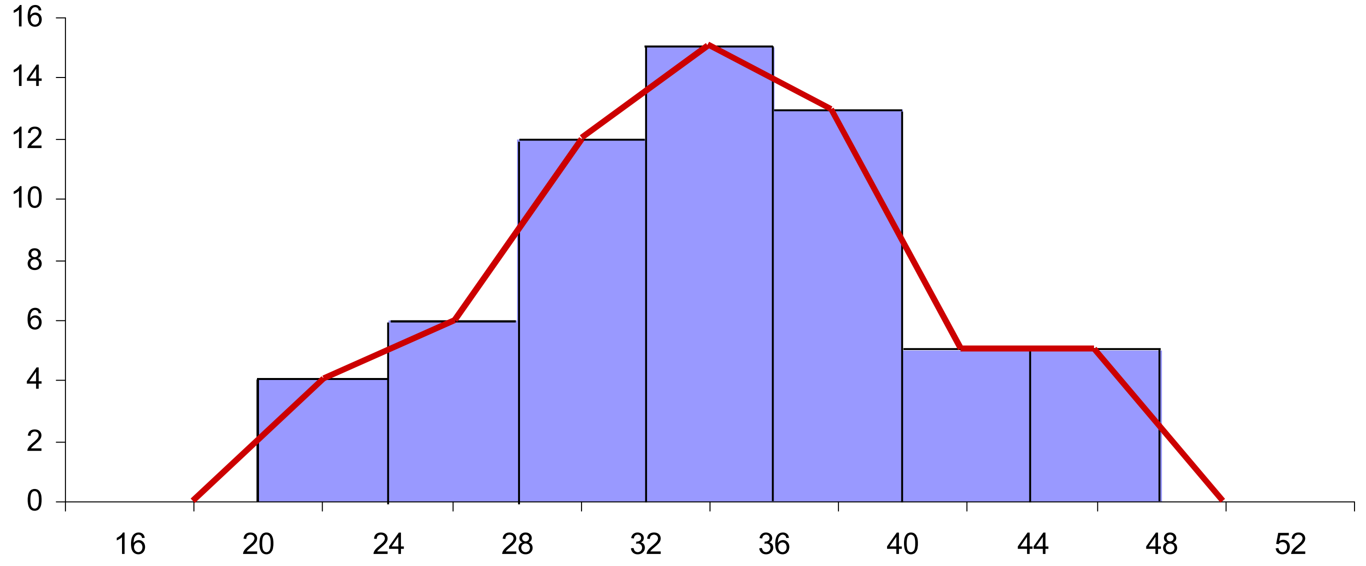
Representação gráfica dos dados

Polígono de frequências

É uma representação gráfica dos dados em que se une, através de segmentos de recta, todos os pontos cuja abcissa é o valor característico de uma classe e a ordenada é a frequência dessa classe. O polígono pressupõe, em cada extremo, a existência de uma classe adicional de frequência nula.

Representação gráfica dos dados

Exemplo: Polígono de frequências do tempo de duração de uma cirurgia.



Descrição dos dados – medidas

O que são Medidas Descritivas?

São medidas que podem ser obtidas sobre conjuntos de dados numéricos, de forma a fornecer informações sobre esses dados.

Descrição dos dados – medidas

Resumindo numericamente

Para resumir numericamente dados quantitativos, o objetivo é escolher medidas apropriadas de:

- **Localização** – qual o tamanho dos números envolvidos
- **Dispersão** – quanta variação existe

para os tipos de dados

Descrição dos dados – medidas

- Medidas de localização
  - Média
  - Mediana
  - Moda
  - Quartis e percentis
- Medidas de dispersão ou variabilidade
  - Amplitude
  - Desvio padrão e variância
  - Amplitude inter-quartil

Descrição dos dados – média

Definição:

Dado um conjunto de n valores observados $x_1, x_2, \dots, x_n$, a **média amostral** é dada por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Descrição dos dados – média

Se os dados se encontram agrupados, a média amostral é dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \, x_i'$$

onde

k – número de classes

f_i – frequência absoluta da classe i

x_i' – valor característico da classe i

Descrição dos dados – média

A média amostral será sempre uma medida representativa dos dados?

Exemplo:

Ao determinar a média dos seguintes dados

12,4   13,5   13,6   11,2   113,5

obteve-se $\bar{x} = 32{,}84$.

Obs.

- O exemplo revela a sensibilidade da média a observações extremas, isto é, observações muito grandes ou muito pequenas;
- A popularidade da média é consequência de ser uma medida de cálculo fácil.

Descrição dos dados – média

Exercício (dados não classificados):

Considere o exemplo do número de irmãos dos alunos da turma do 10º ano. Determine a média.

1 2 2 1 3 0 0 1 1 2 1 1 1 0 0 3 4 3 1 2

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+1+3+0+0+1+1+2+1+1+1+0+0+3+4+3+1+2}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{29}{20} = 1{,}45$$

Descrição dos dados – média

Exercício (dados classificados):

Considere o exemplo do número de irmãos dos alunos da turma do 10º ano. Determine a média.

nº de irmãos	0	1	2	3	4
f_i	4	8	4	3	1

$$\bar{x} = \frac{0 \times 4 + 1 \times 8 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 1}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{29}{20} = 1{,}45$$

Descrição dos dados – média

Exercício (dados não classificados):

Considere o exemplo dos tempos de duração de certa cirurgia. Calcule a média.

35 27 29 38 41 30 43 39 23 26 28 33 23 31 31

29 31 35 33 35 24 35 25 38 41 41 35 36 34 35

31 45 28 36 36 46 47 26 43 39 37 38 34 39 28

30 22 20 47 34 47 35 34 38 33 37 30 35 26 39

$$\bar{x} = \frac{35 + 27 + 29 + 38 + \cdots + 35 + 26 + 39}{60} =$$

$$= \frac{2044}{60} = 34{,}06666\ldots$$

Descrição dos dados – média

Exercício (dados classificados):

Considere o exemplo dos tempos de duração de certa cirurgia. Calcule a média.

Tempo	f_i
[20,24[	4
[24,28[	6
[28,32[	12
[32,36[	15
[36,40[	13
[40,44[	5
[44,48[	5

$$\bar{x} = \frac{22 \times 4 + 26 \times 6 + 30 \times 12 + 34 \times 15 + 38 \times 13 + 42 \times 5 + 46 \times 5}{60}$$

$$= \frac{2048}{60} = 34{,}13333 \ldots$$

Descrição dos dados – média

Nota:

Sempre que possível deve-se calcular a média a partir dos dados originais.

No caso do exemplo anterior a média calculada a partir dos dados originais é 34,07 e a partir dos dados classificados é 34,13. No caso dos dados classificados há perda de informação.

Descrição dos dados – mediana

Definição:

Dado um conjunto de n valores observados x_1, x_2, ..., x_n, ordenados, a **mediana amostral**, representada por **Me**, é o valor, pertencente ou não à amostra, que a divide ao meio.

Por outras palavras 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana amostral e os restantes 50% são maiores ou iguais à mediana amostral.

Descrição dos dados – mediana

Dado um conjunto de n valores observados x_1, x_2, ..., x_n, ordenados, então

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , se\ n\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & , se\ n\ \acute{e}\ par \end{cases}$$

Exercício (dados não classificados):

Obter as medianas dos seguintes conjuntos de observações:

10 10 12 7 8 5 4 $\Rightarrow Me = 8$

10 10 12 7 7 8 5 4 $\Rightarrow Me = 7{,}5$

Descrição dos dados – mediana

Exemplo:

A mediana dos dados

12,4   13,5   13,6   11,2   113,5

é Me = 13,5, o que nos dá uma melhor ideia sobre o conjunto dos dados.

Obs.

Como vemos a mediana amostral é mais resistente a observações díspares.

Descrição dos dados – mediana

No caso de termos dados agrupados em intervalos de classes, a identidade das observações perde-se; nesse caso, a mediana nunca pode ser calculada exatamente. Uma forma de o fazer é através da expressão:

$$Me = l_{cm} + \frac{0{,}5 - F_{r_{cm-1}}}{f_{r_{cm}}} \times (L_{cm} - l_{cm})$$

sendo $CMe = [l_{cm}\,, L_{cm}[$ a classe da mediana, ou seja, a primeira classe cuja frequência relativa acumulada é superior a 0,5

Descrição dos dados – mediana

Exemplo (dados classificados):

Considere o exemplo da duração de determinada cirurgia. Determine a mediana.

$$Me = 32 + \frac{0,5 - 0,37}{0,25} \times (36 - 32) = 34,08$$

Descrição dos dados – moda

Definição:

A **moda (Mo)** de um conjunto de n observações x_1, x_2, ..., x_n, é a observação que ocorre com mais frequência na amostra, caso exista.

Obs.

Quando os dados estão agrupados em intervalos de classes, a **classe modal** é a classe com maior frequência absoluta (relativa), podendo existir mais do que uma classe com esta propriedade.

Descrição dos dados – moda

Uma distribuição pode classificar-se, quanto à moda por:

- Amodal – não tem moda
- Unimodal – tem uma moda
- Bimodal – tem duas modas
- Multimodal – tem mais de duas modas

Descrição dos dados – moda

Exercícios:

Determine a moda

Dados não classificados

Exemplo: Nº de irmãos

Mo = 1

Dados classificados

Exemplo: Tempo de cirurgia

Classe modal = [32, 36 [

Descrição dos dados – quartis

Definição:

Dividem um conjunto de dados, ordenados por ordem crescente, em quatro partes iguais. Definem-se 3 quartis.

- **1º quartil** (ou quartil inferior) é o percentil correspondente à percentagem de 25%, o que significa que 25% dos elementos da amostra são menores ou iguais a ele, e os restantes 75 % são maiores ou iguais.

Descrição dos dados – quartis

- **2º quartil** (ou Mediana) é o percentil correspondente à percentagem de 50%, o que significa que 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais a ele, e os restantes 50% são maiores ou iguais

- **3º quartil** (ou quartil superior) é o percentil correspondente à percentagem de 75%, o que significa que 75% dos elementos da amostra são menores ou iguais a ele, e os restantes 25% são maiores ou iguais

Descrição dos dados – quartis

Localização dos quartis (dados não classificados)

	n é par	n é ímpar
Q_1	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{n+1}{4}$
Q_3	$\frac{3n+2}{4}$	$3 \times \frac{n+1}{4}$

Descrição dos dados – quartis

Exercício (dados não classificados):

Tendo-se decidido registar os pesos dos alunos de uma determinada turma do 2º ano, obtiveram-se os seguintes valores (em kg):

52 56 62 54 52 70 51 60 61 56 55 56 54 57 67 61 49

Ordenar os dados:

49 51 52 52 54 54 55 56 56 56 57 60 61 61 62 67 70

$Q_1 = 53$; $Q_2 = 56$; $Q_3 = 61$

Descrição dos dados – quartis

No caso dos dados classificados tem-se:

$$Q_1 = l_{cq1} + \frac{0{,}25 - F_{r_{cq1-1}}}{f_{r_{cq1}}} \times \left(L_{cq1} - l_{cq1}\right)$$

sendo $CQ_1 = \left[l_{cq1}\,, L_{cq1}\right[$ a classe do quartil 1, ou seja, a primeira classe cuja frequência relativa acumulada é superior a 0,25 e

$$Q_3 = l_{cq3} + \frac{0{,}75 - F_{r_{cq3-1}}}{f_{r_{cq}}} \times \left(L_{cq3} - l_{cq3}\right)$$

sendo $CQ_3 = \left[l_{cq3}\,, L_{cq3}\right[$ a classe do quartil 3, ou seja, a primeira classe cuja frequência relativa acumulada é superior a 0,75

Descrição dos dados – quartis

Exercício (dados classificados):

Considere o exemplo dos tempos de duração de certa cirurgia. Calcule os quartis.

$$Q_1 = 28 + \frac{0{,}25 - 0{,}17}{0{,}20} \times (32 - 28) = 29{,}6$$

$$Q_2 = Me = 34{,}08$$

$$Q_3 = 36 + \frac{0{,}75 - 0{,}62}{0{,}22} \times (40 - 36) = 38{,}36$$

Descrição dos dados

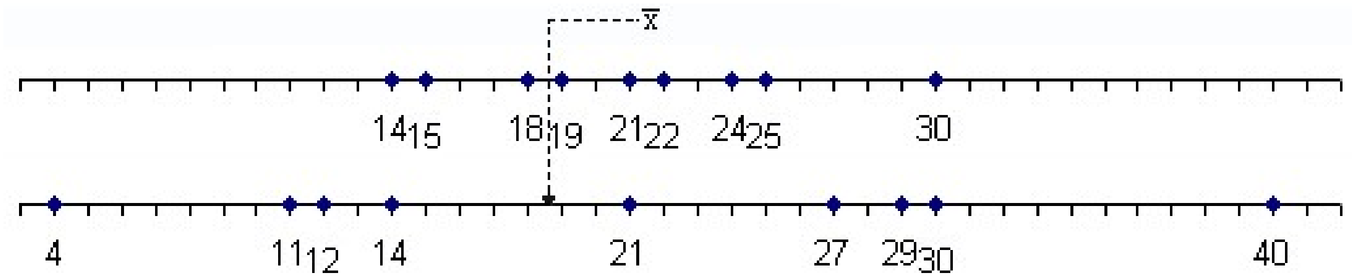
Medidas de Dispersão

As medidas de localização não são por si só capazes de descrever completamente os dados.

Um aspecto importante no estudo descritivo de um conjunto de dados, é o da determinação da variabilidade ou dispersão desses dados, relativamente à medida de localização do centro da amostra.

Descrição dos dados

Repare-se nas duas amostras seguintes, que embora tenham a mesma média, têm uma dispersão bem diferente:



Descrição dos dados – Amplitude

Definição:

Dado um conjunto de n observações x_1, x_2, ...,x_n, a **amplitude amostral** é a diferença entre o máximo e o mínimo dos x_i's. Simbolicamente,

$$R = \max(x_i) - \min(x_i)$$

Obs.

Tal como a média amostral, verifica-se que a amplitude amostral é muito sensível às observações extremas.

Descrição dos dados – Amplitude

Exemplo:

Considerem-se as seguintes amostras:

Amostra 1: 1 3 5 8 9

Amostra 2: 1 5 5 5 9

Apesar de terem a mesma amplitude a variabilidade da 2ª amostra depende apenas dos valores extremos.

Obs.

A amplitude amostral pode não ser uma "boa" medida de dispersão, uma vez que depende apenas das observações mínima e máxima tornando-a por isso sensível a observações extremas.

Descrição dos dados – Variância

Como a medida de localização mais utilizada é a média, será relativamente a ela que se define a principal medida de dispersão - a **variância**

Definição:

Dado um conjunto de n observações x_1, x_2, ...,x_n, a **variância amostral** (**S²**) é a média dos quadrados dos desvios em relação à média. Indica a proximidade com que os valores estão agrupados junto da média.

Descrição dos dados – Variância

Dados não classificados:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ou} \quad S^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^{\,2}\right]$$

Sendo x_i o valor da observação i.

Dados classificados:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ou} \quad S^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i\, x_i^2 - n\,\bar{x}^{\,2}\right]$$

Sendo x_i o valor característico da classe i.

Descrição dos dados – Desvio padrão

Uma vez que a variância envolve a soma de quadrados, a unidade em que se exprime não é a mesma que a dos dados. Assim, para obter uma medida da variabilidade ou dispersão com a mesma unidade que os dados, considera-se a raiz quadrada da variância e obtemos o **desvio padrão**:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Descrição dos dados – Desvio padrão

Notas:

1. O desvio padrão é uma medida que só pode tomar valores positivos;

2. Quanto mais pequeno for o valor do desvio padrão, mais concentrados os valores estão junto da média;

3. Se as observações forem todas iguais então S = 0;

4. Mais de 75% das observações estão a uma distância, da média, inferior a 2 desvios padrão.

Descrição dos dados – Desvio padrão

Exercício (dados não classificados):

Calcule a variância e o desvio padrão da amostra:

4 9 11 14 22

$$\bar{x} = \frac{4 + 9 + 11 + 14 + 22}{5} = 12$$

$$S^2 = \frac{1}{5}[(4-12)^2 + (9-12)^2 + \cdots + (22-12)^2] = 35{,}6$$

ou

$$S^2 = \frac{1}{5}[4^2 + 9^2 + 11^2 + 14^2 + 22^2 - 5 \times 12^2] = 35{,}6$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{35{,}6} \cong 5{,}97$$

Descrição dos dados – Desvio padrão

Exercício (dados classificados):

Calcule a variância e o desvio padrão dos seguintes resultados obtidos num teste:

Nota	f_i
8	2
9	3
10	5
11	3
12	2
17	1

$$\bar{x} = \frac{2 \times 8 + 3 \times 9 + \cdots + 1 \times 17}{16} \cong 10{,}4$$

$$S^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 \times (8 - 10{,}4)^2 + 3 \times (9 - 10{,}4)^2 + \cdots + \\ +2 \times (12 - 10{,}4)^2 + 1 \times (17 - 10{,}4)^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$S^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 \times 8^2 + 3 \times 9^2 + 5 \times 11^2 + 3 \times 11^2 + \\ +2 \times 12^2 + 1 \times 17^2 - 16 \times 10{,}4^2 \end{bmatrix}$$

$S^2 \cong 4{,}25$ $\qquad$ $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4{,}25} \cong 2{,}06$

Descrição dos dados – Desvio padrão

Exercício (dados classificados):

Considere o exemplo dos tempos de duração de certa cirurgia. Calcule a variância e o desvio padrão.

$\bar{x} \cong 34$

Tempo	f_i
[20,24[	4
[24,28[	6
[28,32[	12
[32,36[	15
[36,40[	13
[40,44[	5
[44,48[	5

Descrição dos dados – Desvio padrão

Exercício (dados classificados): (cont.)

$$S^2 = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 4 \times (22-34)^2 + 6 \times (26-34)^2 + \cdots + \\ +5 \times (42-34)^2 + 5 \times (46-34)^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$S^2 = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 4 \times 22^2 + 6 \times 26^2 + 12 \times 30^2 + \cdots + \\ +5 \times 42^2 + 5 \times 46^2 - 60 \times 34^2 \end{bmatrix}$$

$$S^2 \cong 39{,}98$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{39{,}98} \cong 6{,}32$$

Descrição dos dados – R_Q

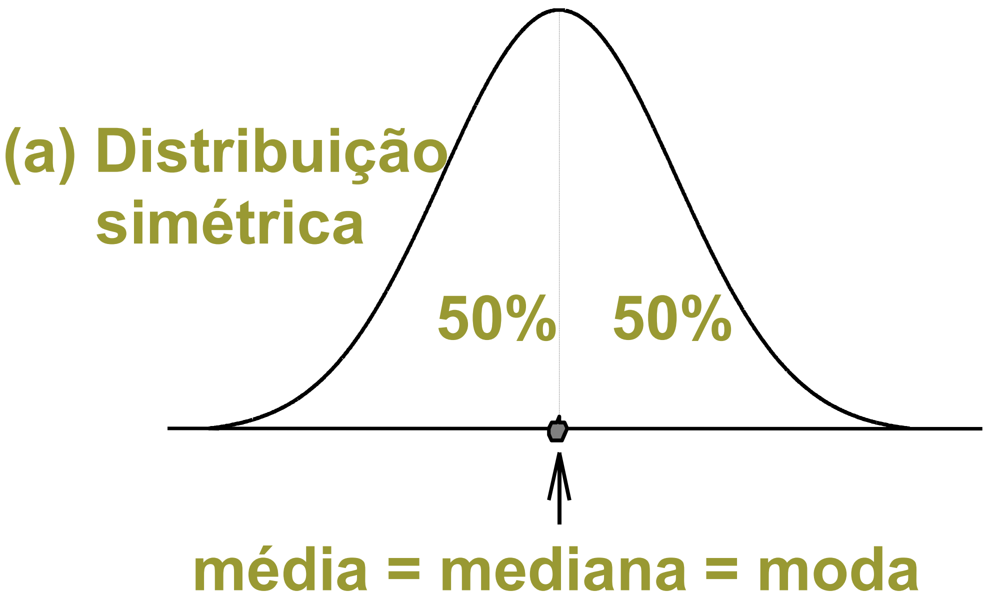
Do mesmo modo que a média, também o desvio padrão é uma medida pouco resistente, pois é influenciado por valores ou muito grandes ou muito pequenos (o que seria de esperar já que na sua definição entra a média que é não resistente).

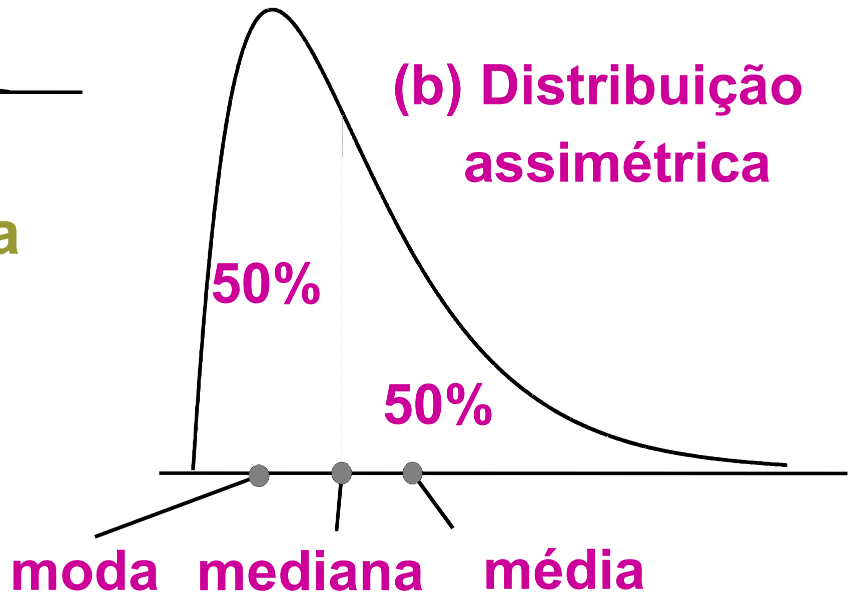
Se quisermos utilizar uma medida que seja resistente, podemos considerar a **amplitude inter-quartis**, isto é, a diferença

$$R_Q = Q_3 - Q_1$$

que representa a amplitude do intervalo $[Q_1,Q_3]$ que contém 50% das observações centrais

Classificação quanto à forma





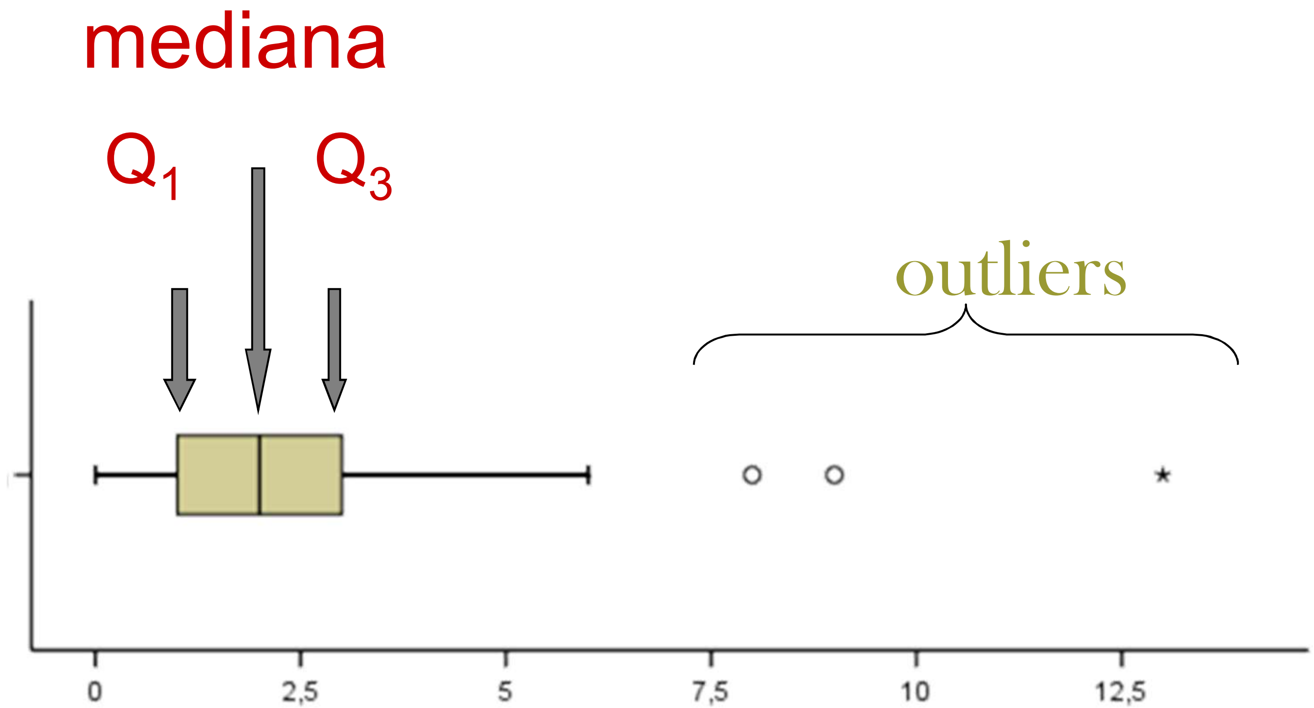
Caixa de bigodes

- Também designado por **diagrama de extremos e quartis**.

- É um tipo de representação gráfica, em que se realçam algumas características da amostra.

Caixa de bigodes

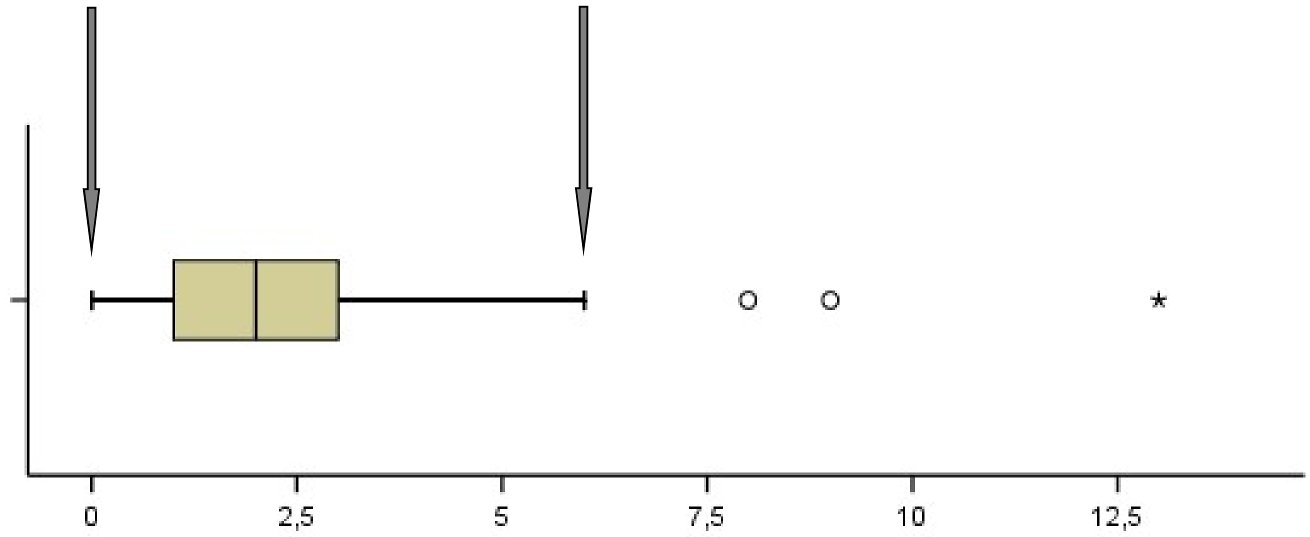
- Pode ser encarada como a representação gráfica de algumas medidas de localização:



Caixa de bigodes

Mínimo da amostra
mas não inferior a
$Q_1 - 1,5\ (Q_3 - Q_1)$

Máximo da amostra
mas não superior a
$Q_3 + 1,5\ (Q_3 - Q_1)$



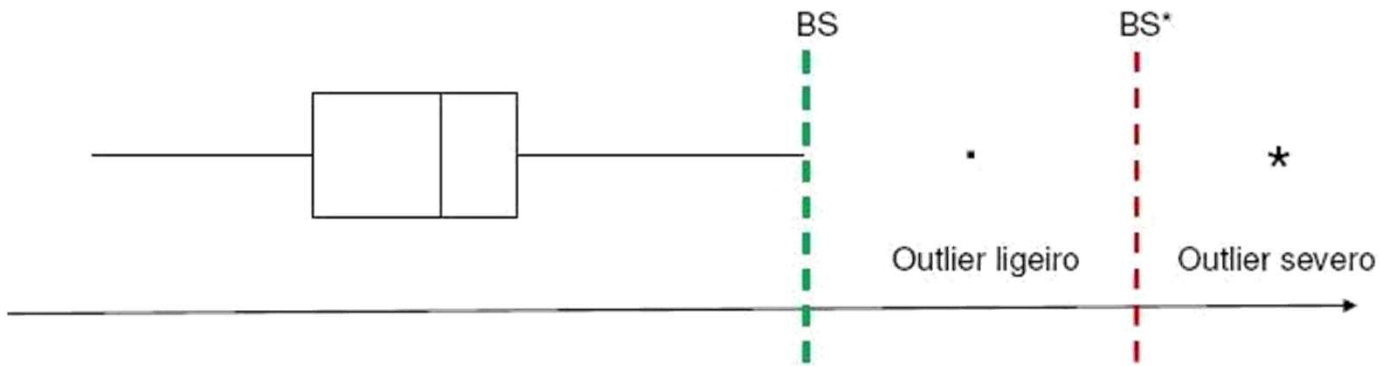
Caixa de bigodes

Os outliers podem ser classificados em **ligeiros** ou **severos** dependendo dos seus valores. Sejam

$BS = Q3+1,5(Q3-Q1)$ e

$BS^* = Q3+3(Q3-Q1)$

Então



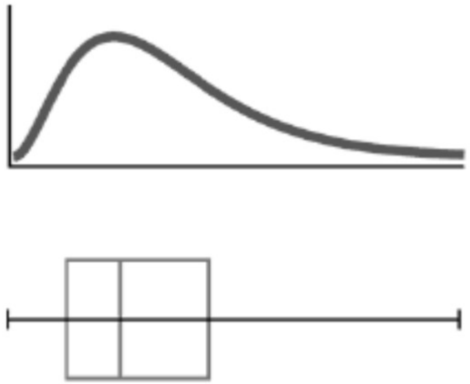
Os outliers do lado esquerdo são definidos de forma semelhante

Caixa de bigodes

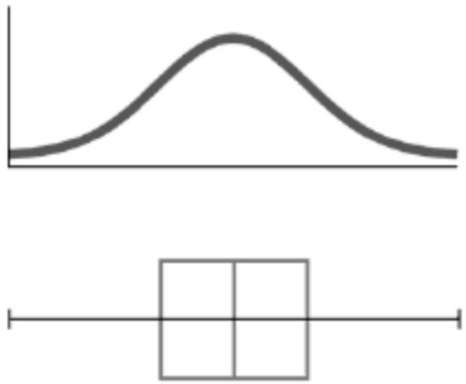
- Algumas caixas têm os bigodes até ao mínimo e máximo e não têm representados outliers.
- As caixas de bigodes dão informação sobre:
  - A localização central: mediana
  - Outras localizações: 1º e 3º quartis,
mínimo e máximo
  - Dispersão: amplitude e distância inter-quartil
  - Assimetria: posição relativa da mediana na caixa,
comprimento dos bigodes

Caixa de bigodes

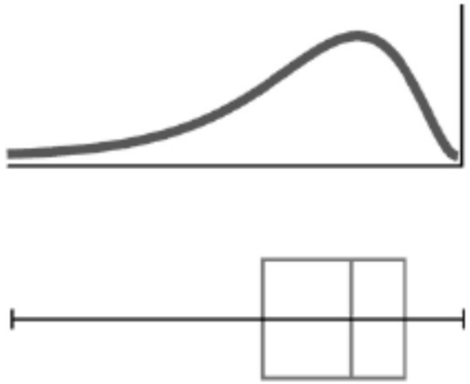
Assimetria positiva



Simetria



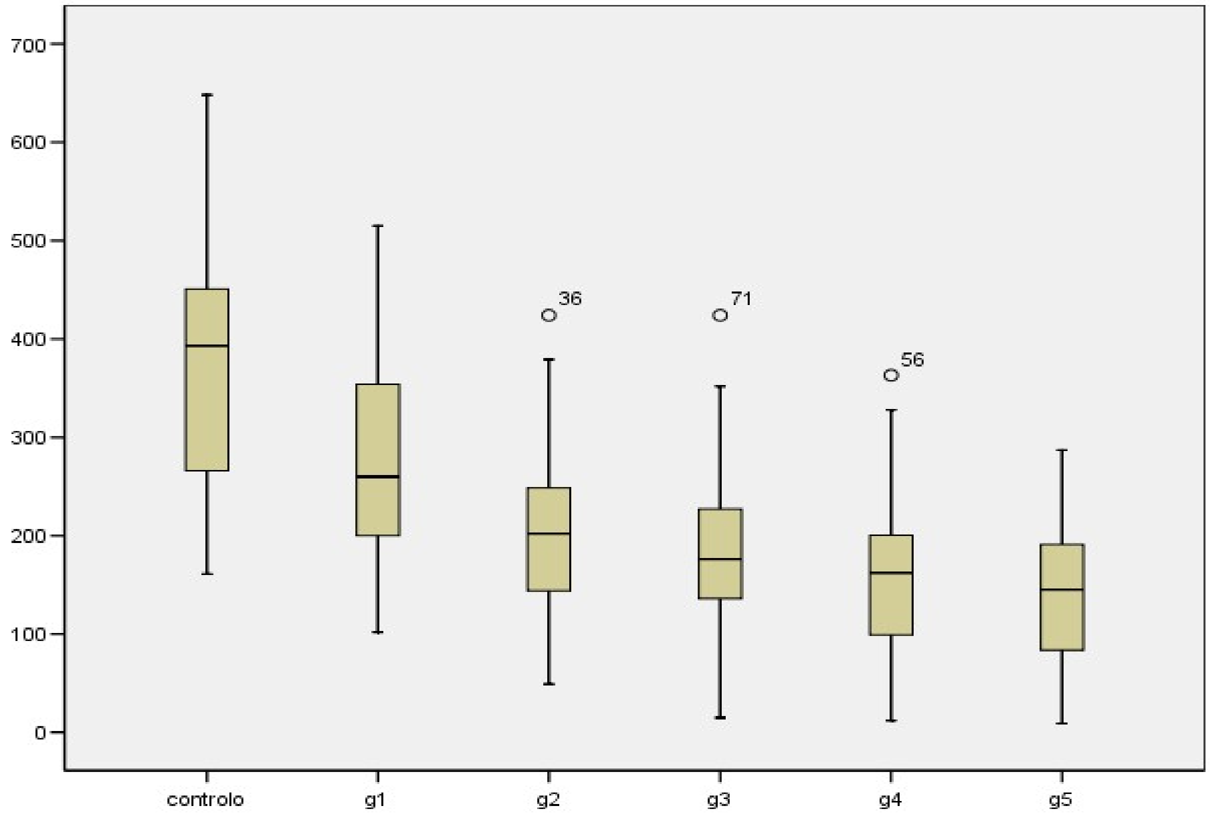
Assimetria negativa



Caixas de bigodes comparativas

- As caixas de bigodes também são úteis para comparar várias amostras num mesmo gráfico, caixas de bigodes comparativas.

Caixas de bigodes comparativas



Caixa de bigodes

Exemplo:

Considere os seguintes registos relativos à altura dos saltos de uma pulga:

2, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 12, 12, 15, 16, 17, 18, 20, 30, 50, 1

Construa a correspondente caixa de bigodes.