Productos Financieros Derivados

Claudio Cuevas Pazos

Quantitative Finance Training Center

May 22, 2020

Fundamentos

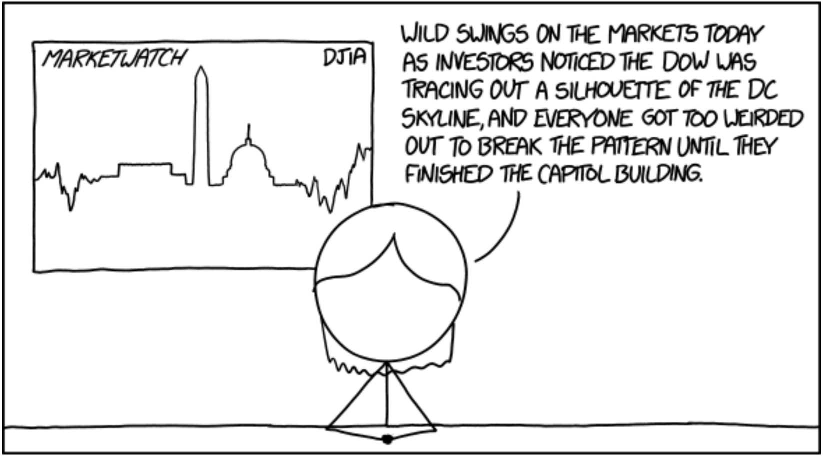


Figure: "Los mercados han sufrido gran volatilidad debido a que alguien puso un tablero de ouija en la pared NYSE controlada por el movimiento de los precios de las acciones".

Figure: Existen muchas personas en los mercados que creen saber que es un derivado, sin embargo, entenderlos requiere de varias herramientas económicas, financieras, y sobre todo matemáticas.

Para comenzar, un derivado se define como un instrumento financiero, tal que su valor queda determinado por el valor de un instrumento financiero o no financiero, conocido como activo **subyacente**.
Dichos subyacentes pueden clasificarse por el mercado al que pertenecen:

- Mercado de deuda o Renta Fija (Rates).
- Mercado de renta variable (Equities).
- Mercado de tipos de cambio (FX).
- Mercado de bienes renovables y no renovables (Commodities).
- Mercado de Crédito.

Al existir una fluctuación diaria en los precios de estos instrumentos, las empresas se ven motivadas a asegurar los precios sobre insumos de producción, asegurar un tipo de cambio para las importaciones, asegurar una tasa de interés para un préstamo, etc.Un instrumento derivado puede verse como una **cobertura** ante ciertos factores de incertidumbre.

- Cobertura: Tomar una posición contraria en el instrumento derivado, tal que mitigue las pérdidas o ganancias que puedan ocurrir respecto al valor del subyacente.
- Especulación: Los especuladores hacen apuestas o suposiciones sobre la tendencia del mercado. Ej., si un especulador piensa que una acción está sobrevaluada, él compraría la opción de vender dicha opción en un futuro al precio de hoy, pudiendo hacer una ganancia con dicha operación.
- Arbitraje: Frecuentemente, ocurre en los mercados financieras que las valuaciones de ciertos instrumentos no son correctas, entonces, un participante puede aprovechar esta oportunidad para construir un portafolio que replique el precio **justo** del instrumento y hacer ganancia con ésto.

¿Dónde comprar y vender derivados?

En general, podemos clasificar al mercado financiero en dos grandes rubros:

- Mercados organizados

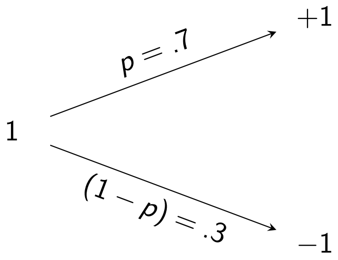
- Mercados "Over the Counter"

La teoría de valuación de derivados está fuertemente relacionada con la administración de riesgos; por disposiciones regulatorias, cada banco debe contar con un equipo de administración de riesgos encargado de vigilar las operaciones que haga el banco en los mercados financieros. Dicho equipo vigila y mitiga en gran medida los siguientes riesgos:

- Riesgo de Mercado
- Riesgo de **Contraparte** (Diferente a Riesgo de Crédito).
- Riesgo de Liquidez
- Riesgo operativo

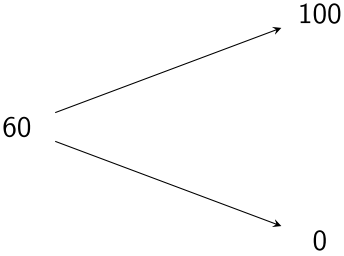
En el último módulo, se verán dichos conceptos más a fondo, pero es fundamental saber la definición de los mismos, ya que se utilizaran los conceptos a lo largo de todo el curso.

Supongamos que en una carrera de caballos nosotros tenemos la certeza que con probabilidad de .7, nuestro caballo favorito ganará la carrera.



La casa de apuestas del hipódromo está dando \$1 por cada peso apostado si nuestro caballo pierde, de mismo modo, la casa de apuestas gana un peso si pierde el caballo.

De pronto, un sujeto se acerca y te ofrece un boleto tal que paga \$100 en caso de que tu caballo preferido gane, en caso de que no gane, el sujeto no te pagará dinero. El valor de dicho boleto es de \$60.



Ante tal negocio piensas si es redituable vender dichos boletos, por lo que te preguntas: ¿Es preferible comprar o vender los boletos?

La ganancia esperada podemos calcularla de la siguiente forma:

$$G = .7 + 100 + .3 + 0 = 70 \ > \ 60,$$

Sin embargo, ésta es la ganancia que se espera en el largo plazo, ya que hacen falta de varios experimentos para que realmente observemos esas probabilidades en la vida real (de hecho bastantes...).

Si nosotros vendemos el boleto, pasa lo siguiente:

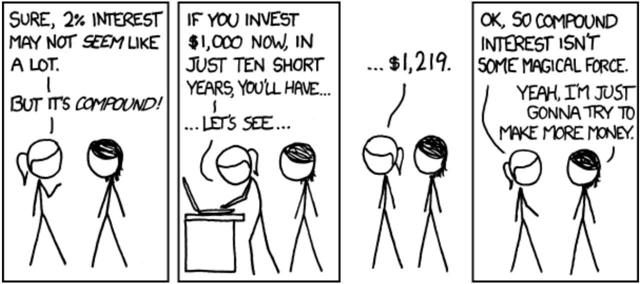
1. Vendemos un boleto y recibimos \$60.
2. Vamos a la casa de apuestas y apostamos \$50 a nuestro caballo favorito.
3. Si ganamos, Recibimos \$100, los cuales estamos obligados a pagárselos al comprador del boleto.
4. Si perdemos, perdemos los \$50 pero no debemos pagarle nada al comprador del boleto.
5. Nos quedamos con \$10 !!!

- En el ejemplo anterior, puede verse que nuestra mejor estrategia es vender los boletos, ya que pudimos ganar dinero sin ningún riesgo en ambos escenarios. A este concepto se le conoce como **Arbitraje** y será la piedra angular de toda la teoría de valuación de instrumentos derivados.
- La idea fundamental dentro de la valuación de productos financieros derivados es construir un portafolio de réplica con los instrumentos disponibles en nuestra economía, el valor de dicho portafolio será el mismo que el valor de nuestro derivado, ya que si no lo fuera, conllevaría a una oportunidad de arbitraje

.

Composición de tasas y convenciones

El valor del dinero en el tiempo es una idea fundamental dentro de las finanzas, como bien sabemos, hasta el dinero tiene su precio, y dicho precio se ve reflejado en las tasas de interés.



En finanzas, hay dos maneras de capitalizar el dinero, las cuales son las siguientes:

- Composición simple:

1	$1+r$	$1+2r$	$1+3r$	$1+8r$	$1+10r$		$1+nr$
0	1	2	3	8	10	$\cdots$	n

- Composición compuesta (Valga la redundancia...)

1	$1+r$	$(1+r)^2$	$(1+r)^3$	$(1+r)^8$	$(1+r)^{10}$		$(1+r)^n$
0	1	2	3	8	10	$\cdots$	n

Otra composición de tasas fundamental, es la composición pagadera k veces por periodo, las cuales pueden representarse de la siguiente forma:

$$A(n) = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{kn} \tag{1}$$

Podemos tener tasas anuales pagaderas cada 6 meses, o cada 3 meses, o cada mes, o cada semana, o cada día, o cada hora,...

¿Qué pasa si la frecuencia de los pagos es tan corta que tiende a cero?

$$\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{kn} \rightarrow e^{rt} \tag{2}$$

cuando $k \rightarrow \infty$. A r se le conoce como la tasa compuesta continuamente.

Convenciones de conteo de días 'α'

Convención que se pacta para calcular el número de días que han pasado para calcular el interés devengado en una operación financiera. Las convenciones más usadas en los mercados financieros son las siguientes:

- Base 30/360 : Meses de 30 días y años de 360 días.
- Base 30/365 : Meses de 30 días y años de 365 días.
- Base ACT/360: Meses con los días reales que tienen y los años de 360 días.
- Base ACT/365: Meses con los días reales que tienen y los años de 365 días.
- Base ACT/ACT: Meses con los días reales que tienen y los años con días reales que tienen.
- Base Business/252: Meses con los días hábiles que tienen y los años de 252 días.

Convenciones de días Hábiles

En los mercados financieros, existen motivaciones para determinar el día en el que se paga el valor de un instrumento financiero (ya sea Nocional, cupón, payoff, etc). Existen convenciones para determinar las fechas de pago:

- No adjustment: Los pagos se efectúan en la fecha de pago (sin importar si el día es hábil o no).
- Previous: Si el pago cae en día inhábil, se efectúa el pago el día previo hábil inmediato a la fecha no ajustada.
- Following: Si el pago cae en día inhábil, se efectúa el pago el día posterior hábil inmediato a la fecha no ajustada.
- Modified Previous: Convención previous, pero si el día en dicha convención cae en un mes distinto al de la fecha no ajustada, se toma el día posterior hábil inmediato perteneciente a dicho mes.

Convenciones de días hábiles

- Modified Following: Convención following, pero si el día en dicha convención cae en un mes distinto al de la fecha no ajustada, se toma el día previo hábil inmediato perteneciente a dicho mes.
- End of Month (No Adj): Se asume que todos los pagos se efectúan al final de cada mes (sin importar si el final de mes es hábil o no).
- End of Month (Previous): Si el final de mes es inhábil, se toma el día previo al final de mes inmediato que sea hábil.
- End of Month (Following): Si el final de mes es inhábil, se toma el día posterior al final de mes inmediato que sea hábil.

- Los bonos son instrumentos negociados en el mercado de deuda.
- Tienen las siguientes características:
  1. Face Value FV
  2. Tasa Cupón c
  3. YTM
- Se calculan de la sig forma:

$$P_t = \sum_{i=1}^{N} D(0, t_i) C_{t_i} + FV \; D(0, t_N) \tag{3}$$

Media ponderada de los distintos vencimientos de los flujos de caja, ponderados por el valor actual de cada uno de esos flujos.
La fórmula que resulta es:

$$DMac = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i PV_i}{\sum_{i=1}^{n} PV_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i PV_i}{V} = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{PV_i}{V} \tag{4}$$

donde:

- i es el índice de los flujos de caja,
- PV_i es el valor actual del ith pago de un bono,
- t_i es el tiempo en años que transcurre hasta el momento del ith pago,
- V es el valor actual de todos los flujos de caja futuros del bono.

1. La duración es mayor cuanto mayor es el plazo de vencimiento del bono, aunque en menor medida que el plazo. En efecto, el valor actual más pequeño es el de los flujos o cupones que tienen su vencimiento más alejado en el tiempo.
2. La duración de un bono es igual al plazo de amortización del título:
   - En los bonos cupón cero o al descuento.
   - Cuando solo queda un vencimiento pendiente.
3. Una variación importante de la duración de Macauly es la duración modificada, la cual se calcula de la siguiente forma:

$$D_m = \frac{-D_{Macauly}}{1 + YTM} = \frac{\partial P}{\partial r} \tag{5}$$

La convexidad es una medida que contribuye a calcular la variación y la sensibilidad del precio de un bono ante las modificaciones del tipo de interés de mercado, complementaria de la duración modificada. La duración y la convexidad sirven para estimar las variaciones de valor de un bono y constituyen herramientas valiosas para la administración del riesgo de tipo de interés.

La convexidad es la curvatura de la relación precio-rentabilidad de un bono.

$$C = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \tag{6}$$

$$\frac{\triangle P}{P} = \underbrace{D_m \triangle r}_{Duración} + \underbrace{\frac{1}{2} C \triangle r^2}_{convexidad} \tag{7}$$

Derivados Lineales

CIDPYME

- Contrato celebrado entre dos partes, en el cual se tiene la obligación para comprar o vender un bien subyacente S a precio fijado K a una fecha determinada.
- Forwards más comunes: Tipo de cambio, Renta fija, Renta Variable y Commodities.
- Dos formas de liquidar los contratos de forward:
  1. Por diferencias (*non delivery forward*): al vencimiento del contrato se compara el tipo de cambio spot contra el tipo de cambio pactado (usualmente el forward), y el diferencial en contra es pagado por la parte correspondiente en la moneda local o extranjera.
  2. Por especie (*delivery forward*): al vencimiento el comprador y el vendedor intercambian las monedas según el tipo de cambio pactado.

Payoff:

$$V_T = (S_T - K) \tag{8}$$

- La pregunta complicada en este tipo de instrumentos es: cómo valuarlos?
- La solución dada a este problema es utilizando como fundamento el concepto de no arbitraje. Nuestro propósito será encontrar un portafolio tal que dada una estrategia podamos replicar el payoff del derivado. A este portafolio se le conoce como portafolio de cobertura y el precio del derivado necesariamente tendrá que coincidir con el del portafolio de cobertura.
- Definamos la economía consistente en un activo de renta variable S_t y un activo de renta fija D_{tT}, el segundo se define de la siguiente forma:

$$dD_{tT} = rD_{tT}dt, \tag{9}$$

donde r se define como la tasa libre de riesgo. Normalmente a D_{tT} se le conoce como la cuenta corriente.

Recordemos que el significado de la ecuación 8 es la compra de un bien a precio K pactado al inicio del contrato. Bajo el concepto de no arbitraje, supongamos que al tiempo t entramos en un contrato forward largo. En el cual nos comprometemos a comprar S_t a una cantidad de dinero K, si a este contrato forward le añadimos la cantidad K, al tiempo T tendremos el siguiente payoff:

$$\widehat{V}_T^{(1)} = f_T + K = (S_T - K) + K = S_T \tag{10}$$

Como portafolio de cobertura, necesitamos un portafolio que genere el mismo payoff al tiempo T. Si utilizamos

$$\widehat{V}_T^{(2)} = S_T, \tag{11}$$

Tendremos un portafolio de cobertura Bajo el concepto de no arbitraje (o ley de un solo precio), ambos portafolios deben tener el mismo valor en t, es decir:

$$f_t + D_{tT}K = S_t \tag{12}$$

Esto pasa si y solo si:

$$f_t = S_t - D_{tT} K. \tag{13}$$

Una de las definiciones importantes es el *precio forward* de un derivado, el cual es la K tal que hace que el valor del contrato forward sea 0. En este caso, igualamos el lado derecho de la ecuación (13) a 0 y tenemos que:

$$F_t = D_{tT}^{-1} S_t \tag{14}$$

Forward de tipo de cambio

En los Forwards de tipo de cambio, a vencimiento T, se intercambian flujos de efectivo en distintas divisas. En otras palabras, al inicio del contrato se pacta un tipo de cambio K tal que se intercambiarán los flujos de dinero a dicho tipo de cambio. Para encontrar el tipo de cambio forward, considerar lo siguiente:

1. Teniendo una cantidad de dinero en moneda extranjera N^{fx} a tiempo t, podemos crear dos estrategias:
   - Comprar moneda local al tipo de cambio Spot e invertir dicho dinero a la tasa libre de riesgo local r_{loc}, resultando en $X_T^{(1)} = N^{fx} * S_0 * e^{r_{loc}(T-t)}$.
   - Invertir N^{fx} a la tasa libre de riesgo extranjera r_{fx} y a vencimiento, convertir el monto final al tipo de cambio pactado K, resultando en $X_T^{(2)} = N^{fx} * K * e^{r_{fx}(T-t)}$
2. Los dos portafolios tienen el mismo valor inicial que es N^{fx}, por lo que al no haber riesgo involucrado, ambos portafolios deben valer lo mismo, por lo que llegamos a la siguiente relación:

$$S_0 e^{r_{loc}(T-t)} = K e^{r_{fx}(T-t)} \tag{15}$$

El resultado anterior solo es aplicable para el tipo de cambio forward, sin embargo, podemos utilizar un argumento similar para encontrar el valor de un contrato forward con cualquier strike K (i.e. el payoff es $N(S_T - K)$):

1. Pactar un forward Largo e invertir $NKe^{-r_{loc}}$ unidades de dinero local.
2. Invertir $Ne^{-r_{fx}}$ unidades de dinero extranjero.
3. A tiempo T, tendremos que el primer portafolio vale $NS_T - NK + NK = NS_T$ unidades de dinero local.
4. Al tiempo T, tendremos que el segundo portafolio vale N unidades de dinero extranjero, o NS_T unidades de dinero local.
5. Bajo el supuesto de no arbitraje, ambas estrategias dan el mismo payoff, por lo que el valor a tiempo t de ambas debe ser igual, es decir:

$$f_t = N(e^{-r_{fx}} S_t - Ke^{-r_{loc}}) \tag{16}$$

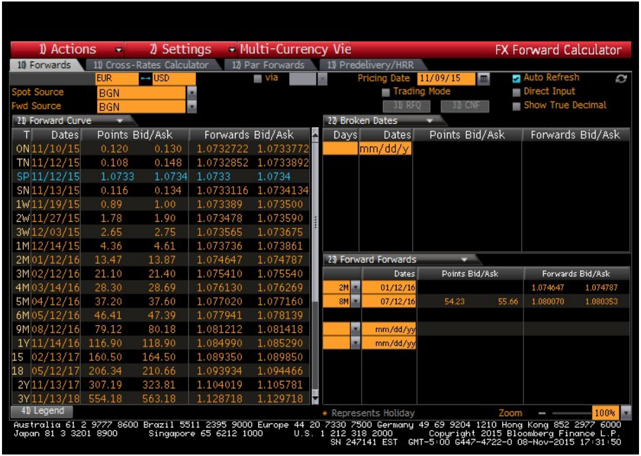


Figure: Cotizaciones de Forwards de tipo de cambio en Mercado

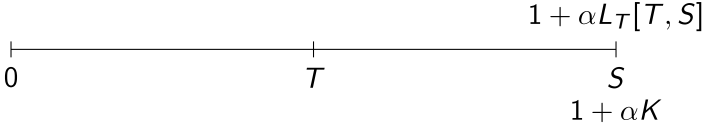
FRA's

Un FRA o *Forward Rate Agreement* es un acuerdo entre dos contrapartes, en el que intercambian dos flujos de dinero en el futuro.Componentes:

- Nocional N
- Fecha de Fixing T
- Fecha de pago S

El payoff de dicho instrumento es e siguiente:

$$X_T = \alpha N(L_T[T,S] - K) \tag{17}$$



Podemos modificar la ecuación (17), con el fin de verla como la diferencia de dos bonos cupón cero:

$$X_T = N(1 + \alpha L_T[T, S]) - N(1 + \alpha K) \tag{18}$$

De la ecuación anterior es más fácil intuir cómo replicar dicho payoff utilizando bonos cupón cero. Tomando el portafolio

$$V_t = D_{tT} - (1 + \alpha K) D_{tS}, \tag{19}$$

del primer bono cupón cero que compramos, a tiempo T, invertimos la unidad monetaria obtenida a tasa $L_T[T, S]$, y del segundo bono cupón cero que vendimos esperamos hasta S ara recibir $(1+\alpha K)$, el valor del portafolio en S coincide con (17), por lo que bajo el supuesto de no arbitraje, el valor de un FRA queda dado por la ecuación (18).

Swaps

- Una de las preocupaciones más grandes de una compañía es la incertidumbre acerca del pago de sus deudas futuras.
- Lo anterior debido a que el valor del dinero en el tiempo, al igual que cualquier instrumento, va cambiando. Es por esto que surge la necesidad de pactar un Swap.
- Un Swap es un acuerdo OTC entre dos contrapartes, tal que se comprometen a intercambiar flujos de dinero en fechas futuras del tiempo, los cuales son capitalizados a tasas distintas.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \alpha_1 L_t[t, T_1] & \alpha_2 L_{T_1}[T_1, T_2] & \alpha_3 L_{T_2}[T_2, T_3] & & \alpha_n L_{T_{n-1}}[T_{n-1}, T_n] \\
t & T_1 & T_2 & T_3 & \cdots & T_n \\
 & \alpha_1 K & \alpha_2 K & \alpha_3 K & & \alpha_n K
\end{array}
$$

Tipos de Swaps

En el mercado OTC, existen distintos tipos de Swaps, los más relevantes son los siguientes:

- Swaps
  - IRS
    - Fixed-Floating
    - Tenor
    - ...
  - XCCY
    - Fixed-Floating
    - Fixed Fixed
    - Basis
    - ...
  - OIS

Definición de un IRS Swap

Instrumento OTC de intercambio de flujos de naturaleza distinta entre las partes involucradas en el contrato.

El estándar de mercado es intercambiar flujos periódicos a tasa fija por flujos periódicos a tasa variable.

Al pactar una operación IRS estándar debe definirse lo siguiente:

- Monto Nominal
- Tiempo a vencimiento
- Para la Pata Fija:
  - Tasa fija
  - Periodicidad de pago de intereses
  - Convención de conteo de días para pago de intereses
- Para la Pata Flotante:
  - Tasa variable de referencia (activo subyacente del IRS)
  - Periodicidad de pago(regularmente el mismo que el tenor de la tasa referencial)
  - Convención de conteo de días para pago de intereses
  - Forma de revisión de la tasa flotante (reg. Fija al inicio y paga al final del periodo)

Convenciones de IRS Swaps

		Fixed Leg		Floating Leg		
Currency	Spot Lag	Period	Convention	Reference	Period	Convention
USD (NY)	2	6M	30/360	Libor	3M	ACT/360
USD (London)	2	1Y	ACT/360	Libor	3M	ACT/360
EUR: 1Y	2	1Y	30/360	Euribor	3M	ACT/360
EUR: >1Y	2	1Y	30/360	Euribor	6M	ACT/360
GBP: 1Y	0	1Y	ACT/365	Libor	3M	ACT/365
GBP: >1Y	0	6M	ACT/365	Libor	6M	ACT/365
JPY	2	6M	ACT/365	Tibor	3M	ACT/365
JPY	2	6M	ACT/365	Libor	6M	ACT/360
CHF: 1Y	2	1Y	30/360	Libor	3M	ACT/360
CHF: >1Y	2	1Y	30/360	Libor	6M	ACT/360
AUD: 1Y-3Y	0	3M	ACT/365	BBSW	3M	ACT/365
AUD: ≥4Y	0	6M	ACT/365	BBSW	6M	ACT/365
AUD	1	6M	ACT/365	Libor	6M	ACT/365
CAD	0	6M	ACT/365	CDOR	3M	ACT/365
DKK	2	1Y	30/360	Cibor	6M	ACT/360

The spot lag is the lag in days between the trade date and the first fixing period start date.

TABLE 15.1. Most frequent vanilla swap conventions.

USD IRS Libor3M (semiannual)

GRAB

United States | 98) Export | 99) Settings | Interest Rate Swap Rates

Date Range: 05/17/2016 - 06/17/2016 | 1 Month

40) Semi Swaps | 41) Sprs to Gov. | 42) Ann Swaps | 43) Ann Sprs | 44) OIS

USD SemiAnnual 30/360 Swap Rates — Avg — Now — PCS CMPN

Tenor	Bid / Ask	Mid	Change	Today	#SD Δ/da	Low	Range	High	Avg	+/-BPS	#SD
1) 1 YR	0.747 / 0.752	0.749	0.006		0.1	0.721		0.902	0.828	-7.6	-1.5
2) 2 YR	0.846 / 0.848	0.847	0.015		0.2	0.737		1.125	0.965	-11.7	-1.4
3) 3 YR	0.930 / 0.933	0.931	0.020		0.2	0.863		1.212	1.072	-13.9	-1.4
4) 4 YR	1.014 / 1.018	1.016	0.024		0.2	0.936		1.342	1.164	-14.6	-1.4
5) 5 YR	1.100 / 1.104	1.102	0.028		0.3	1.000		1.393	1.248	-14.5	-1.4
6) 6 YR	1.188 / 1.189	1.189	0.029		0.3	1.096		1.528	1.336	-14.7	-1.4
7) 7 YR	1.273 / 1.274	1.274	0.035		0.3	1.176		1.589	1.416	-14.2	-1.4
8) 8 YR	1.353 / 1.353	1.353	0.036		0.4	1.251		1.648	1.491	-13.8	-1.4
9) 9 YR	1.423 / 1.427	1.425	0.041		0.4	1.318		1.721	1.558	-13.1	-1.3
10) 10 YR	1.487 / 1.488	1.487	0.040		0.4	1.384		1.772	1.621	-13.2	-1.4
11) 15 YR	1.715 / 1.719	1.717	0.038		0.4	1.616		2.025	1.853	-13.4	-1.4
12) 20 YR	1.841 / 1.845	1.843	0.037		0.4	1.746		2.146	1.981	-13.6	-1.4
13) 25 YR	1.904 / 1.908	1.906	0.037		0.4	1.813		2.170	2.045	-13.7	-1.5
14) 30 YR	1.939 / 1.942	1.940	0.036		0.4	1.848		2.205	2.078	-13.6	-1.5

Executable quotes for Fixed Income Electronic Trading are in white tenors.

Figure: Cotizaciones a distintos plazos para un IRS Libor3M

GRAB

Mexico | 98) Export | 99) Settings | Interest Rate Swap Rates

Date Range: 05/17/2016 - 06/17/2016 | 1 Month

40) TIIE Swap | 41) TIIE-Libor Swap | 42) TIIE-Libor Basis Swap

MXN TIIE Swap — Avg / Now — PCS CMPN

Tenor	Bid	Ask	Mid	Change	Today	#SD Δ/da	Low	Range	High	Avg	+/-BPS	#SD
1) 3 MO	4.300	4.330	4.315	0.013		0.3	4.143		4.338	4.259	7.1	1.9
2) 6 MO	4.445	4.475	4.460	-0.026		-0.6	4.259		5.415	4.449	2.6	0.5
3) 9 MO	4.580	4.620	4.600	-0.010		-0.2	4.393		4.740	4.609	1.1	0.2
4) 13 MO	4.755	4.775	4.765	-0.005		-0.1	4.500		4.910	4.774	0.1	0.0
5) 26 MO	5.020	5.050	5.038	-0.012		-0.2	4.790		5.150	5.038	1.2	0.2
6) 39 MO	5.230	5.260	5.245	-0.010		-0.1	5.030		5.380	5.260	0.0	0.0
7) 52 MO	5.415	5.445	5.432	0.002		0.0	5.235		5.590	5.460	-1.5	-0.2
8) 65 MO	5.600	5.610	5.605	0.005		0.1	5.450		5.803	5.655	-4.5	-0.6
9) 91 MO	5.890	5.920	5.905	0.005		0.1	5.775		6.120	5.964	-4.4	-0.6
10) 130 MO	6.200	6.230	6.225	-0.005		-0.1	6.108		6.422	6.305	-7.5	-1.1
11) 195 MO	6.665	6.695	6.680	-0.001		0.0	6.567		6.830	6.703	-0.8	-0.1
12) 260 MO	6.911	6.911	6.911	0.034		0.6	6.811		7.041	6.916	-0.5	-0.1

Executable quotes for Fixed Income Electronic Trading are in white tenors.

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 2395 9000 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2016 Bloomberg Finance L.P.
SN 723149 G662-4612-1 17-Jun-16 21:13:33 CDT GMT-5:00

Figure: Cotizaciones a distintos plazos para un IRS TIIE 28D

- Swap Flotante- Flotante.
- Es un instrumento de intercambio de flujos, ambas patas están referenciadas a tasas flotantes denominadas en una sola moneda.
- Son llamados Basis Swaps porque involucran flujos en dos bases distintas dentro de una misma divisa, por ejemplo, USD-Libor3M y USD-Libor6M, esto es, en un basis swap se intercambian flujos de Libor3M por flujos de Libor6M.
- Una de las patas paga su índice referencial más un spread, el basis spread b_T.

$$\sum_{i=1}^{n}(L_i^{ST} + b_T)D_{t,t_i}\tau(t,t_i) = \sum_{j=1}^{m} L_i^{LT} D_{t,t_j}\tau(t,t_j) \tag{20}$$

Overnight Indexed Swap - OIS

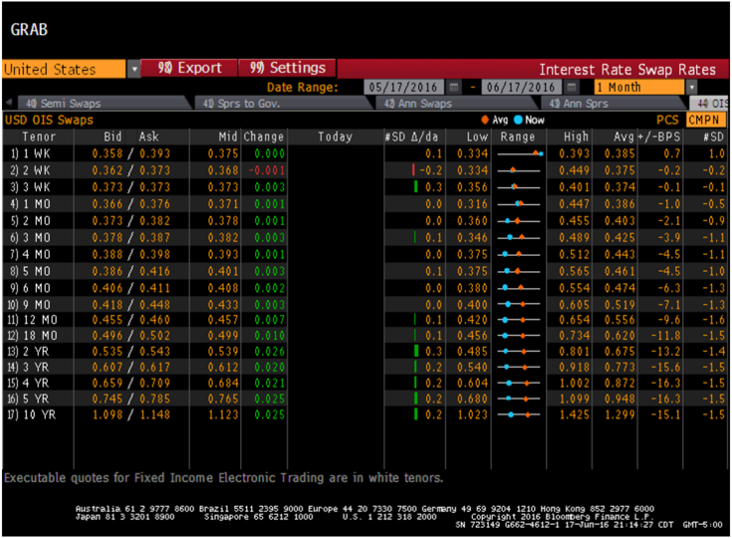
- Instrumento OTC, en el que se intercambian flujos basados en tasas fijas por flujos flotantes ligados a tasas ON. Lo común es que los flujos fijos y flotantes ocurran en la misma fecha.
- Típicamente, si un OIS es de menos de un año, se tiene un único intercambio a vencimiento.
- Si es mayor a un año los flujos se intercambian anualmente.
- El pago en la tasa flotante se calcula con base en la composición de acumulaciones diarias del índice ON de referencia.
- EL índice ON es igual a la media geométrica del tipo overnight sobre cada día del período de pago.
- El índice ON es típicamente un tipo de interés considerado menos arriesgado que su correspondiente tipo interbancario (LIBOR).

Convenciones de un OIS Swap

		Fixed Leg		Floating Leg		
Currency	Spot	Period	Convention	Reference	Convention	Pay lag
USD $\leq$ 1Y	2	tenor	ACT/360	Fed Fund	ACT/360	2
USD $>$ 1Y	2	1Y	ACT/360	Fed Fund	ACT/360	2
EUR $\leq$ 1Y	2	tenor	ACT/360	EONIA	ACT/360	2
EUR $>$ 1Y	2	1Y	ACT/360	EONIA	ACT/360	2
GBP $\leq$ 1Y	0	tenor	ACT/365	SONIA	ACT/365	1
GBP $>$ 1Y	0	1Y	ACT/365	SONIA	ACT/365	1
AUD $\leq$ 1Y	0	tenor	ACT/365	RBA ON	ACT/365	1
AUD $>$ 1Y	0	1Y	ACT/365	RBA ON	ACT/365	1

The spot lag is the lag in days between the trade date and the first fixing period start date. The pay lag is the lag in days between the last fixing and the payment.

TABLE 17.1. Overnight indexed swap conventions.



GRAB

United States | 98) Export | 99) Settings | Interest Rate Swap Rates

Date Range: 05/17/2016 - 06/17/2016 1 Month

40) Semi Swaps | 41) Sprs to Gov. | 42) Ann Swaps | 43) Ann Sprs | 44) OIS

USD OIS Swaps — Avg Now — PCS CMPN

Tenor	Bid / Ask	Mid	Change	Today	#SD Δ/da	Low	Range	High	Avg	+/-BPS	#SD
1) 1 WK	0.358 / 0.393	0.375	0.000		0.1	0.334		0.393	0.385	0.7	1.0
2) 2 WK	0.362 / 0.373	0.368	-0.001		-0.2	0.334		0.449	0.375	-0.2	-0.2
3) 3 WK	0.373 / 0.373	0.373	0.003		0.3	0.356		0.401	0.374	-0.1	-0.1
4) 1 MO	0.366 / 0.376	0.371	0.001		0.0	0.316		0.447	0.386	-1.0	-0.5
5) 2 MO	0.373 / 0.382	0.378	0.001		0.0	0.360		0.455	0.403	-2.1	-0.9
6) 3 MO	0.378 / 0.387	0.382	0.003		0.1	0.346		0.489	0.425	-3.9	-1.1
7) 4 MO	0.388 / 0.398	0.393	0.001		0.0	0.375		0.512	0.443	-4.5	-1.1
8) 5 MO	0.386 / 0.416	0.401	0.003		0.1	0.375		0.565	0.461	-4.5	-1.0
9) 6 MO	0.406 / 0.411	0.408	0.002		0.0	0.380		0.554	0.474	-6.3	-1.3
10) 9 MO	0.418 / 0.448	0.433	0.003		0.0	0.400		0.605	0.519	-7.1	-1.3
11) 12 MO	0.455 / 0.460	0.457	0.007		0.1	0.420		0.654	0.556	-9.6	-1.6
12) 18 MO	0.496 / 0.502	0.499	0.010		0.1	0.456		0.734	0.620	-11.8	-1.5
13) 2 YR	0.535 / 0.543	0.539	0.026		0.3	0.485		0.801	0.675	-13.2	-1.4
14) 3 YR	0.607 / 0.617	0.612	0.020		0.2	0.540		0.918	0.773	-15.6	-1.5
15) 4 YR	0.659 / 0.709	0.684	0.021		0.2	0.604		1.002	0.872	-16.3	-1.5
16) 5 YR	0.745 / 0.785	0.765	0.025		0.2	0.680		1.099	0.948	-16.3	-1.5
17) 10 YR	1.098 / 1.148	1.123	0.025		0.2	1.023		1.425	1.299	-15.1	-1.5

Executable quotes for Fixed Income Electronic Trading are in white tenors.

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 2395 9000 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2016 Bloomberg Finance L.P.
SN 723149 G662-4612-1 17-Jun-16 21:14:27 CDT GMT-5:00

Figure: Cotizaciones de OIS Swaps

Cross Currency Basis Swap *XCCY*

- Instrumento OTC donde se intercambian flujos (usualmente nominales y flujos de interés) en una divisa dada por flujos denominados en otra divisa.
- Lo común es que cada pata pague flujos basados en tasas flotantes, aunque puede haber tasas fijas involucradas en los pagos.
- Una de las patas paga su índice referencial más un spread, el cross currency basis spread.
- El xccy basis spread es pensando como la prima que es cargada por la diferencia de liquidez entre divisas (el costo de convertir una moneda a otra).
- Existen swaps resetteables y no resetteables. El primero indica que existen ajustes intercupón de nominal por movimientos en el tipo de cambio. El segundo no considera tales ajustes.

GRAB

Mexico | 98) Export | 99) Settings | Interest Rate Swap Rates

Date Range: 05/17/2016 - 06/17/2016 | 1 Month

40) TIIE Swap | 41) TIIE-Libor Swap | 42) TIIE-Libor Basis Swap

MXN TIIE-Libor Basis Swap — Avg · Now — PCS CMPN

Tenor	Bid	Ask	Mid	Change	Today	#SD Δ/da	Low	Range	High	Avg	+/-BPS	#SD
1) 3 MO	4.250	12.250	8.250	-1.500		-0.1	-20.500		55.500	7.198	505.2	0.5
2) 6 MO	23.000	31.750	27.750	-2.500		-0.4	8.255		38.250	28.573	317.7	0.5
3) 13 MO	55.000	61.000	58.000	-1.000		-0.2	4.565		153.000	59.958	104.2	0.3
4) 26 MO	66.500	70.500	68.500	0.000		0.0	4.730		72.000	70.333	16.7	0.3
5) 39 MO	73.500	77.500	75.500	0.000		0.0	4.960		77.500	77.208	29.2	0.3
6) 52 MO	79.500	83.500	82.000	0.500		0.4	5.155		83.500	83.000	50.0	0.4
7) 65 MO	85.500	89.500	87.250	0.250		0.2	81.000		89.500	88.292	120.8	0.8
8) 91 MO	95.000	100.000	97.500	-1.000		-0.7	7.530		100.000	98.875	112.5	0.8
9) 130 MO	94.500	98.500	96.500	-1.500		-0.9	7.845		98.500	97.750	75.0	0.4

Executable quotes for Fixed Income Electronic Trading are in white tenors.

Figure: Cotización de un Cross Currency basis Swap a distintos vencimientos.

CIDPYME

Hasta este momento, asumiremos que existe solamente una curva para estimar las tasas forward y para descontar los flujos futuros. En el futuro relajaremos este supuesto.

Podemos ver a un IRS Swap como un portafolio de FRA's, sin embargo, utilizaremos otro método de valuación más directo, el cual consiste valuar las patas por separado:

La pata fija consiste en una serie de pagos fijos en las fechas $T_1, T_2, \ldots T_n$, cada pago de valor αK, el valor de dicha pata puede calcularse de la siguiente forma:

$$V_t^{Fix} = K \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_{tT_i} := KP_t \tag{21}$$

A P_t le llamaremos el *valor presente de un punto básico* o *PVBP* de un swap.

Teniendo el valor de la pata fija, resta con calcular el valor de la pata flotante para poder valuar el Swap, para ésto, consideremos un portafolio conformado por los siguientes instrumentos:

$$V_t = 1 - D_{tT_n} \tag{22}$$

1. Tomemos el valor en dinero de este portafolio, podemos invertir \$1 a T_1 y vendamos un bono cupón cero que vence en T_n.
2. Llegado el tiempo T_1, recibimos $1 + \alpha_1 L_t[t, T_1]$ por el peso invertido.
3. Tomamos \$1 y lo volvemos a invertir de T_1 a T_2.
4. Repitamos este proceso iterativamente hasta llegar a T_n
5. En T_n recibimos $1 + \alpha_{n-1} L_{T_{n-1}}[T_{n-1}, T_n]$, y a la vez tenemos que pagar \$1 derivado del bono D_{tT_n}.
6. Con la estrategia anterior hemos replicado el valor de la pata flotante de un IRS!!!

Solo queda calcular el valor del Swap de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_t^{Swap} &= V_t^{Flt} - V_t^{Fix} && (23) \\ &= 1 - D_{tT_n} - KP_t, && (24) \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores, podemos preguntarnos al igual que en los FRA's, cuál es el Strike tal que hace el Valor de mi Swap cero al comienzo del contrato? Despejando:

$$y_t := \frac{1 - D_{tT_n}}{P_t} \tag{25}$$

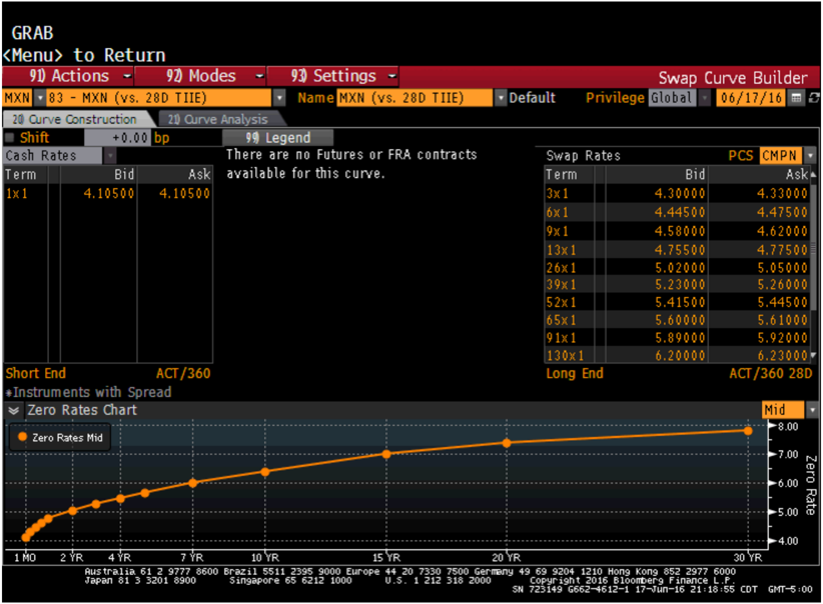
A y_t se le conoce como la tasa *par swap* y ésta es la que cotiza en mercado. Sustituyendo (25) en (23), llegamos a la expresión más usual para un swap:

$$V_t^{swap} = P_t(y_t - K) \tag{26}$$

Curvas de tasas de interés

- Sea $r(t_0, T)$ una tasa cero cupón en alguna de las composiciones definidas anteriormente.
- La función $T \rightarrow r(t_0, T)$ es llamada curva cero cupón. También es referida como la estructura temporal de tasas de interés.
- **Importante**: Para el uso de esta función debe especificarse la composición de la tasa y la convención de conteo asociada.
- El concepto curva y estructura temporal es utilizado en un sentido mucho más amplio en las prácticas de mercado, donde $r(,)$ puede referir además a tasas swap, el mismo factor de descuento, volatilidades, tasas de inflación o algún otro precio de mercado. En general se refiere a cualquier mapeo de un plazo con una variable de mercado.

Curva de Tasas Swap y Cero Cupón



- En el caso de los participantes del mercado financiero mexicano, el nivel promedio de tasa de fondeo está definido por la TIIE-28D.
- Es la tasa pagada en depósitos a 28 días, por tanto útil para descontar flujos futuros [1] a tal plazo...
- Y para descontar a cualquier otro plazo? Por ej, a 10Y ?
- La economía mexicana cuenta con TIIE91D y TIIE182D, pero no son referencias líquidas. Aún con eso, sólo tenemos tres tasas para definir la curva, pero...
- Existen instrumentos líquidos en los mercados que permiten definir las expectativas evolutivas de una tasa referencial (IRS de TIIE28D en el caso mexicano), de manera que puede deducirse su estructura temporal.

[1] asociados a un contrato sin respaldo de colateral.

Construcción Clásica de las curvas de tasas de interés (Valuación sin inclusión de colaterales)

- El procedimiento para inferir la curva de descuento a partir de cotizaciones líquidas del mercado se llama bootstrapping y consiste en un proceso de solución iterativo que reutiliza la información del corto plazo para generar información a más largo plazo.
- Es necesario establecer supuestos de interpolación y extrapolación pues sólo se cuenta con un número reducido de instrumentos.
- Lo anterior significa que existen múltiples soluciones de curva, pero toda solución válida deberá ser consistente con los precios de mercado, ie, la curva cero cupón deberá recuperar los precios de mercado de los instrumentos utilizados para su construcción.

Las fechas asociadas a la maduración de los instrumentos utilizados para bootstrappear la curva de descuento son conocidos como los pilares de construcción.

La solución de la curva deberá ser presentada como una función $D_{0,T}$ definida a tramos, de valores dados para los T que son pilares de construcción y para cualquier otro T deberá generarse vía la regla de interpolación elegida.
Como ejemplo, tenemos una fórmula cerrada para el valor de un IRS Swap. Con el fin de hallar los factores de descuento que hacen 0 el valor del swap, podemos utilizar un método númerico con este fin (Newthon Rhapson).

Bootstrapping

Maturity	Pillar Date (T)	Discount Factor P(0,T)
1M	20/07/2016	0.999182499
3M	20/09/2016	0.996873741
6M	20/12/2016	0.99256309
9M	20/03/2017	0.987107992
1Y	20/06/2017	0.980392157
18M	20/12/2017	0.967145438
2Y	20/06/2018	0.951814396
3Y	20/06/2019	0.921837791
5Y	21/06/2021	0.862469082
7Y	20/06/2023	0.799339957
10Y	22/06/2026	0.7086516
12Y	20/06/2028	0.642704479
15Y	20/06/2031	0.555085535
20Y	20/06/2036	0.43474151
30Y	20/06/2046	0.26677472

Si se quiere saber $P(0, T_{2M})$:

$$Y(0,T_{1M}) = P(0,T_{1M})^{-\tau(0,T_{1M})} - 1 = 1.00\%$$

$$Y(0,T_{3M}) = P(0,T_{3M})^{-\tau(0,T_{3M})} - 1 = 1.25\%$$

$$Y(0,T_{2M}) = \alpha Y(0,T_{1M}) + (1-\alpha) Y(0,T_{3M})$$
$$= 1.125\%$$

$$P(0,T_{2M}) = \left(1 + Y(0,T_{2M})\right)^{-\tau(0,T_{2M})} = \quad = 0.99813211$$

Figure: Ejemplo de interpolación para factores de descuento.

Bootstrapping

Características:

- Método de Cotización: Tasa Swap (tasa fija del swap)
- Plazos a vencimiento específicos: 84D,168D,...
- "n" intercambios de flujos cada 28 días.
- Pata fija:

  Periodicidad: 28D

  Day-Count Conv: ACT/360
- Pata Flotante:

  Fixing: UpFront

  Payment: InArrears

  Periodicidad: 28D

  Day-Count Conv: ACT/360 , FBD

Un IRS de mercado vale cero al inicio!

n	plazo	alias
3	84D	3M
6	168D	6M
9	252D	9M
13	364D	1Y
26	728D	2Y
39	1092D	3Y
52	1456D	4Y
65	1820D	5Y
91	2548D	7Y
130	3640D	10Y
156	4368D	12Y
195	5460D	15Y
260	7280D	20Y
390	10920D	30Y

Figure: Caso MXN: IRS TIIE28

GRAB

Mexico | 98) Export | 99) Settings | Interest Rate Swap Rates

Date Range: 05/17/2016 - 06/17/2016 | 1 Month

40) TIIE Swap | 41) TIIE-Libor Swap | 42) TIIE-Libor Basis Swap

MXN TIIE Swap — Avg — Now — PCS — CMPN

Tenor	Bid / Ask	Mid	Change	Today	#SD Δ/da	Low	Range	High	Avg	+/-BPS	#SD
1) 3 MO	4.300 / 4.330	4.315	0.013		0.3	4.143		4.338	4.259	7.1	1.9
2) 6 MO	4.445 / 4.475	4.460	-0.026		-0.6	4.259		5.415	4.449	2.6	0.5
3) 9 MO	4.580 / 4.620	4.600	-0.010		-0.2	4.393		4.740	4.609	1.1	0.2
4) 13 MO	4.755 / 4.775	4.765	-0.005		-0.1	4.500		4.910	4.774	0.1	0.0
5) 26 MO	5.020 / 5.050	5.038	-0.012		-0.2	4.790		5.150	5.038	1.2	0.2
6) 39 MO	5.230 / 5.260	5.245	-0.010		-0.1	5.030		5.380	5.260	0.0	0.0
7) 52 MO	5.415 / 5.445	5.432	0.002		0.0	5.235		5.590	5.460	-1.5	-0.2
8) 65 MO	5.600 / 5.610	5.605	0.005		0.1	5.450		5.803	5.655	-4.5	-0.6
9) 91 MO	5.890 / 5.920	5.905	0.005		0.1	5.775		6.120	5.964	-4.4	-0.6
10) 130 MO	6.200 / 6.230	6.225	-0.005		-0.1	6.108		6.422	6.305	-7.5	-1.1
11) 195 MO	6.665 / 6.695	6.680	-0.001		0.0	6.567		6.830	6.703	-0.8	-0.1
12) 260 MO	6.911 / 6.911	6.911	0.034		0.6	6.811		7.041	6.916	-0.5	-0.1

Executable quotes for Fixed Income Electronic Trading are in white tenors.

Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 2395 9000 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2016 Bloomberg Finance L.P.
SN 723149 G662-4612-1 17-Jun-16 21:13:33 CDT GMT-5:00

Figure: Ejemplo de una pantalla de cotización para un IRS Swap sobre TIIE28D

Dado que los IRS de pantalla valen cero por definición, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& V_{t_0}^{Fix} = V_{t_0}^{Float} \\
\iff \quad & \sum_{i=1}^{n} NK\tau(t_{i-1}, t_i) D_{t_0,t_i} = \sum_{i=1}^{n} NF_0(t_{i-1}, t_i)\tau(t_{i-1}, t_i) D_{t_0,t_i} \\
\iff \quad & \sum_{i=1}^{n} K\tau(t_{i-1}, t_i) D_{t_0,t_i} = 1 - D_{t_0,t_n} \\
\iff \quad & \sum_{i=1}^{n} K\tau(t_{i-1}, t_i) D_{t_0,t_i} + D_{t_0,t_n} = 1
\end{aligned}
$$

CIDPYME

Construcción bajo valoraciones asociadas al colateral (Nuevo estándar de mercado)

Antes de 2007:

- Un FRA podía ser replicado con un par de depósitos.
- Tasas forward no diferían significativamente de las calculadas teóricamente mediante tasas OIS.
- El basis entre tasas de depósito y OIS era pequeño e ignorado
- El basis entre tasas swap de un mismo vencimiento pero ligadas a subyacentes de tenors distintos también era ignorado, por tanto un bono flotante se negociaba a par independientemente del tenor del subyacente: Libor3M, Libor6M.
- El mercado no reflejaba en los precios de los swaps la posibilidad del incumplimiento de la contraparte.
- El tratamiento consistente de los participantes de mercado sobre los puntos anteriores permitía definir una única curva cero cupón (con la que se estiman los índices y al mismo tiempo descuentan flujos futuros)

Durante y posterior a la crisis iniciada en 2007:

- Comenzaron a ser más comunes los trades bajo acuerdos de colateral y otros mitigantes a la exposición del riesgo de contraparte (considerados contractualmente en los términos de los ISDA-CSAs)
- Los spreads mencionados anteriormente comenzaron a ser notorios y cada vez mayores.
- Se comenzaron a pagar primas altas de crédito/liquidez en fondeos interbancarios basados en Libor.
- Las primas de riesgo en las tasas Libor mostraban distintas proporciones a distintos tenores, de hecho mayores a mayor plazo.
- La cobertura de instrumentos indizados a un subyacente dado, por ej Libor3M, se hacía solo mediante instrumentos vanillas ligados al mismo índice.

Una conclusión directa es que los índices Libor ya no eran una buena aproximación para representar una tasa libre de riesgo. En todo caso, una mejor aproximación lo son las tasas *OIS* pues éstas tasas no son afectadas por primas de riesgo de crédito, dado que los *OIS* swaps están sujetos a llamadas de margen diarios.

Una proporción significativa de los deals bajo acuerdos ISDA comenzaron a sujetarse a llamadas de colateral (diarias en muchos casos) las cuales son remunerados a tasas *ON*.

Los "precios de pantalla" comenzaron a ser considerados completamente colateralizados (threshold=0).

Se generó, por tanto, la necesidad de diferenciar entre curvas para la estimación de índices y consecuentemente la necesidad de generar otra referencia para el descuento basada en una nueva curva libre de riesgo y el colateral asociado a la operación: curva *OIS*.

- Overnight Index Swaps (OIS) son instrumentos que permiten a las instituciones financieras intercambiar los tipos de interés que están pagando sin tener que refinanciar o cambiar los términos de los préstamos que han tomado de otras instituciones financieras.
- Cuando dos instituciones financieras pactan un swap (OIS), una de las instituciones está intercambiando una tasa de interés a un día y la otra institución está intercambiando una tasa de interés fija a corto plazo.
- la tasa OIS se calcula diariamente con base en el promedio de las tasas de interés que las instituciones bancarias pagaron ese día.
- El colateral de dichos contratos es revisado diariamente, por lo que dicha tasa puede ser considerada como la más próxima a la tasa libre de riesgo.

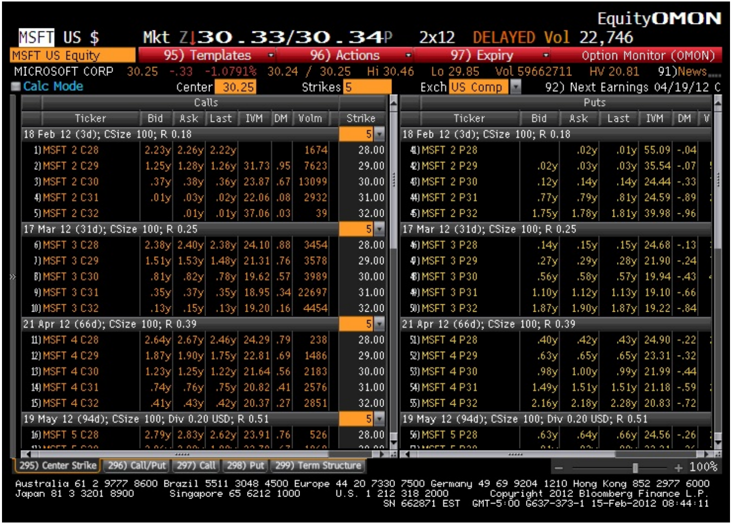
Opciones

Una opción es un contrato en el que alguna de las contrapartes tiene el derecho, mas no la obligación de adquirir un producto S_t a un precio pactado K.

$$\text{Opciones} \begin{cases} \text{- Plain Vanilla} \begin{cases} \text{- Call } max(S_T - K, 0) \\ \text{- Put } max(K - S_T, 0) \end{cases} \\ \text{- Exóticas} \begin{cases} \text{- Americanas} \\ \text{- Digitales} \\ \text{-Asiáticas} \\ \text{-Lookback} \\ \ldots \end{cases} \end{cases}$$

En las opciones mencionadas anteriormente siempre habrán dos posiciones: La larga y la corta.

Cotizaciones de opciones sobre Equity



EquityOMON

MSFT US $ Mkt Z↓30.33/30.34P 2x12 DELAYED Vol 22,746

MSFT US Equity | 95) Templates | 96) Actions | 97) Expiry | Option Monitor (OMON)

MICROSOFT CORP 30.25 -.33 -1.0791% 30.24 / 30.25 Hi 30.46 Lo 29.85 Vol 59662711 HV 20.81 91) News

Calc Mode Center 30.25 Strikes 5 Exch US Comp 92) Next Earnings 04/19/12 C

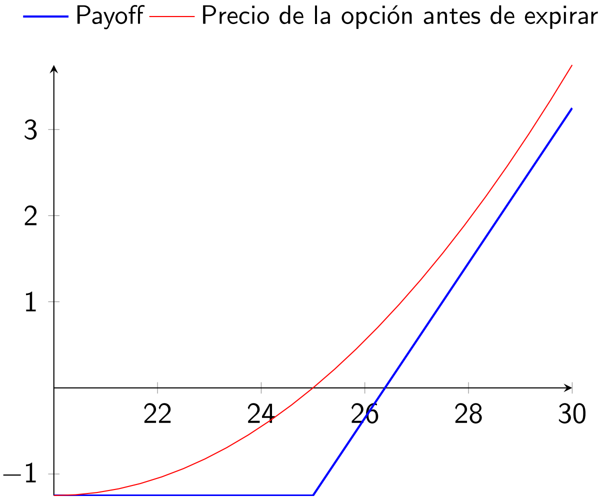
Calls Ticker	Bid	Ask	Last	IVM	DM	Volm	Strike	Puts Ticker	Bid	Ask	Last	IVM	DM
18 Feb 12 (3d); CSize 100; R 0.18							5	18 Feb 12 (3d); CSize 100; R 0.18					
1) MSFT 2 C28	2.23y	2.26y	2.22y			1674	28.00	41) MSFT 2 P28		.02y	.01y	55.09	-.04
2) MSFT 2 C29	1.25y	1.28y	1.26y	31.73	.95	7623	29.00	42) MSFT 2 P29	.02y	.03y	.03y	35.54	-.07
3) MSFT 2 C30	.37y	.38y	.36y	23.87	.67	13099	30.00	43) MSFT 2 P30	.12y	.14y	.14y	24.44	-.33
4) MSFT 2 C31	.01y	.03y	.02y	22.06	.08	2932	31.00	44) MSFT 2 P31	.77y	.79y	.81y	24.59	-.89
5) MSFT 2 C32		.01y	.01y	37.06	.03	39	32.00	45) MSFT 2 P32	1.75y	1.78y	1.81y	39.98	-.96
17 Mar 12 (31d); CSize 100; R 0.25							5	17 Mar 12 (31d); CSize 100; R 0.25					
6) MSFT 3 C28	2.38y	2.40y	2.38y	24.10	.88	3454	28.00	46) MSFT 3 P28	.14y	.15y	.15y	24.68	-.13
7) MSFT 3 C29	1.51y	1.53y	1.48y	21.31	.76	3578	29.00	47) MSFT 3 P29	.27y	.29y	.28y	21.90	-.24
8) MSFT 3 C30	.81y	.82y	.78y	19.62	.57	3989	30.00	48) MSFT 3 P30	.56y	.58y	.57y	19.94	-.43
9) MSFT 3 C31	.35y	.37y	.35y	18.95	.34	22697	31.00	49) MSFT 3 P31	1.10y	1.12y	1.13y	19.10	-.66
10) MSFT 3 C32	.13y	.15y	.13y	19.20	.16	4454	32.00	50) MSFT 3 P32	1.87y	1.90y	1.87y	19.22	-.84
21 Apr 12 (66d); CSize 100; R 0.39							5	21 Apr 12 (66d); CSize 100; R 0.39					
11) MSFT 4 C28	2.64y	2.67y	2.46y	24.29	.79	238	28.00	51) MSFT 4 P28	.40y	.42y	.43y	24.90	-.22
12) MSFT 4 C29	1.87y	1.90y	1.75y	22.81	.69	1486	29.00	52) MSFT 4 P29	.63y	.65y	.65y	23.31	-.32
13) MSFT 4 C30	1.23y	1.25y	1.22y	21.64	.56	2183	30.00	53) MSFT 4 P30	.98y	1.00y	.99y	21.99	-.44
14) MSFT 4 C31	.74y	.76y	.75y	20.82	.41	2576	31.00	54) MSFT 4 P31	1.49y	1.51y	1.51y	21.18	-.59
15) MSFT 4 C32	.41y	.43y	.42y	20.37	.27	2851	32.00	55) MSFT 4 P32	2.16y	2.18y	2.28y	20.83	-.72
19 May 12 (94d); CSize 100; Div 0.20 USD; R 0.51							5	19 May 12 (94d); CSize 100; Div 0.20 USD; R 0.51					
16) MSFT 5 C28	2.79y	2.83y	2.62y	23.91	.76	526	28.00	56) MSFT 5 P28	.63y	.64y	.66y	24.56	-.26

295) Center Strike | 296) Call/Put | 297) Call | 298) Put | 299) Term Structure | 100%

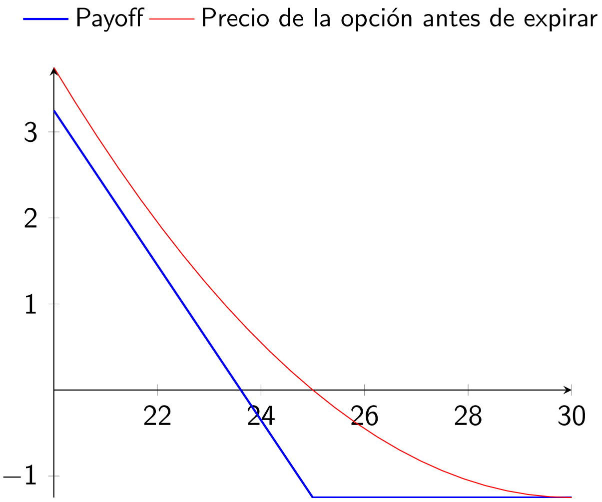
Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000
Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2012 Bloomberg Finance L.P.
SN 662871 EST GMT-5:00 G637-373-1 15-Feb-2012 08:44:11

Figure: Pantalla Obtenida de Bloomberg, mostrando las cotizaciones de opciones sobre la acción de Microsoft.

Payoff de un Call Europeo



Payoff de un Put Europeo



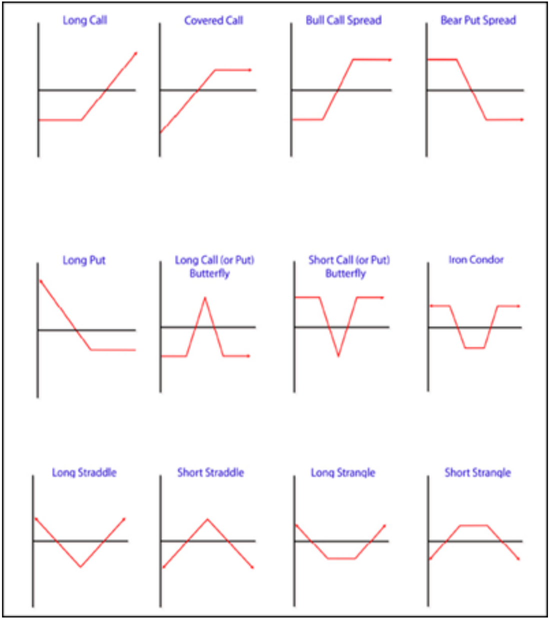
Valuar una opción no es tarea sencilla, tenemos mucho camino que recorrer para llegar a una fórmula de valuación, sin embargo, podemos comenzar dando restricciones en los precios de las opciones, denotemos como c al valor de una opción call europea y p al valor de una opción put europea:

- $\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \leq c \leq S_0$.
- $\max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \leq p \leq Ke^{-rT}$.

Utilizando las restricciones anteriores, podemos obtener la paridad *Put-Call*, la cual consiste en lo siguiente:

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT}. \tag{27}$$

Portafolio de opciones Plain Vanilla



Valuación de opciones en tiempo discreto

Supuestos para la valuación de opciones

Existen 6 factores fundamentales a considerar para valuar una opción:

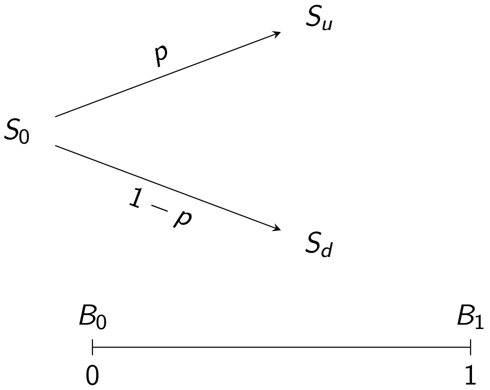
- El precio inicial del subyacente S_0.
- Strike K.
- Periodo al vencimiento T.
- La volatilidad del subyacente σ.
- La tasa libre de riesgo r.

Tomaremos como ciertos las siguientes proposiciones al momento de valuar opciones:

- No existen costos de transacciones.
- Podemos prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo.
- Los subyacentes son infinitamente divisibles.
- Partiremos del supuesto de **no arbitraje**.

La economía (acción y bono)

Por ahora, asumiremos que nuestro activo riesgoso es una acción que no paga dividendos, la cual en el futuro solo puede tomar dos valores, además tendremos un bono cupón cero, el cual sabemos el precio al comprarlo y a su vencimiento (Valor nominal):



El bono y la acción definidos anteriormente son sencillos a simple vista, pero la definición dada para la acción hace que el problema se complique, ya que no sabemos a *priori* el valor de la acción en el futuro.
Existe algo que podamos hacer para valuar una obligación futura f que dependa de la acción y del bono?
Consideremos un portafolio (ϕ, φ) tal que tengamos ϕ unidades de S y ϕ unidades de B. El valor de dicho portafolio el día de hoy es $\phi S_0 + \varphi B_0$. En el instante siguiente δt, el portafolio puede tomar dos posibles valores:

$$\phi S_u + \varphi B_0 e^{\delta t} \quad \text{Si sube la acción} \tag{28}$$

$$\phi S_d + \varphi B_0 e^{\delta t} \quad \text{Si baja la acción} \tag{29}$$

Nuestra obligación f depende directamente de S, por lo que tendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\phi S_u + \varphi B_0 e^{\delta t} = f_u \tag{30}$$

$$\phi S_d + \varphi B_0 e^{\delta t} = f_d \tag{31}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos la siguiente solución:

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \tag{32}$$

$$\varphi = B_0^{-1} e^{-r\delta t} \left(f_u - \frac{(f_u - f_d) S_u}{S_u - S_d} \right) \tag{33}$$

Interpretando este resultado, quiere decir que si compramos/vendemos ϕ unidades de S_0 y pedimos prestado/prestamos φ unidades de B_0, podemos replicar perfectamente nuestra obligación f.
Siendo f el valor del derivado, $f = \phi S_0 + \varphi B_0$, lo cual podemos expresar de la siguiente forma:

$$f = S_0 \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} + e^{-r\delta t} \left(f_u - \frac{(f_u - f_d) S_u}{S_u - S_d} \right) \tag{34}$$

Definamos la siguiente variable:

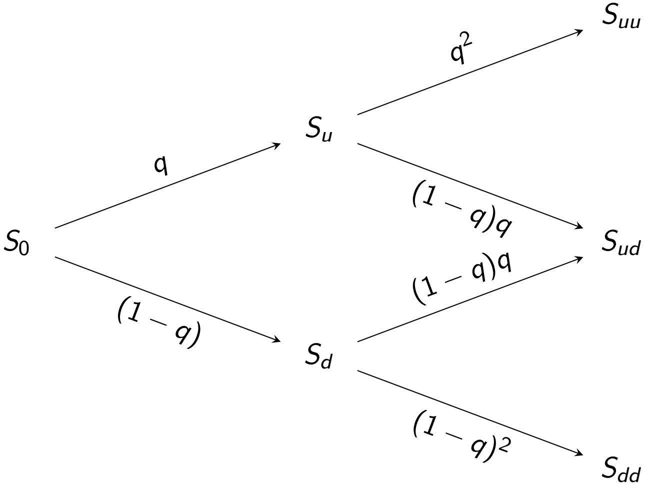
$$q = \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_d}{S_u - S_d} \tag{35}$$

Sustituyendo en (34), llegamos al siguiente resultado:

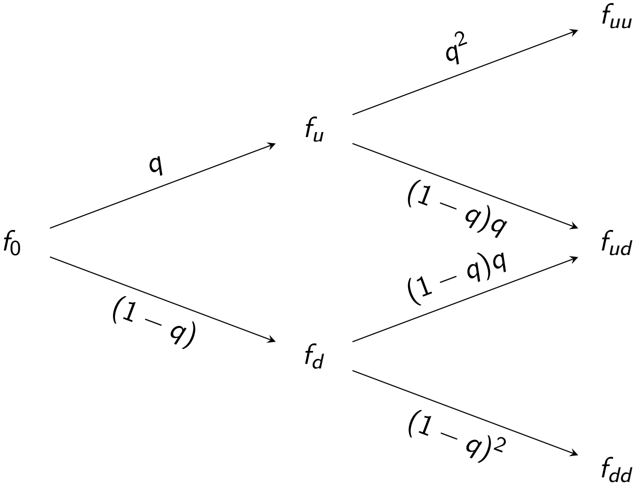
$$f = e^{-r\delta t}(qf_u + (1-q)f_d) = ?\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} f] \tag{36}$$

De lo anterior, vemos que $0 \leq q \leq 1$, sin esta condición, podemos construir una estrategia de arbitraje.
Podemos utilizar (34) de manera inductiva sobre un árbol multiperiodo, se utiliza en particular un árbol que recombina valores con el fin de simplificar el número de caminos. Más adelante veremos que dicha aproximación es válida para ver la convergencia hacia el modelo de Black & Scholes.

Árbol Binomial Multiperiodo de S



Árbol Binomial Multiperiodo de f



Sin ser muy rigurosos hasta ahora, podemos derivar un modelo contínuo a partir de lo visto en clase, ya que la intuición nos dice que al hacer las particiones de árbol más finas, deberíamos de converger a cierto valor. Veremos que bajo este modelo, la dinámica del subyacente S converge a una dinámica lognormal bajo la medida $\mathbb{Q}$. Supongamos que la dinámica de S es la siguiente:

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_u = S_i e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} \\ \\ S_d = S_i e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}} \end{cases}$$

Utilizando la definición anterior, definamos a n como el número de particiones de nuestro árbol, es decir, $n = t/\delta t$. Bajo el modelo del árbol binomial:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{\delta t}\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}}, \tag{37}$$

Donde X_n es el número de saltos hacia arriba.

De los ejercicios anteriores, la medida $\mathbb{Q}$ está dada por la siguiente expresión:

$$q = \frac{S_i e^{r\delta t} - S_d}{S_u - S_d}, \tag{38}$$

Aproximando q utilizando Taylor de segundo orden sobre $\sqrt{\delta t}$ alrededor de 0:

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\delta t}\left(\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma}\right)\right) \tag{39}$$

Tomando en cuenta que X_n tiene distribución binomial con media nq y varianza $nq(1-q)$, bajo la ley de los grandes números, llegamos a lo siguiente:

$$S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N(0,1) \tag{40}$$

Habiendo derivado esta dinámica para el valor de la acción, podemos aplicar la fórmula de valuación encontrada previamente. Como ejemplo, supongamos que queremos valuar un Call Europeo con vencimiento en T:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[B_0^{-1}(S_T - K)^+ | \mathscr{F}_0\right] &= S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \\
d_1 &= \frac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

La fórmula anterior es conocida como Fórmula de Black & Scholes, posteriormente veremos que existen diversas variantes de dicha fórmula dependiendo de lo que queramos valuar con ella.

- En la práctica, es posible que los precios de los activos financieros cambien a cada instante.
- Las ideas previas de utilizar una δ que tiende a cero, no son lo suficientemente rigurosas para utilizarlas como una base sólida en el campo delas finanzas a tiempo contínuo.
- Concentraremos nuestra teoría en el uso del *movimiento browniano*, el cual será el proceso ideal (hasta ahora) para modelar la dinámica de los precios de los activos financieros.

Lema de Ito

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} d\left[X_t\right] \tag{41}$$