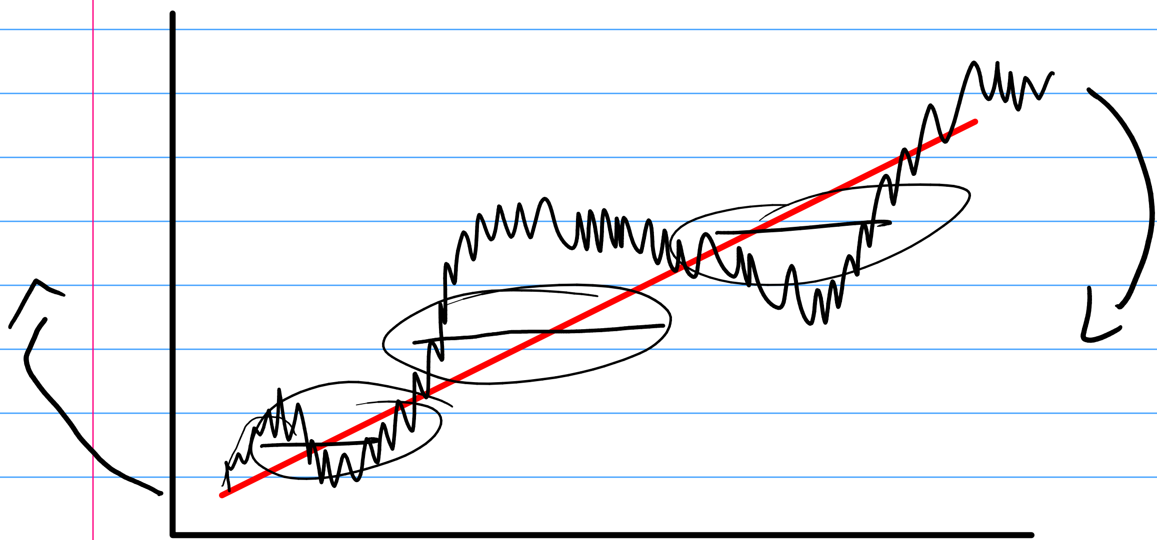
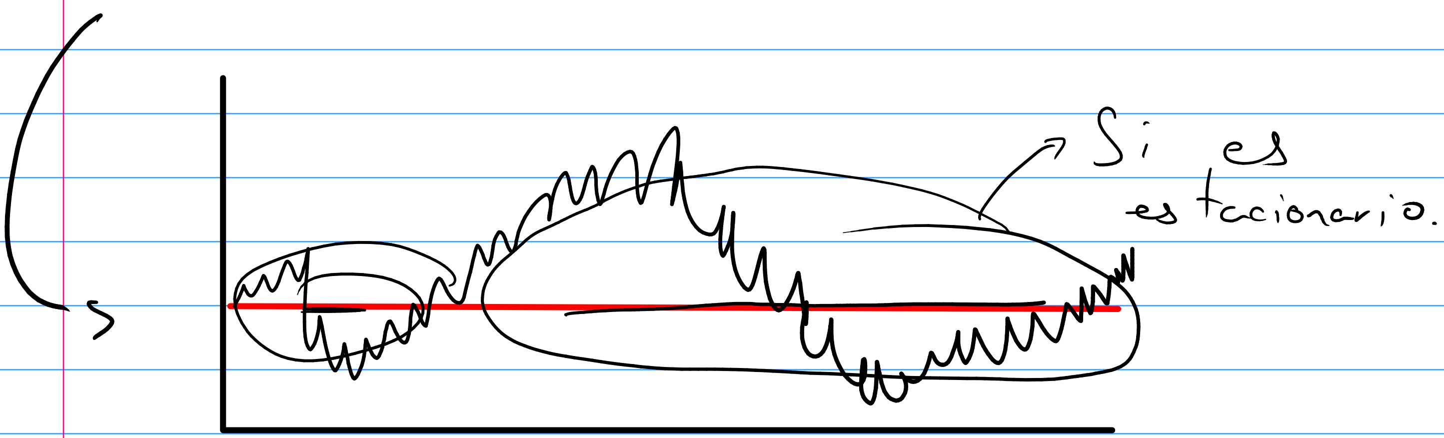
Proceso AR(2)

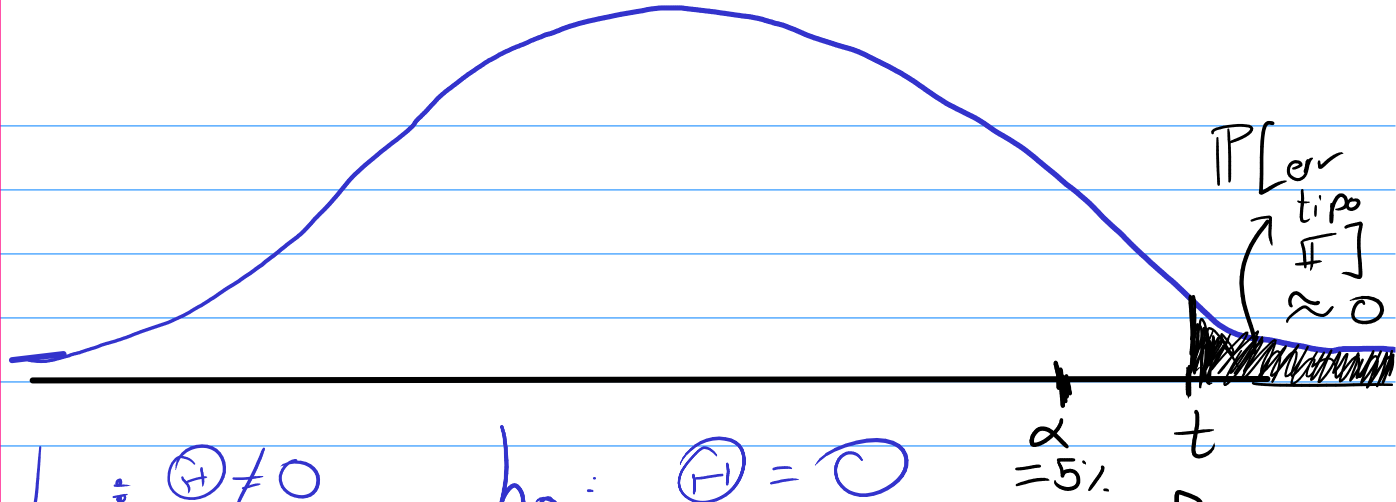
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}$$

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2)$$

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2}$$







$h_0: \Theta \neq 0$

$h_1: \Theta = 0$

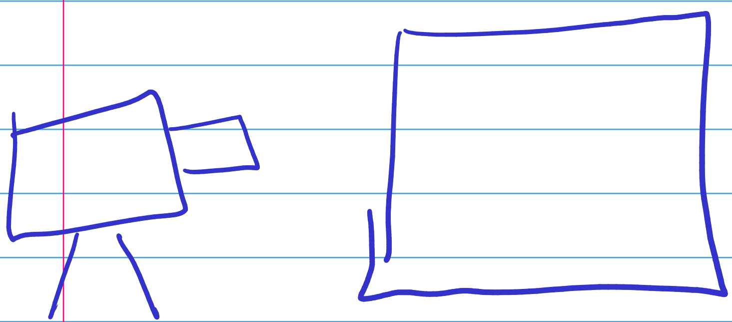
$h_0: \Theta = 0$

$h_1: \Theta \neq 0$

ERRORES

- Tipo I → Aceptar cuando es falsa
- Tipo II → Rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.

¿hay grieta?



Tipo I

Decir que hay una grieta en la pared cuando realmente no la hay.

↳ Determinar si la pared tiene una grieta

En este caso, si la cámara comete un error de tipo II, estaría diciendo que una pared no tiene grieta cuando sí la tenía.

Verdaderos Positivos	Falsos Positivos
Falsos negativos	Verdaderos Negativos

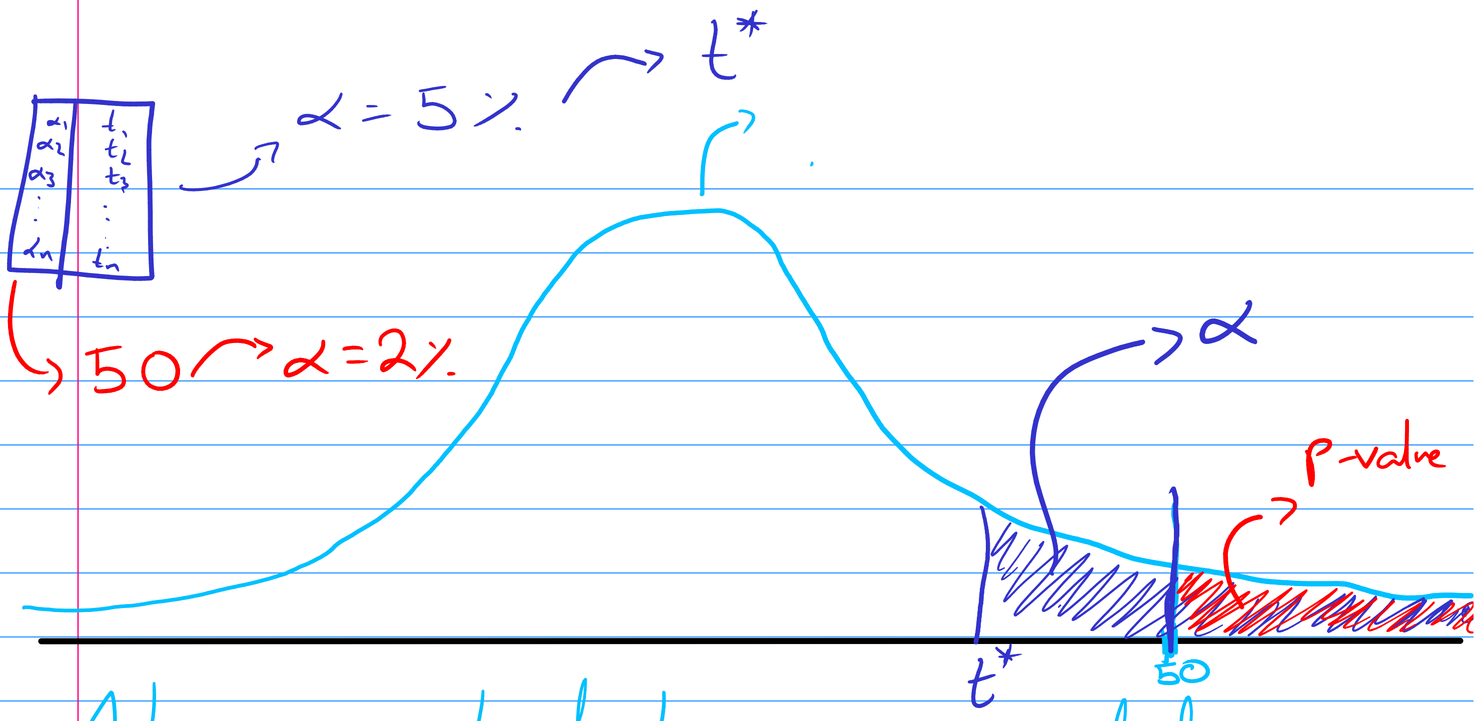
Errores del tipo I

Errores tipo II

$$h_0 : \Theta = 0$$

$$h_1 : \Theta \neq 0$$

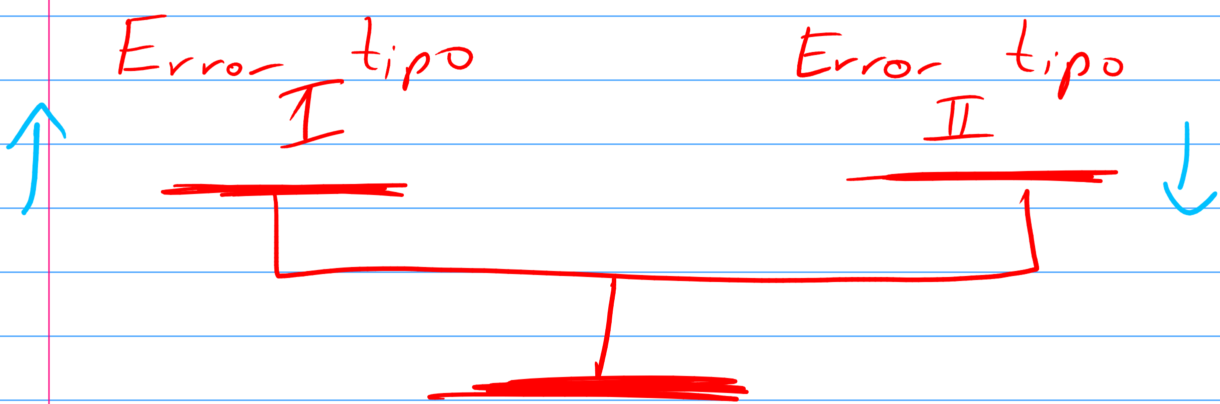
$\mathbb{P}[\text{Error Tipo II}] \rightarrow$ P-value



Algo en estadística es verdadero ó falso dado un nivel de confianza

$50 > t \Rightarrow$ rechazo hipótesis nula

p-value $< \alpha$



$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1-B)X_t$$

$$B^2 X_t = B(BX_t) = BX_{t-1} = X_{t-2}$$

$$B^h X_t = X_{t-h}$$

$$\nabla B X_t = \nabla(BX_t) = \nabla(X_{t-1}) = X_{t-1} - X_{t-2}$$

$$B\nabla X_t = B(X_t - X_{t-1}) = BX_t - BX_{t-1}$$
$$= X_{t-1} - X_{t-2}$$

$$B(1-B)X_t = (B - B^2)X_t = X_{t-1} - X_{t-2}$$

En el ejercicio de clase, en vez de hacer una regresión lineal,

tomen $Y_t = \nabla X_t = \underline{X_t - X_{t-1}}$ y

analicen dicha serie de tiempo.

$$\phi_2(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$$

$$B_1 = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$$

$$\frac{1}{B_1} = \frac{2\phi_2}{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}} \left(\frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}} \right)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{\cancel{2}\ \cancel{\phi_2}\left(\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}\right)}{\cancel{\phi_1^2} + 4\cancel{\phi_2} - \cancel{\phi_1^2}}$$

$$= \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}$$

Siguiendo con el proceso AR(2):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t \; ; \; Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = Z_t$$

-> Función de Autocorrelación.

- Asumiendo que $\mathbb{E}[X_t] = 0$

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] - \cancel{\mathbb{E}[X_t]}^{\to 0} \cancel{\mathbb{E}[X_{t+h}]}^{\to 0}$$

$$\mathbb{E}[X_t X_{t+h}] = \phi_1 \mathbb{E}[X_{t-1} X_{t+h}] + \phi_2 \mathbb{E}[X_{t-2} X_{t+h}] + \cancel{\mathbb{E}[Z_t X_{t+h}]}^{\to 0}$$

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1 \frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)} + \phi_2 \frac{\gamma(h-2)}{\gamma(0)}$$

$$\underbrace{\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2)}_{\text{Ecuación en diferencias.}}$$

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2)$$

→ Busca condiciones iniciales

$$\rho(1) = \phi_1 \rho(0) + \phi_2 \rho(1)$$

$$\hookrightarrow \rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$$

$$\underbrace{\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}}$$

Cuando $h = 2$

$$\rho(2) = \phi_1 \rho(1) + \phi_2$$

$$\rho(2) = \phi_1 \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right) + \phi_2 = \underbrace{\frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1-\phi_2}}$$

Para $h = 3, 4, 5, \ldots$ utilizamos la fórmula recursiva.

$$\rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2)$$

PACF de un proceso AR(2)

$$\rightarrow \rho(h) = \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2)$$

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

Recordemos que:

$$\phi_{k,k} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & & \rho(k-3) & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & & \rho(1) & \rho(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(k-1) \\ \rho(1) & \vdots & & \vdots & \rho(k-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

ϕ_{kj}

$$\phi_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2}\right) - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)^2}$$

$$= \frac{\phi_2\left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right]}{(1-\phi_2^2) - \phi_1^2} = \underbrace{\phi_2}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}_{*}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \phi_1 + \phi_2\rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \phi_1\rho(1) + \phi_2 \\ \rho(2) & \rho(1) & \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho(2) \end{vmatrix}}{*}$$

$$= 0$$

Si nos acordamos de álgebra lineal, cuando calculamos un determinante donde una columna de la matriz es combinación lineal de las otras columnas, el valor del determinante es cero!

Para $K \geq 3$, Podemos escribir la última columna del determinante del numerador como una combinación lineal de las otras columnas

$$\text{PACF} \begin{cases} \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2} & K=1 \\ \phi_2 & K=2 \\ 0 & K \geq 3 \end{cases}$$