Cuestionario

1) Definición de una variable aleatoria

→ Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, donde:

Ω: es el conjunto de valores posibles de nuestro evento aleatorio.

$\mathcal{F}$: sigma álgebra, colección de subconjuntos de Ω, que podemos medir.

(Si $\Omega = \{Ag, Sol\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{Ag\}, \{Sol\}\}$)

(Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{3,2\}, \{1,3\}\}$)

$\mathbb{P}$: Medida de probabilidad: Medida con la que cuantificaremos los elementos de $\mathcal{F}$.

Ej. Si $\Omega = \{Ag, Sol\}$

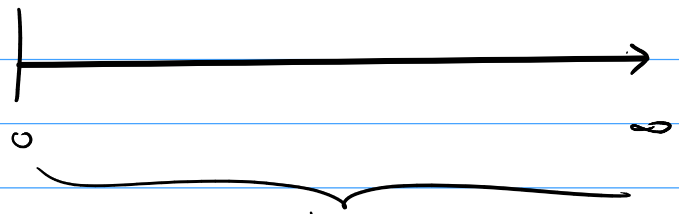
$\mathbb{P}[\{Ag\}] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}[\{Sol\}] = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}[\{Ag, Sol\}] = 1$

Una variable aleatoria X, es una función que toma valores en Ω:

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y cumple que:

Para cada elemento $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{(X \leq x)} \in \mathcal{F}$

Borelianos:



$\downarrow$

Henri Borel

$\#$reales $= \infty$

$\Omega = \mathbb{R}$, $\rightsquigarrow$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ Midamos sólo los subconjuntos del tipo $(-\infty, x]$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ $\mathcal{F} = \sigma((-\infty, x])$

Una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathcal{Y}$, es tal que para cada elemento $y \in \mathcal{Y}$,

$$X^{-1}(y) \in \mathcal{F}.$$

$\underline{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\leftarrow$ lanzamiento de un dado

$X \Rightarrow$ Gano dinero de acuerdo al número del dado.

$X(x) = x$, $\quad X(1) = 1$, $\quad X(2) = 2 \ldots\ldots$

¿X es una variable aleatoria? $\quad \in \mathcal{F}$

Si el resultado de $X = 7$ $\quad \nearrow$

$X^{-1}(7) = \{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,3\}, \{5,2\}, \{6,1\}\}$

2) σ-álgebra: (sigma-álgebra)

→ Colección de subconjuntos de Ω que cumplen lo siguiente:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una colección de subconjuntos de Ω, donde $A_i \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

3) Proceso estocástico

Def: Colección de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ parametrizadas por un conjunto T (espacio parametral), en donde las variables aleatorias toman valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

Ejemplo: Observar si cada día llovió o no llovió:

$T = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$

$S = \{$llueve ó no llueve$\}$

: Observar # pasajeros que usan una aerolínea cada día:

$T = \{1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{N}$

$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\} =$

3) Qué es un estimador insesgado.

Sea $\hat{\beta}$ el estimador del parámetro β, decimos que $\hat{\beta}$ es insesgado si: $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$

Sea $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, sabemos que

$\underline{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ es un estimador de μ,

vemos que $\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1} X_i\right]$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\mu = \underline{\mu}$$

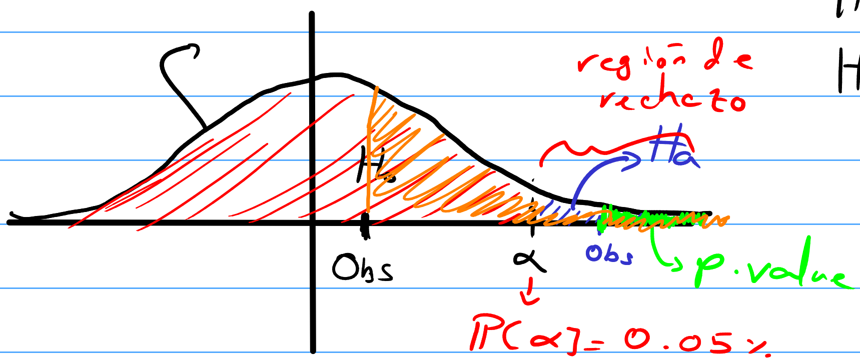
$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ $\quad \mathbb{E}[\hat{\sigma}] = \frac{n-1}{n}\sigma \neq \sigma$ no es insesgado

$\hat{\sigma}' = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\sigma}'] = \sigma \}$ Si es insesgado

5) Definición de un p-value.

H_0 :

H_a :



$\mathbb{P}[\alpha] = 0.05\%$

5%

Si p.value $< \mathbb{P}[\alpha]$

$\Rightarrow$ rechazamos H_0.

6) Describir el método de máxima verosimilitud

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una muestra aleatoria.
(Variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas)

Tenemos una distribución conjunta de éstas va's.

$$\mathbb{P}[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x] = F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$= F_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n, \underset{(\mu,\sigma)}{\Theta})$$

El objetivo del método de máxima verosim. es encontrar Θ^* tal que maximice $F_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n, \Theta^*)$

↳ Más a detalle, lo anterior es análogo a maximizar:

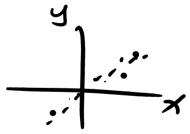
fn. de densidad

$$f_{\underline{X}}(x_1,\ldots,x_n,\Theta) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i,\Theta)}_{\text{función de verosimilitud}}$$

$$\max_{\Theta} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i,\Theta) = \max_{\Theta} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i,\Theta)\right)$$

$$= \max_{\Theta} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \ln(f_{X_i}(x_i,\Theta))}_{\text{función de log-verosimilitud}}$$

$$\mathcal{L}(\Theta)$$



$$y = \beta X + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$
$$\beta \in \mathbb{R}$$

Estimar $\hat{\beta}$ con máxima verosimilitud.

$$y \sim N(\beta X, \sigma^2)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\beta x)^2}{\sigma^2}}$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ una m.a.

$$\mathcal{L}(\Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i-\beta x)^2}{\sigma^2}}\right)$$

$$\mathcal{L}(\Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{(y_i-\beta X_i)^2}{\sigma^2}}\right).$$

$\Theta = \beta$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{(y_i-\beta X_i)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\max_{\Theta} \mathcal{L}(\Theta) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(y_i-\beta X_i)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i-\beta X_i)^2}{\sigma^2} = \underbrace{\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} (y_i-\beta X_i)^2}_{\text{mínimos cuadrados}}$$