La clase anterior vimos procesos $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(p)$

Procesos de Medias móviles. (MA)

$MA(1)$: $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$; $\theta \in \mathbb{R}$

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & ; k = 1 \\ 0 & ; k > 1 \end{cases}$$

La PACF de un proceso MA (1) es la siguiente:

(Recordemos que $\phi_{k+1,k+1} = \dfrac{\rho_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \phi_{kj}\, \rho_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \phi_{kj}\, \rho_j}$

$\phi_{k+1,j} = \phi_{k,j} - \phi_{k+1,k+1} \cdot \phi_{k,k+1-j}$)

$$\phi_{1,1} = \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\phi_{2,2} = \frac{\cancelto{0}{\rho_2} - \sum_{1}^{1} \phi_{1,j}\, \rho_{2-j}}{1 - \sum_{j=1}^{1} \phi_{1,j}\, \rho_j} = \frac{-\phi_{1,1}\, \rho_1}{1 - \phi_{1,1}\, \rho_1}$$

$$= \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-\left(\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2}\right)^2} = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2+\theta_1^4}$$

$$= \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6}$$

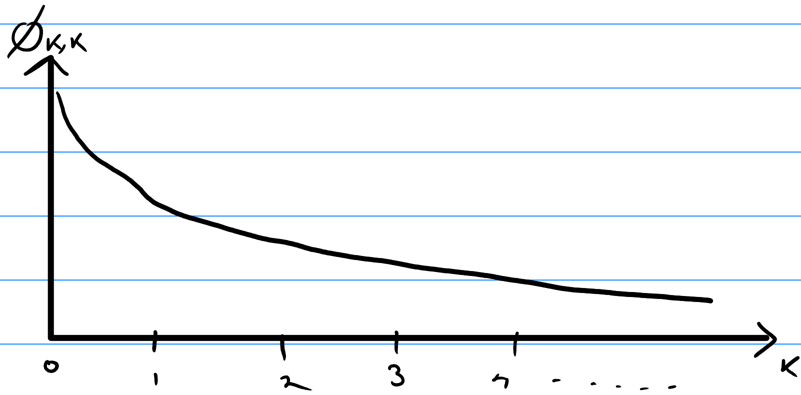
$$\phi_{2,1} = \phi_{1,1} - \phi_{2,2}\,\phi_{1,1}$$

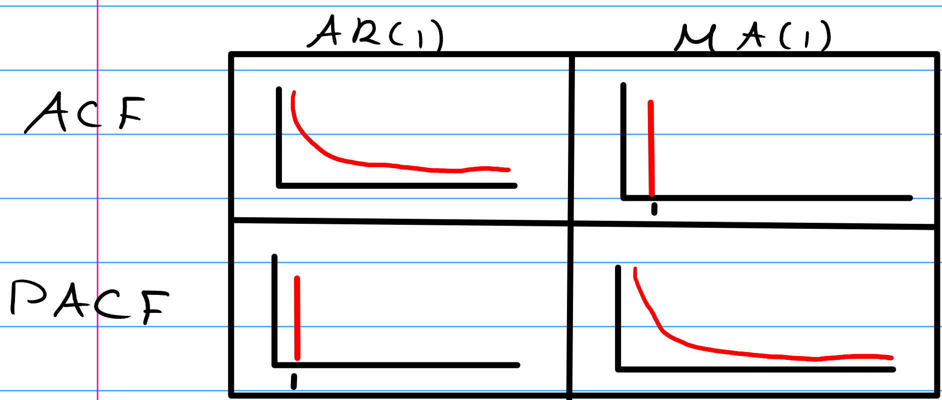
$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3}{1+\theta_1^2+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6}$$

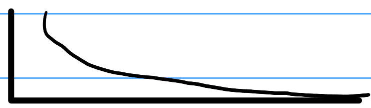
$$= \frac{-\theta_1^3\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^8}$$

En general:

$$\boxed{\phi_{k,k} = \frac{-\theta_1^k\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}} \Bigg\} \text{ Decaemiento exponencial}$$



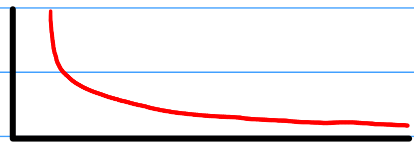


AR(1): $\rho_k = \phi^k$, $|\phi|<1 \Rightarrow$ 

$$\phi_{k,k} = \begin{cases} \rho_1 ; & k=1 \\ 0 ; & k>1 \end{cases}$$

$$MA(1): \quad \rho_K = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & K = 1 \\ 0 & K > 1 \end{cases}$$

$$\phi_{K,K} = \frac{-\theta_1^K(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(K+1)}}$$



Recordemos que podemos expresar al proceso MA(1) de la siguiente forma:

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} = \theta(B) Z_t, \quad \theta(B) = 1 - \theta B$$

Proceso MA(2)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}$$

$$= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) Z_t$$

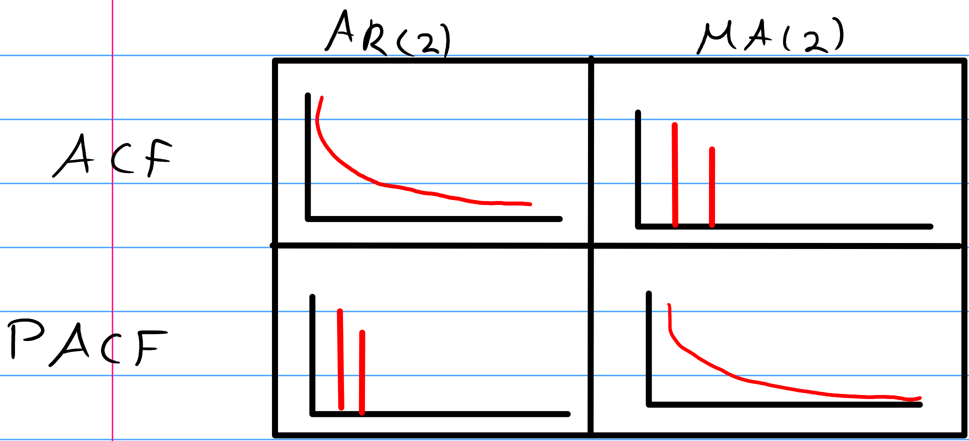
$$\rho_K = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1+\theta_2^2} & ; K = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1+\theta_2^2} & ; K = 2 \\ 0 & ; K > 2 \end{cases}$$

PACF de un proceso MA(2)

$$\phi_{1,1} = \rho_1 \qquad \phi_{2,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2-\rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1-\rho_2)} \quad \ldots$$

La generalización de $\phi_{k,k}$ es complicada, pero, recordemos que un proceso MA(1) es un caso particular del proceso MA(2) donde $\theta_2 = 0$, por lo tanto, el proceso MA(2) también tendrá un decaimiento exponencial.



AR(2)

$$\rightsquigarrow \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

$$\approx \phi_1^{k} + \cancel{\phi_2^{k+1}}$$

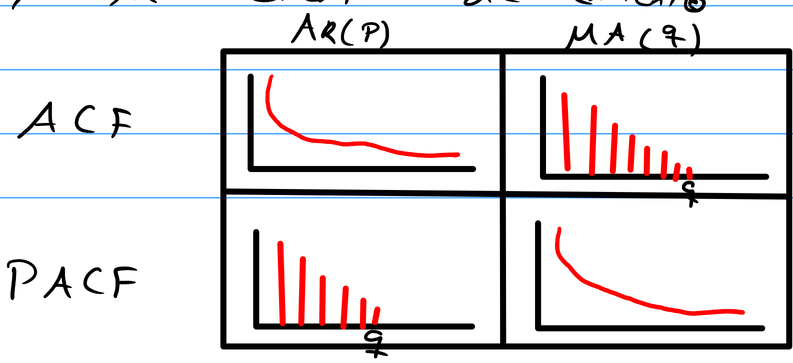
Generalización: Proceso MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \dots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) Z_t$$

$$\rho_k \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \dots + \theta_q^2} & \hookrightarrow k = 1, 2, \dots, q \\ 0 ; & k > q \end{cases}$$

$\phi_{k,k}$ tiene decaimiento exponencial



Conclusión: * Si la estimación de la ACF tiene un decaimiento exponencial $\Rightarrow$ AR

* Si la estimación de la PACF se corta en el lag P $\Rightarrow$ AR(P)

* Si la estimación de la PACF tiene un decaimiento exponencial $\Rightarrow$ MA

* Si la estimación de la ACF se corta en el lag q $\Rightarrow$ MA(q)

Relación de invertibilidad entre los procesos AR(p) y MA(q)

Tenemos un proceso $\phi_p(B) X_t = Z_t$ (AR(P))

$\hookrightarrow \phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \cdots - \phi_p B^p$

Pero: $X_t = \frac{1}{\phi_p(B)} Z_t$, ésto es un proceso de medias móviles.

Podemos encontrar un proceso $\psi(B)$ tal que

$\psi(B) = \frac{1}{\phi_p(B)}$ ó $\psi(B)\,\phi_p(B) = \underline{1}$

$$\to \quad X_t = \psi(B) Z_t, \quad \psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots$$

Consideremos el proceso $AR(2)$

$$X_t (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = Z_t \qquad \text{ó}$$

$$X_t = \frac{1}{\underbrace{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2}_{\phi_2(B)}} Z_t$$

Vamos a encontrar $\psi(B)$ tal que $\phi_2(B)\psi(B) = 1$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \ldots) = 1$$

$$\cancel{1}(\cancel{1} + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots) - \phi_1 B(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots) - \phi_2 B^2(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots) = \cancel{1}$$

$$\underbrace{(\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots)} - \phi_1 B(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots) - \phi_2 B^2(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 \ldots) = 0$$

$$\cancel{\psi_1 B} + \cancel{\psi_2 B^2} + \ldots - \phi_1 \cancel{B} - \psi_1 \cancel{\phi_1 B^2} - \phi_1 \cancel{\psi_2 B^3} - \ldots - \cancel{\phi_2 B^2} - \phi_2 \cancel{\psi_1 B^3} - \phi_2 \psi_2 B^4 - \ldots = 0$$

$$(\psi_1 - \phi_1) B + (\psi_2 - \psi_1 \phi_1 - \phi_2) B^2 + (\psi_3 - \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1) B^3$$

$$+ (\psi_4 - \phi_1 \psi_3 - \phi_2 \psi_2) B^4 + \ldots + (\psi_j - \phi_1 \psi_{j-1} - \phi_2 \psi_{j-2}) B^j \ldots = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi_1 - \phi_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 = \phi_1$$

$$\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 = 0 \Leftrightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

$$\psi_3 - \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_3 = \phi_1 \psi_2 + \phi_2 \psi_1$$

$$\vdots$$

$$\psi_j - \phi_1 \psi_{j-1} - \phi_2 \psi_{j-2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2}}_{\text{ecuación en diferencias}}$$

De hecho, supongamos que $\phi_2 = 0$, es decir que tenemos un proceso AR(1)

$$X_t = \frac{1}{1-\phi_1 B} Z_t$$

$$\underbrace{\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} \Rightarrow \psi_j = \phi^j}$$

$$\psi(B) = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \phi^3 B^3 + \ldots\ldots)$$

$$\Rightarrow X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \phi^3 Z_{t-3} + \ldots$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}} \rightsquigarrow MA(\infty)$$

Hasta aquí termina parcial II

Parcial II $\left\{ \begin{array}{l} \text{PACF} \\ AR(1), AR(2) \ldots AR(P) \\ MA(1), MA(2) \ldots MA(q) \end{array} \right\}$

PARCIAL III

PROCESOS ARMA