Para el caso de una distr. lognormal:

$\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty \rightsquigarrow$ No es muy utilizada.

Distribución Gamma

$$f_T(t) = \frac{\lambda^K t^{K-1} \exp\{-\lambda t\}}{\Gamma(K)} \; . \quad K>0, \lambda>0, \quad t>0$$

$$T \sim \text{Gamma}(K, \lambda) \begin{cases} \text{Gamma}(r, \lambda) \\ \text{Gamma}(r, 1/\beta) \end{cases} \quad \lambda = 1/\beta$$

Función de Supervivencia:

$$S_T(t) = \int_t^\infty f_T(u)\,du = \int_t^\infty \frac{1}{\Gamma(K)} u^{K-1} e^{-\lambda u} \lambda^K$$

$$= \frac{\lambda^K}{\Gamma(K)} \int_t^\infty u^{K-1} e^{-\lambda u}\,du$$ No tiene fórmula cerrada

$$= 1 - GI(K, \lambda t)$$

$\lim_{t\to\infty}$

$$\left(\frac{\lambda^K}{\Gamma(K)} \int_0^t u^{K-1} e^{-\lambda u}\,du \right\}$$ Esquema de Integración numérica

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^n t_i^{K-1} e^{-\lambda t_i} \Delta t_i$$

Función de Riesgo:

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{\left(\frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}\right)}{1 - GI(k, \lambda t)}$$

$$\lim_{t \to \infty} h_T(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}}{1 - GI(k,\lambda t)} = \frac{0}{0}$$

$\int_0^t \quad \int_t^\infty f(u)$ $\quad \to F_T(u) \to 1$

L'Hôpital

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f_T'(t)}{S_T'(t)} = \frac{\cancel{\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}}\left[(k-1)t^{k-2}\cancel{e^{-\lambda t}} - \lambda t^{k-1}\cancel{e^{-\lambda t}}\right]}{-\cancel{\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}} t^{k-1}\cancel{e^{-\lambda t}}}$$

$$\lim_{t\to\infty} = \left[-\cancel{\frac{(k-1)}{t}}^{\,0} + \lambda\right] = \boxed{\lambda}$$

$T \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \frac{k}{\lambda} \quad Var(T) = \frac{k}{\lambda^2}$

Si: $T \sim \text{Gamma}(k, 1/\beta)$

$\mathbb{E}[T] = \beta k$

$Var(T) = \beta^2 k$

Distribución Gompertz

$\varphi \neq 1$

$$f_T(t) = \lambda \varphi^t \exp\left\{-\frac{\lambda}{\log(\varphi)}(\varphi^t - 1)\right\} \quad \lambda > 0, \varphi > 0, t > 0$$

$$S_T(t) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\log(\varphi)}(\varphi^t - 1)\right\}$$

$h_T(t) = \lambda \varphi^t$

$\varphi \in (0,1)$

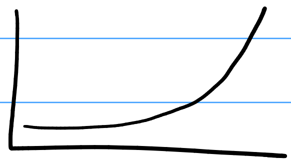
$\lim_{t\to\infty} h_T(t) = 0$

$\varphi = 1$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \lambda = \lambda \; ! \qquad \varphi \neq 1$$

$\varphi > 1$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$$



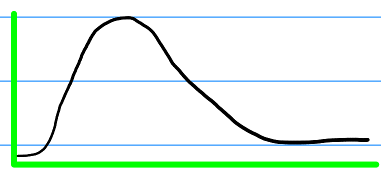
$$H_T(t) = \int_0^t h_T(u)\,du = \frac{\lambda(\varphi^t - 1)}{\log(\varphi)}$$

Distribución Logística.

$$f_T(t) = \frac{\gamma\lambda t^{\gamma-1}}{(1+\lambda t^{\gamma})^2} \qquad \gamma > 0, \lambda > 0, \; t > 0$$

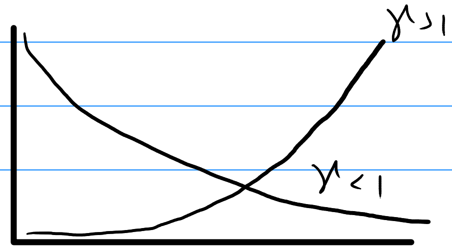
$$S_T(t) = \int_t^{\infty} \frac{\gamma\lambda u^{\gamma-1}}{(1+\lambda u^{\gamma})^2}\,du = (1+\lambda u^{\gamma})^{-1}\Big|_t^{\infty} = \frac{1}{1+\lambda t^{\gamma}}$$

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{\gamma\lambda t^{\gamma-1}}{1+\lambda t^{\gamma}}$$

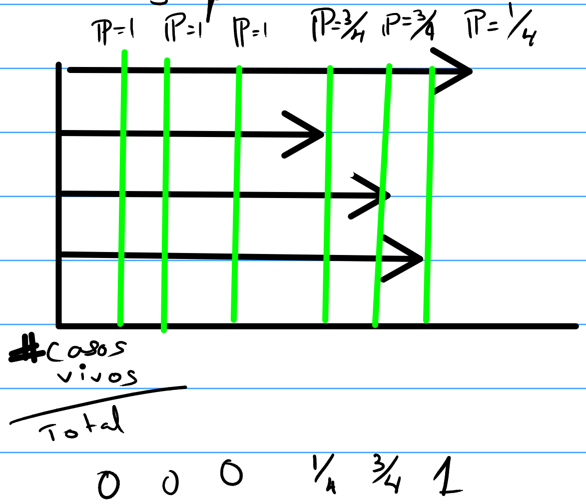


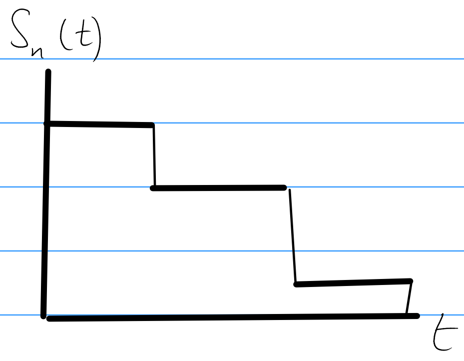
$$H_T(t) = \int_0^t h_T(u)\,du = \ln(1+\lambda t^{\gamma}) \longrightarrow \gamma < 1 \quad h_T(t) \to 0$$

Weibull $\quad h_T(t) = \gamma\lambda t^{\gamma-1}$



Métodos no paramétricos para el análisis de supervivencia.

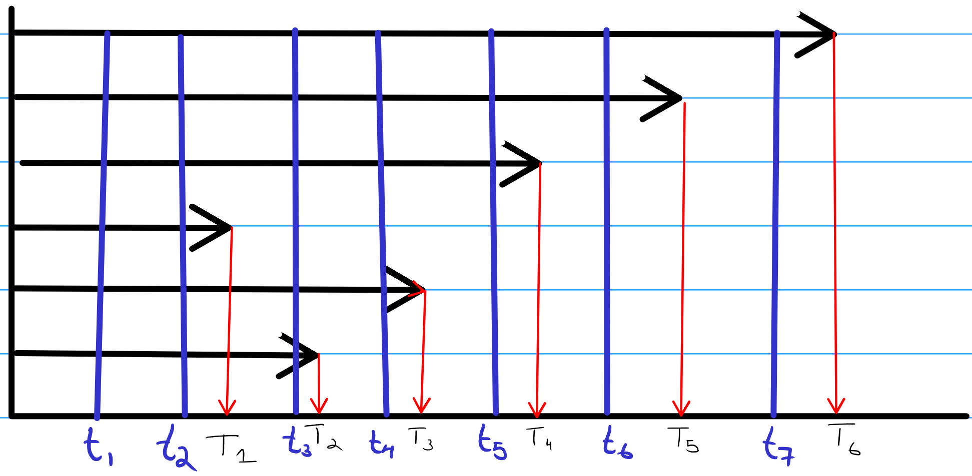




Podemos definir a $F_n(t)$ de la siguiente forma:

$$F_n(t) = \frac{\# T_i \le t}{n},$$

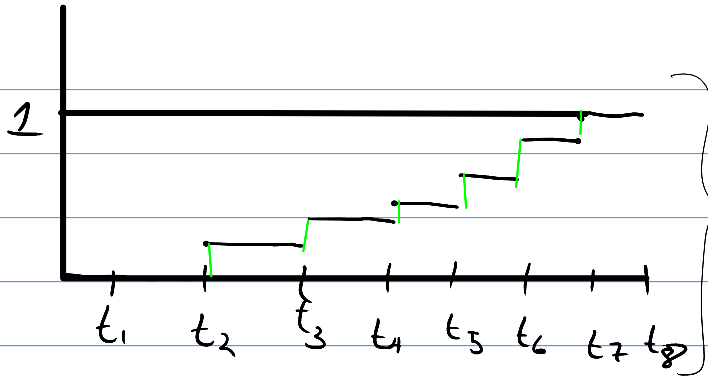
T_i es el tiempo de fallo del i-ésimo objeto de estudio, n es el tamaño de la muestra



$F_6(t_1) = \frac{0}{6}$ $\quad F_6(t_2) = \frac{0}{6}$ $\quad F_6(t_3) = \frac{1}{6}$

$F_6(t_4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad F_6(t_5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $F_6(t_6) = \frac{4}{6}$

$F_6(t_7) = 5/6$ $\quad F_6(t_8) = 1$

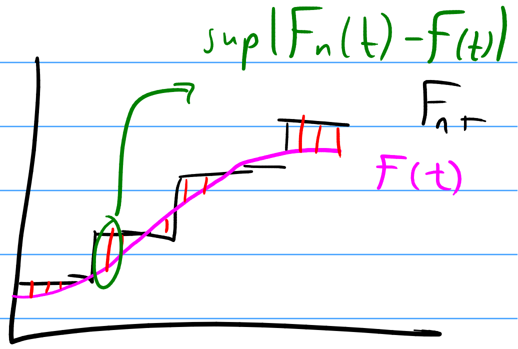


$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t)-F(t)| \xrightarrow{c.s.} 0$$

↓

Teorema fundamental de la estadística.

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t)-F(t)|}_{|F_n(t)-F(t)|} = 0$$



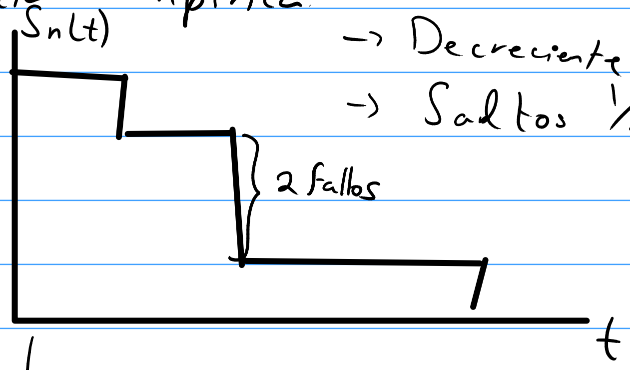
a_n, b_n, c_n 3 sucesiones tales que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = x \qquad a_n \le c_n \le b_n \ \forall n$$

$$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = x$$ "Ley del sandwich"

Función de supervivencia empírica

$$S_n(t) = \frac{\# T_i \geq t}{n}$$

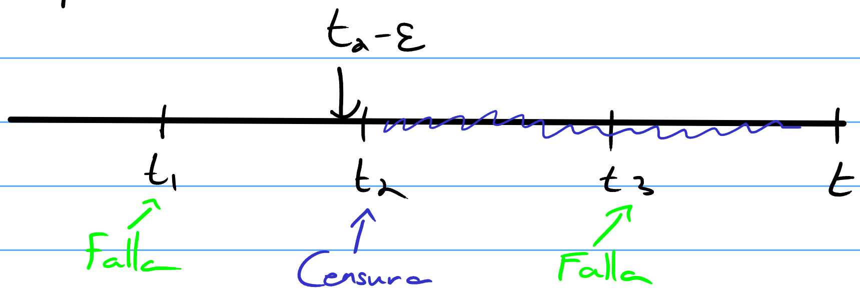


→ Decreciente

→ Saltos $1/n$

↳ No distinguimos si el evento falló o fue censurado.

Supongamos que tenemos una muestra de n individuos, con los 3 primeros tiempos de supervivencia t_1, t_2 y t_3, donde t_1 y t_3 son fallas y t_2 es censura, y queremos calcular la supervivencia



$$S_n(t) = \frac{n-3}{n}$$

} No sabemos en qué momento falló el individuo correspondiente a t_2.

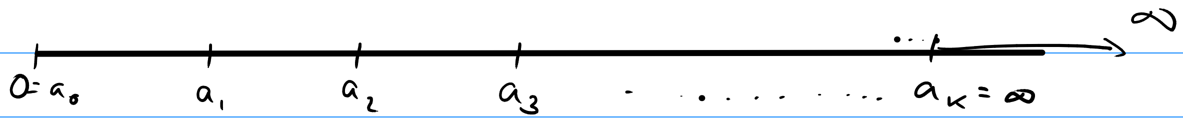
Pero! Sabemos que de haber fallado, falla después de t_2, por lo tanto estamos subestimando la verdadera supervivencia.

↳ El estimador $S_n(t)$ no es bueno si hay censuras, pero es bueno cuando no las hay.

Tabla de vida.

↳ Este estimador es una extensión de las tablas de frecuencias relativas ó Función de Superv. empírica.

-> El tiempo de observación lo mediremos en K intervalos.



Definimos al intervalo I_j de la siguiente forma:

$$I_j = [a_{j-1}, a_j) \quad j = 1, 2, \dots, K$$

d_j = # individuos que mueren en I_j

c_j = # individuos censurados en I_j

n_j = # individuos en riesgo al inicio de I_j (vivos y no censurados al tiempo a_{j-1})

Cómo construimos la fn. de supervivencia asociada a esta tabla?

$$S(a_{j-1}) = \mathbb{P}[T \geq a_{j-1}] = \mathbb{P}[T \geq a_0]\,\mathbb{P}[T \geq a_1 \mid T \geq a_0] \cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{P}[T \geq a_2 \mid T \geq a_1] \dots$$

$$\cdot\, \mathbb{P}[T \geq a_{j-1} \mid T \geq a_{j-2}]$$

$$I_j = [a_{j-1}, a_j)$$

$$\underbrace{\mathbb{P}[T \geq a_{j-1} \mid T \geq a_{j-2}]}_{\mathbb{P}[\text{sobrevivir en } I_{j-1}]} = 1 - \underbrace{\mathbb{P}[T < a_{j-1} \mid T \geq a_{j-2}]}_{\mathbb{P}[\text{morir en } I_{j-1}]}$$

¿Cómo calculamos estas probabilidades?

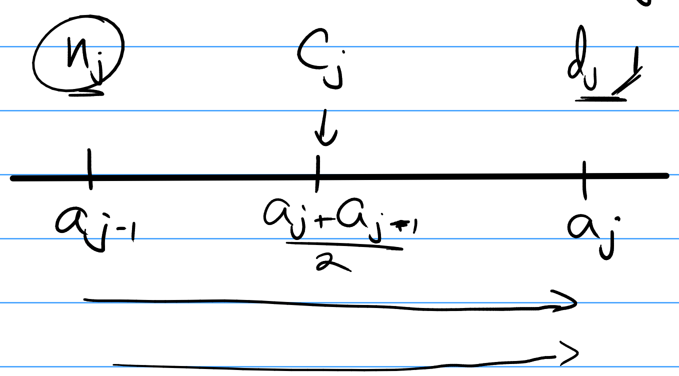
-> Vamos a asumir que las censuras se distribuyen uniformes en el intervalo, entonces, supondremos que los individuos se censuran a mitad del intervalo.

=> Si no hubiera censura:

$$\mathbb{P}[T < a_j \mid T \geq a_{j-1}] = \frac{d_j}{n_j}$$

-> Como los individuos censurados permanecieron en riesgo la mitad del tiempo:

$$\mathbb{P}[T < a_j \mid T \geq a_{j-1}] = \frac{d_j}{n_j - c_j/2}$$



$$\mathbb{P}[T \geq a_j \mid T \geq a_{j-1}] = 1 - \frac{d_j}{n_j - c_j/2}$$

$$\boxed{S(a_{j-1}) = \prod_{i=1}^{j-1} \left(1 - \frac{d_i}{n_i - c_i/2}\right)}$$