Series de tiempo

→ ¿Qué es una serie de tiempo?

- Predecir un valor $\underset{t}{\_\_\_\_}\ \underset{t+1}{??}$

- Definición:
  - Proceso estocástico
    → Variables aleatorias
      - Tiempo

    → Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, un proceso estocástico $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias indexadas en el tiempo

  → Una serie de tiempo es un proceso estocástico a tiempo discreto.
  → Secuencia ordenada de observaciones a través del tiempo
  (a veces a través en el espacio)
  "State-space models"

Ejemplos de series de tiempo:
- * Precios de acciones
- * Tipo de cambio
- * Crecimiento de líneas de prod.

→ $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ un proceso estocástico
↳ Abreviación de $\{X_t(\omega)\}_{t=1}^{\infty}$, ¿) $t \in \mathbb{N}+\{0\}$
↳ $\omega \in \Omega$) $t \in \mathbb{Z}$

Algunas definiciones

$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n$

- Sea $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ un conjunto finito de variables aleatorias provenientes de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$

→ Definimos a la función de distribución conjunta de $\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$ como:

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}[X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n]$$

(Y una v.a., $F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y]$, $y \in \mathbb{R}$

→ Definimos a un proceso estocástico como "Estacionario de primer orden" en distr. si la distribución 1-dimensional es invariante a través del tiempo.

$$F_{X_{t_i}}(x_i) = F_{X_{t_i+k}}(x_i) \text{ para cualquier } t_i, K$$

→ Podemos tener un proceso estocástico "Estacionario de orden n" si:

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

→ Proceso "Fuertemente estacionario"

→ Tal que para toda $n \geq 1$, el proceso es estacionario de orden n.

→ Consecuencias:

Si $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ es fuertemente estacionario

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_t] = \mu \quad \forall\, t = 1, 2, \ldots,$$

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \overset{d}{=} (X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \ldots, X_{t_n+k})$$

$$Var(X_t) = \sigma \quad \forall\, t = 1, 2, \ldots$$

———— o ————

→ En gral. para un proceso estocástico (en part. para series de tiempo)

→ Definamos la función media como:

$$\mu_t = \mathbb{E}[X_t] \rightarrow \text{fn. media}$$
$$\sigma_t^2 = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)^2] \rightarrow \text{función Varianza}$$

$$\gamma(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(X_{t_1} - \mu_1)(X_{t_2} - \mu_2)] = 0$$

Función de autocovarianza

Ejercicio:

→ Bin → N

Sea X_1, X_2 v.a. t.q. $X_1 \overset{d}{=} X_2 \sim N(0,1)$

$$X_1 \perp X_2 \iff Cov(X_1, X_2) = 0$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)$$

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}$$

→ función de autocorrelación

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_{t_1}^2} \cdot \sqrt{\sigma_{t_2}^2}}$$

→ Un proceso es estrictamente estacionario si es fuertemente estacionario.

→ Para un proceso fuertemente estacionario, como la función de distr. es la misma $\forall t$:

$\mu_t = \mu, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \forall t > 0$

$\sigma_t^2 = \sigma^2, \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \forall t > 0$

→ Desde que $F_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) = F_{X_{t_1+k}, X_{t_2+k}}(x_1, x_2)$

$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + k, t_2 + k)$

$\rho(t_1, t_2) = \rho(t_1 + k, t_2 + k)$

Definamos $t_1 = t - k; \ t_2 = t \} \ t_1 \leq t_2$

$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t - k, t) = \gamma(t - \cancel{k} + \cancel{k}, t + k)$

$= \underbrace{\gamma(t, t+k)}$

Para un proceso estrictamente estacionario, X_t, X_{t+k} dependen solo de k.

$\gamma(t, t+k) := \gamma_t(k)$

$k \in \mathbb{Z}$

Ej: Movimiento Browniano:

Sea B_t un movimiento browniano.

$B_t \sim N(0, t)$; $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$; $t>s$

$\mathbb{E}[B_t] = 0 \quad \forall\, t > 0$

$Var(B_t) = t$; $t = s + K$, $K > 0$

$Cov(B_t, B_s) = t \wedge s$

$\hookrightarrow Cov(B_{s+K} - B_s, B_s) = s$; $K \in \mathbb{R}$

$t = s + K$; $K > 0$

$\underbrace{Cov(B_{s+K}, B_s)} = (s+K) \wedge s = \underline{s}$ /

$cov(B_t - \cancel{B}_s, B_s) = K \wedge s$

→ Vamos a definir a un proceso como débilmente estacionario si cumple con lo siguiente:

* $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$
* $\mu_t = \mu$