$$\left.\begin{array}{l} AR(p) \\ MA(q) \end{array}\right\} \rightarrow ARMA(p,q)$$

$\downarrow$ más utilizados en lo que tiene que ver con series de tiempo.

Definición:

El modelo ARMA(p,q), puede definirse de la siguiente forma:

$$\phi_p(B) X_t = \Theta_q(B) W_t, \quad W_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\Theta_q(B) = 1 - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 - \dots - \Theta_q B^q$$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p} = W_t - \Theta_1 W_{t-1} - \Theta_2 W_{t-2} - \dots - \Theta_q W_{t-q}$$

$$\hookrightarrow X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t - \Theta_1 W_{t-1} - \Theta_2 W_{t-2} - \dots - \Theta_q W_{t-q}$$

Condiciones de Estacionaridad

-> Para que el proceso sea estacionario, requerimos que las raíces del polinomio $\phi_p(B) = 0$ caigan fuera del círculo unitario. $(|B_i| > 1, \ \forall i = 1, 2, \dots, p)$

-> Si el proceso ARMA(p,q) es estacionario, éste puede escribirse de la siguiente forma:

$$\phi_p(B) X_t = \Theta_q(B) W_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\phi_p(B)}{\Theta_q(B)} X_t = W_t \ ; \ \Pi(B) = \frac{\phi_p(B)}{\Theta_q(B)} = 1 - \Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \dots$$

$$\left. W_t = X_t - \Pi_1 X_{t-1} - \Pi_2 X_{t-2} - \Pi_3 X_{t-3} - \dots \right\} AR(\infty)$$

$$\Pi(B) = \frac{\phi_p(B)}{\Theta_q(B)}$$

Asumamos por un momento que $p=0$ y $q=1$

$\Rightarrow$ ARMA$(0,1)$

$X_t = W_t - \Theta W_{t-1}$ } MA(1)

$\Theta_1(B) = 1 - \Theta B$

$$X_t = \underbrace{(1-\Theta B)}_{\Theta_1(B)} W_t$$

$$\frac{X_t}{1-\Theta B} = W_t$$

$\rightarrow$ Serie geométrica

$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots = S$

$S_n = 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^n}$

$r S_n = \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \dots \cancel{+} r^{n+1}$

$S_n - r S_n = 1 - r^{n+1} \Leftrightarrow S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$

$\Leftrightarrow S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$

Si $|r|<1 \Rightarrow$

Sea $r = \Theta_1 B$

$$\frac{1}{1-\Theta B} = 1 + \Theta_1 B + \Theta_1 B^2 + \dots + \Theta_1 B^n + \dots\dots$$

$$W_t = \frac{X_t}{1-\Theta B} = X_t \left(1 + \Theta_1 B + \Theta_1^2 B^2 + \Theta_1^3 B^3 + \dots\right)$$

$$W_t = X_t + \Theta_1 X_{t-1} + \Theta_1^2 X_{t-2} + \Theta_1^3 X_{t-3} + \dots\dots$$

$$\Leftrightarrow X_t = \underbrace{-\Theta_1 X_{t-1} - \Theta_1^2 X_{t-2} - \Theta_1^3 X_{t3} \dots - W_t}_{\text{Propiedad de invertibilidad}}$$

$|\Theta_1| < 1 \rightsquigarrow MA(1) \Leftrightarrow AR(\infty)$

$p = 0,\ q = 1$

Existe evidencia de que podemos escribir a un proceso $ARMA(p, q)$ como un proceso $AR(\infty)$. $\pi(B) = \frac{\phi_p(B)}{\Theta_q(B)}$

De la misma forma, podemos escribir al proceso $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ como un proceso de medias móviles infinito, como?

$$\phi_p(B) X_t = \Theta_q(B) W_t \Rightarrow X_t = \frac{\Theta_q(B)}{\phi_p(B)} W_t$$

$$\psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots - \psi_n B^n - \dots\dots$$

ACF de un proceso ARMA(p,q)

Sea $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t - \theta_1 W_{t-1} - \theta_2 W_{t-2} \dots - \theta_q W_{t-q}$

Multiplicar ambos lados por X_{t-k} y calculando esperanzas:

$$\gamma_k = \underbrace{\phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}}_{AR(p)} + \mathbb{E}[W_t X_{t-k}] + - \theta_1 \mathbb{E}[W_{t-1} X_{t-k}] - \theta_2 \mathbb{E}[W_{t-2} X_{t-k}] - \dots - \theta_q \mathbb{E}[W_{t-q} X_{t-k}]$$

¿Qué pasa con $\mathbb{E}[W_{t-i} X_{t-k}]$ cuando $k > i$? $k < i$

↳ $\times q$

Supongamos que queremos calcular γ_k, $k > q$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + 0$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

↳ en un proceso ARMA, a partir del lag q, las covarianzas van a ser iguales que en un proceso AR(p)

PACF ARMA(p,q) ~ muy complicadas de calcular analíticamente.

Ejemplo: ARMA(1,1)

$$(1-\phi_1 B)X_t = (1-\theta_1 B)W_t \quad ; \quad W_t \sim WN(0,\sigma^2)$$

$\hookrightarrow X_t = \phi_1 X_{t-1} + W_t - \theta_1 W_{t-1}$

-> Para asegurar estacionariedad (invertibilidad) asumimos que $|\phi_1|<1$ ($|\theta_1|<1$)

-> Con el fin de expresar a este proceso como puramente autoregresivo:

$$\boxed{\Pi(B)X_t = W_t} \; ; \; \Pi(B) = 1-\Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \Pi_3 B^3 - \dots$$

$$= \qquad\qquad = \frac{1-\phi_1 B}{1-\theta_1 B}$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{1-\theta_1 B} = (1+\theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \theta_1^3 B^3 + \dots)$$

$$\Rightarrow (1-\phi_1 B)(1+\theta_1 B+\theta_1^2 B^2+\theta_1^3 B^3+\dots) = \overbrace{1-\Pi_1 B-\Pi_2 B^2-\dots}^{\circledast}$$

$$1+\cancel{\theta_1} B+\cancel{\theta_1^2} B^2+\theta_1^3 B^3+\dots - \phi_1 \cancel{B} - \phi_1 \cancel{\theta_1} B^2 - \phi_1 \theta_1^2 B^3 \dots = \circledast$$

$$1-(\phi_1-\theta_1)B-(\phi_1\theta_1-\theta_1^2)B^2-(\phi_1\theta_1^2-\theta_1^3)B^3-\dots = \circledast$$

$\Pi_1 = \phi_1 - \theta_1$

$\Pi_2 = \theta_1(\phi_1-\theta_1)$

$\Pi_3 = \theta_1^2(\phi_1-\theta_1)$

$$\boxed{\Pi_j = \theta_1^{j-1}(\phi_1-\theta_1)}$$

De forma análoga, podemos escribir el proceso ARMA(1,1) como un proceso MA(∞), donde:

$$X_t = \psi(B) W_t \,; \quad \psi(B) = \frac{1-\theta_q(B)}{1-\phi_p(B)} = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 \dots\dots$$

$$\boxed{\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1)} \qquad \boxed{\pi_j = \theta^{j-1}(\theta_1 - \phi_1)}$$

Que pasa cuando $p = 0$ ó $q = 0$

$p = 0$: MA(1) $\to$ AR(∞)

$$X_t = (1 - \theta_1 B) W_t$$

$q = 0$: AR(1) $\to$ MA(∞)

$$(1 - \phi_1 B) X_t = W_t$$

ACF de un proceso ARMA(1,1)

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \mathbb{E}[X_{t-k} W_t] - \theta_1 \mathbb{E}[X_{t-k} W_{t-1}]$$

Sabemos que $\mathbb{E}[\overset{\phi X_{t-1} + W_t + \theta_1 W_{t-1}}{X_t} W_t] = \sigma^2 \quad \forall t$

$$\mathbb{E}[X_t W_{t-1}] = \mathbb{E}[(\phi_1 X_{t-1} + W_t - \theta_1 W_{t-1}) W_{t-1}]$$

$$= \phi_1 \underbrace{\mathbb{E}[X_{t-1} W_{t-1}]}_{\sigma^2} + \cancel{\mathbb{E}[W_t W_{t-1}]}^{0} - \theta_1 \underbrace{\mathbb{E}[W_{t-1}^2]}_{\sigma^2}$$

$$= \phi_1 \sigma^2 - \theta_1 \sigma^2 = \sigma^2(\phi_1 - \theta_1)$$

Si ahora calculamos γ_0

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \mathbb{E}[X_t W_t] - \theta_1 \mathbb{E}[X_t W_{t-1}]$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \longrightarrow A$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \cancel{\mathbb{E}[X_{t-1} W_t]}^{\,0} - \theta_1 \mathbb{E}[X_{t-1} W_{t-1}]$$

$$= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 - \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \\ \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2 \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \phi_1 (\phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma^2) + \sigma^2 - \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1)$$

$$= \phi_1^2 \gamma_0 - \phi_1 \theta_1 \sigma^2 + \sigma^2 - \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{1 - \phi_1 \theta_1 - \phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma^2$$

$$\boxed{= \frac{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \cdot \sigma^2}$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \left[\frac{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 \right] + \theta_1 \sigma^2 \left(\frac{1 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} \right)$$

$$\gamma_1 = \sigma^2 \left[\frac{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2 + \theta_1 (1 - \phi_1^2)}{1 - \phi_1^2} \right]$$

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma^2}$$

¿Qué pasa con $k \geq 2$?

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad \Big\} \ AR(1)$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

PACF MA(1) $\phi_{2,2}$, $\phi_{1,1}$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \phi_1} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} \rightarrow \phi_1^k & k = 2 \end{cases}$$

ACF AR(1)

PACF $\rightsquigarrow$ No hay una forma "bonita" para la fórmula analítica.