fecha: 1-oct-2012

%

Source	Quote	Maturity
LIBOR	0.15	02/10/2012
	0.21	05/11/2012
	0.36	03/01/2013
Futures	99.68	20/03/2013
	99.67	19/06/2013
	99.65	18/09/2013
	99.64	18/12/2013
	99.62	19/03/2014
Swap	0.36	03/10/2014
	0.43	05/10/2015
	0.56	03/10/2016
	0.75	03/10/2017
	1.17	03/10/2019
	1.68	03/10/2022
	2.19	04/10/2027
	2.40	04/10/2032
	2.58	03/10/2042

→ O/N (overnight)

→ 1 m

→ 3m

Cotización:
$100\cdot(1-F_{t_0}(T_i,T_{i+1}))$

$99.68 = 100[1-F]$

$F = 1 - \frac{99.68}{100} = 0.0032$

→ Tienen pagos anuales

U_1	03.10.2013	U_{11}	03.10.2023	U_{21}	04.10.2033
U_2	03.10.2014	U_{12}	03.10.2024	U_{22}	04.10.2034
U_3	05.10.2015	U_{13}	03.10.2025	U_{23}	04.10.2035
U_4	03.10.2016	U_{14}	03.10.2026	U_{24}	04.10.2036
U_5	03.10.2017	U_{15}	04.10.2027	U_{25}	04.10.2037
U_6	03.10.2018	U_{16}	04.10.2028	U_{26}	04.10.2038
U_7	03.10.2019	U_{17}	04.10.2029	U_{27}	04.10.2039
U_8	03.10.2020	U_{18}	04.10.2030	U_{28}	04.10.2040
U_9	03.10.2021	U_{19}	04.10.2031	U_{29}	04.10.2041
U_{10}	03.10.2022	U_{20}	04.10.2032	U_{30}	03.10.2042

Listas de Pagos de los Swaps

Libor: Tasas cupón cero que pagan a un plazo definido.

Convención: Simple ACT/360

$\Rightarrow L(t_0, S_1) = 0.15\%$ $\quad S_1 = 2/10/2012$

$$D(t_0, S_1) = \frac{1}{1 + (0.15\%)\cdot\left(\frac{1}{360}\right)} \quad \tau(t_0, S_1)$$

tenor = 1 m

$$L(t_0, S_2) = 0.21\% \qquad S_2 = 5/11/2012$$

$$D(t_0, S_2) = \frac{1}{1 + (0.21\%) \cdot \left(\frac{35}{360}\right)}$$

$$L(t_0, S_3) = 0.36\% \rightarrow S_3 = 3/01/2013$$

$$D(t_0, S_3) = \frac{1}{1 + (0.36\%) \left(\frac{94}{360}\right)}$$

→ Si tenemos una tasa $L(t, S)$

$$\Rightarrow D(t, S) = \frac{1}{1 + L(t,S) \left(\frac{S - t}{360}\right)}$$

Futuros:

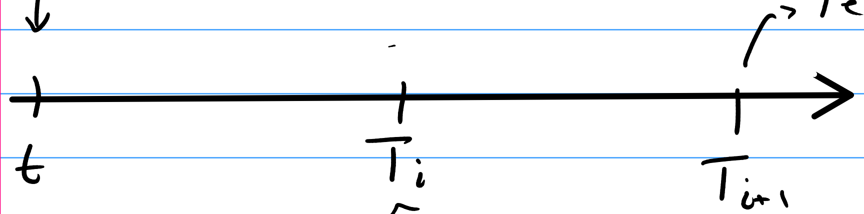
$F_t(T_i, T_{i+1})$

$$R(t, T_i, T_{i+1}) = 100\,(1 - F(t, T_i, T_{i+1}))$$

Tasa forward

"Fecha valor"
Se pacta la tasa efectiva de (T_i, T_{i+1})

Fecha de pago

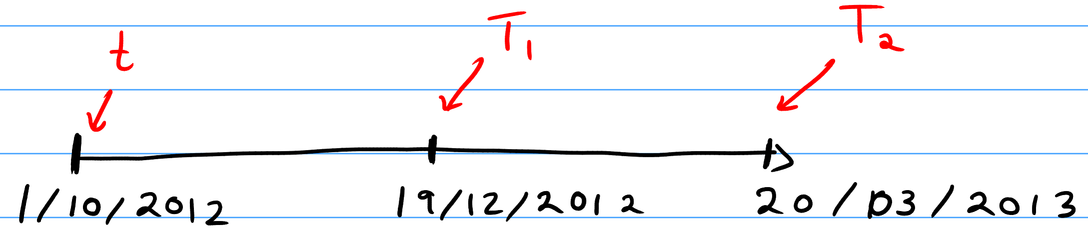


fecha de fixing ó "fijación"

→ Fecha en la cual conoceremos la tasa que será efectiva de T_i a T_{i+1}

En nuestro ejemplo, la fecha de Fixing para el primer futuro será:

$$T_1 = 19/12/2012$$



¿Por qué la fecha de fixing es el 19/12/2012?

↳ Resulta que este contrato tiene como especificación que la distancia entre la fecha de pago y la fecha de fixing es de $\underbrace{3 \text{ meses}}_{\text{convención}}$.

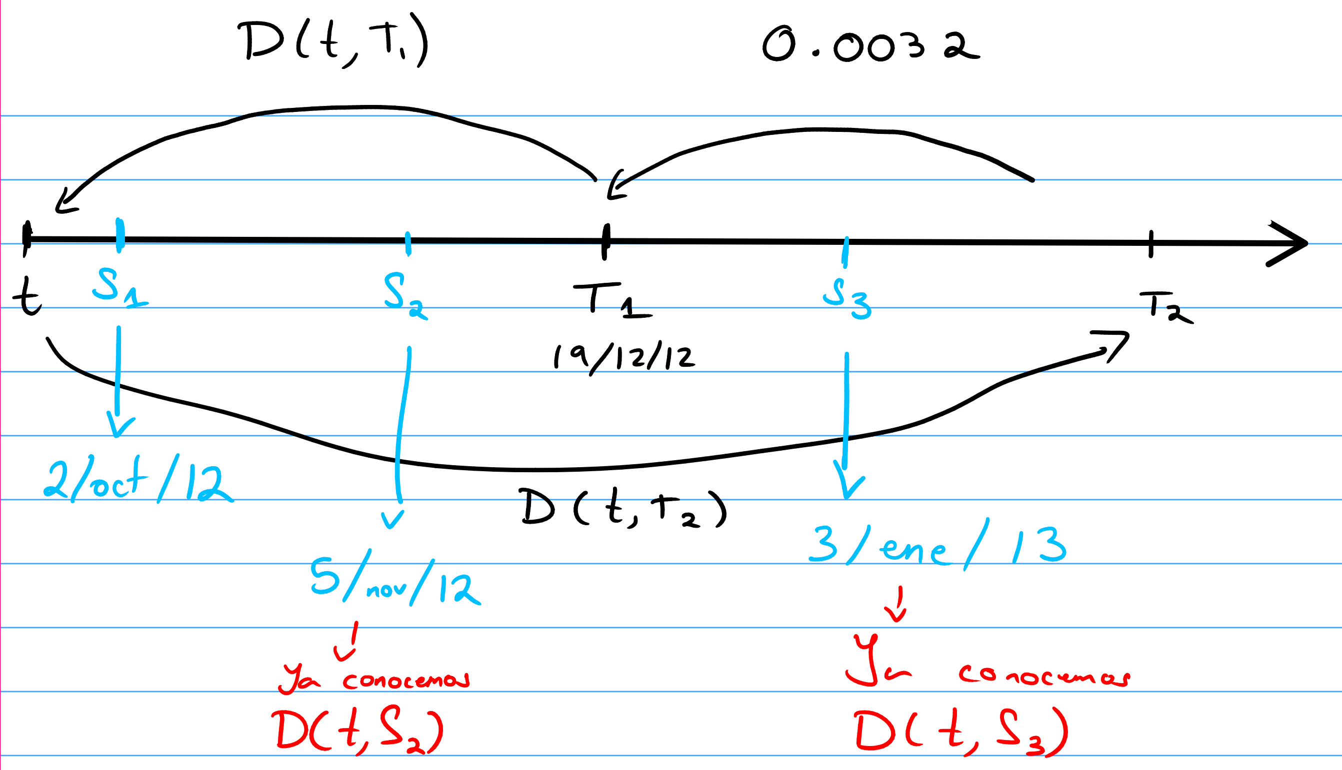
$$R(t, T_1, T_2) = 100\,(1 - F(t, T_1, T_2))$$

Sabemos que $F(t, T_1, T_2) = \left[\dfrac{D(t,T_1)}{D(t,T_2)} - 1\right] \cdot \dfrac{1}{\tau}$

Ya conocemo $F(t, T_1, T_2) = 0.0032$

¿Cómo obtengo $D(t, T_1)$ y $D(t, T_2)$?

$$0.0032 = \left[\frac{D(t, T_1)}{D(t, T_2)} - 1\right] \cdot \frac{360}{91}, \quad \frac{ACT}{360}$$



$$S_2 < T_2 < S_3$$

→ Vamos a utiliza un método de interpolación lineal para calcular $D(t, T_2)$

- En particular, vamo a usar un método log-lineal para interpolar los factores de descuento.

Nosotros estamos trabajando en este momento con factores de descuento, los cuales son independientes a la convención de tasas que utilicemos.

Si asumimos que $D(t, T) = e^{-r(T-t)}$, entonces:

$$\log(D(t, T)) = -r(T - t)$$

estamos interpolando sobre las tasas continuas.

Entonces si conocemos $D(t, S_2)$ y $D(t, S_3)$, podemos estimar $D(t, T_1)$ mediante una interpolación log - lineal.

(Recordemos que $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$)

$\Rightarrow$ $X_0 = S_2$, $X_1 = S_3$

$Y_0 = \log(D(t, S_2))$ $\quad$ $Y_1 = \log(D(t, S_3))$

$\Rightarrow$ Dado que $X = T_1$

$\Rightarrow$ $Y = \log(D(t, T_1)) \Leftrightarrow D(t, T_1) = \underbrace{e^Y}$

$\Rightarrow$ El valor de $D(t, T_1) = 0.9996$

Dado este factor de descuento, podemos calcular $D(t, T_2)$

$$0.0032 = \left[\frac{D(t, T_1)}{D(t, T_2)} - 1\right] \cdot \frac{360}{91}$$

Ya conocemos $D(t, T_1) = \underline{0.9996}$

$\Rightarrow$ Para calcular $D(t, T_2)$:

$$D(t, T_2) = \left[0.0032\left[\frac{91}{360}\right] + 1\right]^{-1} \cdot 0.9996$$

$$= 0.998792088 2$$

$D(t, T_3)$

$$F(t, T_2, T_3) \rightarrow 1 - \frac{R(t, T_2, T_3)}{100}$$

$$F(t, T_2, T_3) = \left[\frac{D(t, T_2)}{D(t, T_3)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \quad D(t, T_3) = \left[1 + \tau F(t, T_2, T_3) \right]^{-1} \cdot D(t, T_2)$$

$D(t, T_2)$ ya lo conocemos?

Dado que $T_3 = 19/06/13$ y
$T_2 = 20/03/13$

$$D(t, T_i) = \left[1 + \tau F(t, T_{i-1}, T_i \right]^{-1} D(t, T_{i-1})$$

para $i = 2, 3, 4, \ldots$

Para $i = 1$, tenemos que asumir un supuesto de interpolación.

De la clase anterior

→ A través de las tasas Libor y de los contratos de Futuros, fuimos capaces de encontrar una curva de descuento.

$S_1, S_2, S_3,$ son los vencimientos correspondientes a las tasas Libor.

$$D(t, S_i) = \frac{1}{1 + L(t,S_i)\,\tau(t,S_i)}$$

Dado que la tasa libor cotiza como Simple ACT/360

$$\downarrow$$

$$\tau(t,S_i) = \frac{\#\text{ días } \div t \text{ y } S_i}{360}$$

Si la convención de la tasa Libor fuera Continua ACT/365

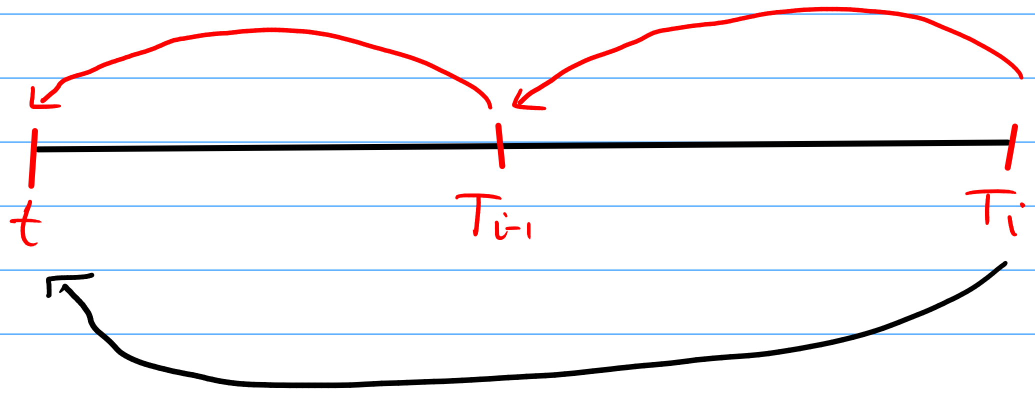
$$D(t, S_i) = e^{-r \cdot \tau(t,S_i)} \qquad \tau(t,S_i) \to \frac{\#\text{ días } \div t \text{ y } S_i}{365}$$

→ Sea T_1, T_2, T_3, son los vencimientos correspondientes a los contratos de futuros.

$$\underbrace{R(t, T_{i-1}, T_i)}_{\text{contrato de futuros}} = 100\,(1 - \underbrace{F(t, T_{i-1}, T_i)}_{\text{Tasa forward.}})$$

Para T_i, $i > 1$

$$D(t, T_i) = \frac{D(t, T_{i-1})}{1 + \tau(T_{i-1}, T_i)\, F(t, T_{i-1}, T_i)}$$

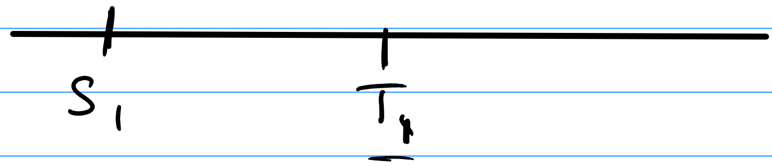


Para calcular T_1, tenemos que hacer un supuesto de interpolación

$$S_2 < T_1 < S_3$$

$$D(t, T_1) = \underset{\text{linear}}{\text{interp}}\left(D(t, S_2), D(t, S_3)\right)$$

¿Qué pasa si solamente tenemos $D(t,S_1)$, pero no hay cotizaciones para $D(t,S_2)$ ni $D(t,S_3)$?

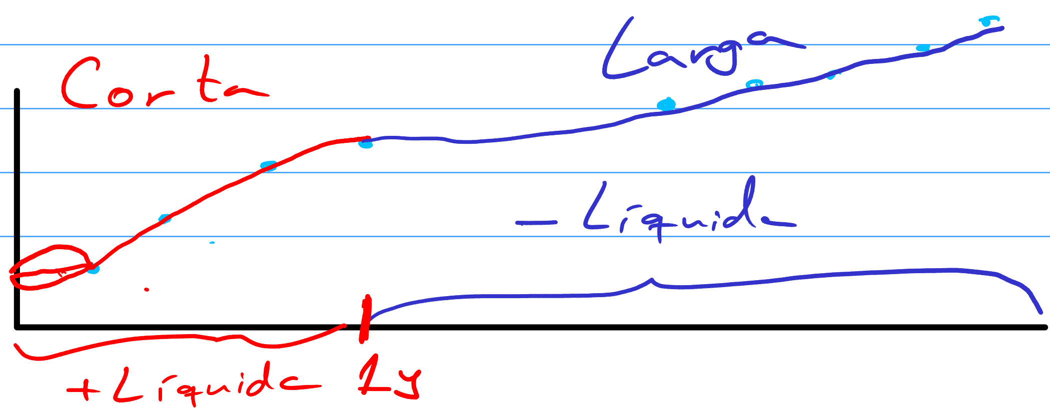


Como solución, podemos asumir una extrapolación flat sobre S_1

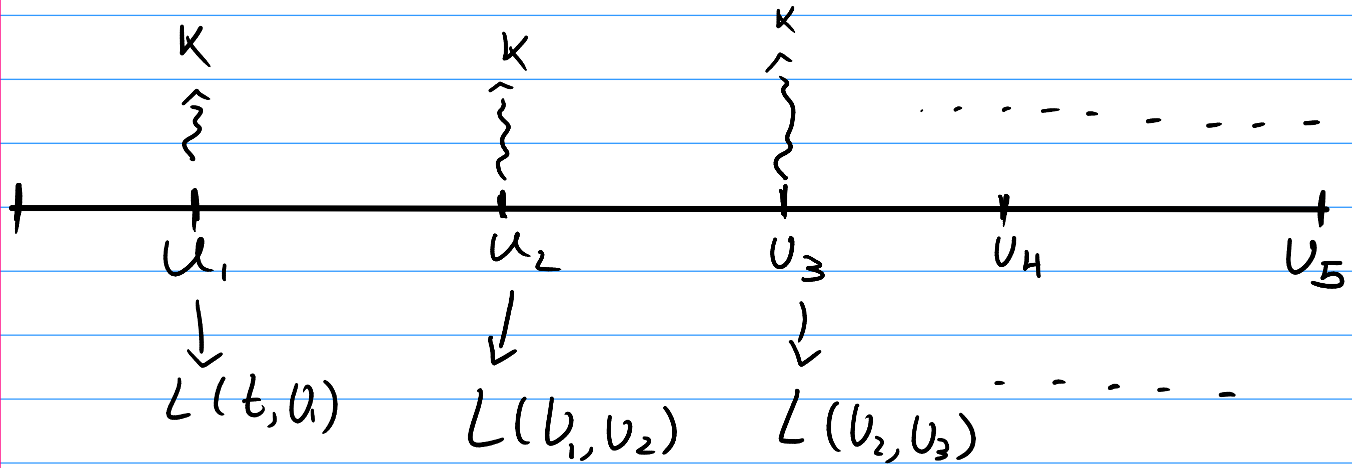
Si nosotros sabemos que $L(t,S_1)$ es la tasa correspondiente a $D(t,S_1)$, podemos asumir que la misma tasa será usada para calcular $D(t,T_1)$

$$D(t,T_1) = \frac{1}{1+\tau(t,T_1)L(t,S_1)}$$

"Shaping methods"



Para modelar la parte larga de la curva, utilizaremos los instrumentos llamados "Interest Rate Swaps"



$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_n D(t,U_i)}_{\text{Pata fija}} + \underbrace{D(t,U_n)}_{} = 1$$

$$- \underbrace{(1 - D(t,U_n))}_{\text{Pata flotante.}}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tau_i r_n D(t,U_i) + r_n D(t,U_n) + D(t,U_n) = 1$$

$$\boxed{D(t,U_n) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} r_n D(t,U_i)}{1 + r_n \tau(U_{n-1},U_n)}}$$

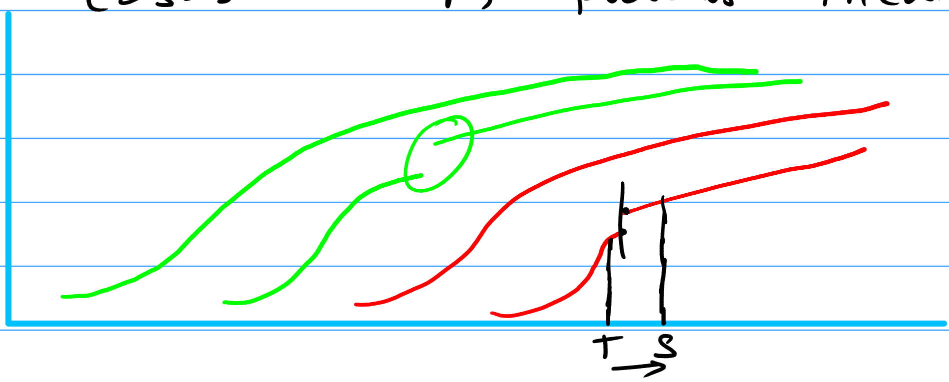
Hay un problema!

Tenemos más incógnitas que variables!

$D(t,T_3)$, $D(t,\mathcal{U}_1)$, $D(t,\mathcal{U}_2)$, $D(t,\mathcal{U}_3)$, $D(t,\mathcal{U}_4)$

x $\quad -r^*_i(t,\mathcal{U}_1)$ ¿? $\quad r(t,\mathcal{U}_2)$ $\quad r^*(t,\mathcal{U}_3)$ $\quad r(t,\mathcal{U}_4)$

→ Si nosotros interpolamos sobre las tasas swap, podemos incurrir en errores de continuidad en la curva y suavizado.



→ ¿Por qué nos interesa que la curva sea suave?

→ En particular, puedo valuar un forward dada una curva.

$$F(t,T,S) = \left[\frac{D(t,T)}{D(t,S)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$= \left(\frac{D(t,T) - D(t,S)}{D(t,S)} \right) \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$F(t,T,S) \propto \overbrace{\left[\frac{D(t,T) - D(t,S)}{D(t,S)} \right]}^{\text{Cambio porcentual del plazo } T \text{ al plazo } S}$$

%

$$\frac{0.99 - 0.98}{0.98} =$$

Escojo a $S = T + \Delta T$

$$F(t,T,T+\Delta T) \propto \left[\frac{D(t,T) - D(t,T+\Delta T)}{D(t,T+\Delta T)} \right]$$

Que pasa si $\Delta T \to 0$

$$f(t,T) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{D(t,T) - D(t,T+\Delta t)}{D(t,T+\Delta T;\ \underbrace{\tau(T,T+\Delta t)}_{\Delta T})}$$

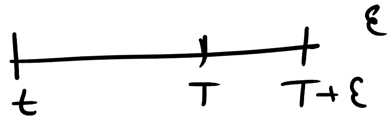
Tasa forward instantánea

$$= \lim_{\Delta T \to 0} \frac{D(t,T) - D(t,T+\Delta T)}{D(t,T+\Delta T) \cdot \Delta T}$$

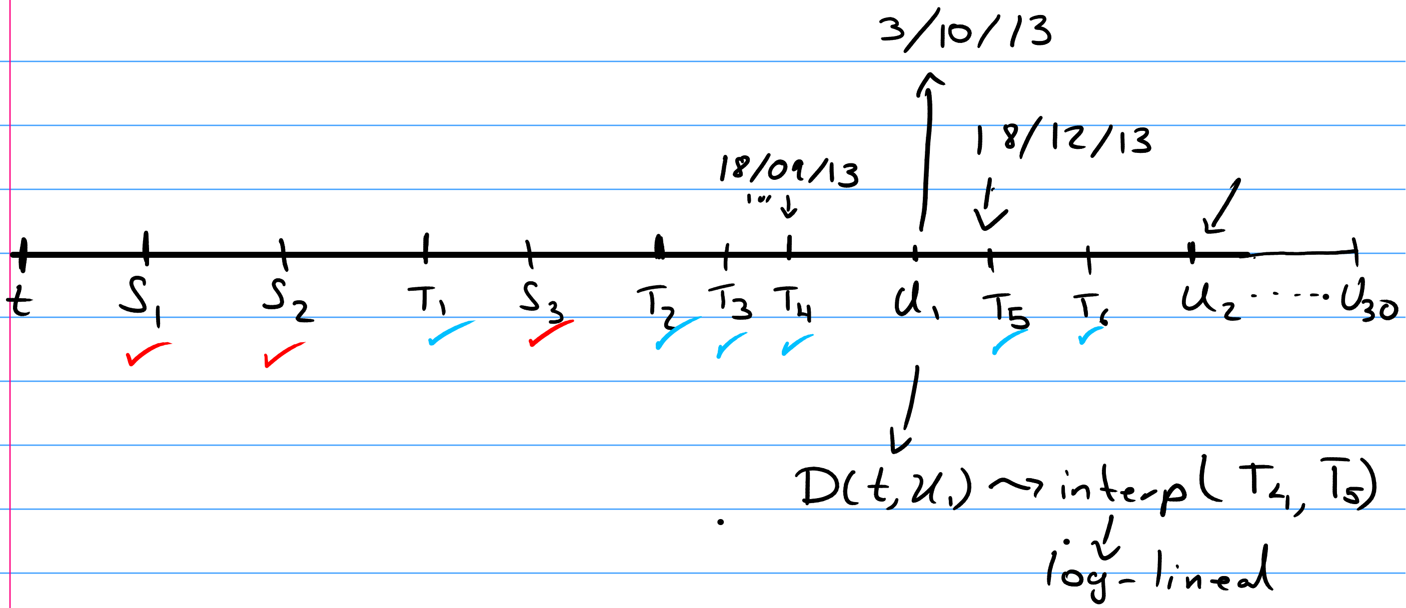
Tarea

$$= \frac{\partial}{\partial T} \ln(D(t,T))$$

$\varepsilon \to 0$?



Dado lo anterior, quisiéramos garantizar la existencia de $f(t,T)$ para toda T, ya que con ésto, garantizamos que todos los forwards serán valuados de forma correcta.



$$\boxed{D(t,U_2) = \frac{1 - r_2 D(t,U_1)\,\tau(U_1,U_2)}{1 + r_2\,\tau(U_1,U_2)}}$$

$$D(t,U_3) = \frac{1 - \left(r_3 D(t,U_2)\,\tau + r_3 D(t,U_1)\right)}{1 + r_3\,\tau(U_2,U_3)}$$

Source	Quote	Maturity
LIBOR	0.15	02/10/2012
	0.21	05/11/2012
	0.36	03/01/2013
Futures	99.68	20/03/2013
	99.67	19/06/2013
	99.65	18/09/2013
	99.64	18/12/2013
	99.62	19/03/2014
Swap	0.36	03/10/2014
	0.43	05/10/2015
	0.56	03/10/2016
	0.75	03/10/2017
5 →	1.17	03/10/2019
	1.68	03/10/2022
	2.19	04/10/2027
	2.40	04/10/2032
	2.58	03/10/2042

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_5 D(t,U_i)\,\tau(U_{i-1},U_i) + D(t,U_n) = 1}_{(*)}$$

$\Leftrightarrow$

$$r_5 D(t,\underset{3/10/13}{U_1}) + r_5 D(t,\underset{3/10/14}{U_2}) + r_5 D(t,\underset{5/10/15}{U_3}) +$$

¿ ? ¿ ?

$$r_5 D(t,\underset{3/10/16}{U_4}) + r_5 D(t,\underset{3/10/17}{U_5}) + r_5 D(t,\underset{3/10/18}{U_6}) +$$

$$r_5 D(t,\underset{3/10/19}{U_7}) + D(t,\underset{3/10/19}{U_7}) = 1$$

Vamos a hacer otro supuesto de interpolación lineal para obtener $D(t,U_6)$

$$U_5 < U_6 < U_7$$

$D(t,U_5)$ ✓ $\qquad$ $D(t,U_7)$ No lo conozco

Vamos a encontrar el factor de descuento $D(t,U_7)$ tal que:

- → satisfaga $(*)$
- → Interpole a $D(t,U_6)$

$\circledast\circledast$

$$\sum_{i=1}^{5} r_5\, D(t,U_i)\,\tau(U_{i-1},U_i) + r_5\, D(t,U_6)\,\tau(U_5,U_6) + r_5\, D(t,U_7)\,\tau(U_6,U_7) + D(t,U_7) - 1 = 0$$

interp lineal → log lineal

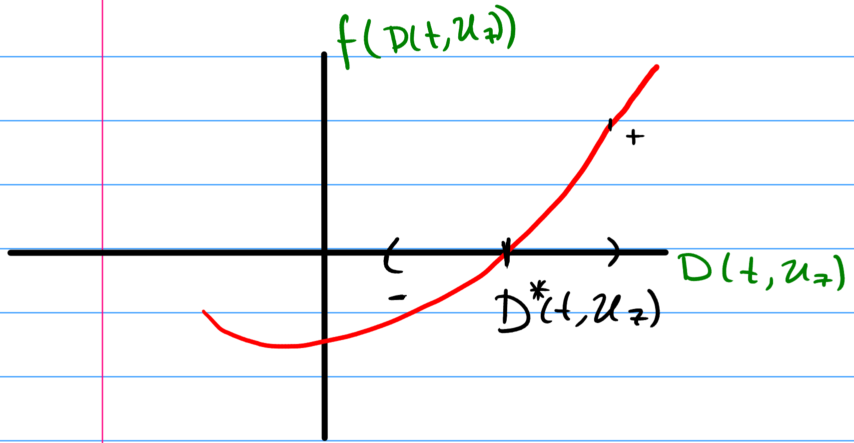
$$D(t,U_6) = f\left(D(t,U_5),\, D(t,U_7)\right)$$

de $\circledast\circledast$ la única incógnita que tenemos es $D(t,U_7)$

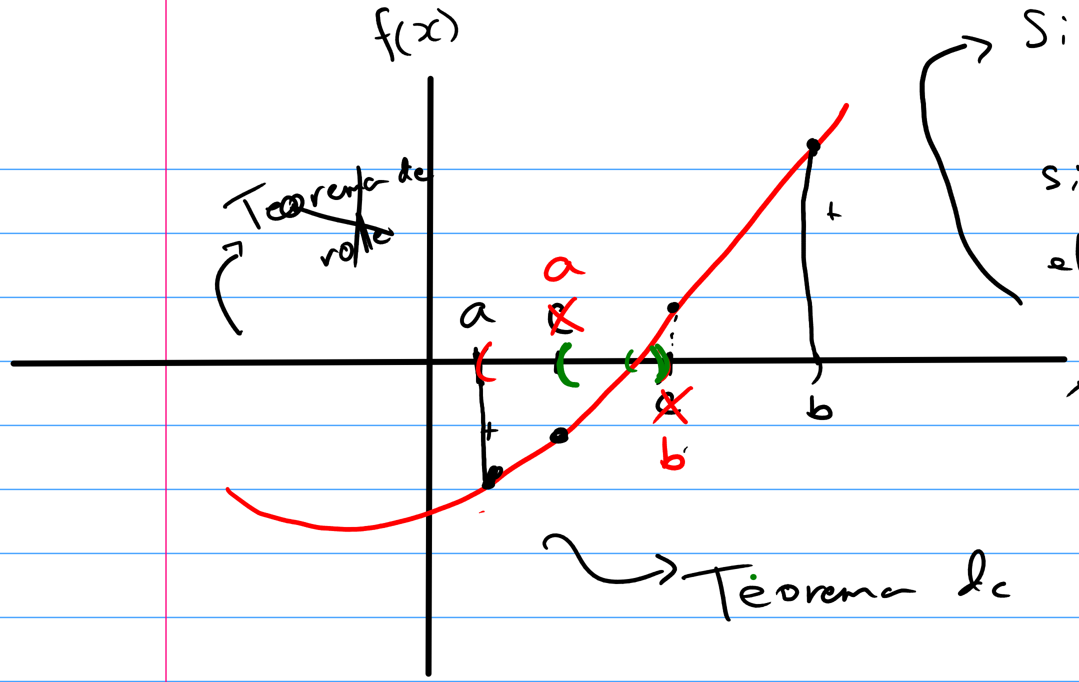
Entonces la chamba es encontrar $D(t,U_7)$ tal que satisfaga $\circledast\circledast$

→ Una alternativa es resolver el sistema de ecuaciones.

→ Otra alternativa es resolver la ecuación $\circledast\circledast$ utilizando un método numérico.



$\Bigg\}$ Newton.
Bayes???
-Bisección.



Si $ab<0$:

$c = \frac{a+b}{2}$

si $ac<0$:

$\underline{b} = c$

else :

$\underline{a} = c$

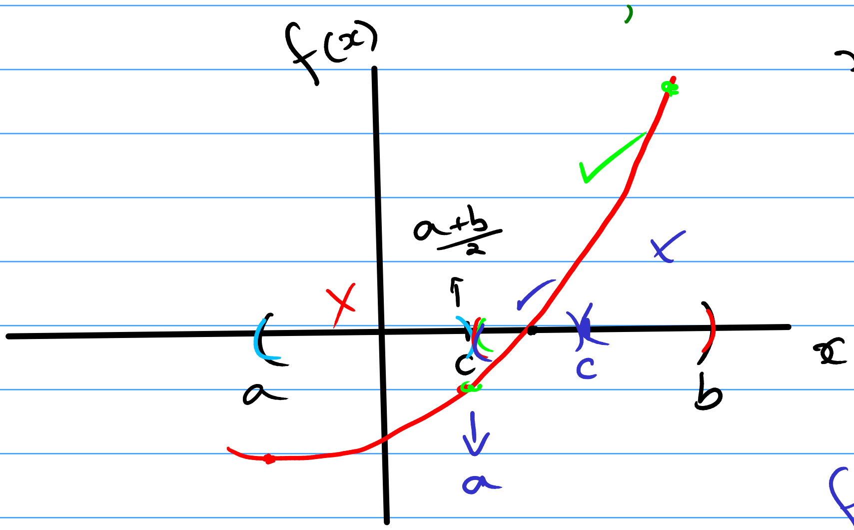
si $|a-b| < \varepsilon$

$\Rightarrow x = c$

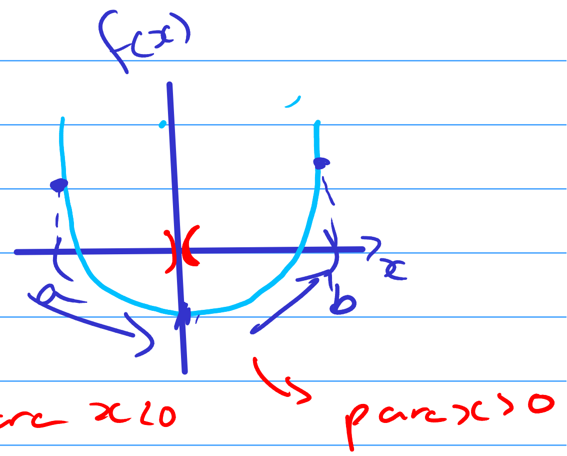
Teorema de Bolzano.

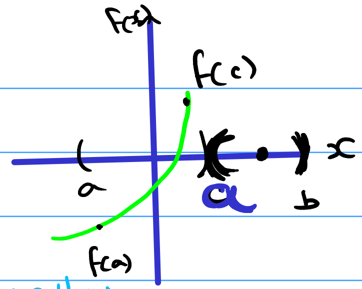
Algoritmo de Bisección

Queremos encontrar x^* tal que $f(x^*) = 0$




```
def f(x):
    return (x^2 - 1)
```






```
def Bisección (f, a, b):
    ε = 1×10⁻⁸
    while (|a-b|>ε):
        c = (a+b)/2
        if (f(a)·f(c) < 0)
            b = c
        else:
            a = c
    return((a+b)/2)
```

↳ $abs(f(\frac{a+b}{2})) > \varepsilon$

$$f(x) = e^{x} - x - 20$$

$$f(c) = e^{x^2} - \int_{-20}^{20} \ln(\tan(x^2))\,dx - \cosh(x^2)$$

$$f(x) = e^{x} - x - 15; \quad f(x) = 0$$

¿ $x =$

Recapitulando

-> Interpolación (Interpolación log-lineal)

-> Aproximación (Bisección)

$U_1, U_2, U_3 \dots, U_{10}, U_{11}, U_2$

??

10y

no hay cotización

12y

1y	U_1	spr
2y	U_2	spr
3y	U_3	spr
4y	U_4	spr
5y	U_5	spr
6y	U_6	spr
7y	U_7	spr
8y	U_8	spr
9y	U_9	spr
10y	U_{10}	spr
11y	U_{11}	??
12y	U_{12}	spr

Facilísimo $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} r_n D(t,t_i)\tau(t_{i-1},t_i) + D_{(t,t_n)} = 1}_{\text{Resolver para } D(t,t_n)}$

$$y = y_0 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times (x - x_1)$$

Para obtener $D(t, t_{12})$ necesitamos resolver:

$$\sum_{i=1}^{12} r_{12} D(t,t_i)\tau(t_{i-1},t_i) + D(t,t_{12}) = \underline{1}$$

???

$$D(t,t_{11}) = \exp\left(\ln(D(t,t_{10}) + \frac{\ln(D(t,t_{12}) - \ln(D(t,t_{10})}{t_{12} - t_{10}} \cdot (t_{11} - t_{10}\right)$$

$DF_0 \quad DF_1$

Bootstrapping _ Bisecion(swap, a, b)

$swap(DF_1)$

$$\sum_{i=1}^{n} r_n \underbrace{D(t,t_i)} \tau(t_{i-1},t_i) + DF_1) = 1$$

$$D(t,t_n) = DF_1$$

$$D(t, t_{i-1}) = interp(D(t,t_{-2}), DF_1))$$

$$\tau(t_{i-1}, t_i) = 1y$$

$1y, 2y, 3 \ldots 10y \quad \tau = 1 \qquad 12y$

def swap($\{D(t,t_i)\}_{i=1}^{n-1}$, r_n, $D(t,t_n)$]

return $\left(\sum_{i=1}^{n} r_n D(t,t_i) + D(t,t_n) - 1 \right)$

τ

$t_1 = 1y \qquad D(t, 1y)$

$D(t, 2y)$

$t_2 = 3y \qquad D(t, 3y)$

$D(t, 4y)$

$t_3 = 5y \qquad D(t, 5y)$