Conceptos básicos de tasas de interés

→ Composición simple ó tasas de interés simple:

$t_{i+1} - t_i$

$N \qquad N+i\Delta t_N \qquad N+it$

$t_1 \qquad t_2 \qquad t_3 \quad \cdots\cdots \quad t_n$

$N \qquad N+i\Delta t_N \qquad N+2i\Delta t_N \qquad N \cdot n i \Delta t_N$

→ Compuesta

$N \longrightarrow N(1+i) = N_2 \longrightarrow N_2(1+i) \qquad N_3(1+i) \quad \cdots$

$N_2(1+i) = N(1+i)^2 \longrightarrow N_3(1+i) = N(1+i)^3$

→ $(1+it)$

→ $(1+i)^t$

↓

tasas nominales

$\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^{nt}$ } tasas pagaderas n-veces al año

$i^{(12)} = 12\% \longrightarrow \frac{i^{(12)}}{12} \rightarrow 1\%$ efectiva mensual

↓

tasa anual pagadera mensual

$i^{(100)} \rightarrow$ tasa anual pagadera 100 veces al año

$i^{(1000)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i^{(n)}}{n}\right)^{nt} = e^{rt}$$

r: $i^{(\infty)}$

t: medida en años

Tasas continuas.

Tasas continuas compuestas de forma anual

$\frac{Act}{Act}$, $\frac{Act}{360}$, $\frac{30}{360}$, $\frac{Bus}{252}$, ...

→ Day count conventions

$$\frac{1}{(1+i\,t)} = D_t = e^{-rt}$$

→ $\underbrace{\text{Simples, Compuestas, Continuas}}_{\text{1 solo D.F.}}$

$t = 1.5y$ $\quad i = 3\%$ simple.

hallar la tasa continua anual

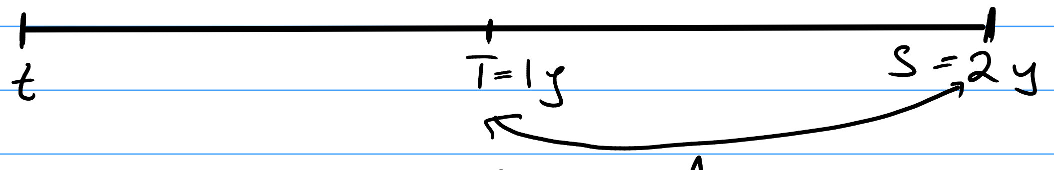
$$\frac{\overbrace{1}^{DF}}{1+0.03\,(1.5)} = e^{-r(1.5)}$$

$$\Leftrightarrow \quad DF = e^{-r(1.5)} \Leftrightarrow \frac{-\ln(DF)}{1.5} = r$$

["Forwards sobre commodities"]

Forward Rate Agreements (FRAs)

7%   ??%

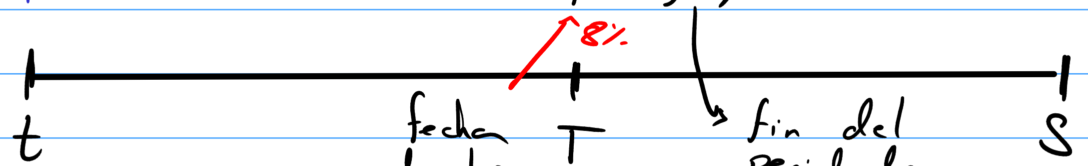


Quisiera fijar la tasa con la que voy a prestar/pedir prestado en un futuro.

→ Contrato en el cual se pacta una tasa de interés en la actualidad y que será efectiva en un periodo futuro.

$L_T(T,S)$ → inicio del periodo de efectividad de la tasa

7%



fecha de obs. de la tasa

fin del periodo de efectividad de la tasa

fecha en la que estamos parados

Fecha de Fixing "Fixing date" → Fijación

Nocional

$$\underbrace{\text{Payoff}} = N\,\underbrace{\tau(T,S)}_{\text{Periodo de tiempo (años) entre la fecha T y la fecha S.}}\,\big(\underbrace{L_T(T,S)}_{\text{Tasa de mercado}} - K\big)$$

K ↳ Strike

El FRA se ejerce en

$\begin{cases} t \\ T \\ S \end{cases}$ ⇒ t → actual T → fixing → S: Fecha del final del periodo.

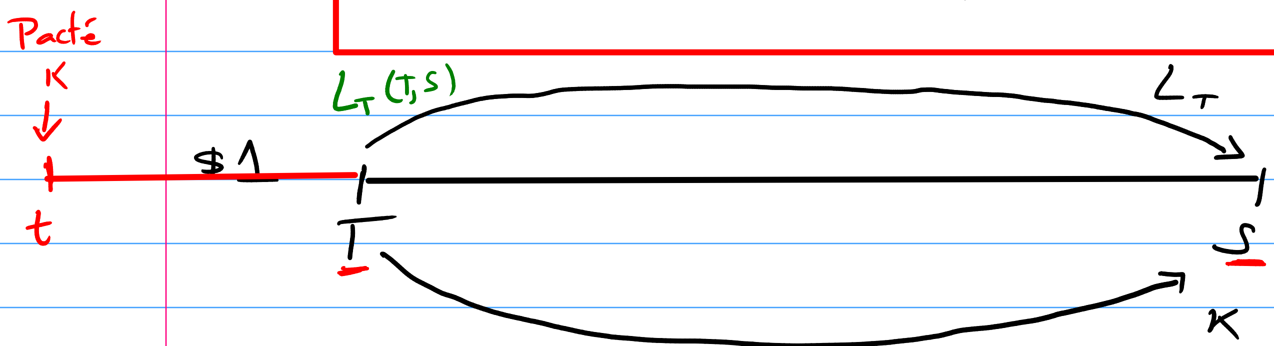
Asumamos que:

$N = \$1$

$$\text{Payoff} = \tau(T,S)\left[L_T(T,S) - K\right]$$

$$= \tau(T,S)\,L_T(T,S) - \tau(T,S)\,K + 0$$

$$\boxed{= \left(1 + \tau(T,S)\,L_T(T,S)\right) - \left(1 + \tau(T,S)\,K\right)}$$

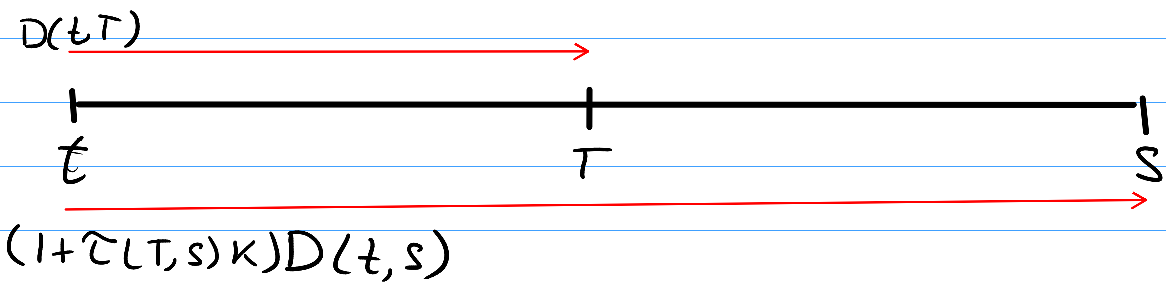


Valoración de un FRA:

Objetivo: Encontrar un portafolio tal que replique el payoff de un FRA

$\left\{\begin{array}{l}\text{Invertir el valor presente de } \$1 \text{ de } t \text{ a } T. \\ \hookrightarrow D(t,T) \rightsquigarrow \text{Factor de descuento de } t \text{ a } T. \\ \\ \text{Pedir prestado el valor presente de: } (1 + \tau(T,S)K) \text{ de } t \text{ a } S\end{array}\right.$

en t.

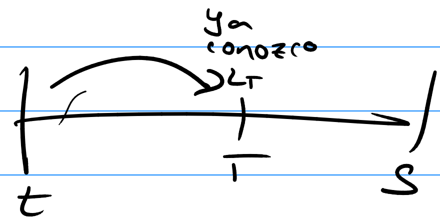


En T:

→ Voy a recibir \$1 por la inversión que hice de $D(t,T)$

→ en T, ya conozco el valor de

$L_T(T,S)$



↳ Re-invertir \$1 a tasa $L_T(T,S)$

→ Del lado del préstamo, no hay nada que hacer.

→ en S:

→ Obtener $\cancel{1} + \tau(T,S)\,L_T(T,S)$ } Por la inversión

→ Pagar $\cancel{1} + \tau(T,S)\,K$

$$\underbrace{\tau(T,S)\left[L_T(T,S) - K\right]}_{\text{Payoff de un FRA.}}$$

Dado que el portafolio replica el payoff del FRA, por argumentos de no arbitraje:

$$f_t = \text{Port. réplica}\,(t)$$

$$f_t = D(t,T) - (1 + K\,\tau(T,S))\,D(t,S)$$

$$f_t = D(t,T) - (1+\underline{K}\,\tau(T,S))\,D(t,S) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad F_t(T,S) = \mathbb{E}^{F}\left[L_T(T,S) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$\longleftrightarrow L_T(T,S)$$

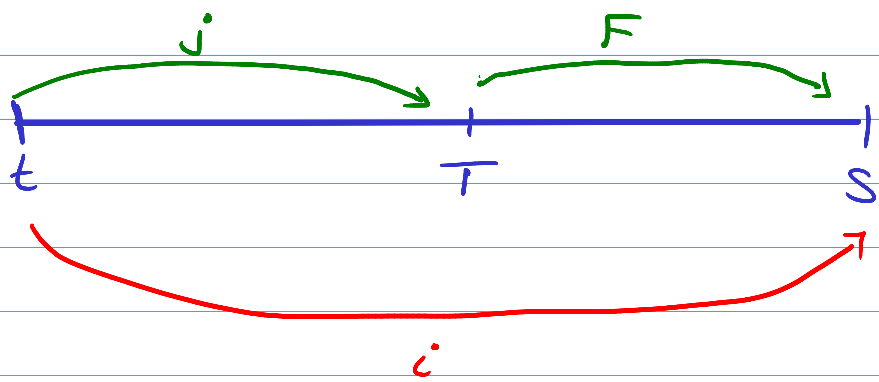
$$D(t,T) - (1+\underline{K}\,\tau)\,D(t,S) = 0 \quad \longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad K = \frac{1}{\tau}\left[\frac{D(t,T)}{D(t,S)} - 1\right] = \underbrace{F_t(T,S)}_{\text{Tasa forward}}$$

$$\left[\tau F_t(T,S) + 1\right] = \frac{D(t,T)}{D(t,S)}$$

$$D(t,S) = D(t,T)\cdot\frac{1}{1+\tau F_t(T,S)}$$

$$[1+i]^{S-t} = (1+j)^{T-t}\cdot\left[1+\tau F_t(T,S)\right]$$



$$(1+i)^{S-t} = (1+j)^{T-t}\,(1+\underline{F}\,\tau)$$