

fecha: 1-oct-2012

% {

Source	Quote	Maturity
LIBOR	0.15	02/10/2012
	0.21	05/11/2012
	0.36	03/01/2013
Futures	99.68	20/03/2013
	99.67	19/06/2013
	99.65	18/09/2013
	99.64	18/12/2013
	99.62	19/03/2014
Swap	0.36	03/10/2014
	0.43	05/10/2015
	0.56	03/10/2016
	0.75	03/10/2017
	1.17	<u>03/10/2019</u>
	1.68	03/10/2022
	2.19	04/10/2027
	2.40	04/10/2032
	2.58	03/10/2042

→ O/N (overnight)

→ 1m

→ 3m

Cotización:  
 $100 \cdot (1 - F_{t_0}(T_i, T_{i+1}))$

$$99.68 = 100 [1 - F]$$

$$F = 1 - \frac{99.68}{100} = \underline{0.0032}$$

→ Tienen Pagos anuales

$U_1$	03.10.2013	$U_{11}$	03.10.2023	$U_{21}$	04.10.2033
$U_2$	03.10.2014	$U_{12}$	03.10.2024	$U_{22}$	04.10.2034
$U_3$	05.10.2015	$U_{13}$	03.10.2025	$U_{23}$	04.10.2035
$U_4$	03.10.2016	$U_{14}$	03.10.2026	$U_{24}$	04.10.2036
$U_5$	03.10.2017	$U_{15}$	04.10.2027	$U_{25}$	04.10.2037
$U_6$	03.10.2018	$U_{16}$	04.10.2028	$U_{26}$	04.10.2038
$U_7$	03.10.2019	$U_{17}$	04.10.2029	$U_{27}$	04.10.2039
$U_8$	03.10.2020	$U_{18}$	04.10.2030	$U_{28}$	04.10.2040
$U_9$	03.10.2021	$U_{19}$	04.10.2031	$U_{29}$	04.10.2041
$U_{10}$	03.10.2022	$U_{20}$	04.10.2032	$U_{30}$	03.10.2042

Listas de Pagos de los Swaps

Libor: Tasas cupón cero que pagan a un plazo definido.

Convención: Simple ACT/360

$$\Rightarrow L(t_0, S_1) = 0.15\% \quad S_1 = 2/10/2012$$

$$D(t_0, S_1) = \frac{1}{1 + (0.15\%) \cdot \left(\frac{1}{360}\right) \tau(t_0, S_1)}$$

$\rightarrow$  tenor = 1 m

$$L(t_0, S_2) = 0.21\% \quad S_2 = 5/11/2012$$

$$D(t_0, S_2) = \frac{1}{1 + (0.21\%) \cdot \left(\frac{35}{360}\right)}$$

$$L(t_0, S_3) = 0.36\% \rightarrow S_3 = 3/01/2013$$

$$D(t_0, S_3) = \frac{1}{1 + (0.36\%) \cdot \left(\frac{94}{360}\right)}$$

$\rightarrow$  Si tenemos una tasa  $L(t, S)$

$$\Rightarrow D(t, S) = \frac{1}{1 + L(t, S) \cdot \left(\frac{S - t}{360}\right)}$$

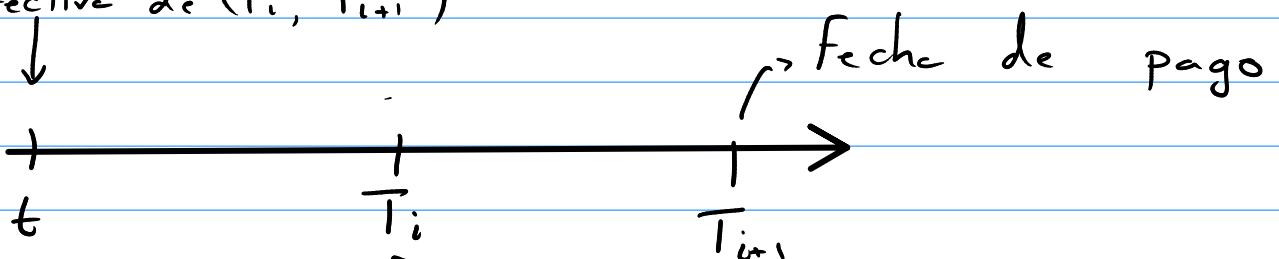
Futuros :

$$R(t, T_i, T_{i+1}) = 100 \left(1 - F(t, T_i, T_{i+1})\right)$$

"Fecha valor"

Se pacta la tasa  
efectiva de  $(T_i, T_{i+1})$

$\downarrow$   
Tasa forward

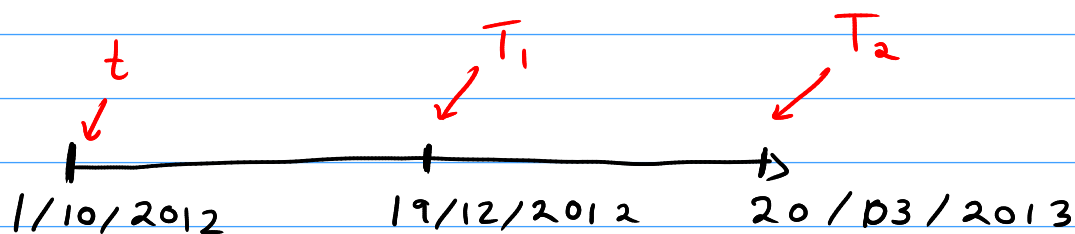


$\uparrow$   
fecha de fixing o "fijación"

$\rightarrow$  fecha en la cual conoceremos la tasa que será efectiva de  $T_i$  a  $T_{i+1}$

En nuestro ejemplo, la fecha de Fixing para el primer futuro será:

$$T_1 = 19/12/2012$$



¿ Por qué la fecha de fixing es el 19/12/2012?

↳ Resulta que este contrato tiene como especificación que la distancia entre la fecha de pago y la fecha de fixing es de 3 meses.

convención.

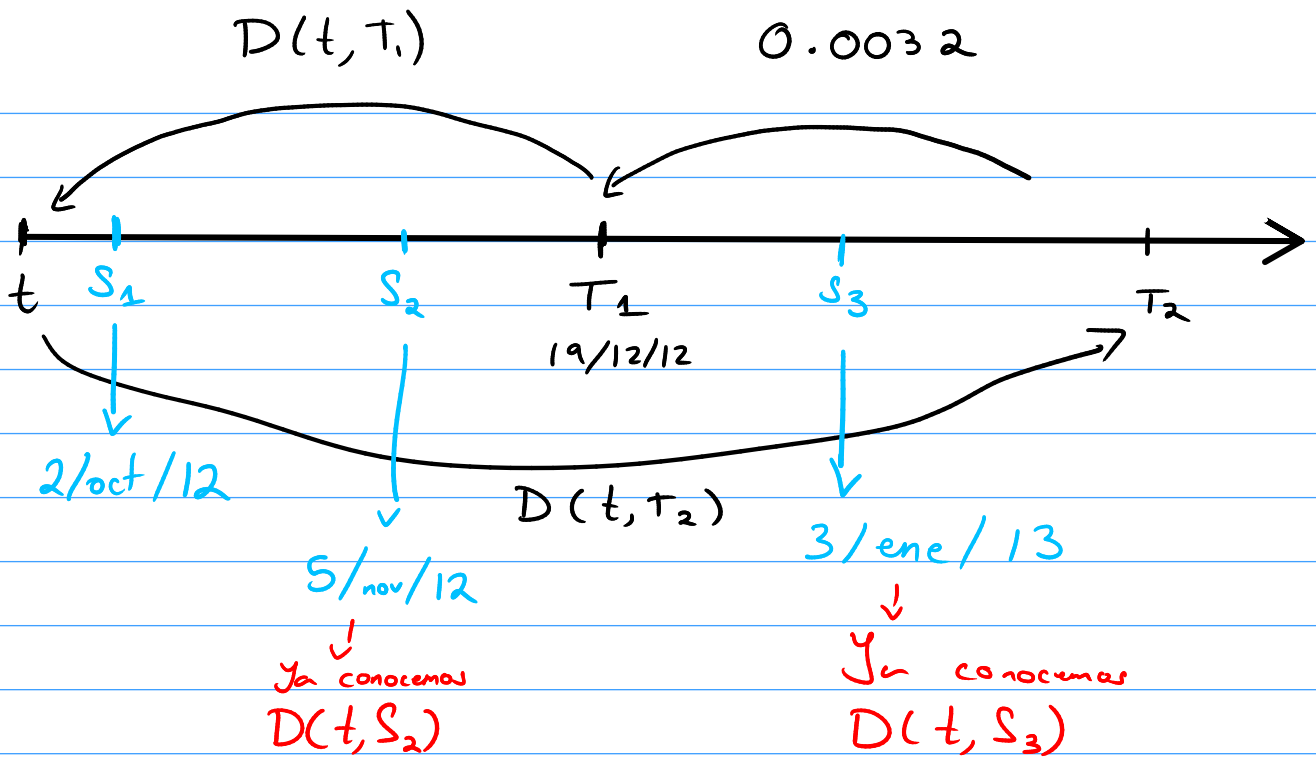
$$R(t, T_1, T_2) = 100 (1 - F(t, T_1, T_2))$$

$$\text{Sabemos que } F(t, T_1, T_2) = \left[ \frac{D(t, T_1)}{D(t, T_2)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$\text{Ya conocemos } F(t, T_1, T_2) = 0.0032$$

¿Cómo obtengo  $D(t, T_1)$  y  $D(t, T_2)$ ?

$$0.0032 = \left[ \frac{D(t, T_1)}{D(t, T_2)} - 1 \right] \cdot \frac{360}{91}, \quad \text{A.C.T. } \frac{1}{360}$$



$$S_2 < T_2 < S_3$$

→ Vamos a utilizar un método de interpolación lineal para calcular  $D(t, T_2)$

• En particular, vamos a usar un método log-lineal para interpolar los factores de descuento.

Nosotros estamos trabajando en este momento con factores de descuento, los cuales son independientes a la conversión de tasas que utilizemos.

Si asumimos que  $D(t, T) = e^{-r(T-t)}$ , entonces:

$$\log(D(t, T)) = -r(T-t)$$

→ estamos interpolando sobre las tasas continuas.

Entonces si conocemos  $D(t, S_2)$  y  $D(t, S_3)$ , podemos estimar  $D(t, T_1)$  mediante una interpolación log - lineal.

( Recordemos que  $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$  )

$$\Rightarrow X_0 = S_2, \quad X_1 = S_3$$

$$Y_0 = \log(D(t, S_2)) \quad Y_1 = \log(D(t, S_3))$$

$$\Rightarrow \text{Dado que } X = T_1$$

$$\Rightarrow Y = \log(D(t, T_1)) \Leftrightarrow D(t, T_1) = e^Y$$

$$\Rightarrow \text{El valor de } D(t, T_1) = 0.9996$$

Dado este factor de descuento, podemos calcular  $D(t, T_2)$

$$0.0032 = \left[ \frac{D(t, T_1)}{D(t, T_2)} - 1 \right] \cdot \frac{360}{91}$$

$$\text{Ya conocemos } D(t, T_1) = \underline{0.9996}$$

$$\Rightarrow \text{Para calcular } D(t, T_2):$$

$$\begin{aligned} D(t, T_2) &= \left[ 0.0032 \left[ \frac{91}{360} \right] + 1 \right]^{-1} \cdot 0.9996 \\ &= 0.9987920982 \end{aligned}$$

$$D(t, T_3)$$

$$F(t, T_2, T_3) \curvearrowright 1 - \frac{R(t, T_2, T_3)}{100}$$

$$F(t, T_2, T_3) = \left[ \frac{D(t, T_2)}{D(t, T_3)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow D(t, T_3) = \left[ 1 + \tau F(t, T_2, T_3) \right]^{-1} \cdot D(t, T_2)$$

$D(t, T_2)$  ya lo conocemos!

Dado que  $T_2 = 19/06/13$  y  
 $T_2 = 20/03/13$

$$D(t, T_i) = \left[ 1 + \tau F(t, T_{i-1}, T_i) \right]^{-1} D(t, T_{i-1})$$

para  $i = 2, 3, 4, \dots$

Para  $i=1$ , tenemos que asumir un supuesto de interpolación.

De la clase anterior

→ A través de las tasas Libor y de los contratos de Futuros, fuimos capaces de encontrar una curva de descuento.

$S_1, S_2, S_3$ , son los vencimientos correspondientes a las tasas Libor.

$$D(t, S_i) = \frac{1}{1 + L(t, S_i) \tau(t, S_i)}$$

Dado que la tasa libor cotiza como Simple ACT/360

$$\tau(t, S_i) = \frac{\# \text{ días } \div t \text{ y } S_i}{360}$$

Si la convención de la tasa Libor fuera Contínua ACT/365

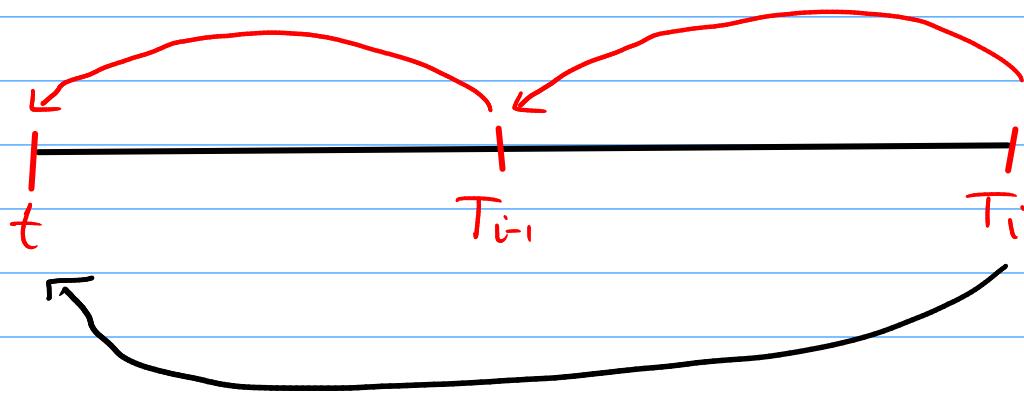
$$D(t, S_i) = e^{-r \cdot \tau(t, S_i)} \quad \rightarrow \quad \frac{\# \text{ días } \div t \text{ y } S_i}{365}$$

→ Sea  $T_1, T_2, T_3$ , son los vencimientos correspondientes a los contratos de futuros.

$$\underbrace{R(t, T_{i-1}, T_i)}_{\text{contrato de futuros}} = 100 \underbrace{(1 - F(t, T_{i-1}, T_i))}_{\text{Tasa forward.}}$$

Para  $T_i, i > 1$

$$D(t, T_i) = \frac{D(t, T_{i-1})}{1 + \tau(T_{i-1}, T_i) F(t, T_{i-1}, T_i)}$$



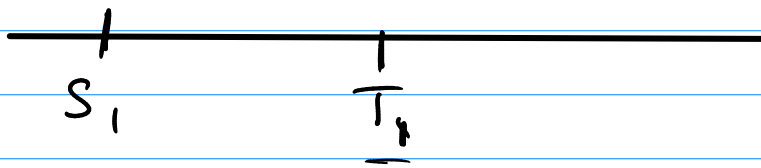
Para calcular  $T_1$ , tenemos que hacer un supuesto de interpolación.

$$S_2 < T_1 < S_3$$

$$D(t, T_1) = \text{interp}_{\text{lineal}}(D(t, S_2), D(t, S_3))$$



¿Qué pasa si solamente tenemos  $D(t, S_1)$ , pero no hay cotizaciones para  $D(t, S_2)$  ni  $D(t, S_3)$ ?

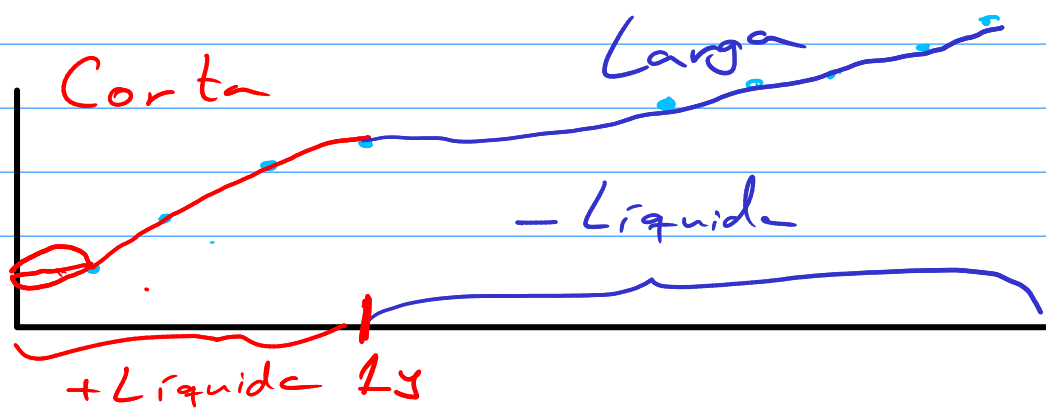


Como solución, podemos asumir una extrapolación flat sobre  $S_1$

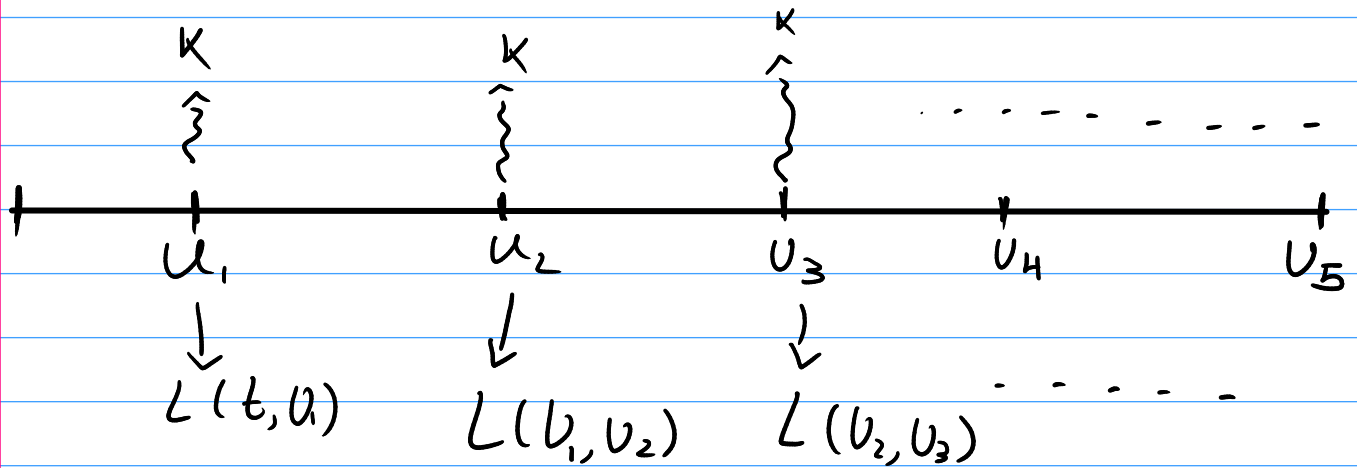
Si nosotros sabemos que  $L(t, S_1)$  es la tasa correspondiente a  $D(t, S_1)$ , podemos asumir que la misma tasa será usada para calcular  $D(t, T_1)$

$$D(t, T_1) = \frac{1}{1 + \int L(t, T_1) L(t, S_1)}$$

"Shaping methods"



Para modelar la parte larga de la curva, utilizaremos los instrumentos llamados "Interest Rate Swaps".



$$\underbrace{\sum_{i=1}^n r_n D(t, u_i)}_{\text{Paga fija}} + \underbrace{D(t, u_n)}_{\text{Paga flotante}} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tau \cdot r_n D(t, u_i) + r_n D(t, u_n) + D(t, u_n) = 1$$

$$D(t, u_n) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} r_n \tau D(t, u_i)}{1 + r_n \tau (u_{n-1}, u_n)}$$

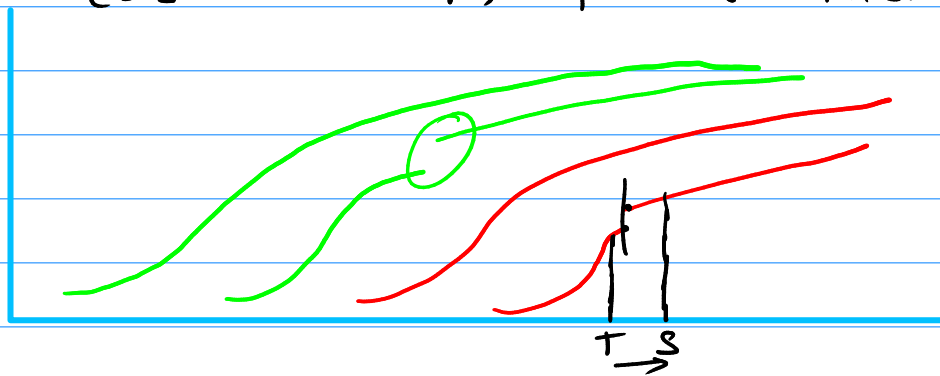
Hay un problema!

Tenemos más incógnitas que variables!

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underline{D(t, T)} & D(t, u_1) & D(t, u_2) & D(t, u_3) & D(t, u_4) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \underline{-r_j^*(t, u_1)} & r(t, u_2) & r(t, u_3) & r(t, u_4)
 \end{array}$$

*(Note: In the original image,  $-r_j^*(t, u_1)$  has a question mark and a green arrow pointing to it from the text below.  $r(t, u_2)$  is underlined in green.  $r(t, u_3)$  has a red 'x' over it.  $r(t, u_4)$  is underlined in blue.)*

→ Si nosotros interpolamos sobre las tasas swap, podemos incurrir en errores de continuidad en la curva y suavizado.



→ ¿Por qué nos interesa que la curva sea suave?

→ En particular, puedo valuar un forward dada una curva.

$$\begin{aligned}
 F(t, T, S) &= \left[ \frac{D(t, T)}{D(t, S)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\tau} \\
 &= \left( \frac{D(t, T) - D(t, S)}{D(t, S)} \right) \cdot \frac{1}{\tau}
 \end{aligned}$$

Cambio porcentual del  
plazo  $T$  al plazo  $S$

$$F(t, T, S) \propto \left[ \frac{D(t, T) - D(t, S)}{D(t, S)} \right] \%$$

$$\frac{0.99 - 0.98}{0.98} =$$

Escojo  $S = T + \Delta T$

$$F(t, T, T + \Delta T) \propto \left[ \frac{D(t, T) - D(t, T + \Delta T)}{D(t, T + \Delta T)} \right]$$

Que pase si  $\Delta T \rightarrow 0$

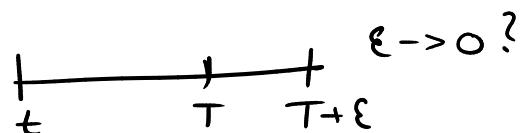
$$f(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{D(t, T) - D(t, T + \Delta T)}{D(t, T + \Delta T) \cdot \Delta T}$$

$\downarrow$   
 Tasa  
 forward  
 instantánea.

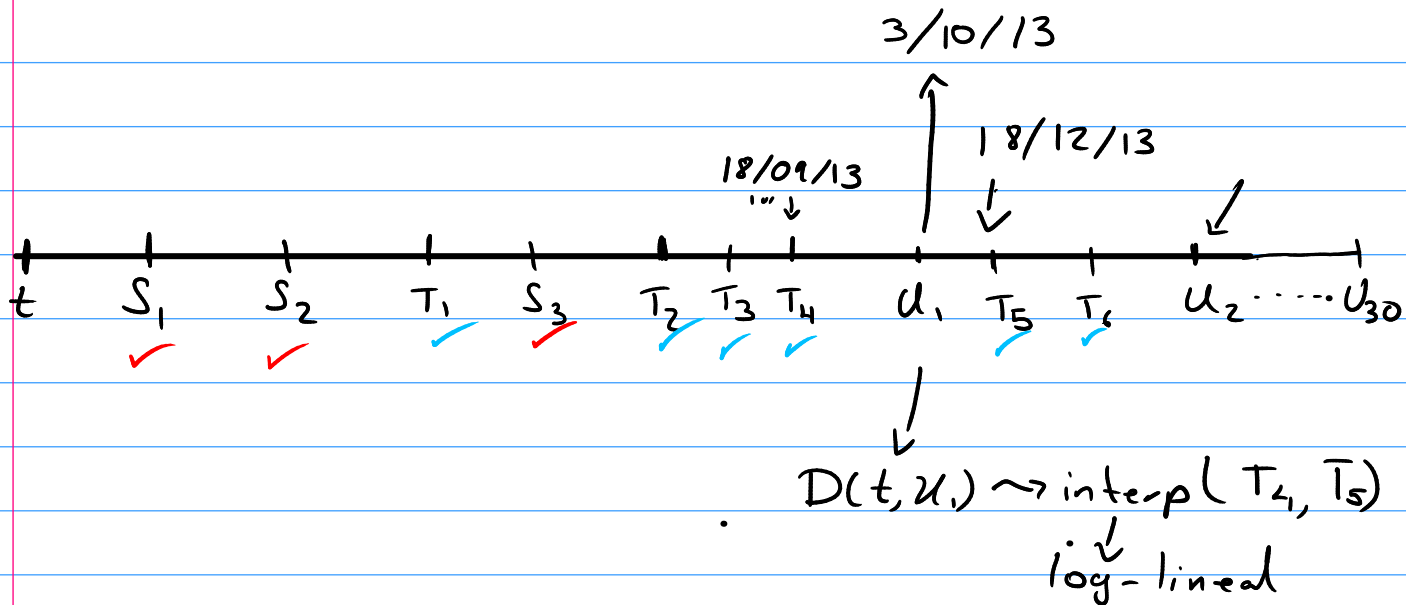
$$= \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{D(t, T) - D(t, T + \Delta T)}{D(t, T + \Delta T) \cdot \Delta T}$$

Tarea

$$= \frac{2}{2T} \ln(D(t, T))$$



Dado lo anterior, quisiéramos garantizar la existencia de  $f(t, T)$  para todo  $T$ , ya que con esto, garantizamos que todos los forwards serán valuados de forma correcta.



$$D(t, U_2) = \frac{1 - r_2 D(t, U_1) \tau(U_1, U_2)}{1 + r_2 \tau(U_1, U_2)}$$

$$D(t, U_3) = \frac{1 - (r_3 D(t, U_2) \tau + r_3 D(t, U_1))}{1 + r_3 \tau(U_2, U_3)}$$

Source	Quote	Maturity
LIBOR	0.15	02/10/2012
	0.21	05/11/2012
	0.36	03/01/2013
Futures	99.68	20/03/2013
	99.67	19/06/2013
	99.65	18/09/2013
	99.64	18/12/2013
	99.62	19/03/2014
Swap	0.36	03/10/2014
	0.43	05/10/2015
	0.56	03/10/2016
	0.75	03/10/2017
	5 → 1.17	03/10/2019
	1.68	03/10/2022
	2.19	04/10/2027
	2.40	04/10/2032
	2.58	03/10/2042

$$\sum_{i=1}^n r_5 D(t, u_i) \tau(u_{i-1}, u_i) + D(t, u_n) = 1$$

(\*)

$$\begin{aligned}
 & \overset{3/10/13}{\uparrow} \quad \overset{3/10/14}{\uparrow} \quad \overset{5/10/15}{\uparrow} \\
 & r_5 D(t, u_1) + r_5 D(t, u_2) + r_5 D(t, u_3) + \\
 & \quad \overset{3/10/16}{\uparrow} \quad \overset{3/10/17}{\uparrow} \quad \overset{3/10/18}{\downarrow} \\
 & r_5 D(t, u_4) + r_5 D(t, u_5) + r_5 D(t, u_6) + \\
 & \quad \overset{3/10/19}{\uparrow} \\
 & r_5 D(t, u_7) + D(t, u_7) = 1
 \end{aligned}$$

? ? ? ?

Vamos a hacer otro supuesto de interpolación lineal para obtener  $D(t, u_6)$

$$\begin{aligned}
 & u_5 < u_6 < u_7 \\
 & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 & D(t, u_5) \quad \quad \quad D(t, u_7) \text{ No lo conozco}
 \end{aligned}$$

Vamos a encontrar el factor de descuento  $D(t, u_7)$  tal que:

→ satisfacer (\*)

→ Interpolar a  $D(t, u_6)$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^5 r_5 D(t, u_i) \tau(u_{i-1}, u_i) + r_5 D(t, u_6) \tau(u_5, u_6) \\
 & + r_5 D(t, u_7) \tau(u_6, u_7) \\
 & + D(t, u_7) - 1 = 0
 \end{aligned}$$

interp  
linear  
 $\rightarrow$  log  
linear

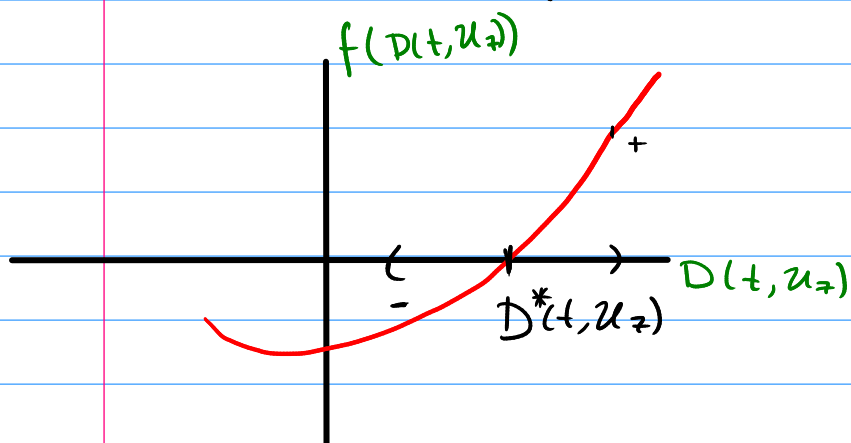
$$D(t, u_6) = f(D(t, u_5), D(t, u_7))$$

de  $\otimes \otimes$  la única incógnita que tenemos es  $D(t, u_7)$

Entonces la chance es encontrar  $D(t, u_7)$  tal que satisfaga  $\otimes \otimes$

$\rightarrow$  Una alternativa es resolver el sistema de ecuaciones.

$\rightarrow$  Otra alternativa es resolver la ecuación  $\otimes \otimes$  utilizando un método numérico.



Newton.  
 Bayes???  
 - Bisección.

