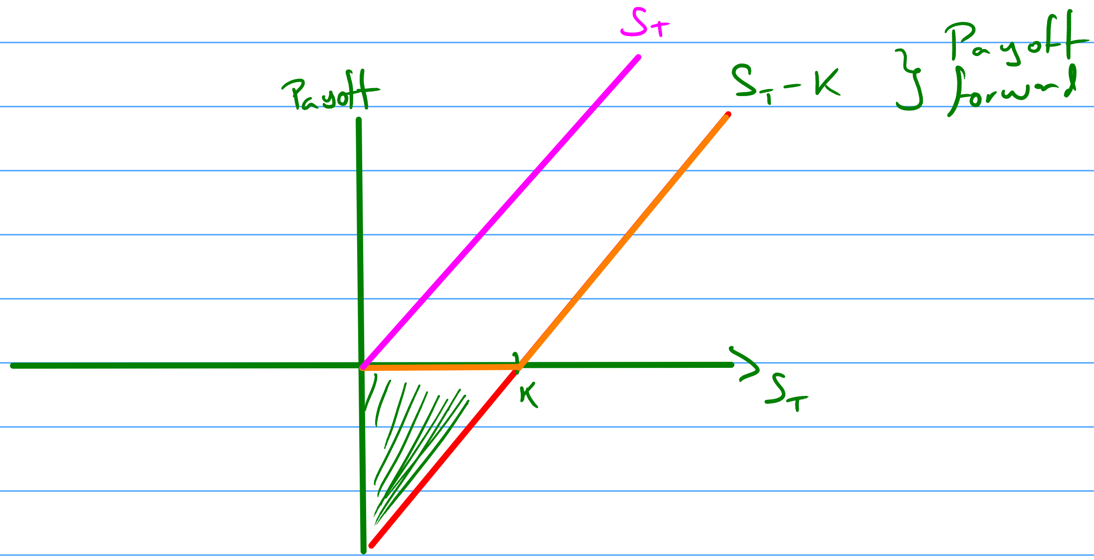
Opciones:

→ De acuerdo al tipo de ejercicio, tenemos:

a) Call (Opciones de compra)

b) Put (Opciones de venta)



Si c es el valor de la prima correspondiente a un call, tenemos que:

$c > 0$

$C \leq S_t \curvearrowright S_t < C$

→ Vender S_t en corto
→ Tener K pesos

$C \geq S_t - K \curvearrowright$ Suponemos que $c < \widetilde{S_t} - K$

comprar | un call
↳ $S_t - K - c > 0$

⇒ en T Si $S_T > K$ ⇒ vamos a ejercer el call

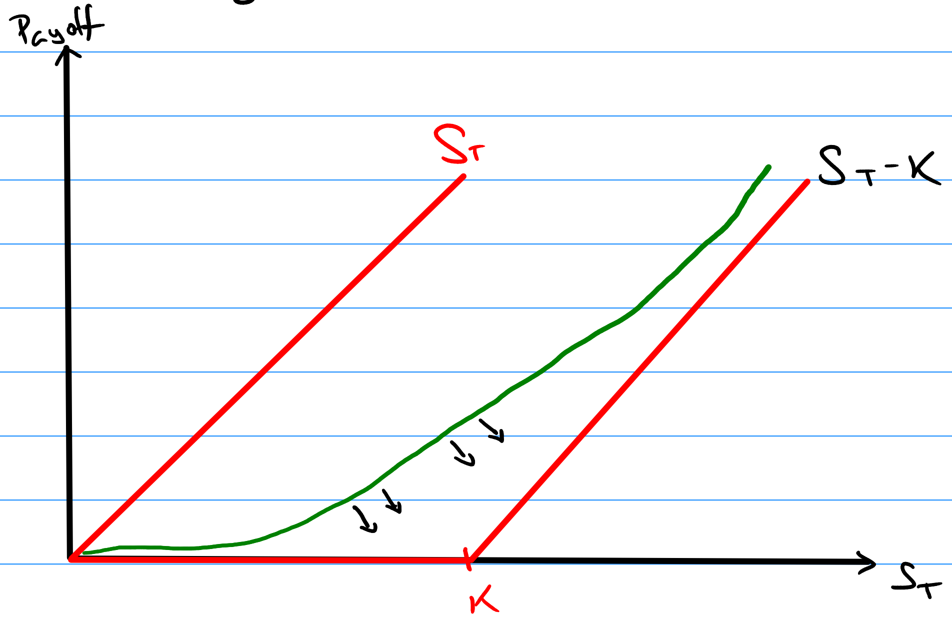
→ Compramos ~~S_T~~ pagando ~~K~~

↳ Regresar ~~S_T~~ por venta en corto

De los ~~K~~ pesos apartados.

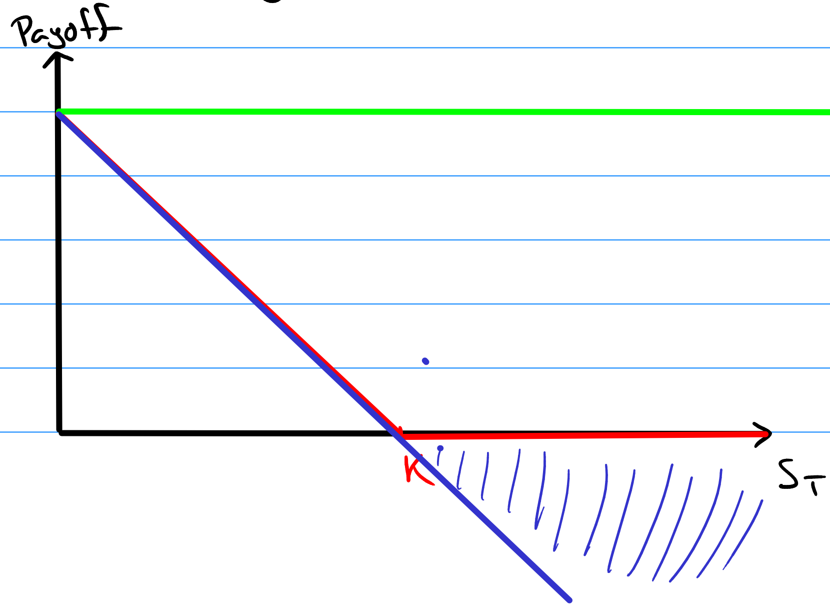
Si $S_T < K$

No ejerzo el call, sin embargo tengo que regresar mi acción con la que hice una venta en corto.
Como $K > S_T \Rightarrow$ Puedo comprar S_T y mi ganancia sería $K - S_T$



$$C_T = (S_T - K)^+$$

Para el caso de un put, tenemos las siguientes desigualdades:



$P \leq K$

$P \geq K - S_t$

Tenemos que $P \leq K$

→ Suponemos que $\underset{\text{corta}}{P} > \underset{\text{larga}}{K}$ ⇝ $P - K > 0$

→ Vendemos un put
→ Apartar K pesos

$$P = (K - S_T)^+ = \begin{cases} K - S_T & K > S_T \\ 0 & K < S_T \end{cases}$$

Qué pasa a vencimiento:

$K > S_T$	$K \leq S_T$
→ el comprador ejerce el put.	→ El comprador no ejerce el put.
→ Nosotros compramos S_T a precio K. ↓ usando los K pesos que apartamos.	↳ No compramos nada y nos quedamos con los K pesos
	$K > 0$

Tenemos $S_T > 0$

Tenemos que:

$p \geq K - S_t$ $\qquad\qquad$ $p < Ke^{-rT} - S_t$

Supongamos que $\underbrace{p}_{\text{larga}} < \underbrace{K - S_t}_{\text{corta}}$

$K - S_t - p > 0$

en t_0
- → comprar un put
- → pedir prestado K pesos a tasa 0%
- → comprar S_t

réplica de un fwd corto

en T.

$S_T < K$	$S_T > K$
Ejercemos el put	No ejercemos el put
→ Vender S_T a precio K	→ En el mercado vendemos S_T y con esa lana pagamos K.
Ganancia en $T = 0$	Ganancia en $T = S_T - K$

En resumen

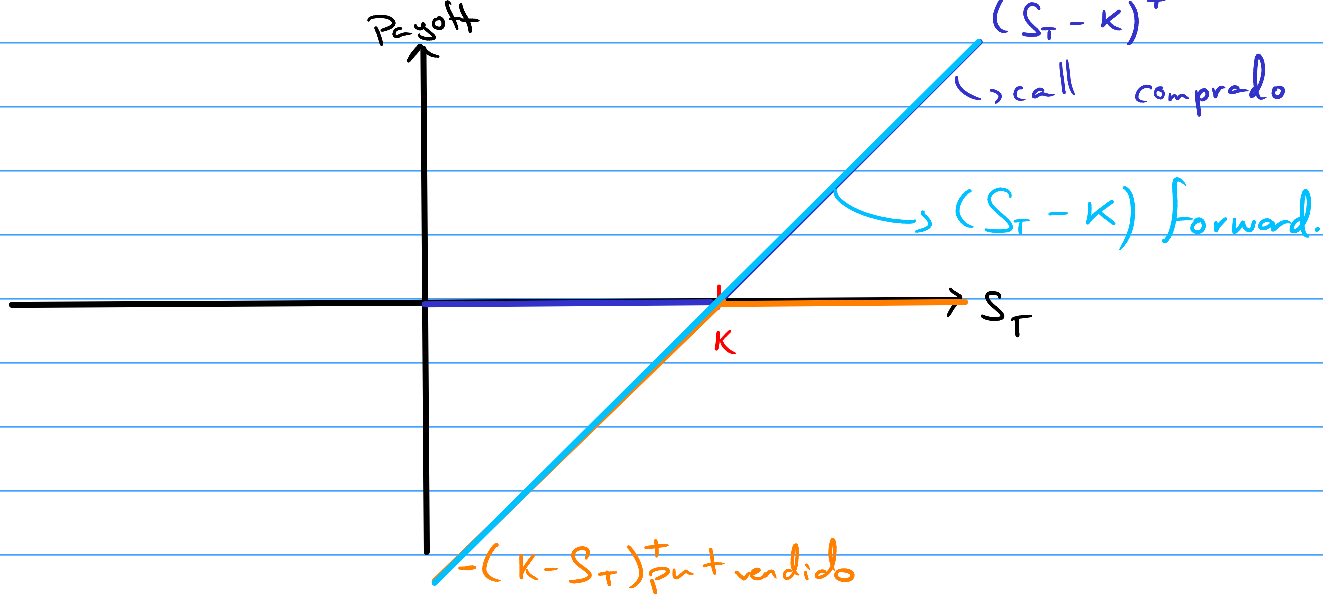
$$\left.\begin{array}{l} S_t - Ke^{-rT} \leq C \leq S_t \\ Ke^{-rT} - S_t \leq P \leq Ke^{-rT} \end{array}\right\}$$ Principales desigualdades

* Si $K_1 < K_2$ dos strikes

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c(K_1) > c(K_2) \\ p(K_1) < p(K_2) \end{array}\right\}$$ call spreads

Parided Put - Call

$$\left. c - p = S_t - Ke^{-r(T-t)} \right\}$$ para todo t



Demostración:

Supongamos que $c-p \neq S_t - Ke^{-r(T-t)}$

2 casos:

$$\begin{cases} c-p > S_t - Ke^{-r(T-t)} & (A) \\ c-p < S_t - Ke^{-r(T-t)} & (B) \end{cases}$$

Objetivo: Crear estrategias de arbitraje para los casos (A) y (B), y con ésto, probar la igualdad.

Para $\underbrace{c-p}_{\text{corta}} > \underbrace{S_t - Ke^{-r(T-t)}}_{\text{posición larga}}$

-> Compremos S_t
Pidamos prestado $Ke^{-r(T-t)}$ a tasa r
Vender un call
Comprar un put

$$+c-p-S_t+Ke^{-r(T-t)} > 0$$

A tiempo T:

$S_T > K$

-> Nos van a ejercer el call

-> No ejercemos nuestro ~~put~~

-> Vendemos ~~S_T~~ y recibimos K

-> Usamos el ~~S_T~~ que habíamos comprado en t.

-> Pagamos el préstamo de K con lo que recibimos de la venta del call.

Qué pasa cuando $S_T < K$?

-> No nos van a ejercer el call
-> Nosotros sí vamos a ejercer el put.

-> Por el ejercicio del put, vendemos S_T a precio K.

-> Vamos a vender el subyacente que habíamos comprado previamente y con la cantidad K pagaremos la deuda que teníamos previamente también.

-> Con ésto, hemos demostrado (A)

Para el inciso (B) tenemos que:

$$\underbrace{c - p}_{\text{largo}} < \underbrace{S_t - K e^{-r(T-t)}}_{\text{corto}}$$

$$\overset{\text{ingreso}}{+S_t} \underset{\text{egreso}}{- K e^{-r(T-t)}} \underset{\text{egreso}}{- c} \overset{\text{ingreso}}{+ p} > 0$$

-> Compramos un call
-> vendemos un put
-> Vender en corto S_t
-> Invertir $K e^{-r(T-t)}$ a tasa r -> $K \cancel{e^{-r(T-t)}} \cancel{e^{r(T-t)}} = K$

$S_t > K$

-> Ejerzo el call
-> No ejerzo el put

-> Compro $S_T^{\times}$ a precio $K^{\times}$.
-> Pagamos $K^{\times}$ con lo invertido
-> Tenemos que regresar ${}^{\times}S_T$ por la venta en corto

$S_T < K$

-> Nos ejercen el put.
-> No ejercemos el call. $\cancel{K e^{-r(T-t)}}$ $e^{r(T-t)}$

-> Con lo que invertimos, compramos $\cancel{S_T}$ por el put.

-> $\cancel{S_T}$ lo regresamos por la venta en corto que hicimos.

Bajo cualquiera de los dos escenarios (A) y (B), tenemos una ganancia sin riesgo alguno, lo que representa una oportunidad de arbitraje !

=> la única alternativa que nos queda, es que

$$\boxed{c - p = S_t - K e^{-r(T-t)}}$$

$\boxed{C = P}$ si y solo si:

$$\Leftrightarrow \quad S_t = K e^{-r(T-t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\boxed{K = S_t e^{r(T-t)}}\ \right\} \text{Precio Forward}$$

$$C(F_t(t,T)) = P(F_t(t,T))$$