# Transformações Afins
# Resumo

André Soares - 2018.2
assf

Transformação Linear

$$T: V \to W$$

$$\begin{cases} (1) : T(v + u) = T(v) + T(u); \\ (2) : T(k^1 * v) = k^1 * T(v); \end{cases}$$

Ou seja, qualquer coeficiente é preservado durante a transformação, logo, se temos uma base do $R^2$, e qualquer vetor é uma combinação da base, multiplicando cada um dos elementos da mesma por um fator, quando transformamos todo o $R^2$, os fatores serão preservados.

Precisamos de um mesmo tipo de transformação que preserve fatores, porém, que seja aplicável a pontos e vetores, e não só a vetores como a linear o é. Esse tipo de transformação existe e é chamada de afim.

$$T: V \to W$$

$$\begin{cases} (1) : T(P + A) = T(P) + T(A); \\ (2) : T(k^1 * P) = k^1 * T(P); \end{cases}$$

# EXEMPLO

$P = (x,y)$ $A = (1,1)$ $T(P) = ?$ $T(A) = (0,1)$
$B = (0,0)$ $C = (1,0)$ $T(B) = (1,-1)$ $T(C) = (1,0)$

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = x \\ \alpha + \beta + 3\gamma = y \end{cases}$$

$$T(P) = \alpha * T(A) + \beta * T(B) + \gamma * T(C)$$

$$T(x,y) = y*(0,1) + (1-x)*(1,-1) + (x-y)*(1,0)$$

$$T(x,y) = (0,y) + (1-x,x-1) + (x-y,0)$$

$$P = \begin{pmatrix} y \\ x-y \\ 1-x \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = (1-y\ ,\ x+y-1)$$

# Qual a diferença entre transformação afim e linear?

Transformação linear é algo feito puramente com vetores na origem canônica, se formos aplicar a um ponto qualquer, irá tratá-lo como um vetor e o resultado por esse motivo será um vetor, ou seja, sem um local definido no espaço, apenas informação, transformação afim é o equivalente a uma t.l. somada a um ponto específico do espaço escolhido como“origem”, sendo assim tem um local específico no espaço independente do que estamos usando como referência (base do $R^2$,$R^3$...), ou seja, é um ponto.

A matriz da transformação linear não “suporta” uma soma, logo, é preciso a estender e fazer algo semelhante à uma gambiarra matemática para que ela funcione perfeitamente.

$$[T] = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 & tx \\ x^2 & y^2 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estendemos a matriz da transformação mais um grau de liberdade, como se fosse do $R^3$, e a matriz do ponto também. Pela propriedade da multiplicação de matrizes, a última coluna da primeira sempre será multiplicada pela última linha da segunda matriz, logo, desta forma, iremos somar o ponto que desejamos à matriz de transformação linear, virando uma afim.

$$[T]=\begin{pmatrix} x^1 & y^1 & tx \\ x^2 & y^2 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso esteja trabalhando com vetores, a última linha da matriz do vetor será 0, pois assim o ponto não será somado e o resultado continuará sendo um vetor como uma t.l. normal.

# Mudança de escala

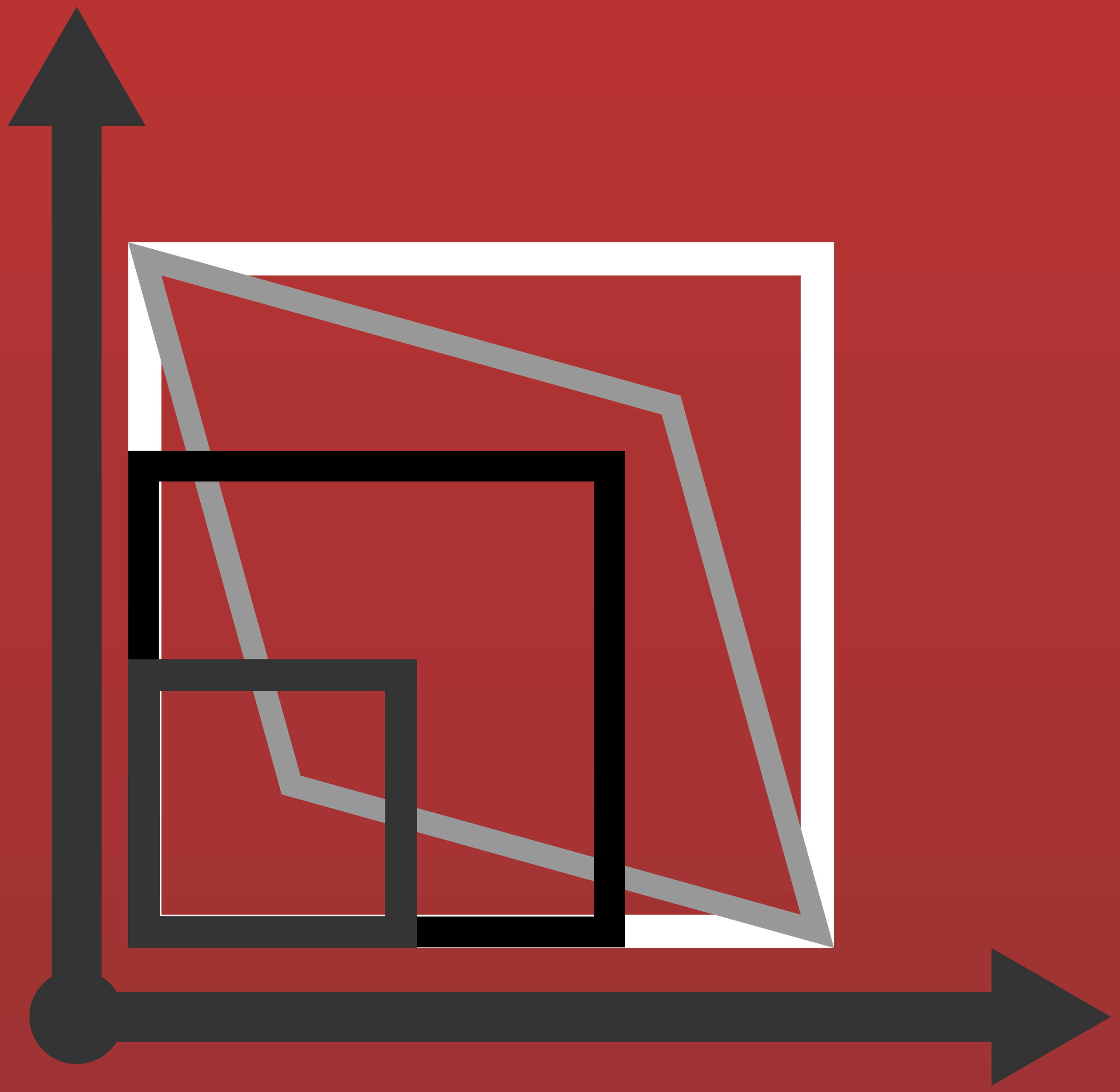
$$[T] = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$sx, sy > 0$

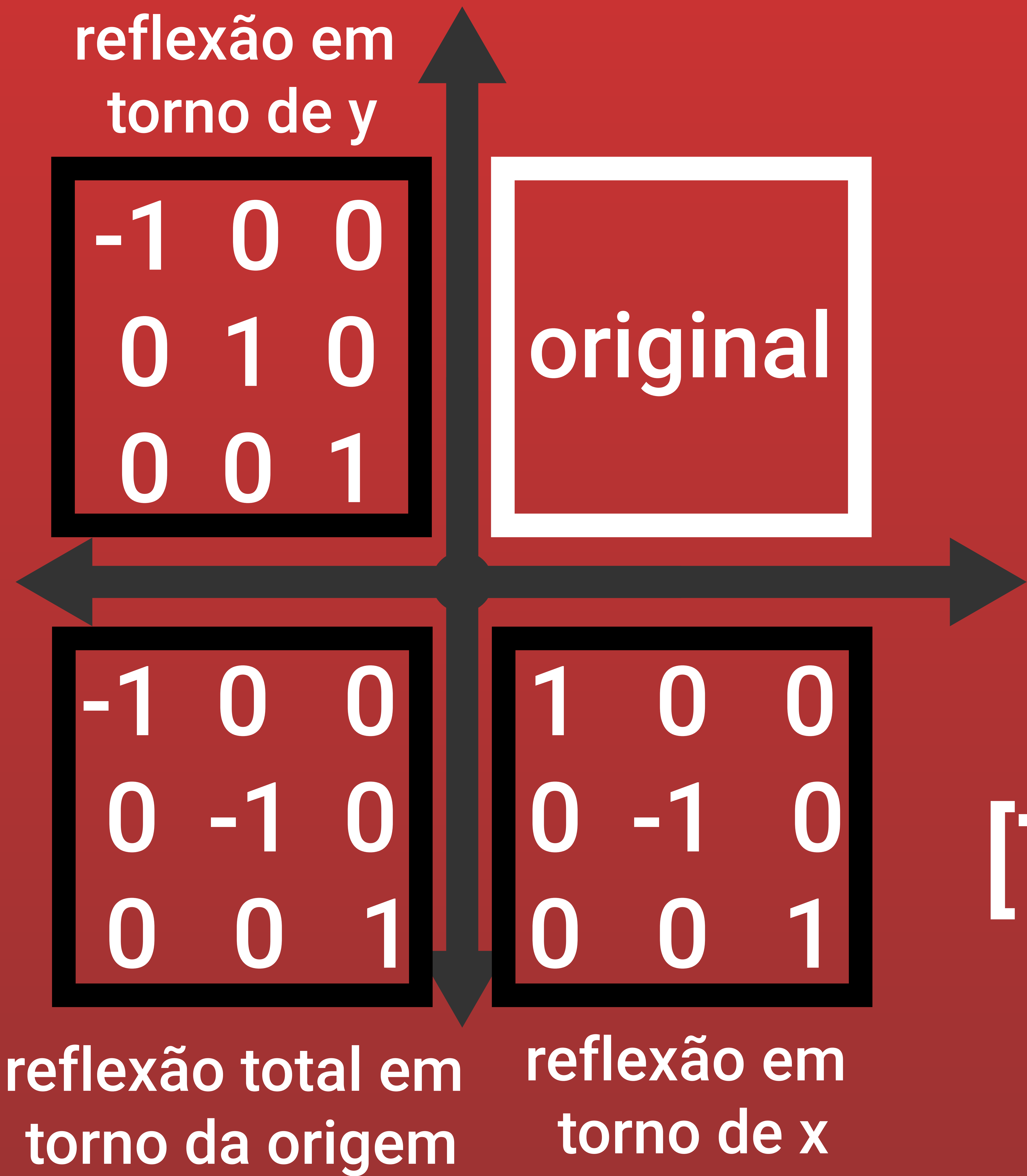
Dilatação: $sx = sy > 1$

Contração: $sx = sy < 1$

Deformação: $sx \neq sy$



# Reflexão




$$[T]=\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

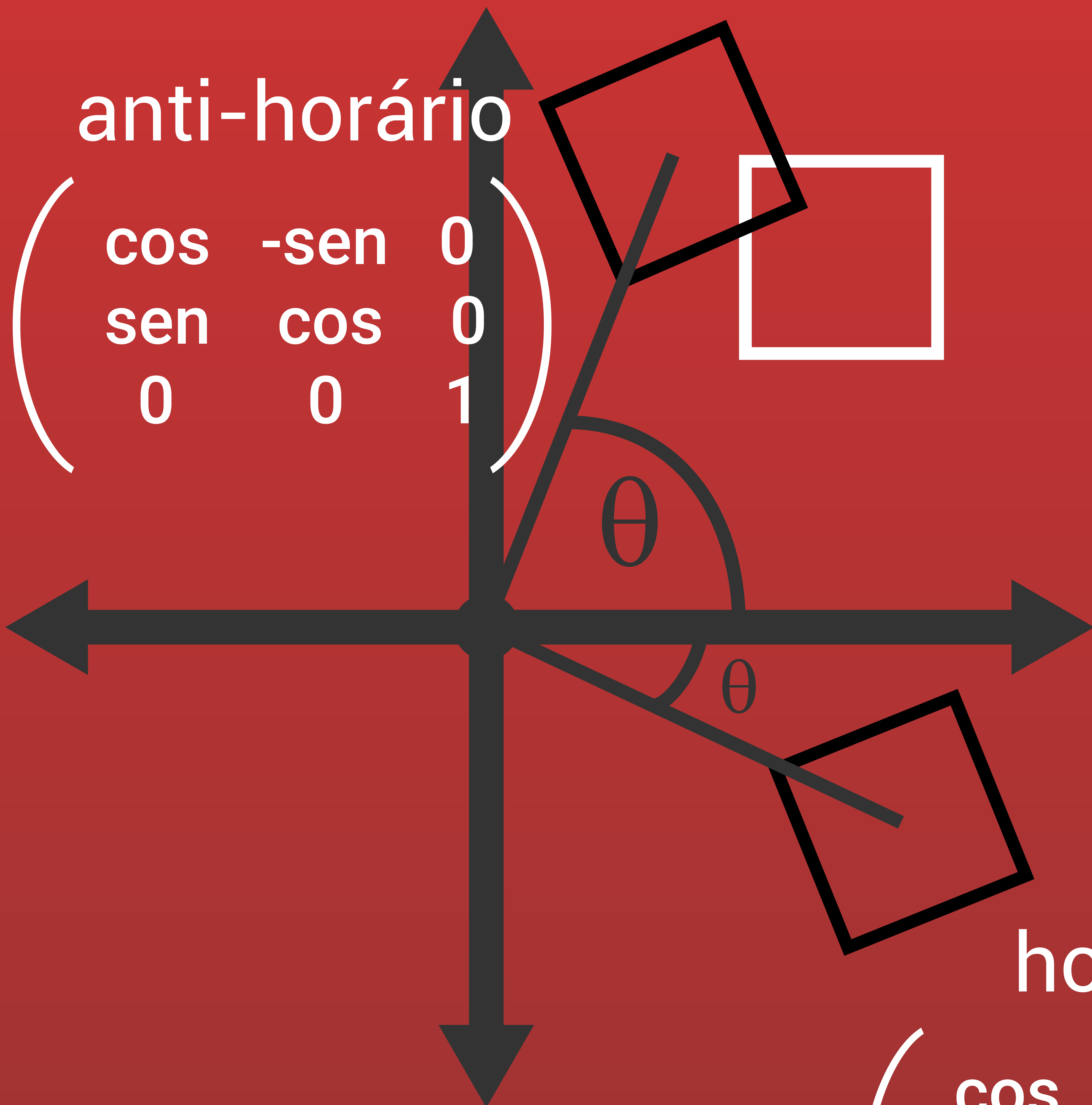
# Rotação

## (em torno da origem)

$$[T]=\begin{pmatrix} \text{cos} & \pm\text{sen} & 0 \\ \pm\text{sen} & \text{cos} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

anti-horário

$$\begin{pmatrix} \text{cos} & -\text{sen} & 0 \\ \text{sen} & \text{cos} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

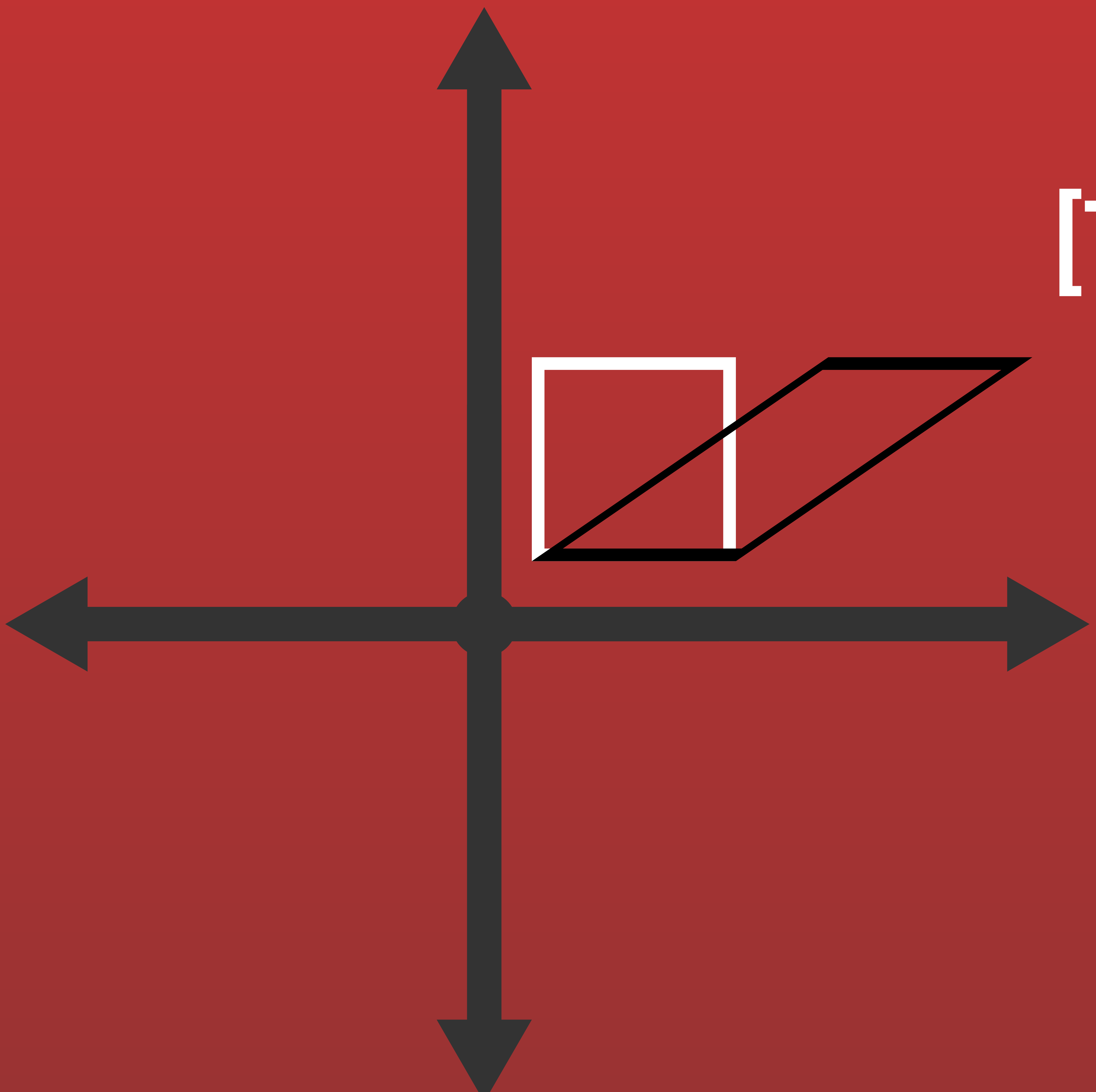



horário

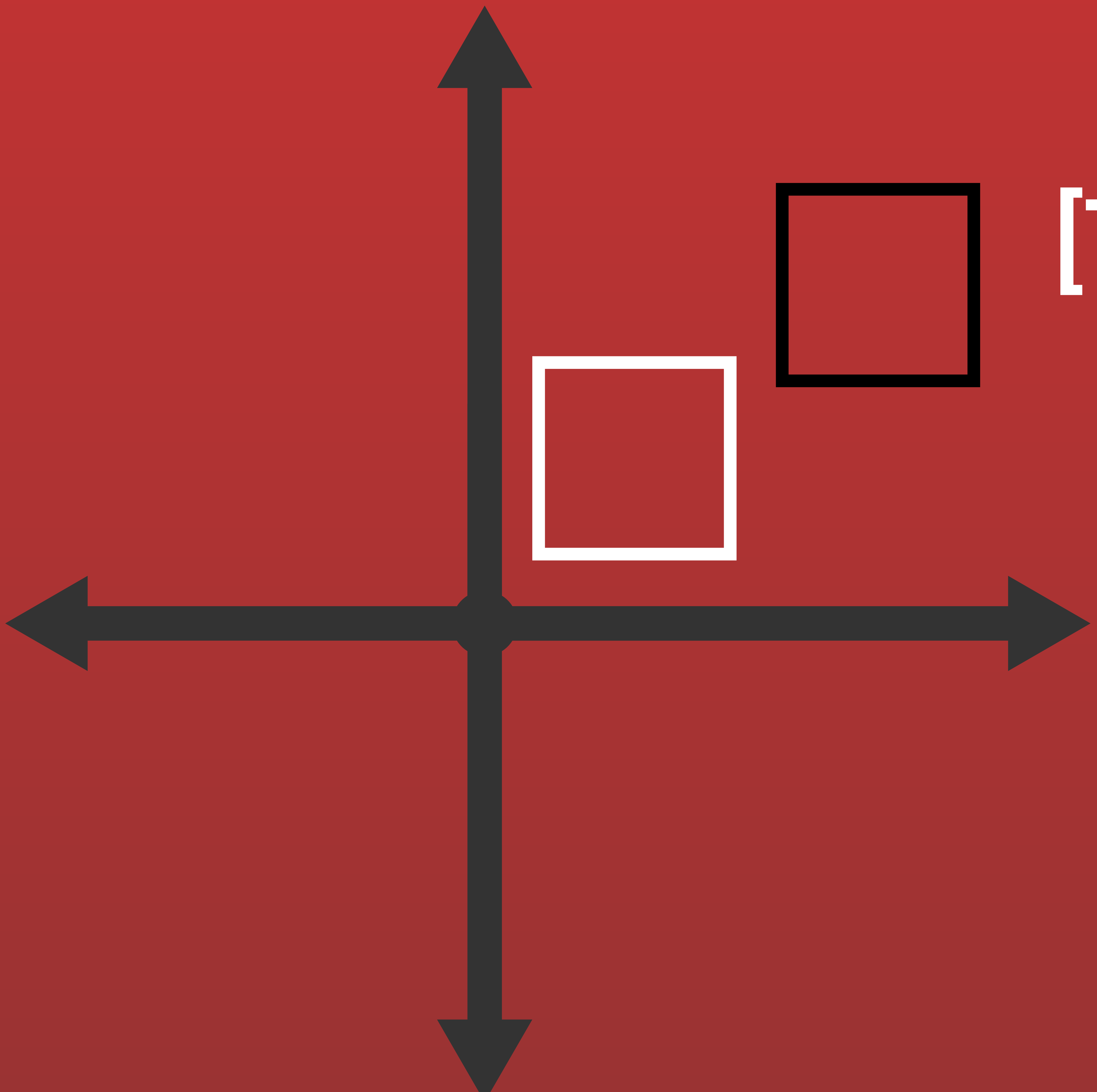
$$\begin{pmatrix} \text{cos} & \text{sen} & 0 \\ -\text{sen} & \text{cos} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Cisalhamento

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & kx & 0 \\ ky & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Translação



$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# $R^3$ Mudança de escala

$$[T] = \begin{pmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$sx, sy, sz > 0$

Dilatação: $sx = sy = sz > 1$

Contração: $sx = sy = sz < 1$

Deformação: $sx \neq sy$ ou $sx \neq sz$ ou $sy \neq sz$

# $R^3$ Reflexão

$$[T]=\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso a reflexão seja em torno de um plano, negative o ‘1’ do eixo que não participa deste plano.

Reflexão em torno de $\pi YZ$

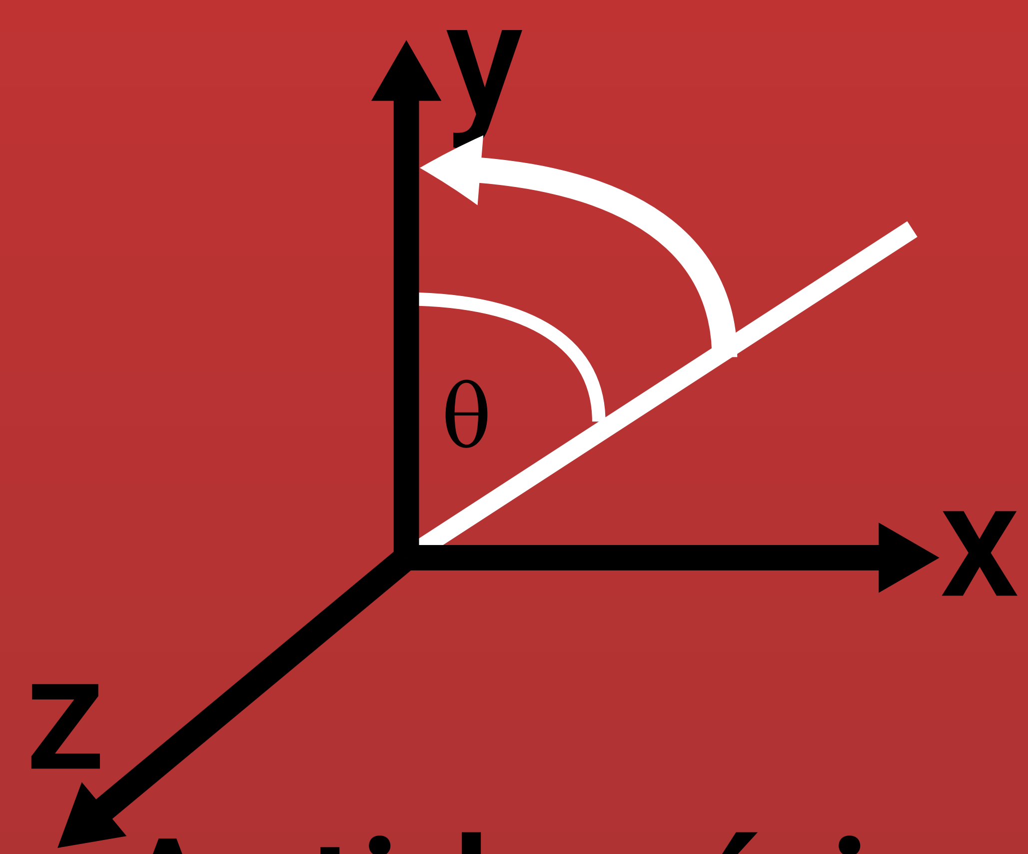
$$[T]=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso a reflexão seja em torno de um eixo, negative o ‘1’ do plano formado pelos eixos restantes.

Reflexão em torno de $Oz$

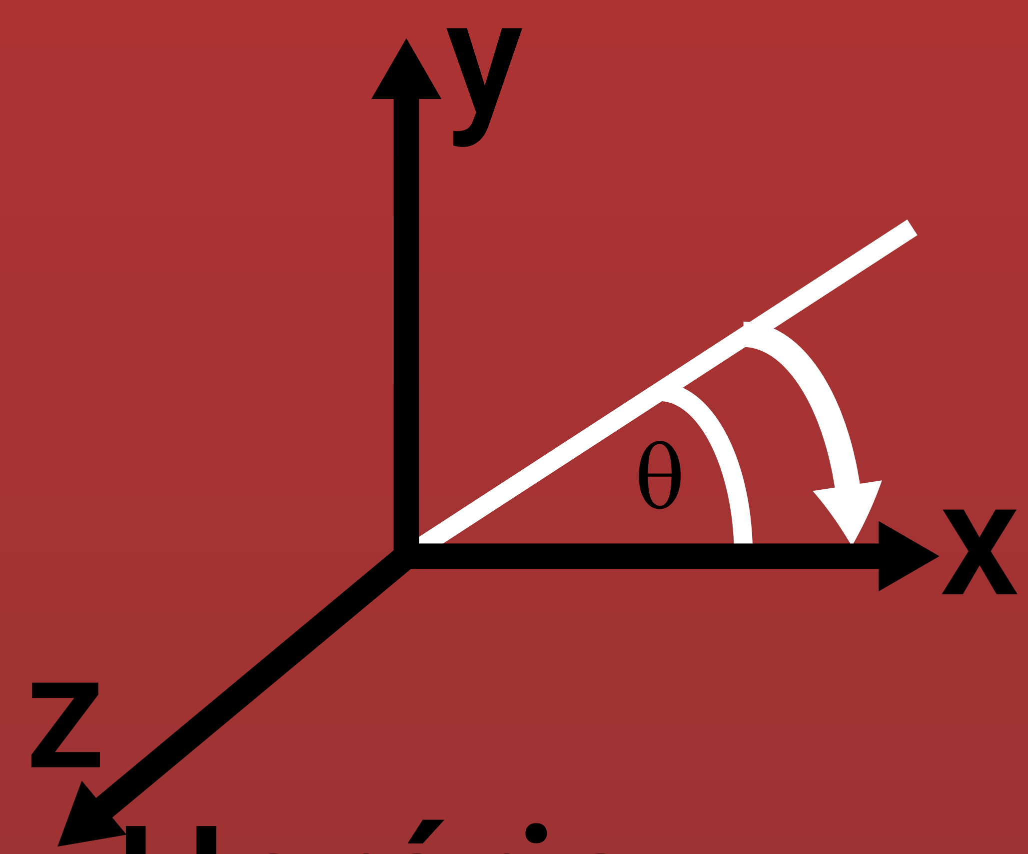
# $R^3$ Rotação em torno de Z

$$[T]=\begin{pmatrix} \cos & -\text{sen} & 0 & 0 \\ \text{sen} & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Anti-horária

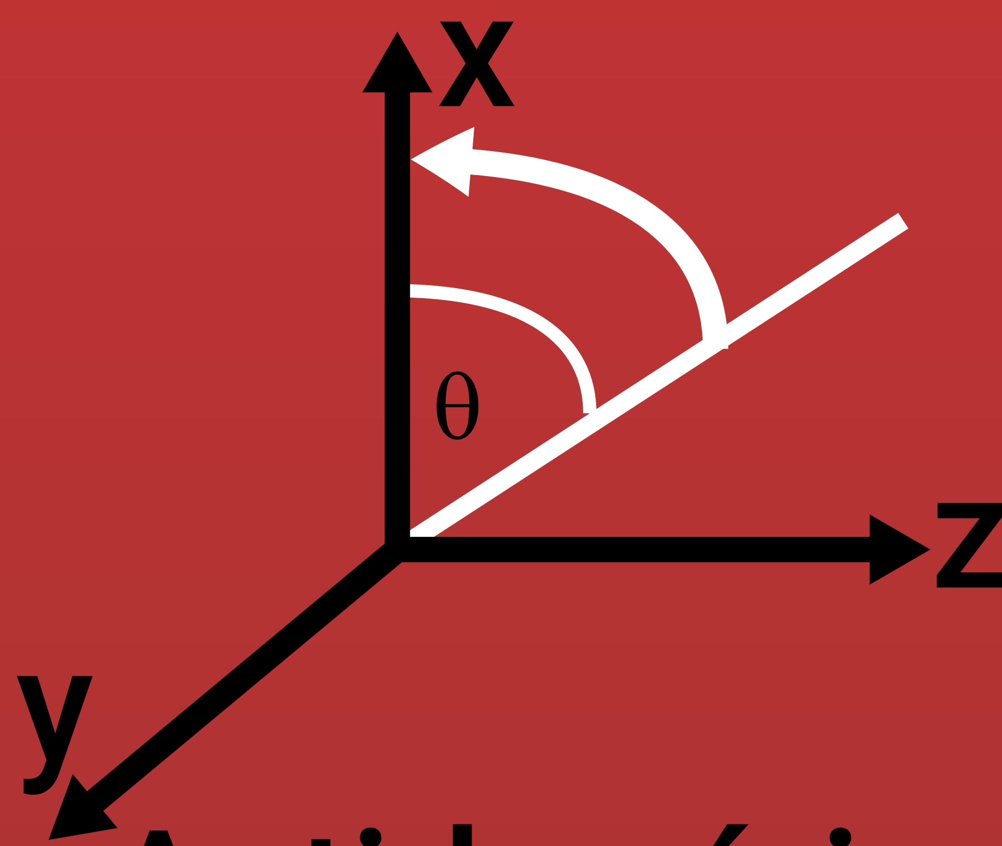
$$[T]=\begin{pmatrix} \cos & \text{sen} & 0 & 0 \\ -\text{sen} & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Horária

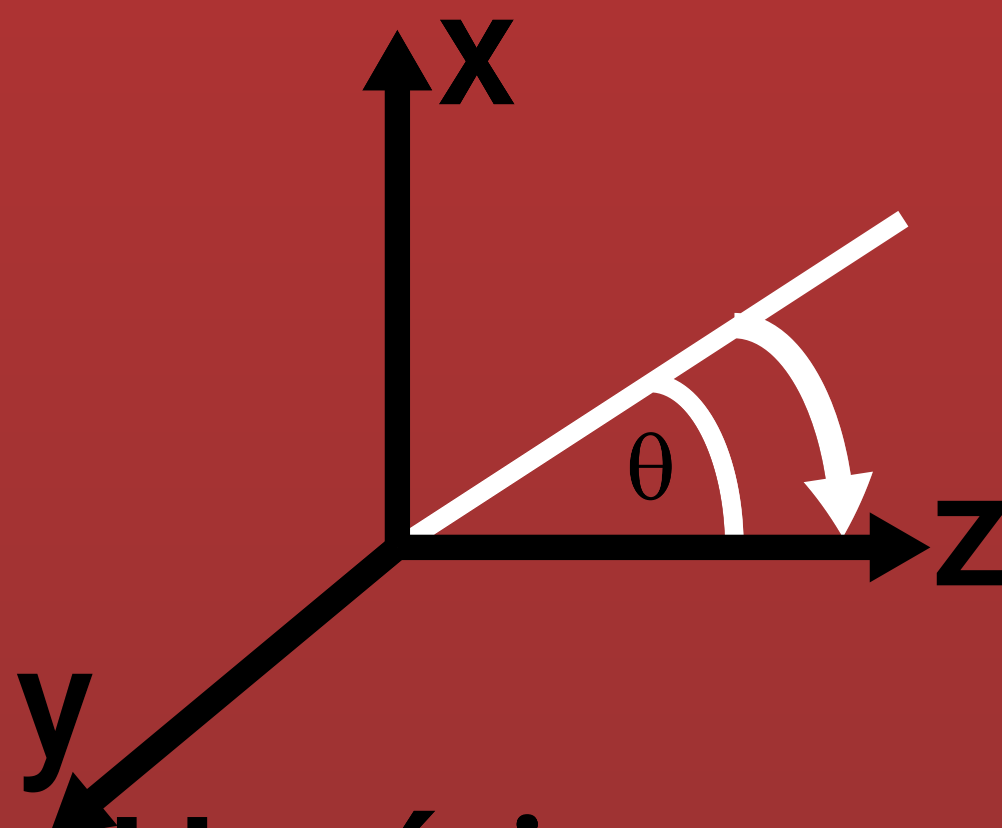
# $R^3$ Rotação em torno de Y

$$[T]=\begin{pmatrix} \cos & 0 & \text{sen} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} & 0 & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Anti-horária

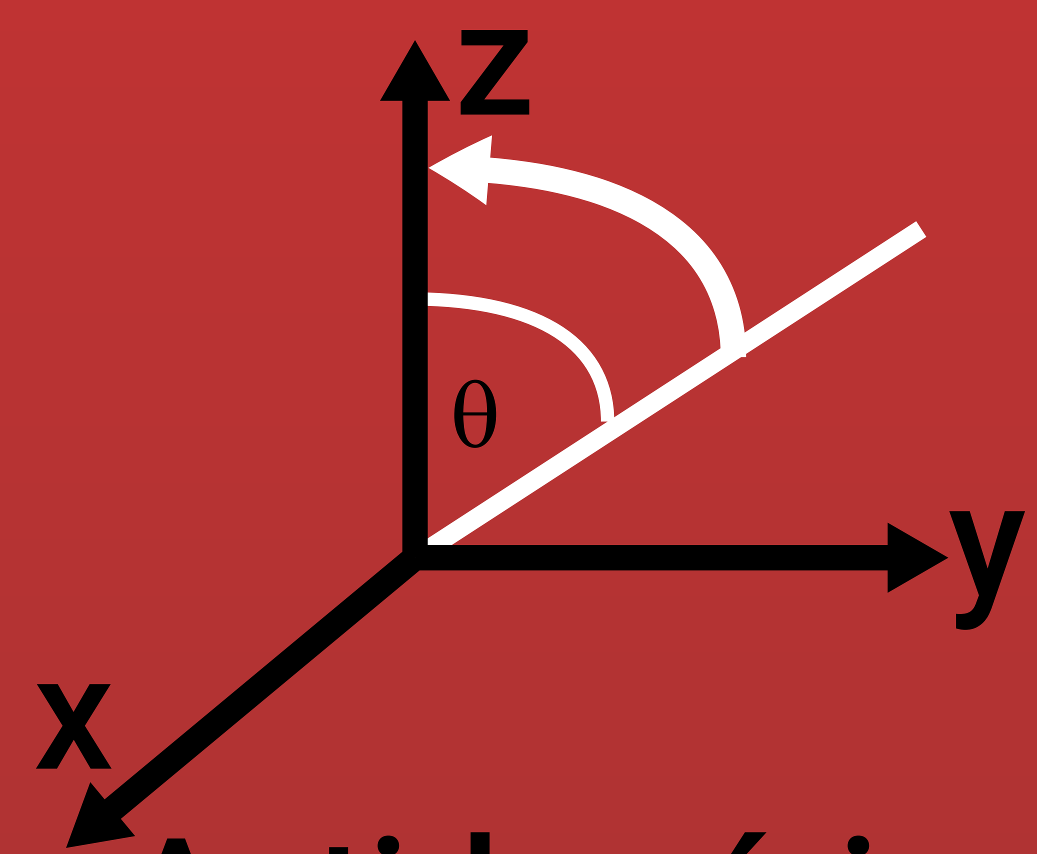
$$[T]=\begin{pmatrix} \cos & 0 & -\text{sen} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen} & 0 & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Horária

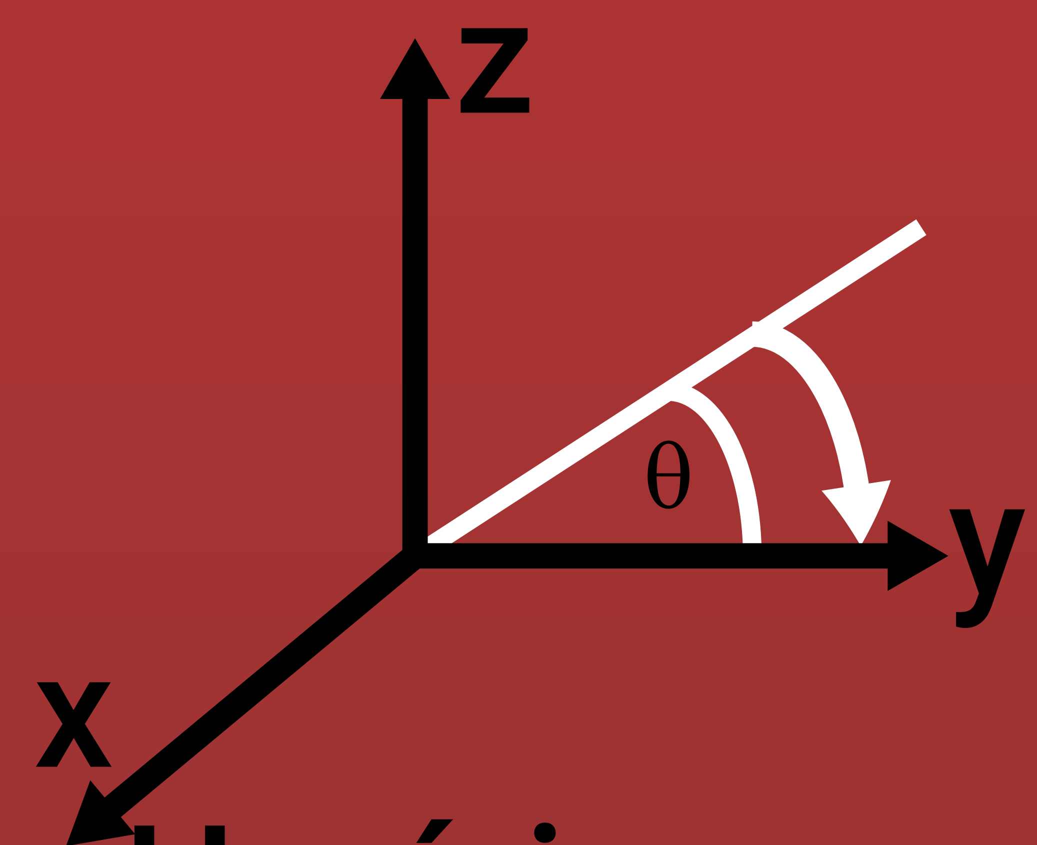
# $R^3$ Rotação em torno de X

$$[T]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\text{sen} & 0 \\ 0 & \text{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Anti-horária

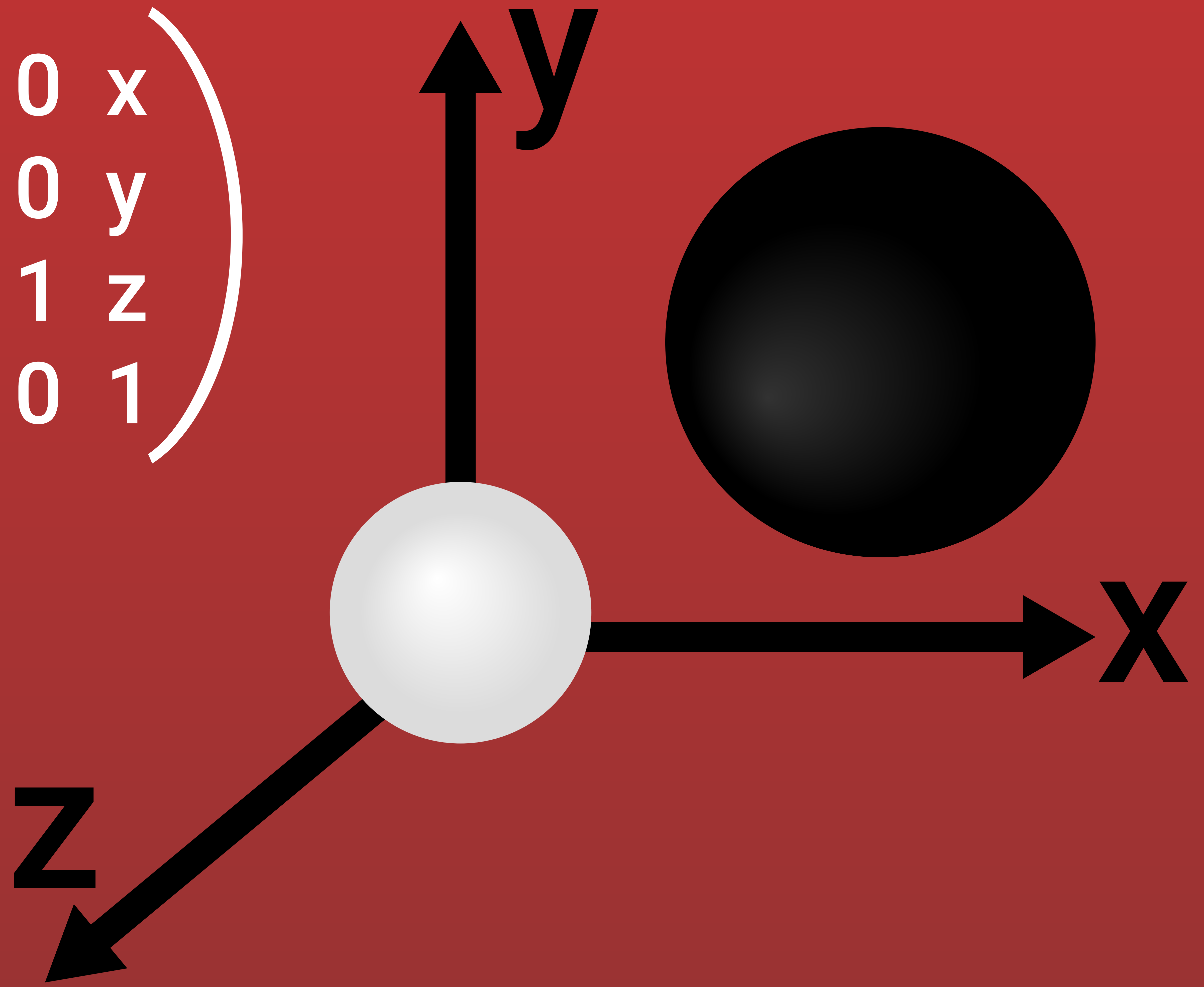
$$[T]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \text{sen} & 0 \\ 0 & -\text{sen} & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Horária

# $R^3$ Translação

$$[T]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Lembrando:
Quase 100% das vezes a transformação afim é um meio para fazer algo que não possui fatores canônicos (rotação em torno de uma reta que não é eixo), logo, ela tem a ‘ida’ e a ‘volta’, você precisará fazer a transformação e depois a sua inversa, para que todo o sistema esteja de acordo com a base canônica.