给 5 至 15 岁孩子出的数学题

Vladimir Arnold

2004 年春，我在巴黎写了这些题目．一些在巴黎居住的俄罗斯人要求我帮助他们的年轻孩子培养思想文化．这个在俄罗斯的传统超过了西方类似的传统．

我深信，这个文化最早是通过早期独立思考简单但不容易的问题来培养的，比如以下的问题 (我特别推荐问题 1, 3 和 13).

我的长期经验表明，在学校拖后腿的 C 级学生可以比优秀学生更好地解决这些问题，因为他们在课堂后面的智力 "堪察加" 的生存 "要求比管理帝国所需要的更多的能力", 正如 Figaro (费加罗) 在博马舍的戏 (Beaumarchais play) 中所说的那样．另一方面，A 级学生在这些问题上无法弄清楚 "什么东西要乘以什么"．我甚至注意到， 5 岁的孩子比那些被学校训练摧残的学龄儿童更能解决这样的问题，而相应地，这些学龄前儿童又比那些忙于死记硬背的大学生们更容易找到解答． (Nobel (诺贝尔) 奖或 Fields (菲尔兹) 奖得主在解决这些问题上是最糟糕的．)

1. 玛莎身上的钱买一本字母书差 7 戈比 [1), 美莎身上的钱买这本书差 1 戈比．她们把身上的钱合起来买这本书还是不够．问这本字母书多少钱？

2. 一个带有软木塞的瓶子售价为 1.1 美元，而瓶子本身比软木塞高出 10 美分．问软木塞值多少钱？

3. 一块砖的重量是一磅加半块砖的重量．问这块砖重多少磅？

4. 从一桶葡萄酒中取出一勺葡萄酒放入一杯茶 (未满) 里．之后，将等量的一勺玻璃杯混合液体倒入葡萄酒桶中．此时，每个容器里都有一定量的 "外来" 液体 (玻璃杯里的酒和桶里的茶). 问哪一种外来液体的体积更大：桶里的茶还是玻璃杯中的酒？

5. 两名老年妇女在黎明时离开，一名从 A 到 B, 另一名从 B 到 A. 她们 (沿着同一条路) 相向而行．她们在中午见面，但并没有停下来，并且她们每个人都以以前一样的速度继续前行．第 1 位女士在下午 4 点抵达 B, 第 2 位女士晚上 9 点抵达 A. 问她们是当天黎明几点出发的？

6. (在一个美国标准的测验中) 一个直角三角形的斜边是 10 英寸，此斜边上的高是 6 英寸．求此直角三角形的面积.

译自：EMS Newsletter, issue 98, December 2015, p. 14–20, Problems for children 5 to 15 years old, Vladimir Arnold, figure number 24.

Vladimir Arnold (阿诺尔德), 1937–2010, 苏联和俄罗斯著名数学家. 他第一个主要结果是他在 19 岁时解决的 Hilbert 第 13 问题．之后他最著名的结果是关于可积系统的 KAM 定理．除此之外，他在多个领域中做出了重要贡献，包括动力系统理论，突变理论，拓扑学，代数几何学，辛几何，微分方程，经典力学，流体动力学，奇点理论，并提出了 ADE 分类问题． Arnold 还是一位数学普及者．他是若干专著、教科书和大众数学书籍的作者．通过这些书，以及他的讲座和研讨会，他影响了许多数学家和物理学家.

1) 戈比是俄罗斯最小的货币单位.—— 译注

过去 10 年，美国高中生都能成功地解答这道题. 而一些从莫斯科来的俄罗斯学生却不能得到他们美国同伴的答案 (30 平方英寸). 这是为什么呢？

7. 维克多的姐妹比他的兄弟多 2 个. 问维克多父母的女儿比儿子多几个？

8. 南美洲有一个圆形的湖泊. 每年的 6 月 1 日，一朵王莲花出现在它的中心. (它的茎从湖底部升起，它的花瓣像睡莲一样躺在水面上.) 每天花的面积加倍，至 7 月 1 日，它终于覆盖整个湖泊，然后花瓣落下，其种子下沉. 问几月几号时，花的面积是湖泊面积的一半？

9. 一个农夫必须把一只狼，一只山羊和一棵白菜运过河. 但是这艘船太小了，他每次只能带这 3 个中的一个过河. 问他怎样才能把这 3 个都运过河去？ (狼不能和山羊单独呆在一起，山羊不能和白菜单独呆在一起.)

10. 白天，蜗牛在一根柱子上向上爬了 3 厘米. 在夜间，它睡着了，向下滑 2 厘米. 这根柱子有 10 米高，一个美味的甜点正在柱子顶端等待蜗牛. 问蜗牛要花多少天才能品尝到甜点？

11. 一个猎人离开他的帐篷向南走了 10 公里，然后向东直行，走了 10 公里，射杀了一头熊，然后转身向北走了 10 公里后发现了自己的帐篷. 问熊是什么颜色？这是在哪里发生的？

12. 今天中午 12 时发生满潮. (在同一地点) 满潮明天几点发生？

13. 两卷普希金的书，第 1 卷和第 2 卷，并排放在书架上. 每卷书的页面总厚度 (不包含封面和封底) 为 2 厘米，封面和封底各有 2 毫米厚. 书虫从第 1 卷第 1 页啃到第 2 卷的最后一页 (垂直于页面啃咬). 问书虫的轨迹有多长？ [这个拓扑问题有个令人难以置信的答案 ——4 毫米 —— 这对于院士来说是完全不可能的，但是一些学龄前儿童可以轻松应对.]

14. 从上面和从前面看，某个物体 (多面体) 的形状如下. 画出从侧面看它的形状. (多面体的隐藏边用虚线显示.)

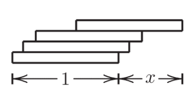
15. 有多少种方法将数字 64 分成 10 个自然数之和，其中每个自然数不超过 12? 只有加数顺序不同的和不能算作不同的和.

16. 有一些质地相同的块 (比如，多米诺骨牌). 我们把这些块堆放起来，使得最上面的块比最底下的块移出 x 长度. 问： x 最大可能是多少？

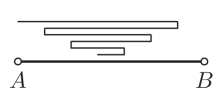
17. A 镇和 B 镇间的距离是 40 公里. 两名骑自行车的人从 A 和 B 同时离开相向而行，一个以 10 公里 / 小时的速度行驶，另一个以 15 公里 / 小时的速度行驶. 一只苍蝇与第 1 个骑手一起离开 A, 以 100 公里 / 小时的速度飞向第 2 个骑手. 苍蝇遇到第 2 个骑手时，触碰到他的额头，然后飞回到第 1 个骑手，碰到他的额头，再返回到第 2 个骑手，一直这样下去，直到两个骑手的额头碰撞并压扁苍蝇. 问：苍蝇一共飞行了多少公里？

俯视　前视

14 题



16 题



17 题

18. 瓦尼亚解决了一个关于两个学龄前[1]儿童的问题．在给定两个孩子年龄乘积的情况下，瓦尼亚必须找出他们的年龄 (这是整数).

瓦尼亚说这个问题不能解决．老师称赞他说得对，然后给这个问题增加了条件：大孩子的名字是佩蒂娅．这时瓦尼亚可以马上解决这个问题．现在请你解答这个题.

19. 整数 140 359 156 002 848 是否能被整数 4 206 377 084 整除？

20. 一块多米诺骨牌可以覆盖棋盘的两个方格．请用 31 块多米诺骨牌盖满一个除去左上和右下方格 (在同一对角线上) 的棋盘．(一个棋盘由 $8 \times 8 = 64$ 个方块组成.)

21. 一只毛毛虫想要从一个立方体房间地板的左前角滑到另一个角落 (天花板的右后角). 请找出沿着房间墙壁的最短路线.

22. 你有两个容量 5 升和 3 升的容器．测量出 1 升液体，并将液体留在一个容器中.

23. 家里有 5 个脑袋和 14 条腿．问家里有多少人，多少只狗？

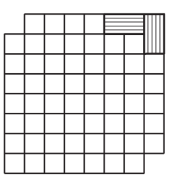
24. 在三角形 ABC 的边 AB, BC 和 CA 的外部构造 3 个等边三角形．证明这些等边三角形的中心 (在图上用星号标记) 构成一个等边三角形.

25. 用平面切割立方体得到的截面可能会是什么多边形？我们能得到五边形吗？七边形？正六边形吗？

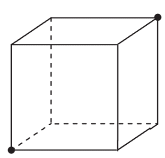
26. 画一条直线穿过一个立方体的中心，使得从立方体的 8 个顶点到它的距离的平方和为 (a) 最大， (b) 最小 (与其它这样的直线相比).

27. 一个正圆锥体沿着一条闭合的曲线被一个平面切割．圆锥体的两个内切球与平面相切，一个在 A 点，另一个在 B 点．在横截面上找到一个点 C, 使距离 $CA + CB$ 之和为 (a) 最大， (b) 最小.

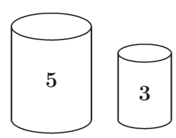
28. 地球表面投射到一个圆柱体上，这个圆柱体由与经线相切于赤道的直线构成．这个投影是沿着平行于赤道平面的光线作出的，并通过连接地球的北极和南极的地球轴线．问：法国的投影面积是否大于或小于法国的面积？



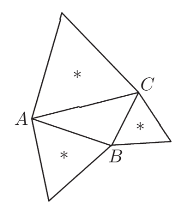
20 题



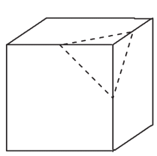
21 题



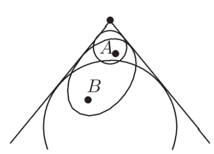
22 题



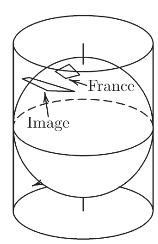
24 题



25 题



27 题



28 题

1) 美国的学龄前指的是不超过 5 岁的孩子.—— 译注

29. 证明：奇素数 p 除 2^{p-1} 的余数为 1 (例如：$2^2 = 3a+1, 2^4 = 5b+1, 2^6 = 7c+1, 2^{10}-1 = 1023 = 11\cdot 93$).

30. 将一根 10 厘米长的针随机扔到格子纸上. 纸上相邻线间距离也是 10 厘米. 重复 N (比如 100 万) 次. 问：多少次 (在百分之几的误差内) 针会落下与纸上的一条线相交？

人们可以用 $N=100$, 而不是 100 万次投掷来进行这个实验. (我 10 岁的时候做过这个实验.)

[这个问题的答案是令人惊讶的：$\frac{2}{\pi}N$. 而且，即使对于长度为 $a\cdot 10$ 厘米的弯曲针，在 N 次投掷中观察到的相交的次数也约为 $\frac{2a}{\pi}N$. 由此得到 $\pi \approx \frac{355}{113} \approx \frac{22}{7}$.]

31. 有些多面体只有三角形面. 例如某些 Plato (柏拉图) 立体：(正) 四面体 (4 面), 八面体 (8 面) 和二十面体 (20 面). 二十面体的面全等，有 12 个顶点，有 30 个边.

对于任何这样的立体图形 (具有三角形面的有界凸多面体), 面的个数是否等于顶点个数的两倍再减去 4?

32. 还有一个 Plato 立体 (总共有 5 个): 十二面体. 它是一个凸多面体，具有 12(正) 五边形面，20 个顶点和 30 条边 (其顶点是二十面体的各个面的中心).

将 5 个立方体内接于十二面体内，其顶点也是十二面体的顶点，其边是十二面体的面的对角线. (立方体有 12 条边，每条边落在十二面体的一个面上.) [这个构造由 Kepler (开普勒) 发明，用来描述他的行星模型.]

33. 两个正四面体可以内接于一个立方体中，使得它们的顶点也是立方体的顶点，它们的边是立方体面的对角线. 描述这两个四面体的相交部分.

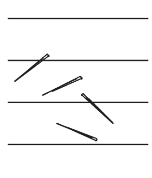
正方体体积和这两个四面体相交部分体积的比值是多少？

33 (之二). 给定正方体边上 3 个点，构造出通过这 3 点的平面与正方体的截面. [绘制平面与立方体相交的多边形.]

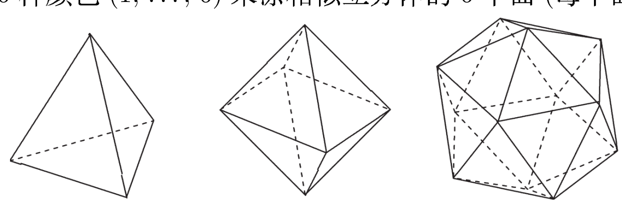
34. 四面体有多少个对称？立方体？八面体？二十面体？十二面体？图形的对称是这个图形保留长度的变换.

这些对称中有多少个是旋转，有多少个是平面的反射 (对上面 5 种多面体分别作答)?

35. 有多少种方法可以用 6 种颜色 $(1,\ldots,6)$ 来涂相似立方体的 6 个面 (每个面一种

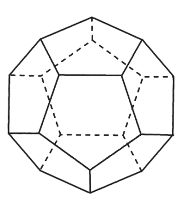


30 题

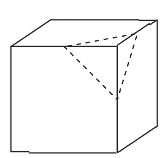


四面体 八面体 二十面体

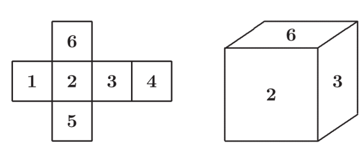
31 题



32 题



33 题



35 题

颜色), 以使得到的彩色立方体中没有两个是相同的 (也就是说, 没有两个可以通过旋转变换变成彼此)?

36. 有多少种不同的方法来排列 n 个对象？

对于 $n=3$, 有 6 种方式： (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1). 如果对象的个数是 $n=4$, $n=5$, $n=6$, $n=10$ 呢？

37. 一个立方体有 4 个主对角线 (连接其相对的顶点). 通过旋转立方体能得到这 4 个主对角线的多少种不同排列？

38. 一些整数和的立方减去这些整数的立方和. 得到的差总能被 3 整除吗？

39. 与 38 题类似. 问一些整数和的 5 次方与这些整数的 5 次方和之差总能被 5 整除吗？一些整数和的 7 次方与这些整数的 7 次方和之差总能被 7 整除吗？

40. 计算下式的和 (误差不超过正确答案的 1%)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

41. 如果两个多边形具有相等的面积，则可以将它们切割成有限个的子多边形，使得重新排列这些子多边形可以得到第 1 个和第 2 个多边形. 证明这个结论. [对于空间体而言情况并非如此：立方体和等体积的四面体不能通过这种方式得到！]

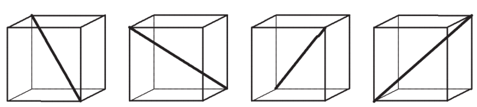
42. 一张方格纸上的 4 个格子点是一个平行四边形的顶点. 并且在这个平行四边形的边上及其内部无其它格子点. 证明这个平行四边形的面积等于方格纸一个方块的面积.

43. 假设在问题 42 中，一个平行四边形内部有 a 个格点，边上有 b 个格点. 求这个平行四边形的面积.

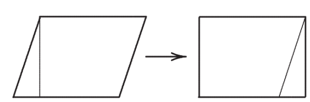
44. 在三维平行六面体中有类似与 43 题的结果吗？

45. Fibonacci (斐波那契)(“兔”) 数是序列 ($a_1=1$), 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., 对于任何 $n=1,2,\ldots$, 有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求 a_{100} 和 a_{99} 的最大公约数.

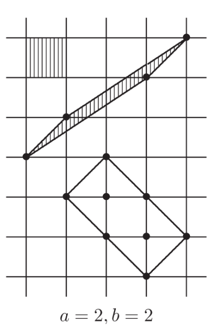
46. 沿不相交的对角线切割能将凸 n 边形切割成三角形. 不同的切割方式的个数称为 *Catalan* (卡塔兰) 数, 记为 $c(n)$. 例如， $c(4)=2$, $c(5)=5$, $c(6)=14$. 求 $c(10)$?



37 题

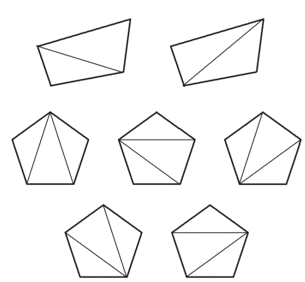


41 题



$a=2, b=2$

42 题



46 题

47. 有 n 支队参加一个锦标赛. 每场比赛之后, 负的队将被淘汰出局. 经过 $n-1$ 场比赛之后的胜者将成为锦标赛的冠军.

比赛的赛程可用以下符号记录 (例如)$((a,(b,c)),d)$. 这个记号表示有 4 支队参加. 首先 b 对阵 c, 然后赢家对阵 a, 最后第 2 场比赛的胜者对阵 d.

如果锦标赛有 10 支参赛队, 问有多少个不同的赛程安排?

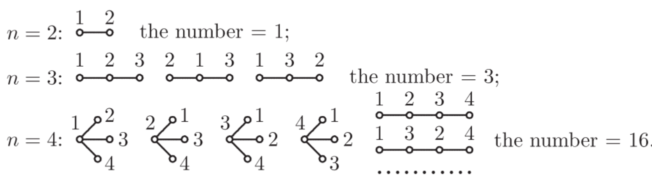
对于 2 支队参赛, 我们只有 (a,b) 这一个赛程.

对于 3 支队参赛, 则可能的赛程安排是 3 个: 它们是 $((a,b),c)$ 或 $((a,c),b)$ 或 $((b,c),a)$.

对于 4 支队参赛, 我们有 15 种可能的赛程安排:

$$(((a,b),c),d);\quad (((a,c),b),d);\quad (((a,d),b),c);\quad (((b,c),a),d);$$
$$(((b,d),a),c);\quad (((c,d),a),b);\quad (((a,b),d),c);\quad (((a,c),d),b);$$
$$(((a,d),c),b);\quad (((b,c),d),a);\quad (((b,d),c),a);\quad (((c,d),b),a);$$
$$((a,b),(c,d));\quad ((a,c),(b,d));\quad ((a,d),(b,c)).$$

48. 我们用 $n-1$ 条线段连接 n 个点 $1,2,\dots,n$ 组成一棵树. 有多少个不同的树? (即使是 $n=5$ 的情况也很有趣!)



49. 数字 $\{1,2,\dots,n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 称为 (长度为 n 的) 一条 *蛇*, 如果 $x_1<x_2>x_3<x_4>\cdots$.

例子.

$$n=2,\quad \text{只有}\quad 1<2,\qquad \text{蛇的条数}=1;$$
$$n=3,\quad \left.\begin{matrix}1<3>2\\2<3>1\end{matrix}\right\},\qquad \text{蛇的条数}=2;$$
$$n=4,\quad \left.\begin{matrix}1<3>2<4\\1<4>2<3\\2<3>1<4\\2<4>1<3\\3<4>1<2\end{matrix}\right\},\qquad \text{蛇的条数}=5.$$

求, 长度为 10 的蛇的条数.

50. 令 s_n 记长度为 n 的蛇的条数. 注意到

$$s_1=1,\ s_2=1,\ s_3=2,\ s_4=5,\ s_5=16,\ s_6=61.$$

证明正切函数的 Taylor (泰勒) 展式:

$$\tan x = 1\frac{x^1}{1!}+2\frac{x^3}{3!}+16\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}s_{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

51. 求以下级数之和

$$1+1\frac{x^2}{2!}+5\frac{x^4}{4!}+61\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}s_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

52. 对 $s>1$, 证明下面的等式 [1]

$$\prod_{p=2}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

(左边对所有素数 p 做乘积，右边的对所有自然数 n 求和.)

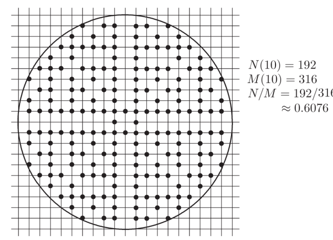
53. 求以下级数之和

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(证明级数和等于 $\frac{\pi^2}{6}$, 或近似等于 $\frac{3}{2}$.)

54. 求分数 $\frac{p}{q}$ 是既约分数的概率.

这个概率是这样定义的：在圆盘 $p^2+q^2\leq R^2$ 中，我们用数 $N(R)$ 来记圆盘中的所有满足坐标 p 和 q 互素的整点 (p,q) 的个数，用 $M(R)$ 来记圆盘中整点的总数 $(M\sim\pi R^2)$. 这个概率等于 $\lim_{R\to\infty}N(R)/M(R)$.



55. 在 45 题中，我们定义了 Fibonacci 数列. 求当 n 趋向于无穷时，比值 a_{n+1}/a_n 的极限：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \ldots.$$

答案: “黄金分割率”,$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$.

这个比率正是一张明信片两边的比例. 在明信片上剪去以此明信片短边为边长的正方形后剩下长方形的两边比率也近似于黄金分割率.

黄金比例与正五边形和正五角星有什么关系？

56. 计算下面无限连分数的和.

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{\ddots}}}}},$$

其中 $a_{2k}=1, a_{2k+1}=2$.

即，求当 n 趋向于无穷时，下式的极限

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}.$$

57. 以多项式形式表示： $y=\cos 3(\arccos x)$, $y=\cos 4(\arccos x)$, $y=\cos n(\arccos x)$, 其中 $|x|\leq 1$.

1) 原文的右边级数求和的下标误为 $n+1$.—— 译注

58. 计算 n 个 n 次单位复根的 k 次方之和.

59. 在 (x,y) 平面上，作出下面参数方程定义的曲线：

$$\{x=\cos 2t,\, y=\sin 3t\},\quad \{x=t^3-3t,\, y=t^4-2t^2\}.$$

60. 计算下面的积分 (误差不超过答案的 10%)

$$\int_0^{2\pi} \sin^{100} x dx.$$

61. 计算下面的积分 (误差不超过答案的 10%)

$$\int_1^{10} x^x dx.$$

62. 求单位球面上角度为 (α,β,γ) 的球面三角形的面积. (球面三角形的边是大圆; 即，过球心的平面与球面的交线.)

答案: $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$. (例如，对于 3 个内角都是直角的球面三角形， $S=\pi/2$, 即球面总面积的 1/8.)

63. 一个半径为 r 的圆在半径为 1 的圆内滚动 (不滑动). 分别对下述情况绘制滚动圆上一个点的整个轨迹 (该轨迹称为内摆线): $r=1/3$, $r=1/4$, $r=1/n$, $r=p/q$, $r=1/2$.

64. 在一个有 n 个学生的班级里，估计两个同学生日相同的概率. 这会是一个大概率事件，还是小概率？

答案: 当学生人数 (远) 大于某个数 n_0 时，概率是 (非常) 大的; 当学生人数 (远) 小于 n_0 时，概率是 (非常) 小的. 这题真正问的是 n_0 具体是多少 (当概率 $p\approx 1/2$ 时)?

65. Snell (斯涅尔) 定律描述的是入射角 α 满足方程 $n(y)\sin\alpha=$ 常数，其中 α 是光束与分层介质法线所成的夹角， $n(y)$ 是层高 y 处的折射率. (如果我们假设光速在真空中为 1, 量 n 与介质中的光速成反比例. 在水中， $n=4/3$.)

画出在介质 “沙漠上的空气” 中光线的轨迹，其中折射率 $n(y)$ 在某个高度达到最大值. (见下面的右图)

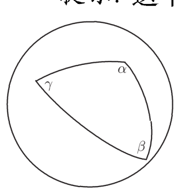
(对于那些理解物体发出光线的轨迹是怎样与它们的像联系的人，这道题的解答可以解释海市蜃楼现象.)

66. 在一个锐角三角形 ABC 中做出一个周长最小的内接三角形 KLM (顶点 K 在 AB 边上， L 在 BC 边上， M 在 CA 边上).

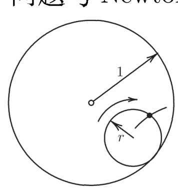
提示: 非锐角三角形的答案并不像锐角三角形的答案那样完美.

67. 计算函数 $1/r$ 在以点 (X,Y,Z) 为圆心，半径为 R 的球面上的均值，其中 r 是点 (x,y,z) 到原点的距离， $r^2=x^2+y^2+z^2$.

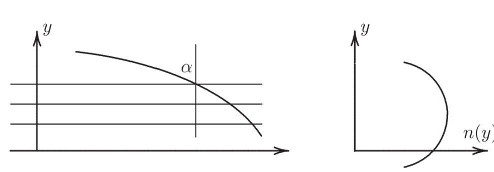
提示: 这个问题与 Newton (牛顿) 的万有引力定律和电场里的库仑定律有关. 在问题



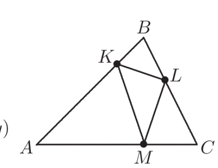
62 题



63 题



65 题



66 题

的二维版本中，给定的函数应该用 $\ln r$ 来代替，球面用圆来代替.

68. 利用 $2^{10}=1024\approx 10^3$ 不难得到 $\log_{10}2\approx 0.3$. 估计近似值 0.3 和 $\log_{10}2$ 的差，并且计算 $\log_{10}2$ (保留小数点后 3 位).

69. 用与 68 题相同的精度计算 $\log_{10}4, \log_{10}8, \log_{10}5, \log_{10}50, \log_{10}32, \log_{10}128, \log_{10}125$, 和 $\log_{10}64$.

70. 利用 $7^2\approx 50$ 计算 $\log_{10}7$ 的近似值.

71. 假设已知 $\log_{10}64$ 和 $\log_{10}7$ 的值，求 $\log_{10}9, \log_{10}3, \log_{10}6, \log_{10}27$ 和 $\log_{10}12$.

72. 利用 $\ln(1+x)\approx x$ (其中 ln 指的是 $\log_e$), 再利用关系 $\log_{10}a=\frac{\ln a}{\ln 10}$ 和之前计算的 $\log_{10}a$ (例如， $a=128/125, a=1024/1000$ 等) 的值来计算 $\log_{10}e$ 和 $\ln 10$.

花半个小时计算后，利用第 67—71 题的结果，我们可以得到任意数的 4 位的对数表，其中用到了对数乘积公式和以下公式 [1]

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

(这也是 Newton 编制 40 位对数表的方法！)

73. 考虑 2 的幂次序列： 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ... 在前 12 个数字中， 4 个以 1 开头，没有以 7 开头的.

证明，当 $n\to\infty$ 时，每个数字都可能成为 $2^m\ (0\le m\le n)$ 的首位数，并且它们出现的频率为： $p_1\approx 30\%,\ p_2\approx 18\%,\ \ldots\ p_9\approx 4\%$.

74. 验证 3 的幂次序列的首位数： $1,3,9,2,8,2,7,\ldots$ 证明，每个数在 3 的幂次序列中出现的频率和它在 2 的幂次序列出现的频率一致．求出 $p_1,\ldots,p_9$ 的准确公式.

提示: 一个数 x 的首位数由 $\log_{10}x$ 的小数部分决定．因此，我们需要考虑 ma 小数部分的序列，其中 $a=\log_{10}2$.

证明这些小数部分在区间 $[0,1]$ 上是一致分布的： n 个 ma 的小数部分， $0\le m<n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_n(A)}{n}=\{A\text{的长度}\}$, 其中 A 是一个子区间， $k_n(A)$ 是子区间包含的 n 个小数部分序列落在子区间 A 中的个数.

75. 令 $g\colon M\to M$ 是一个有界域到自身的一对一的光滑映射，g 保持这个域的面积 (体积，在高维的情形).

证明，在 M 中任一点的任意领域 U 中，对于任意数 N, 存在一个点 x 和某个整数 $T>N$, 使得 $g^Tx\in U$ (回归定理).

76. 令 M 是一个环面 (坐标为 $(\alpha(\operatorname{mod}2\pi),\beta(\operatorname{mod}2\pi))$, 并令 $g(\alpha,\beta)=(\alpha+1,\beta+\sqrt{2})$. 证明，对于 M 上任一点 x, 序列 $\{g^T(x)\}, T=1,2,\ldots$ 在环面 M 上稠密.

77. 记号同 76 题．令

$$g(\alpha,\beta)=(2\alpha+\beta,\alpha+\beta)(\operatorname{mod}2\pi).$$

证明，环面上存在一个处处稠密的子集，由 x 的周期点构成 (即，对某个整数 $T(x)>0$, 有 $g^{T(x)}=x$).
(下转 365 页)

1) Euler (欧拉) 常数 $e=2.71828\cdots$. 其严格定义为 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. 它也等于级数 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ 之和．它也可以通过公式 $\lim_{n\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 来定义.—— 原注