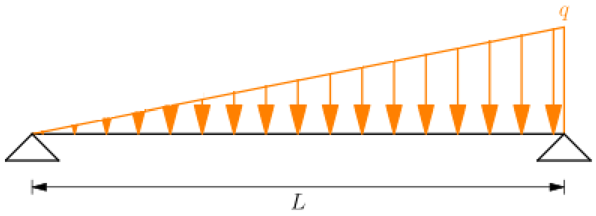
Introducción a elementos finitos
Segundo Parcial I-2016

1. Resolver la estructura con E, I, A constantes por el método de Ritz



Solución

La solución exacta es un polinomio de quinto grado, se puede plantear seis campos de aproximación

$$\begin{aligned}
v(x) &= \alpha_0 \\
v(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x \\
v(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \\
v(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \\
v(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \\
v(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5
\end{aligned}$$

para la solución se usará un polinomio de tercer grado.

Aproximación del campo de desplazamientos

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

Reemplazando $v(0) = 0$ y $v(L) = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0)^2 + \alpha_3(0)^3 &= 0 \\
\alpha_0 + \alpha_1(L) + \alpha_2(L)^2 + \alpha_3(L)^3 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0 \\
\alpha_1 &= -(\alpha_2 L + \alpha_3 L^2)
\end{aligned}$$

La aproximación del campo de desplazamientos será

$$v = -(\alpha_2 L + \alpha_3 L^2)x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

El momento es

$$M = E\,I\,\frac{d^2 v}{dx^2}$$

La curvatura es

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 x$$

La carga en la viga es

$$f = \frac{q}{L} x$$

El funcional de energía es

$$\pi = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx - \int_0^L f\,v\,dx$$

Reemplazando

$$\pi = \int_0^L \frac{EI}{2}\left(2\alpha_2 + 6\alpha_3 x\right)^2 dx - \int_0^L \frac{q}{L} x\left[-(\alpha_2 L + \alpha_3 L^2)x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3\right] dx$$

Integrando

$$\pi = 2EIL\,\alpha_2^2 + \frac{qL^3}{12}\,\alpha_2 + 6EIL^2\,\alpha_2\alpha_3 + 6EIL^3\,\alpha_3^2 + \frac{2qL^4}{15}\,\alpha_3$$

Minimizando el funcional

$$\frac{d\pi}{d\alpha_2} = 4EIL\,\alpha_2 + 6EIL^2\,\alpha_3 + \frac{qL^3}{12} = 0$$
$$\frac{d\pi}{d\alpha_3} = 6EIL^2\,\alpha_2 + 12EIL^3\,\alpha_3 + \frac{2qL^4}{15} = 0$$

Resolviendo

$$\alpha_2 = -\frac{qL^2}{60EI}$$
$$\alpha_3 = -\frac{qL}{360EI}$$

Reemplazando en α_1

$$\alpha_1 = \frac{7qL^3}{360EI}$$

Reemplazando en v

$$v = \frac{q}{360EI}\left(7L^3x - 6L^2x^2 - Lx^3\right)$$

2. Integrar

$$\int u\,\frac{d^4v}{dx^4}\,dx$$

Solución

Para la solución se usará el teorema de Gauss

$$\int a\,\frac{\partial b}{\partial x_i}\,dx = ab - \int b\,\frac{\partial a}{\partial x_i}\,dx + c$$

Integrando

$$\int u\,\frac{d^4v}{dx^4}\,dx = u\,\frac{d^3v}{dx^3} - \int \frac{d^3v}{dx^3}\,\frac{du}{dx}\,dx$$

Integrando el segundo término

$$\int \frac{du}{dx}\,\frac{d^3v}{dx^3}\,dx = \frac{du}{dx}\,\frac{d^2v}{dx^2} - \int \frac{d^2v}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dx^2}\,dx$$

Reemplazando

$$\int u\,\frac{d^4v}{dx^4}\,dx = u\,\frac{d^3v}{dx^3} - \left(\frac{du}{dx}\,\frac{d^2v}{dx^2} - \int \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2v}{dx^2}\,dx\right)$$

Simplificando

$$\int u\,\frac{d^4v}{dx^4}\,dx = u\,\frac{d^3v}{dx^3} - \frac{du}{dx}\,\frac{d^2v}{dx^2} + \int \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2v}{dx^2}\,dx + c$$

3. Defina trabajo virtual

Solución

Es el trabajo que realiza la fuerza F debido a un desplazamiento virtual δr

$$\delta W = F\,\delta r$$