Ecuación de conservación de masa

Introducción

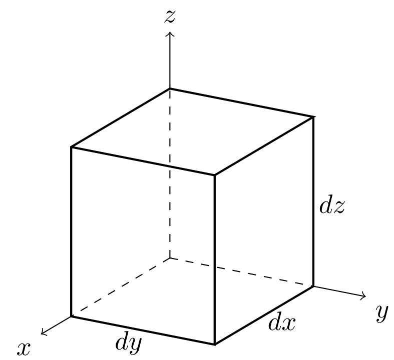

Figura 1: Elemento diferencial

Esta ecuación representa la tasa neta de masa que atraviesa un elemento diferencial.

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} \tag{1}$$

Demostración

La tasa de masa de entrada o salida será

$$\dot{m} = \rho\, \vec{v}\, A$$

La masa será

$$m = \rho\, V$$

La masa de un elemento diferencial será

$$m = \rho\, dx\, dy\, dz$$

Derivando respecto al tiempo

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\, dx\, dy\, dz \tag{2}$$

La tasa neta de masa en la dirección x será

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \rho\, u(x)\, dy\, dz - \rho\, u(x+dx)\, dy\, dz \tag{3}$$

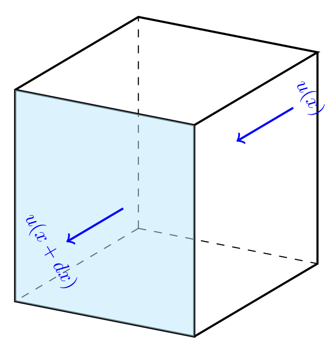

Figura 2: Velocidad en la dirección x

La tasa neta de masa en la dirección y será

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \rho\, v(y)\, dx\, dz - \rho\, v(y+dy)\, dx\, dz \tag{4}$$

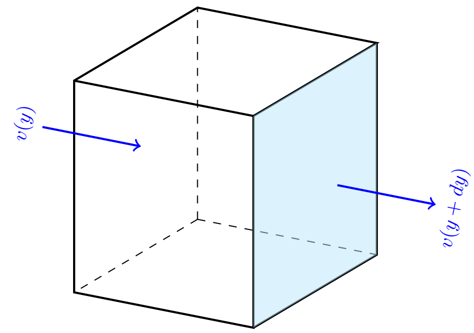

Figura 3: Velocidad en la dirección y

La tasa neta de masa en la dirección z será

$$\dot{m}_{\text{entrada}} - \dot{m}_{\text{salida}} = \rho\, w(z)\, dx\, dy - \rho\, w(z+dz)\, dx\, dy \tag{5}$$

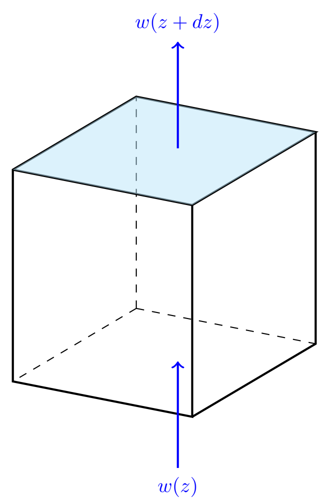

Figura 4: Velocidad en la dirección z

Sumando las ecuaciones (3), (4) y (5), luego igualando a la ecuación (2)

$$\frac{d\rho}{dt}\, dx\, dy\, dz = \rho\, u(x)\, dy\, dz - \rho\, u(x+dx)\, dy\, dz + \rho\, v(y)\, dx\, dz - \rho\, v(y+dy)\, dx\, dz + \rho\, w(z)\, dx\, dy - \rho\, w(z+dz)\, dx\, dy$$

Dividiendo entre $dx\, dy\, dz$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho\, u(x)}{dx} - \frac{\rho\, u(x+dx)}{dx} + \frac{\rho\, v(y)}{dy} - \frac{\rho\, v(y+dy)}{dy} + \frac{\rho\, w(z)}{dz} - \frac{\rho\, w(z+dz)}{dz}$$

Reordenando y agrupando

$$\frac{d\rho}{dt} = -\left[\frac{\rho\, u(x+dx) - \rho\, u(x)}{dx}\right] + \left[\frac{\rho\, v(y+dy) - \rho\, v(y)}{dy}\right] + \left[\frac{\rho\, w(z+dz) - \rho\, w(z)}{dz}\right]$$

Usando la definición de derivada

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

Reordenando

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

Si la densidad es constante

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

Referencias

[1] Bengt Andersson; et al. *Computational fluid dynamics for engineers.* Cambridge University Press, 2012.