Diseño de vigas de armado por el método de ductilidad aplicado a la norma ACI-318

ClaudioVZ

21 de junio de 2016

Resumen

El presente trabajo describe la formulación del método de ductilidad o método inverso y su aplicación.

1. Viga simplemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85 f'_c a b = A_s f_y$$

Dividiendo entre $f'_c b d$

$$0.85 \frac{a}{d} = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

Despejando la cuantía geométrica

$$\rho = 0.85 \frac{a}{d} \frac{f'_c}{f_y} \tag{1}$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85 f'_c a b \Big(d - \frac{a}{2} \Big)$$

Dividiendo entre $f'_c b d^2$

$$\frac{M_n}{f'_c b d^2} = 0.85 \frac{a}{d^2} \Big(d - \frac{a}{2} \Big)$$

La anterior ecuación la denominaremos momento adimensional Q

$$Q = 0.85 \frac{a}{d^2} \Big(d - \frac{a}{2} \Big) \tag{2}$$

Factor de forma

$$\varphi = \frac{bh}{bh} = 1$$

Momento ultimo

$$M_u = 1.2 \big(M_{pp} + M_m \big) + 1.6 M_v$$

Momento debido al peso propio

$$M_{pp} = \frac{\gamma A L^2}{F}$$

Reemplazando

$$M_u = 1.2\frac{\gamma A L^2}{F} + 1.2M_m + 1.6M_v$$

El momento de diseño es

$$\phi M_n = 1.2\frac{\gamma A L^2}{F} + 1.2M_m + 1.6M_v$$

Reemplazando el momento nominal en función del momento adimensional

$$\phi Q f'_c b d^2 = 1.2\frac{\gamma A L^2}{F} + 1.2M_m + 1.6M_v$$

Despejando A

$$A = \frac{1.2M_m + 1.6M_v}{\phi\frac{Qf'_c bd^2}{\varphi h} - 1.2\frac{\gamma L^2}{F}}$$

Haciendo una conversión a las unidades comúnmente usadas

$$A = \frac{100^2\left(1.2C_m + 1.6C_v\right)}{100\phi\frac{Qf'_c bd^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma} \tag{3}$$

Algoritmo para diseño

Datos : h en cm, r en cm, L en m, f'_c en kg/cm^2, f_y en kg/cm^2, γ en kg/m^3, C_m en kg/m, C_v en kg/m, ϵ_s, F

Resultado : b en cm, A_s en cm^2

inicio

$d = h - r$

$c = \frac{0.0003}{\varepsilon_s + 0.003}d$

$a = \beta_1 c$

$Q = 0.85\frac{a}{d^2}\left(d - \frac{a}{2}\right)$

$\varphi = 1$

$A = \frac{100^2\left(1.2C_m + 1.6C_v\right)}{100\phi\frac{Qf'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma}$

$b = \frac{A}{\varphi h}$

$\rho = 0.85\frac{a}{d}\frac{f'_c}{f_y}$

$A_s = \rho b d$

fin

Algoritmo 1: Viga simplemente reforzada

2. Viga T simplemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85f'_c\left[ab_w + h_f\left(b - b_w\right)\right] = A_s f_y$$

Dividiendo entre $f'_c b_w d$, también se puede usar $f'_c bd$[1]

$$\frac{0.85}{d}\left[a + h_f\left(\frac{b}{b_w} - 1\right)\right] = \rho\frac{f_y}{f'_c}$$

La relación entre bases será

$$B = \frac{b}{b_w} \tag{4}$$

Reemplazando

$$\frac{0.85}{d}\big[a + h_f\big(B-1\big)\big] = \rho\frac{f_y}{f'_c}$$

Despejando la cuantía geométrica

$$\rho = 0.85\frac{f'_c}{f_y d}\big[a + h_f\big(B-1\big)\big] \tag{5}$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85 f'_c\Big[ab\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + h_f\big(b - b_w\big)\Big(d - \frac{h_f}{2}\Big)\Big]$$

Dividiendo entre $f'_c b_w d^2$

$$Q = \frac{0.85}{d^2}\Big[a\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + h_f\big(B-1\big)\Big(d - \frac{h_f}{2}\Big)\Big] \tag{6}$$

Factor de forma, también se puede usar bh[1]

$$\varphi = \frac{b_w\big(h - h_f\big) + b h_f}{b_w h} = 1 + \frac{h_f}{h}\big(B-1\big) \tag{7}$$

Algoritmo para diseño

Datos : h_f en cm, h en cm, r en cm, B, L en m, f'_c en kg/cm^2, f_y en kg/cm^2, γ en kg/m^3, C_m en kg/m, C_v en kg/m, ϵ_s, F

Resultado : b en cm, A_s en cm^2

inicio

$d = h - r$

$c = \frac{0.0003}{\varepsilon_s + 0.003} d$

$a = \beta_1 c$

$Q = \frac{0.85}{d^2}\Big[a\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + h_f\big(B-1\big)\Big(d - \frac{h_f}{2}\Big)\Big]$

$\varphi = 1 + \frac{h_f}{h}\big(B-1\big)$

$A = \frac{100^2\big(1.2C_m + 1.6C_v\big)}{100\phi\frac{Q f'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma}$

$b_w = \frac{A}{\varphi h}$

$b = b_w B$

$\rho = 0.85\frac{f'_c}{f_y d}\big[a + h_f\big(B-1\big)\big]$

$A_s = \rho b_w d$

fin

Algoritmo 2: Viga T simplemente reforzada

3. Viga doblemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85 f'_c\big(ab - A'_s\big) + A'_s f_y = A_s f_y$$

Dividiendo entre bd

$$0.85 f'_c\frac{a}{d} + \rho'\big(f_y - 0.85\big) = \rho f_y$$

La relación entre cuantías será

$$P = \frac{\rho}{\rho'} \tag{8}$$

Reemplazando y despejando la cuantía geométrica

$$\rho' = \frac{0.85 f'_c a}{d\big[f_y\big(P-1\big)+0.85 f'_c\big]} \tag{9}$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85 f'_c\big(ab - A'_s\big)\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + A'_s f_y\big(d - d'\big)$$

Dividiendo entre $f'_c b d^2$

$$Q = \frac{0.85}{d}\Big[\Big(\frac{a}{d} - \rho'\Big)\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + \rho' \frac{f_y}{f'_c}\Big(1 - \frac{d'}{d}\Big)\Big] \tag{10}$$

Algoritmo para diseño

Datos : h en cm, r en cm, P, L en m, f'_c en kg/cm^2, f_y en kg/cm^2, γ en kg/m^3, C_m en kg/m, C_v en kg/m, ϵ_s, F

Resultado : b en cm, A_s en cm^2

inicio

- $d = h - r$
- $c = \frac{0.0003}{\varepsilon_s + 0.003} d$
- $a = \beta_1 c$
- $\rho' = \frac{0.85 f'_c a}{d\big[f_y\big(P-1\big)+0.85 f'_c\big]}$
- $Q = \frac{0.85}{d}\Big[\Big(\frac{a}{d} - \rho'\Big)\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + \rho' \frac{f_y}{f'_c}\Big(1 - \frac{d'}{d}\Big)\Big]$
- $\varphi = 1$
- $A = \frac{100^2\big(1.2 C_m + 1.6 C_v\big)}{100\phi \frac{Q f'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma}$
- $b = \frac{A}{\varphi h}$
- $A'_s = \rho' b d$
- $A_s = P A'_s$

fin

Algoritmo 3: Viga doblemente reforzada

4. Viga T doblemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85 f'_c\big[a b_w - A'_s + h_f\big(b - b_w\big)\big] + A'_s f_y = A_s f_y$$

Dividiendo entre $b_w d$

$$0.85 \frac{f'_c}{d}\Big[a\frac{b}{b_w} + h_f\Big(\frac{b}{b_w} - 1\Big)\Big] + \rho'\big(f_y - 0.85 f'_c\big) = \rho f_y$$

Reemplazando la relación de bases y cuantías, luego despejando la cuantía

$$\rho' = \frac{0.85 f'_c\big[aB + h_f\big(B-1\big)\big]}{d\big[f_y\big(P-1\big)+0.85 f'_c\big]} \tag{11}$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85 f'_c\Big[\big(ab - A'_s\big)\Big(d - \frac{a}{2}\Big) + h_f\big(b - b_w\big)\Big(d - \frac{h_f}{2}\Big)\Big] + A'_s f_y\big(d - d'\big)$$

Dividiendo entre $f'_c b_w d^2$

$$Q = \frac{0.85}{d}\left[\left(\frac{a}{d}\frac{b}{b_w} - \rho'\right)\left(d - \frac{a}{2}\right) + \frac{h_f}{d}\left(\frac{b}{b_w} - 1\right)\left(d - \frac{h_f}{2}\right)\right] + \rho'\frac{f_y}{f_c'}\left(1 - \frac{d'}{d}\right)$$

Reemplazando la relación de bases

$$Q = \frac{0.85}{d}\left[\left(\frac{a}{d}B - \rho'\right)\left(d - \frac{a}{2}\right) + \frac{h_f}{d}(B-1)\left(d - \frac{h_f}{2}\right)\right] + \rho'\frac{f_y}{f_c'}\left(1 - \frac{d'}{d}\right) \tag{12}$$

Algoritmo para diseño

Datos : h_f en cm, h en cm, r en cm, B, P, L en m, f_c' en kg/cm^2, f_y en kg/cm^2, γ en kg/m^3, C_m en kg/m, C_v en kg/m, ϵ_s, F

Resultado : b en cm, A_s en cm^2

inicio

$d = h - r$

$c = \frac{0.0003}{\varepsilon_s + 0.003}d$

$a = \beta_1 c$

$\rho' = \frac{0.85 f_c'\left[aB + h_f(B-1)\right]}{d\left[f_y(P-1) + 0.85 f_c'\right]}$

$Q = \frac{0.85}{d}\left[\left(\frac{a}{d}B - \rho'\right)\left(d - \frac{a}{2}\right) + \frac{h_f}{d}(B-1)\left(d - \frac{h_f}{2}\right)\right] + \rho'\frac{f_y}{f_c'}\left(1 - \frac{d'}{d}\right)$

$\varphi = 1 + \frac{h_f}{h}(B-1)$

$A = \frac{100^2(1.2C_m + 1.6C_v)}{100\phi\frac{Q f_c' d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma}$

$b_w = \frac{A}{\varphi h}$

$b = b_w B$

$A_s' = \rho' b_w d$

$A_s = P A_s'$

fin

Algoritmo 4: Viga T doblemente reforzada

5. Aplicación

5.1. Viga simplemente reforzada

```python
def beta1(f_c):
    beta = 0.85 - (0.05*((f_c-280)/70))
    if beta < 0.65:
        beta = 0.65
    if beta > 0.85:
        beta = 0.85
    return beta

def viga_simple(h, r, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
    altura h en centímetros
    recubrimiento r  en centímetros
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
    densidad del hormigón gamma en kg/m^3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
```

```
    divisor en la fórmula de momento F
    """
    d = h - r
    c = (0.003 * d)/(epsilon_s + 0.003)
    beta_1 = beta1(f_c)
    a = beta_1 * c
    Q = 0.85 * (a/d**2) * (d - (a/2))
    varphi = 1
    phi = 0.9
    A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
        - (1.2 * gamma))
    b = A/(varphi*h)
    rho = 0.85 * (a/d) * (f_c/f_y)
    A_s = rho * b * d

    print('d =', d, 'cm')
    print('c =', c, 'cm')
    print('a =', a, 'cm')
    print('Q =', Q)
    print('A =', A, 'cm^2')
    print('b =', b, 'cm')
    print('rho =', rho)
    print('A_s =', A_s, 'cm^2')

    return None

h = 30 # cm
r = 3 # cm
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 1000 # kg/m
Cv = 1500 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

viga_simple(h, r, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)
```

```
d = 27 cm
c = 10.125 cm
a = 8.60625 cm
Q = 0.22775683593749996
A = 728.4361498713952 cm^2
b = 24.28120499571317 cm
rho = 0.013546875
A_s = 8.88123012101015 cm^2
```

5.2. Viga T simplemente reforzada

```
def viga_T_simple(h_f, h, r, B, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
```

```
    altura del ala h_f en centímetros
    altura h en centímetros
    recubrimiento r  en centímetros
    relación de bases B
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
    densidad del hormigón gamma en kg/m^3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
    divider en la fórmula de momento F
    """
    d = h - r
    c = (0.003 * d)/(epsilon_s + 0.003)
    beta_1 = beta1(f_c)
    a = beta_1 * c
    Q = (0.85 / d**2) * ((a * (d - (a/2))) + (h_f * (B - 1) * (d - (h_f/2))))
    varphi = 1 + ((h_f/h) * (B - 1))
    phi = 0.9
    A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
        - (1.2 * gamma))
    b_w = A/(varphi*h)
    b = b_w * B
    rho = 0.85 * (f_c/f_y) * (a + h_f * (B - 1))
    A_s = rho * b_w * d

    print('d =', d, 'cm')
    print('c =', c, 'cm')
    print('a =', a, 'cm')
    print('Q =', Q)
    print('varphi =', varphi)
    print('A =', A, 'cm^2')
    print('b =', b, 'cm')
    print('b_w =', b_w, 'cm')
    print('rho =', rho)
    print('A_s =', A_s, 'cm^2')

    return None

h_f = 5 # cm
h = 20 # cm
r = 3 # cm
B = 3
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 1000 # kg/m
Cv = 1500 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8
```

```
viga_T_simple(h_f, h, r, B, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)

d = 17 cm
c = 6.375 cm
a = 5.41875 cm
Q = 0.6542274241727941
varphi = 1.5
A = 635.1716390739601 cm^2
b = 63.51716390739601 cm
b_w = 21.172387969132004 cm
rho = 0.655296875
A_s = 235.8613944318166 cm^2
```

5.3. Viga doblemente reforzada

```
def viga_doble(h, r, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
    altura h en centímetros
    recubrimiento r  en centímetros
    relación de cuantias P
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
    densidad del hormigón gamma en kg/m^3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
    dividor en la fórmula de momento F
    """
    d = h - r
    c = (0.003 * d)/(epsilon_s + 0.003)
    beta_1 = beta1(f_c)
    a = beta_1 * c
    rho_prime = (0.85 * f_c * a) / (d * (((f_y * (P - 1))) + (0.85*f_c)))
    rho = P * rho_prime
    Q = (0.85 / d) * ((((a/d) - rho_prime) * (d - (a/2))) + (rho_prime * (f_y/f_c) * (1 - (r/d))))
    varphi = 1
    phi = 0.9
    A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
        - (1.2 * gamma))
    b = A/(varphi*h)
    A_s_prime = rho_prime * b *d
    A_s = P * A_s_prime

    print('d =', d, 'cm')
    print('c =', c, 'cm')
    print('a =', a, 'cm')
    print('Q =', Q)
    print('A =', A, 'cm^2')
    print('b =', b, 'cm')
    print('rho_prime =', rho_prime)
    print('rho =', rho)
```

```
    print('A\'_s =', A_s_prime, 'cm^2')
    print('A_s =', A_s, 'cm^2')

    return None

h = 40 # cm
r = 3 # cm
P = 4
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 2000 # kg/m
Cv = 3000 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

viga_doble(h, r, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)
```

```
d = 37 cm
c = 13.875 cm
a = 11.79375 cm
Q = 0.2264552439047538
A = 1023.2858599287972 cm^2
b = 25.58214649821993 cm
rho_prime = 0.004452547247329498
rho = 0.017810188989317993
A'_s = 4.214511490942877 cm^2
A_s = 16.85804596377151 cm^2
```

5.4. Viga T doblemente reforzada

```
def viga_T_doble(h_f, h, r, B, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
    altura del ala h_f en centímetros
    altura h en centímetros
    recubrimiento r  en centímetros
    relación de bases B
    relación de cuantias P
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
    densidad del hormigón gamma en kg/m^3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
    dividor en la fórmula de momento F
    """
    d = h - r
    c = (0.003 * d)/(epsilon_s + 0.003)
    beta_1 = beta1(f_c)
    a = beta_1 * c
```

```
    rho_prime = (0.85 * f_c * ((a*B) + h_f * (B - 1))) / (d * (((f_y * (P - 1))) + (0.85*f_c)))
    rho = P * rho_prime
    Q = (0.85 / d) * ((((a/d)*B + rho_prime) * (d - (a/2))) + ((h_f/d) * (B - 1) * (d - (h_f/2)))) \
       + (rho_prime * (f_y/f_c) * (1 - (r/d)))
    varphi = 1 + ((h_f/h) * (B - 1))
    phi = 0.9
    A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
        - (1.2 * gamma))
    b_w = A/(varphi*h)
    b = b_w*B
    A_s_prime = rho_prime * b_w * d
    A_s = P * A_s_prime

    print('d =', d, 'cm')
    print('c =', c, 'cm')
    print('a =', a, 'cm')
    print('Q =', Q)
    print('A =', A, 'cm^2')
    print('b =', b, 'cm')
    print('b_w =', b_w, 'cm')
    print('rho_prime =', rho_prime)
    print('rho =', rho)
    print('A\'_s =', A_s_prime, 'cm^2')
    print('A_s =', A_s, 'cm^2')

    return None

h_f = 5 # cm
h = 20 # cm
r = 3 # cm
B = 2 # cm
P = 5
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 3000 # kg/m
Cv = 4000 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

viga_T_doble(h_f, h, r, B, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)

d = 17 cm
c = 6.375 cm
a = 5.41875 cm
Q = 0.8370664241548891
A = 1129.1421269577684 cm^2
b = 90.33137015662147 cm
b_w = 45.16568507831074 cm
rho_prime = 0.009794372294372295
rho = 0.04897186147186147
A'_s = 7.520282087984964 cm^2
```

```
A_s = 37.60141043992482 cm^2
```

Referencias

[1] Diego Miramontes De León. Método directo de diseño por peso mínimo de secciones de concreto reforzado en flexión. 2013.