

Funciones de forma Lagrangianas

Generación de funciones usando matrices

ClaudioVZ

Estudiante de Ingeniería Civil
Facultad de Ciencias y Tecnología
Universidad Mayor de San Simón

26 de julio de 2013

Resumen

El presente trabajo describe los pasos para generar funciones de forma bidimensionales y tridimensionales mediante multiplicación matricial.

Notación

- $l^{(1)}$ Función de forma unidimensional Lagrangiana
- $l^{(2)}$ Función de forma bidimensional Lagrangiana
- $l^{(3)}$ Función de forma tridimensional Lagrangiana

1. Funciones de forma unidimensionales

1.1. Definición

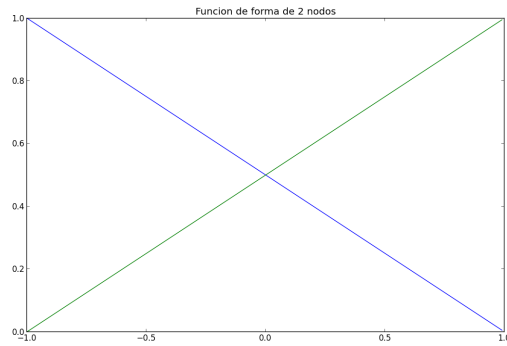
Las funciones de forma Lagrangianas [1] son polinomios con dominio $-1 \leq x \leq 1$, la fórmula para generarlos es la siguiente:

$$l_j^{(n)} = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

1.2. Ejemplo $l^{(1)}$

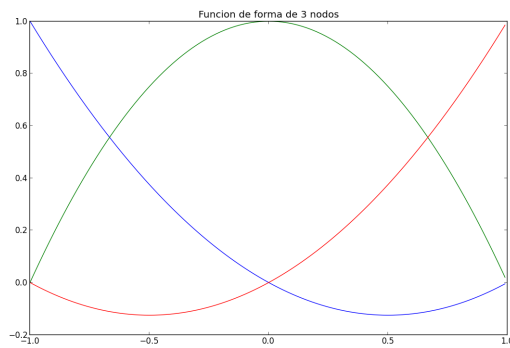
Función de forma Lagrangiana unidimensional de 2 nodos:

$$\begin{aligned} l_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} \\ l_2^{(1)} &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Función de forma Lagrangiana unidimensional de 3 nodos:

$$\begin{aligned} l_1^{(1)} &= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \\ l_2^{(1)} &= -\xi^2 + 1 \\ l_3^{(1)} &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \end{aligned}$$



2. Funciones de forma bidimensionales

2.1. Método

Las $l^{(2)}$ se generar a partir de $l^{(1)}$, multiplicando matrices:

$$\begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} l^{(2)} \end{bmatrix}$$

En donde $\begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}$ es una matriz columna con j -elementos, $\begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}^T$ es una matriz fila con j -elementos y $\begin{bmatrix} l^{(2)} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada.

Si recorremos los elementos que forman parte de la matriz $\begin{bmatrix} l^{(2)} \end{bmatrix}$, uno a uno desde $l_1^{(2)}$ hasta $l_n^{(2)}$ forman una espiral, si graficamos las funciones que forman la matriz en el orden anterior observamos que el punto (ξ, η) en el que la función vale 1 también hace un recorrido en espiral.

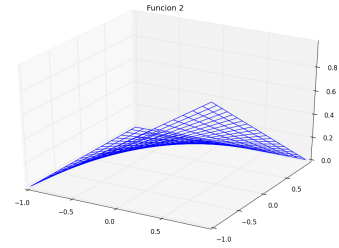
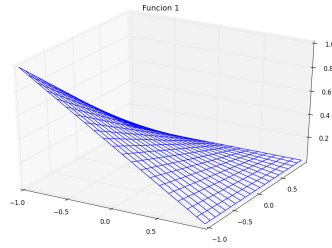
2.2. Ejemplo $l^{(2)}$

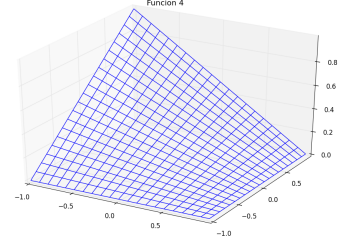
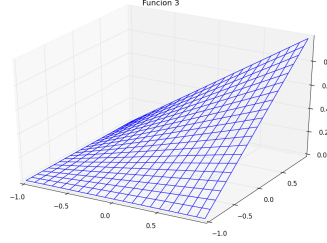
Elemento rectangular de 4 nodos:

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{(2)} & l_4^{(2)} \\ l_2^{(2)} & l_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_1^{(2)} &= \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{1}{4}\xi\eta \\ l_2^{(2)} &= -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta \\ l_3^{(2)} &= \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta \\ l_4^{(2)} &= -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\xi \end{aligned}$$





Elemento rectangular de 9 nodos:

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \\ l_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \\ -\xi^2 + 1 \\ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \\ l_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} & l_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{(2)} & l_8^{(2)} & l_7^{(2)} \\ l_2^{(2)} & l_9^{(2)} & l_6^{(2)} \\ l_3^{(2)} & l_4^{(2)} & l_5^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$l_1^{(2)} = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{1}{4}\xi\eta$$

$$l_2^{(2)} = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta$$

$$l_3^{(2)} = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta$$

$$l_4^{(2)} = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\xi$$

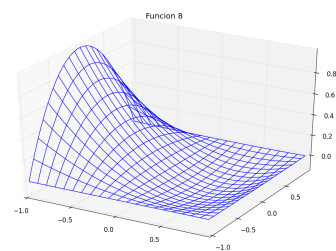
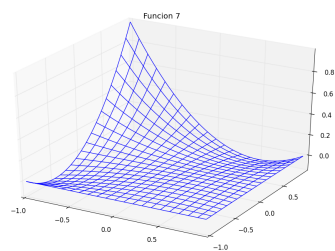
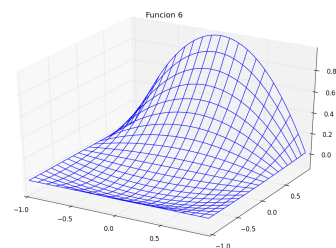
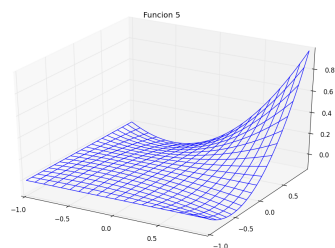
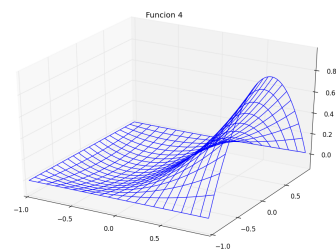
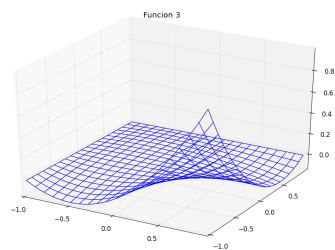
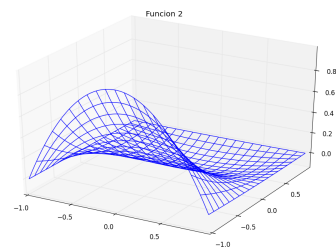
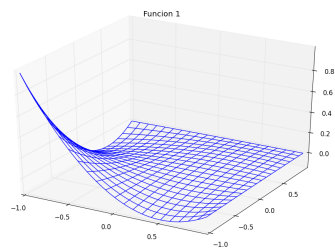
$$l_5^{(2)} = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{1}{4}\xi\eta$$

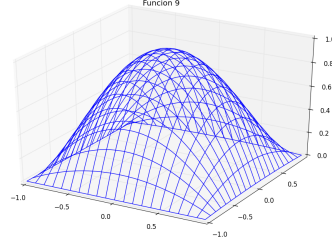
$$l_6^{(2)} = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta$$

$$l_7^{(2)} = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta$$

$$l_8^{(2)} = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\eta^2 - \frac{1}{2}\xi$$

$$l_9^{(2)} = \xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1$$





3. Funciones de forma tridimensionales

3.1. Método

Las $l^{(3)}$ también se generan a partir de $l^{(1)}$, pero realizando una multiplicación con matrices 3D [2].

$$\begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} l^{(3)} \end{bmatrix}$$

En donde $\begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}$ es una matriz columna con j -elementos, $\begin{bmatrix} l^{(1)} \end{bmatrix}^T$ es una matriz fila con j -elementos y $\begin{bmatrix} l^{(3)} \end{bmatrix}$ es una matriz 3D cúbica.

3.2. Ejemplo $l^{(3)}$

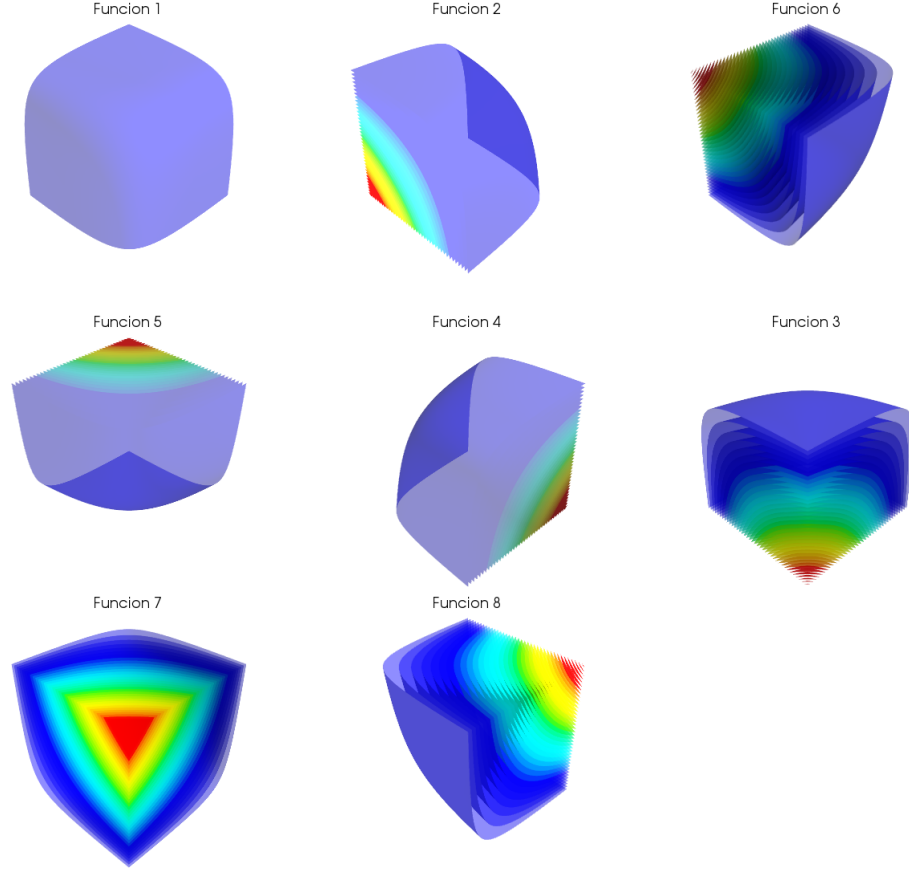
Elemento hexaédrico de 8 nodos:

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(3)} & l_5^{(3)} \\ l_2^{(3)} & l_6^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_4^{(3)} & l_8^{(3)} \\ l_3^{(3)} & l_7^{(3)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_1^{(3)} &= -\frac{1}{8}\xi\eta\zeta + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi\zeta - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta\zeta - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \\ l_2^{(3)} &= \frac{1}{8}\xi\eta\zeta - \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi\zeta + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta\zeta - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \\ l_6^{(3)} &= -\frac{1}{8}\xi\eta\zeta - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi\zeta + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta\zeta - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \\ l_5^{(3)} &= \frac{1}{8}\xi\eta\zeta + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi\zeta - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta\zeta - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \\ l_4^{(3)} &= \frac{1}{8}\xi\eta\zeta - \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi\zeta - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta\zeta + \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \\ l_3^{(3)} &= -\frac{1}{8}\xi\eta\zeta + \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi\zeta + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\eta\zeta + \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_7^{(3)} &= \frac{1}{8}\xi\eta\zeta + \frac{1}{8}\xi\eta + \frac{1}{8}\xi\zeta + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta\zeta + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8} \\
l_8^{(3)} &= -\frac{1}{8}\xi\eta\zeta - \frac{1}{8}\xi\eta - \frac{1}{8}\xi\zeta - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\eta\zeta + \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\zeta + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$



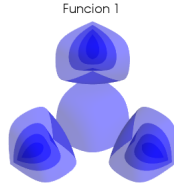
Elemento hexaédrico de 27 nodos:

$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \\ l_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \\ -\xi^2 + 1 \\ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \end{bmatrix}$$

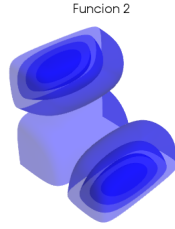
$$\begin{bmatrix} l_1^{(1)} \\ l_2^{(1)} \\ l_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} & l_3^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} & l_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^{(3)} & l_{10}^{(3)} & l_{19}^{(3)} \\ l_2^{(3)} & l_{11}^{(3)} & l_{20}^{(3)} \\ l_3^{(3)} & l_{12}^{(3)} & l_{21}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_8^{(3)} & l_{17}^{(3)} & l_{26}^{(3)} \\ l_9^{(3)} & l_{18}^{(3)} & l_{27}^{(3)} \\ l_4^{(3)} & l_{13}^{(3)} & l_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_7^{(3)} & l_{16}^{(3)} & l_{25}^{(3)} \\ l_6^{(3)} & l_{15}^{(3)} & l_{24}^{(3)} \\ l_5^{(3)} & l_{14}^{(3)} & l_{23}^{(3)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

8

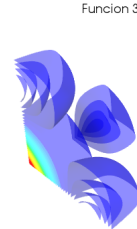
$$\begin{aligned}
l_{23}^{(3)} &= \frac{1}{8}\xi^2\eta^2\zeta^2 + \frac{1}{8}\xi^2\eta^2\zeta + \frac{1}{8}\xi^2\eta\zeta^2 + \frac{1}{8}\xi^2\eta\zeta + \frac{1}{8}\xi\eta^2\zeta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta^2\zeta + \frac{1}{8}\xi\eta\zeta^2 + \frac{1}{8}\xi\eta\zeta \\
l_{24}^{(3)} &= -\frac{1}{4}\xi^2\eta^2\zeta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta^2\zeta - \frac{1}{4}\xi^2\eta\zeta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta\zeta + \frac{1}{4}\eta^2\zeta^2 + \frac{1}{4}\eta^2\zeta + \frac{1}{4}\eta\zeta^2 + \frac{1}{4}\eta\zeta \\
l_{25}^{(3)} &= \frac{1}{8}\xi^2\eta^2\zeta^2 + \frac{1}{8}\xi^2\eta^2\zeta + \frac{1}{8}\xi^2\eta\zeta^2 + \frac{1}{8}\xi^2\eta\zeta - \frac{1}{8}\xi\eta^2\zeta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta^2\zeta - \frac{1}{8}\xi\eta\zeta^2 - \frac{1}{8}\xi\eta\zeta \\
l_{16}^{(3)} &= -\frac{1}{4}\xi^2\eta^2\zeta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta\zeta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2\zeta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{1}{4}\xi\eta\zeta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta \\
l_{15}^{(3)} &= \frac{1}{2}\xi^2\eta^2\zeta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta\zeta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta - \frac{1}{2}\eta^2\zeta^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta\zeta^2 + \frac{1}{2}\eta
\end{aligned}$$



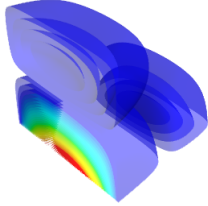
Funcion 4



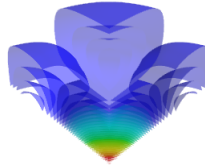
Funcion 5



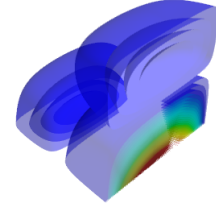
Funcion 6



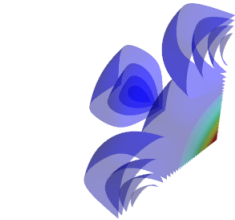
Funcion 7



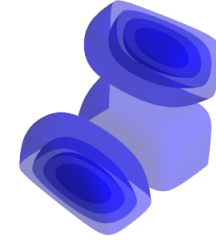
Funcion 8



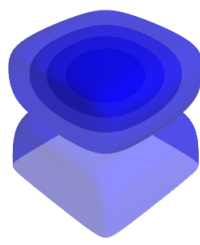
Funcion 9



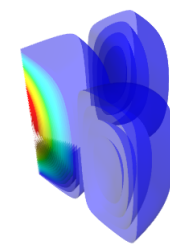
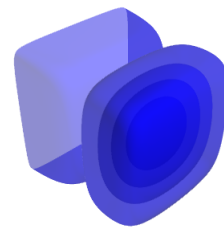
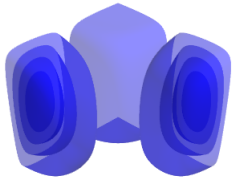
Funcion 10



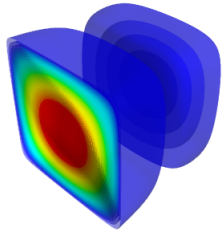
Funcion 11



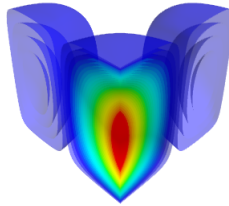
Funcion 12



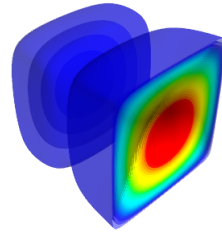
Funcion 13



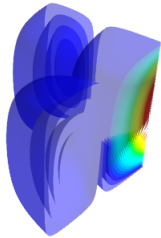
Funcion 14



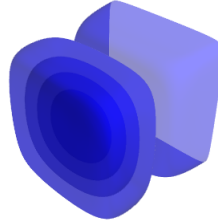
Funcion 15



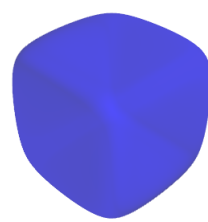
Funcion 16



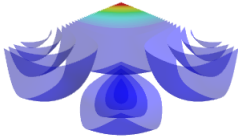
Funcion 17



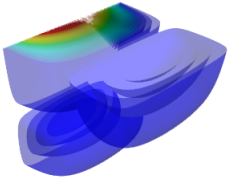
Funcion 18



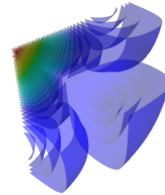
Funcion 19



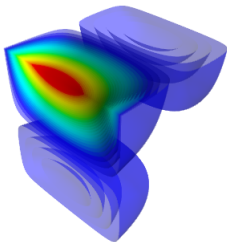
Funcion 20



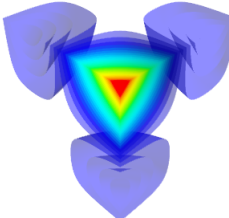
Funcion 21



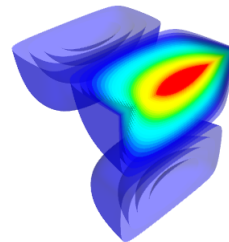
Funcion 22



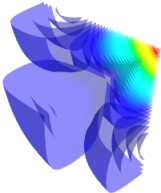
Funcion 23



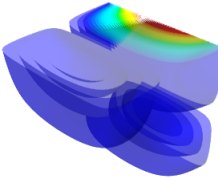
Funcion 24



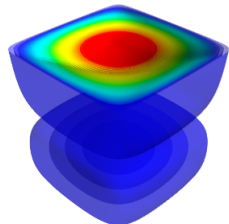
Funcion 25



Funcion 26



Funcion 27



Conclusiones

Se implementó la forma de cálculo en Python [3], usando IPython notebook [4], Numpy [5], Sympy [6], Matplotlib [7] y Mayavi [8]; también se realizó una tabla comparativa de los tiempos de ejecución de las funciones:

Elemento 1D		Elemento 2D		Elemento 3D	
2 nodos	0.003 seg.	4 nodos	0.021 seg.	8 nodos	0.060 seg.
3 nodos	0.003 seg.	9 nodos	0.006 seg.	27 nodos	0.014 seg.
4 nodos	0.055 seg.	16 nodos	0.345 seg.	64 nodos	4.637 seg.
5 nodos	0.074 seg.	25 nodos	0.469 seg.	125 nodos	7.197 seg.
6 nodos	0.167 seg.	36 nodos	1.530 seg.	216 nodos	57.337 seg.

Para generar elementos de mayor grado y reducir el tiempo de cálculo se optimizará el código y se usará Numba [9].

Se estudiarán las propiedades de las matrices $l^{(2)}$:

- Rango
- Traza
- Determinante

En el caso de las matrices $l^{(3)}$:

- Hiperdeterminante

Los archivos del trabajo se encuentran en <https://github.com/ClaudioVZ/Teoria-FEM-Python>.

Referencias

- [1] O.C.Zienkiewicz; R.L.Taylor. *El Método de los Elementos Finitos Volumen 1*. McGraw-Hill; CIMNE. 1994.
- [2] ClaudioVZ *Matrices 3D: Multiplicación*. 2013.
- [3] Lenguaje de programación <http://www.python.org/>
- [4] Intérprete interactivo <http://ipython.org/>
- [5] Biblioteca de funciones matemáticas y operaciones con arreglos <http://www.numpy.org/>
- [6] Biblioteca para matemática simbólica <http://sympy.org/en/index.html>
- [7] Biblioteca para gráficos 2D y 3D <http://matplotlib.org/>
- [8] Biblioteca para gráficos 3D <http://code.enthought.com/projects/mayavi/>
- [9] Compilador jit especializado <http://numba.pydata.org/>