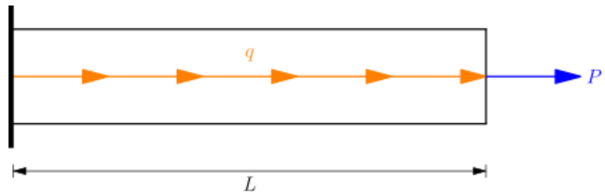
Ejemplo 2



Resolver

$$EA\,\frac{d^2u}{dx^2} + q = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$u'(L) = \frac{P}{EA}$$

Solución exacta

$$u(x) = \frac{P + qL}{EA}x - \frac{q}{2EA}x^2$$

Solución aproximada lineal

La forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^L R(x)\,W(x)\,dx = \int_0^L \left(EA\,\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + q\right)W\,dx = 0$$

reduciendo el grado de las derivadas

$$\int_0^L \frac{dW}{dx}\,EA\,\frac{d\hat{u}}{dx}\,dx = \int_0^L W\,q\,dx + W(L)\,EA\frac{d\hat{u}(L)}{dx} - W(0)\,EA\frac{d\hat{u}(0)}{dx}$$

usando bases lineales en coordenadas locales

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = u_1\left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2\left(\frac{x}{L}\right)$$

$\hat{u}_x$ es

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

las funciones ponderadas son

$$W_1 = \frac{d\hat{u}}{du_1} = 1 - \frac{x}{L}$$
$$W_2 = \frac{d\hat{u}}{du_2} = \frac{x}{L}$$

formando el sistema de ecuaciones

$$\int_0^L \frac{dW_1}{dx}\,EA\,\frac{d\hat{u}}{dx}\,dx = \int_0^L W_1\,q\,dx + W_1(L)\,EA\frac{d\hat{u}(L)}{dx} - W_1(0)\,EA\frac{d\hat{u}(0)}{dx}$$
$$\int_0^L \frac{dW_2}{dx}\,EA\,\frac{d\hat{u}}{dx}\,dx = \int_0^L W_2\,q\,dx + W_2(L)\,EA\frac{d\hat{u}(L)}{dx} - W_2(0)\,EA\frac{d\hat{u}(0)}{dx}$$

funciones ponderadas y sus derivadas

$$W_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{dW_1}{dx} = -\frac{1}{L} \qquad W_2 = \frac{x}{L} \quad \frac{dW_2}{dx} = \frac{1}{L}$$

valores de las funciones ponderadas en los nodos

$$W_1(L) = 0 \quad W_1(0) = 1 \qquad W_2(L) = 1 \quad W_2(0) = 0$$

fuerzas en los nodos

$$EA\frac{d\hat{u}(L)}{dx} = F_2 \qquad EA\frac{d\hat{u}(0)}{dx} = F_1$$

reemplazando

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left(-\frac{1}{L}\right) EA\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) dx &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) q\, dx + 0(F_2) - 1(F_1) \\
\int_0^L \left(\frac{1}{L}\right) EA\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) dx &= \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) q\, dx + 1(F_2) - 0(F_1)
\end{aligned}$$

reordenando

$$\begin{aligned}
EA\left(\frac{u_1 - u_2}{L^2}\right) \int_0^L dx &= \int_0^L q - \frac{q}{L} x\, dx - F_1 \\
EA\left(\frac{-u_1 + u_2}{L^2}\right) \int_0^L dx &= \int_0^L \frac{q}{L} x\, dx + F_2
\end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned}
EA\left(\frac{u_1 - u_2}{L}\right) &= \frac{qL}{2} - F_1 \\
EA\left(\frac{-u_1 + u_2}{L}\right) &= \frac{qL}{2} + F_2
\end{aligned}$$

en forma matricial

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

reemplazando fuerzas y desplazamientos

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_1 \\ P \end{bmatrix}$$

resolviendo

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{qL^2 + 2PL}{2EA} \\
F_1 &= P + qL
\end{aligned}$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{u}(x) = \frac{qL^2 + 2PL}{2EA}\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{qL + 2P}{2EA} x$$