

# Diseño de vigas de hormigón armado por el método de ductilidad aplicado a la norma ACI-318

ClaudioVZ

21 de junio de 2016

## Resumen

El presente trabajo describe la formulación del método de ductilidad o método inverso y su aplicación.

## 1. Viga simplemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85f'_c ab = A_s f_y$$

Dividiendo entre  $f'_c b d$

$$0.85 \frac{a}{d} = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

Despejando la cuantía geométrica

$$\rho = 0.85 \frac{a}{d} \frac{f'_c}{f_y} \quad (1)$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85 f'_c a b \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Dividiendo entre  $f'_c b d^2$

$$\frac{M_n}{f'_c b d^2} = 0.85 \frac{a}{d^2} \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

La anterior ecuación la denominaremos momento adimensional  $Q$

$$Q = 0.85 \frac{a}{d^2} \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2)$$

Factor de forma

$$\varphi = \frac{b h}{b h} = 1$$

Momento ultimo

$$M_u = 1.2(M_{pp} + M_m) + 1.6M_v$$

Momento debido al peso propio

$$M_{pp} = \frac{\gamma A L^2}{F}$$

Reemplazando

$$M_u = 1.2 \frac{\gamma AL^2}{F} + 1.2M_m + 1.6M_v$$

El momento de diseño es

$$\phi M_n = 1.2 \frac{\gamma AL^2}{F} + 1.2M_m + 1.6M_v$$

Reemplazando el momento nominal en función del momento adimensional

$$\phi Q f'_c b d^2 = 1.2 \frac{\gamma AL^2}{F} + 1.2M_m + 1.6M_v$$

Despejando  $A$

$$A = \frac{1.2M_m + 1.6M_v}{\phi \frac{Q f'_c b d^2}{\varphi h} - 1.2 \frac{\gamma L^2}{F}}$$

Haciendo una conversión a las unidades comúnmente usadas

$$A = \frac{100^2 (1.2C_m + 1.6C_v)}{100\phi \frac{Q f'_c b d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma} \quad (3)$$

Algoritmo para diseño

**Datos** :  $h$  en cm,  $r$  en cm,  $L$  en m,  $f'_c$  en kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y$  en kg/cm<sup>2</sup>,  
 $\gamma$  en kg/m<sup>3</sup>,  $C_m$  en kg/m,  $C_v$  en kg/m,  $\epsilon_s$ ,  $F$

**Resultado**:  $b$  en cm,  $A_s$  en cm<sup>2</sup>

**inicio**

$$\begin{aligned} d &= h - r \\ c &= \frac{0.0003}{\epsilon_s + 0.003} d \\ a &= \beta_1 c \\ Q &= 0.85 \frac{a}{d^2} \left( d - \frac{a}{2} \right) \\ \varphi &= 1 \\ A &= \frac{100^2 (1.2C_m + 1.6C_v)}{100\phi \frac{Q f'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma} \\ b &= \frac{A}{\varphi h} \\ \rho &= 0.85 \frac{a}{d} \frac{f'_c}{f_y} \\ A_s &= \rho b d \end{aligned}$$

**fin**

**Algoritmo 1:** Viga simplemente reforzada

## 2. Viga T simplemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85 f'_c [ab_w + h_f(b - b_w)] = A_s f_y$$

Dividiendo entre  $f'_c b_w d$ , también se puede usar  $f'_c b d [1]$

$$\frac{0.85}{d} \left[ a + h_f \left( \frac{b}{b_w} - 1 \right) \right] = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

La relación entre bases será

$$B = \frac{b}{b_w} \quad (4)$$

Reemplazando

$$\frac{0.85}{d} [a + h_f(B - 1)] = \rho \frac{f_y}{f'_c}$$

Despejando la cuantía geométrica

$$\rho = 0.85 \frac{f'_c}{f_y d} [a + h_f(B - 1)] \quad (5)$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85 f'_c \left[ ab \left( d - \frac{a}{2} \right) + h_f (b - b_w) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right]$$

Dividiendo entre  $f'_c b_w d^2$

$$Q = \frac{0.85}{d^2} \left[ a \left( d - \frac{a}{2} \right) + h_f (B - 1) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] \quad (6)$$

Factor de forma, también se puede usar  $bh$ [1]

$$\varphi = \frac{b_w(h - h_f) + bh_f}{b_w h} = 1 + \frac{h_f}{h} (B - 1) \quad (7)$$

Algoritmo para diseño

**Datos** :  $h_f$  en cm,  $h$  en cm,  $r$  en cm,  $B$ ,  $L$  en m,  $f'_c$  en kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y$  en kg/cm<sup>2</sup>,  
 $\gamma$  en kg/m<sup>3</sup>,  $C_m$  en kg/m,  $C_v$  en kg/m,  $\epsilon_s$ ,  $F$

**Resultado**:  $b$  en cm,  $A_s$  en cm<sup>2</sup>

**inicio**

$$\begin{aligned} d &= h - r \\ c &= \frac{0.0003}{\epsilon_s + 0.003} d \\ a &= \beta_1 c \\ Q &= \frac{0.85}{d^2} \left[ a \left( d - \frac{a}{2} \right) + h_f (B - 1) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] \\ \varphi &= 1 + \frac{h_f}{h} (B - 1) \\ A &= \frac{100^2 (1.2 C_m + 1.6 C_v)}{100 \phi \frac{Q f'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2 \gamma} \\ b_w &= \frac{A}{\varphi h} \\ b &= b_w B \\ \rho &= 0.85 \frac{f'_c}{f_y d} [a + h_f (B - 1)] \\ A_s &= \rho b_w d \end{aligned}$$

**fin**

**Algoritmo 2:** Viga T simplemente reforzada

### 3. Viga doblemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85 f'_c (ab - A'_s) + A'_s f_y = A_s f_y$$

Dividiendo entre  $bd$

$$0.85 f'_c \frac{a}{d} + \rho' (f_y - 0.85) = \rho f_y$$

La relación entre cuantías será

$$P = \frac{\rho}{\rho'} \quad (8)$$

Reemplazando y despejando la cuantía geométrica

$$\rho' = \frac{0.85f'_c a}{d[f_y(P-1) + 0.85f'_c]} \quad (9)$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85f'_c(ab - A'_s)\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y(d - d')$$

Dividiendo entre  $f'_c b d^2$

$$Q = \frac{0.85}{d} \left[ \left( \frac{a}{d} - \rho' \right) \left( d - \frac{a}{2} \right) + \rho' \frac{f_y}{f'_c} \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) \right] \quad (10)$$

Algoritmo para diseño

**Datos** :  $h$  en cm,  $r$  en cm,  $P$ ,  $L$  en m,  $f'_c$  en kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y$  en kg/cm<sup>2</sup>,  
 $\gamma$  en kg/m<sup>3</sup>,  $C_m$  en kg/m,  $C_v$  en kg/m,  $\epsilon_s$ ,  $F$

**Resultado**:  $b$  en cm,  $A_s$  en cm<sup>2</sup>

**inicio**

$$\begin{aligned} d &= h - r \\ c &= \frac{0.0003}{\epsilon_s + 0.003} d \\ a &= \beta_1 c \\ \rho' &= \frac{0.85f'_c a}{d[f_y(P-1) + 0.85f'_c]} \\ Q &= \frac{0.85}{d} \left[ \left( \frac{a}{d} - \rho' \right) \left( d - \frac{a}{2} \right) + \rho' \frac{f_y}{f'_c} \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) \right] \\ \varphi &= 1 \\ A &= \frac{100^2 (1.2C_m + 1.6C_v)}{100\phi \frac{Q f'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2\gamma} \\ b &= \frac{A}{\varphi h} \\ A'_s &= \rho' b d \\ A_s &= P A'_s \end{aligned}$$

**fin**

**Algoritmo 3:** Viga doblemente reforzada

## 4. Viga T doblemente reforzada

Equilibrio de fuerzas

$$0.85f'_c[ab_w - A'_s + h_f(b - b_w)] + A'_s f_y = A_s f_y$$

Dividiendo entre  $b_w d$

$$0.85 \frac{f'_c}{d} \left[ a \frac{b}{b_w} + h_f \left( \frac{b}{b_w} - 1 \right) \right] + \rho' (f_y - 0.85f'_c) = \rho f_y$$

Reemplazando la relación de bases y cuantías, luego despejando la cuantía

$$\rho' = \frac{0.85f'_c[aB + h_f(B-1)]}{d[f_y(P-1) + 0.85f'_c]} \quad (11)$$

Equilibrio de momentos

$$M_n = 0.85f'_c \left[ (ab - A'_s) \left( d - \frac{a}{2} \right) + h_f(b - b_w) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] + A'_s f_y(d - d')$$

Dividiendo entre  $f'_c b_w d^2$

$$Q = \frac{0.85}{d} \left[ \left( \frac{a}{d} \frac{b}{b_w} - \rho' \right) \left( d - \frac{a}{2} \right) + \frac{h_f}{d} \left( \frac{b}{b_w} - 1 \right) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] + \rho' \frac{f_y}{f'_c} \left( 1 - \frac{d'}{d} \right)$$

Reemplazando la relación de bases

$$Q = \frac{0.85}{d} \left[ \left( \frac{a}{d} B - \rho' \right) \left( d - \frac{a}{2} \right) + \frac{h_f}{d} (B - 1) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] + \rho' \frac{f_y}{f'_c} \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) \quad (12)$$

Algoritmo para diseño

**Datos** :  $h_f$  en cm,  $h$  en cm,  $r$  en cm,  $B$ ,  $P$ ,  $L$  en m,  $f'_c$  en kg/cm<sup>2</sup>,  $f_y$  en kg/cm<sup>2</sup>,  
 $\gamma$  en kg/m<sup>3</sup>,  $C_m$  en kg/m,  $C_v$  en kg/m,  $\epsilon_s$ ,  $F$

**Resultado:**  $b$  en cm,  $A_s$  en cm<sup>2</sup>

**inicio**

```

    d = h - r
    c =  $\frac{0.0003}{\epsilon_s + 0.003} d$ 
    a =  $\beta_1 c$ 
     $\rho' = \frac{0.85 f'_c [aB + h_f (B - 1)]}{d [f_y (P - 1) + 0.85 f'_c]}$ 
     $Q = \frac{0.85}{d} \left[ \left( \frac{a}{d} B - \rho' \right) \left( d - \frac{a}{2} \right) + \frac{h_f}{d} (B - 1) \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \right] + \rho' \frac{f_y}{f'_c} \left( 1 - \frac{d'}{d} \right)$ 
     $\varphi = 1 + \frac{h_f}{h} (B - 1)$ 
     $A = \frac{100^2 (1.2 C_m + 1.6 C_v)}{100 \phi \frac{Q f'_c d^2 F}{\varphi h L^2} - 1.2 \gamma}$ 
     $b_w = \frac{A}{\varphi h}$ 
    b =  $b_w B$ 
     $A'_s = \rho' b_w d$ 
     $A_s = P A'_s$ 

```

**fin**

**Algoritmo 4:** Viga T doblemente reforzada

## 5. Aplicación

### 5.1. Viga simplemente reforzada

---

```

def beta1(f_c):
    beta = 0.85 - (0.05*((f_c-280)/70))
    if beta < 0.65:
        beta = 0.65
    if beta > 0.85:
        beta = 0.85
    return beta

def viga_simple(h, r, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
    altura h en centímetros
    recubrimiento r en centímetros
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
    densidad del hormigón gamma en kg/m^3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
    """

```

```

divisor en la fórmula de momento F
"""
d = h - r
c = (0.003 * d)/(epsilon_s + 0.003)
beta_1 = beta1(f_c)
a = beta_1 * c
Q = 0.85 * (a/d**2) * (d - (a/2))
varphi = 1
phi = 0.9
A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
    - (1.2 * gamma))
b = A/(varphi*h)
rho = 0.85 * (a/d) * (f_c/f_y)
A_s = rho * b * d

print('d =', d, 'cm')
print('c =', c, 'cm')
print('a =', a, 'cm')
print('Q =', Q)
print('A =', A, 'cm^2')
print('b =', b, 'cm')
print('rho =', rho)
print('A_s =', A_s, 'cm^2')

return None

h = 30 # cm
r = 3 # cm
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 1000 # kg/m
Cv = 1500 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

viga_simple(h, r, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)

d = 27 cm
c = 10.125 cm
a = 8.60625 cm
Q = 0.22775683593749996
A = 728.4361498713952 cm^2
b = 24.28120499571317 cm
rho = 0.013546875
A_s = 8.88123012101015 cm^2

```

---

## 5.2. Viga T simplemente reforzada

---

```

def viga_T_simple(h_f, h, r, B, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """

```

```

altura del ala h_f en centímetros
altura h en centímetros
recubrimiento r en centímetros
relación de bases B
longitud L en metros
resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
densidad del hormigón gamma en kg/m^3
carga muerta Cm en kg/m
carga viva Cv en kg/m
deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
divisor en la fórmula de momento F
"""
d = h - r
c = (0.003 * d)/(epsilon_s + 0.003)
beta_1 = beta1(f_c)
a = beta_1 * c
Q = (0.85 / d**2) * ((a * (d - (a/2))) + (h_f * (B - 1) * (d - (h_f/2))))
varphi = 1 + ((h_f/h) * (B - 1))
phi = 0.9
A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
    - (1.2 * gamma))
b_w = A/(varphi*h)
b = b_w * B
rho = 0.85 * (f_c/f_y) * (a + h_f * (B - 1))
A_s = rho * b_w * d

print('d =', d, 'cm')
print('c =', c, 'cm')
print('a =', a, 'cm')
print('Q =', Q)
print('varphi =', varphi)
print('A =', A, 'cm^2')
print('b =', b, 'cm')
print('b_w =', b_w, 'cm')
print('rho =', rho)
print('A_s =', A_s, 'cm^2')

return None

h_f = 5 # cm
h = 20 # cm
r = 3 # cm
B = 3
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 1000 # kg/m
Cv = 1500 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

```

```
viga_T_simple(h_f, h, r, B, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)
```

```
d = 17 cm
c = 6.375 cm
a = 5.41875 cm
Q = 0.6542274241727941
varphi = 1.5
A = 635.1716390739601 cm2
b = 63.51716390739601 cm
b_w = 21.172387969132004 cm
rho = 0.655296875
A_s = 235.8613944318166 cm2
```

---

### 5.3. Viga doblemente reforzada

```
def viga_doble(h, r, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
    altura h en centímetros
    recubrimiento r en centímetros
    relación de cuantías P
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm2
    densidad del hormigón gamma en kg/m3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
    divisor en la fórmula de momento F
    """
    d = h - r
    c = (0.003 * d) / (epsilon_s + 0.003)
    beta_1 = beta1(f_c)
    a = beta_1 * c
    rho_prime = (0.85 * f_c * a) / (d * (((f_y * (P - 1))) + (0.85*f_c)))
    rho = P * rho_prime
    Q = (0.85 / d) * (((a/d) - rho_prime) * (d - (a/2))) + (rho_prime * (f_y/f_c) * (1 - (r/d)))
    varphi = 1
    phi = 0.9
    A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
        - (1.2 * gamma))
    b = A/(varphi*h)
    A_s_prime = rho_prime * b * d
    A_s = P * A_s_prime

    print('d =', d, 'cm')
    print('c =', c, 'cm')
    print('a =', a, 'cm')
    print('Q =', Q)
    print('A =', A, 'cm2')
    print('b =', b, 'cm')
    print('rho_prime =', rho_prime)
    print('rho =', rho)
```



```

print('A\'_s =', A_s_prime, 'cm^2')
print('A_s =', A_s, 'cm^2')

return None

h = 40 # cm
r = 3 # cm
P = 4
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 2000 # kg/m
Cv = 3000 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

viga_doble(h, r, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)

d = 37 cm
c = 13.875 cm
a = 11.79375 cm
Q = 0.2264552439047538
A = 1023.2858599287972 cm^2
b = 25.58214649821993 cm
rho_prime = 0.004452547247329498
rho = 0.017810188989317993
A'_s = 4.214511490942877 cm^2
A_s = 16.85804596377151 cm^2

```

---

#### 5.4. Viga T doblemente reforzada

---

```

def viga_T_doble(h_f, h, r, B, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F):
    """
    altura del ala h_f en centímetros
    altura h en centímetros
    recubrimiento r en centímetros
    relación de bases B
    relación de cuantías P
    longitud L en metros
    resistencia característica del hormigón f_c en kg/cm^2
    resistencia a la fluencia del acero f_y en kg/cm^2
    densidad del hormigón gamma en kg/m^3
    carga muerta Cm en kg/m
    carga viva Cv en kg/m
    deformación unitaria requerida del acero epsilon_s
    divisor en la fórmula de momento F
    """
    d = h - r
    c = (0.003 * d) / (epsilon_s + 0.003)
    beta_1 = beta1(f_c)
    a = beta_1 * c

```

```

rho_prime = (0.85 * f_c * ((a*B) + h_f * (B - 1))) / (d * (((f_y * (P - 1))) + (0.85*f_c)))
rho = P * rho_prime
Q = (0.85 / d) * (((a/d)*B + rho_prime) * (d - (a/2))) + ((h_f/d) * (B - 1) * (d - (h_f/2))) \
    + (rho_prime * (f_y/f_c) * (1 - (r/d)))
varphi = 1 + ((h_f/h) * (B - 1))
phi = 0.9
A = (100**2 * ((1.2*Cm) + (1.6*Cv))) / (((100 * phi * Q * f_c * d**2 * F)/(varphi * h * L**2)) \
    - (1.2 * gamma))
b_w = A/(varphi*h)
b = b_w*B
A_s_prime = rho_prime * b_w * d
A_s = P * A_s_prime

print('d =', d, 'cm')
print('c =', c, 'cm')
print('a =', a, 'cm')
print('Q =', Q)
print('A =', A, 'cm^2')
print('b =', b, 'cm')
print('b_w =', b_w, 'cm')
print('rho_prime =', rho_prime)
print('rho =', rho)
print('A\'_s =', A_s_prime, 'cm^2')
print('A_s =', A_s, 'cm^2')

return None

h_f = 5 # cm
h = 20 # cm
r = 3 # cm
B = 2 # cm
P = 5
L = 4 # m
f_c = 210 # kg/cm^2
f_y = 4200 # kg/cm^2
gamma = 2400 # kg/m^3
Cm = 3000 # kg/m
Cv = 4000 # kg/m
epsilon_s = 0.005
F = 8

viga_T_doble(h_f, h, r, B, P, L, f_c, f_y, gamma, Cm, Cv, epsilon_s, F)

d = 17 cm
c = 6.375 cm
a = 5.41875 cm
Q = 0.8370664241548891
A = 1129.1421269577684 cm^2
b = 90.33137015662147 cm
b_w = 45.16568507831074 cm
rho_prime = 0.009794372294372295
rho = 0.04897186147186147
A'_s = 7.520282087984964 cm^2

```

$$A_s = 37.60141043992482 \text{ cm}^2$$

---

## Referencias

- [1] Diego Miramontes De León. Método directo de diseño por peso mínimo de secciones de concreto reforzado en flexión. 2013.

BORRADOR