Operadores de Reynolds

Introducción

El esquema de aproximación desarrollado por Reynolds[1], en el que se descomponen las variables del modelo como la suma de la variación lenta de la media y la variación rápida de las fluctuaciones, es decir

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{1}$$

por ejemplo, el promedio temporal de $\phi(t)$ será

$$\overline{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \phi \, dt$$

suponiendo que $\phi(x, y, z, t)$, la ecuación anterior puede generalizarse a

$$\overline{\phi} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} \int_{x}^{x+\Delta x} \int_{y}^{y+\Delta y} \int_{z}^{z+\Delta z} \int_{t}^{t+\Delta t} \phi \, dx \, dy \, dz \, dt \tag{2}$$

Cuando se requiere obtener la solución promediada de la ecuación de Navier-Stokes, la velocidad y la presión se aproximan mediante una descomposición

$$\begin{aligned} u &= \overline{u} + u' \\ v &= \overline{v} + v' \\ w &= \overline{w} + w' \\ p &= \overline{p} + p' \end{aligned}$$

en donde los términos fluctuantes se deben a la turbulencia, luego de reemplazar las variables se deben promediar ambos lados de la ecuación, también puede promediarse y luego reemplazar las variables.

Álgebra de operadores

A continuación se definen las operaciones entre las variables u, v y la constante c

$$\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v} \tag{3}$$

$$\overline{cu} = c\overline{u} \tag{4}$$

$$\overline{\overline{u}} = \overline{u} \tag{5}$$

$$\overline{u'} = 0 \tag{6}$$

$$\overline{u' v} = \overline{u'}\,\overline{v} = 0 \tag{7}$$

$$\overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'} \tag{8}$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \tag{9}$$

$$\overline{\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \tag{10}$$

$$\overline{\int u \, dx} = \int \overline{u \, dx} = \int \overline{u} \, dx \tag{11}$$

$$\overline{\int \overline{u} \, dx} = \int \overline{\overline{u} \, dx} = \int \overline{u} \, dx \tag{12}$$

la ecuación (8) puede obtenerse mediante el producto de las aproximaciones

$$\overline{uv} = \overline{(\overline{u} + u')(\overline{v} + v')} = \overline{\overline{u}\,\overline{v} + u'\overline{v} + \overline{u}v' + u'v'} = \overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'}$$

Referencias

[1] On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 451(1941):5–47, 1995.

[2] Yuh-Lang Lin. *Mesoscale Dynamics*. Cambridge University Press, 2007.