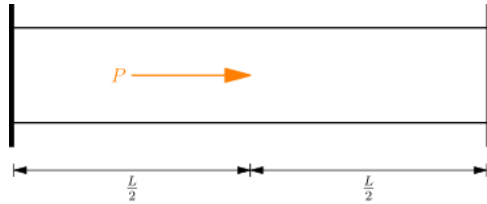


Introducción a elementos finitos

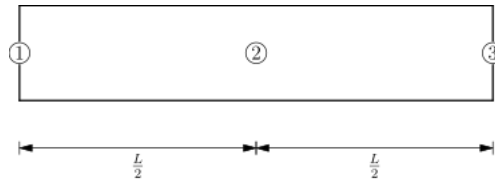
Tarea 7 I-2016

Resolver la estructura con E , A constantes por el método de Ritz



Solución

Numeración de nodos



Campo de desplazamientos

$$\phi(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)^2$$

Funciones test o trial

$$g_0(x) = x^0 \quad g_1(x) = x^1 \\ g_2(x) = x^2$$

Reemplazando

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Reemplazando $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$

$$\alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0)^2 = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1(L) + \alpha_2(L)^2 = 0$$

Simplificando

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 + L \alpha_2 = 0$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = -L \alpha_2$$

La aproximación del campo de desplazamientos será

$$u = -L \alpha_2 x + \alpha_2 x^2$$

La deformación unitaria es

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -L \alpha_2 + 2 \alpha_2 x$$

La normal es

$$N = N \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$N = N - P \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

Desplazamientos en los nodos

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = -\frac{L^2}{2} \alpha_2 + \frac{L^2}{4} \alpha_2 = -\frac{L^2}{4} \alpha_2$$

$$u_3 = 0$$

Reemplazando en el funcional

$$\begin{aligned}\pi &= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} EA \varepsilon_x^2 dx - N(u_2 - u_1) + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2} EA \varepsilon_x^2 dx - (N - P)(u_3 - u_2) \\&= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} EA \varepsilon_x^2 dx - N(u_2 - 0) + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2} EA \varepsilon_x^2 dx - (N - P)(0 - u_2) \\&= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} EA (-L \alpha_2 + 2 \alpha_2 x)^2 dx - N \left(-\frac{L^2}{4} \alpha_2 \right) \\&\quad + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2} EA (-L \alpha_2 + 2 \alpha_2 x)^2 dx - (N - P) \left(\frac{L^2}{4} \alpha_2 \right) \\&= \frac{1}{2} EA \alpha_2^2 \int_0^L L^2 - 4Lx + 4x^2 dx + \frac{1}{4} PL^2 \alpha_2\end{aligned}$$

Integrando

$$\pi = \frac{1}{6} EA L^3 \alpha_2^2 + \frac{1}{4} PL^2 \alpha_2$$

Minimizando el funcional

$$\frac{d\pi}{d\alpha_2} = \frac{1}{3} EA L^3 \alpha_2 + \frac{1}{4} PL^2 = 0$$

Despejando α_2

$$\alpha_2 = -\frac{3P}{4LEA}$$

Reemplazando en u

$$u = \frac{3P}{4EA} x - \frac{3P}{4LEA} x^2$$