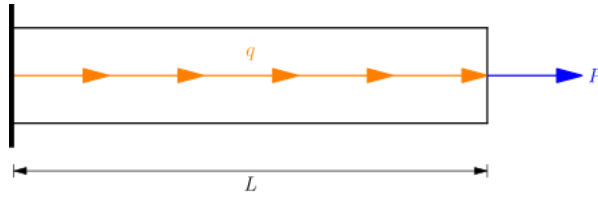


Ejemplo 2



Resolver

$$\begin{aligned}EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(L) &= \frac{P}{EA}\end{aligned}$$

Solución exacta

Después de integrar

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -\frac{q}{EA}x + c_1 \\ u &= -\frac{q}{2EA}x^2 + c_1x + c_2\end{aligned}$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}u'(L) &= -\frac{q}{EA}(L) + c_1 = \frac{P}{EA} \\ u(0) &= -\frac{q}{2EA}(0)^2 + c_1(0) + c_2 = 0\end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{P + qL}{EA} \\ c_2 &= 0\end{aligned}$$

reemplazando en la solución

$$u(x) = \frac{P + qL}{EA}x - \frac{q}{2EA}x^2$$

Solución cuadrática aproximada

Se utilizaran tres términos en la aproximación

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{i=0}^2 a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

solución aproximada y su derivada

$$\begin{aligned}\hat{u} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ \frac{d\hat{u}}{dx} &= a_1 + 2a_2 x\end{aligned}$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 0 \\ \hat{u}'(L) &= a_1 + 2a_2(L) = \frac{P}{EA}\end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{P}{EA} - 2La_2\end{aligned}$$

reemplazando las constantes

$$\hat{u}(x) = \left(\frac{P}{EA} - 2La_2\right)x + a_2x^2 = \frac{P}{EA}x + a_2(x^2 - 2Lx)$$

\hat{u}_x es

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = \frac{P}{EA} - 2La_2 + 2a_2x$$

\hat{u}_{xx} es

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} = 2a_2$$

la función residual es

$$R(x) = EA \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + q = 2EA a_2 + q$$

la función ponderada es

$$W(x) = \frac{d\hat{u}}{da_2} = x^2 - 2Lx$$

la forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^L R(x) W(x) dx = \int_0^L (2EA a_2 + q)(x^2 - 2Lx) dx = 0$$

multiplicando y ordenando

$$\int_0^L -2qLx - 4EALa_2x + qx^2 + 2EAa_2x^2 dx = 0$$

integrando

$$\left(-qLx^2 - 2EALa_2x^2 + \frac{q}{3}x^3 + \frac{2EAa_2}{3}x^3\right)\Big|_0^L = 0$$

reemplazando límites de integración y simplificando

$$\frac{4EAL^3}{3}a_2 = -\frac{2qL^3}{3}$$

despejando

$$a_2 = -\frac{q}{2EA}$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{u}(x) = \frac{P}{EA}x - \frac{q}{2EA}(x^2 - 2Lx) = \frac{P + qL}{EA}x - \frac{q}{2EA}x^2$$

Comparando soluciones

Se observa que la solución aproximada es igual a la solución exacta