Examen[1] GAL, an I, sem. II, Informatică, Seria 13
25.06.2021

Nume și prenume: ______________________________

Grupa: __________

1. Decideți care dintre următoarele mulțimi sunt subspații vectoriale reale ale lui $\mathbb{R}^3$: (1 punct)
   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 0\}$; (0.2p)
   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0\}$; (0.2p)
   (c) $W_3 = \{\alpha(2, -1, 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; (0.2p)
   (d) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$; (0.2p)
   (e) $W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 4z = 1\}$. (0.2p)
   Justificați răspunsurile.

2. Fie aplicația $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, (2 puncte)

$$f(x, y, z) = (2x - 2y, -2x + y - 2z, -2y).$$

   (a) Arătați că f este aplicație liniară și scrieți matricea lui f în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. (0.5p)
   (b) Arătați că f este un endomorfism diagonalizabil. (1p)
   (c) Determinați o bază în care f are forma diagonală. (0.5p)

3. În spațiul euclidian $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, < , >)$ (unde $< , >$ este produsul scalar canonic) se consideră vectorii $f_1 = (1, -2, 1)$ și $f_2 = (1, 2, 2)$. (2.5 puncte)
   (a) Calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre f_1 și f_2. (0.5p)
   (b) Determinați un vector nenul $f_3 \in \mathbb{E}^3$ astfel încât f_3 să fie perpendicular pe f_1 și f_2. (0.5p)
   (c) Pentru f_3 obținut la punctul (b), ortonormați sistemul $\{f_1, f_2, f_3\}$ prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt. (1p)
   (d) Determinaţi coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ în reperul ortonormat obţinut la punctul (c). (0.5p)

4. Fie $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ conica de ecuație (2 puncte)

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6xy + 6x - 6y + 4 = 0.$$

   (a) Să se precizeze natura şi genul conicei date. (0.5p)
   (b) Să se reducă $\mathcal{C}$ la forma canonică, precizându-se schimbarea izometrică de reper efectuată. (1p)
   (c) Să se calculeze excentricitatea conicei $\mathcal{C}$. (0.5p)

5. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică, fie planele (1.5 puncte)

$$(\pi_1): \; x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0;$$

$$(\pi_2): \; 2x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

   (a) Decideţi dacă punctul $A = (1, 1, 1) \in \pi_1 \cap \pi_2$; (0.5p)
   (b) Fie $B = (1, 2, 1)$. Determinaţi planul π ce conţine punctul B astfel încât $\pi \| \pi_1$. (1p)

[1] Subiectele 1-5 sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu.
Timp de lucru: 2 ore. Baftă!

POPESCU PAULLO ROBERTTO KARLOSS
GRUPA 131

EXAMEN GAL 25.06.2021

VARIANTA 23

2. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x-2y, -2x+y-2z, -2y)$

a) Scriem (f. matriceală) $f(X) = AX$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$$

Fie $\underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{X_1}}, \underset{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{X_2}} \in \mathbb{R}^3$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1) +$
$+ A(\alpha_2 X_2) = (A\alpha_1) X_1 + (A\alpha_2) X_2 = \alpha_1 (A X_1) + \alpha_2 (AX_2)$
$= \alpha_1 f(X_1) + \alpha_2 f(X_2) \Rightarrow f$ apl. liniară (morf. sp. vect)

b) Polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = -(\lambda-1)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda - 8) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)$$

$$P(\lambda) = 0 \iff -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases} \in \mathbb{R} \text{ valorile proprii } ; Spec(f) = \{1, -2, 4\}$$

$$m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$$

Subspații proprii

$$S_\lambda : \begin{cases} (2-\lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (1-\lambda)y - 2z = 0 \\ -2y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$S_{\lambda_1} \; \{\lambda_1 = 1\} : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$$ → sistem liniar omogen cu 3 ec. și 3 nec.

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ x, y nec. princip
$z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ nec. sec

$\Rightarrow \cancel{\begin{cases} x - 2y = 0 \quad |\cdot 2 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}}$

$\cancel{\Rightarrow -4y - 2z = 0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$-2x - 2z = 0$

$2x = -2\alpha$

$\boxed{x = -\alpha}$

$\boxed{z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}}$

$x - 2y = 0$

$x = 2y$

$2y = -\alpha$

$\boxed{y = -\frac{\alpha}{2}}$

Deci $V_{\lambda_1} = \{\alpha \underbrace{(-1, -\frac{1}{2}, 1)}_{= v_1} / \alpha \in \mathbb{R}\}$

S_{λ_2} : $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ sistem liniar omogen cu 3 ec și 3 nec

$\{\lambda_2 = -2\}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad rg(A_f - \lambda_2 I_3) = 2$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12-4 = 8 \neq 0 \Rightarrow x, y \text{ nec. princip}$$

$z = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$ nec. sec.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y = 2\beta \\ -2y = -2\beta \end{cases}$$

$y = \beta$

$z = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$

$4x - 2\beta = 0$

$4x = 2\beta$

$x = \frac{1}{2}\beta$

Deci $V_{\lambda_2} = \{\beta\underbrace{(\frac{1}{2}, 1, 1)}_{v_2} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$

$$S_{\lambda_3} : \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y - 2z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$\{\lambda_3 = 4\}$

$\rightarrow$ sistem liniar omogen cu 3 ec și 3 nec.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad rg(A_f - \lambda_3 I_3) = 2$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x, y \text{ nec. princip.} \\ z = \mu,\ \mu \in \mathbb{R} \\ \text{nec. sec.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-2y=0 \\ -2x-3y=2\mu \\ -2y=4\mu \end{cases}$$

$y=-2\mu$

$z=\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$

$-2x+4\mu=0$

$2x=4\mu$

$x=2\mu$

Deci $V_{\lambda_3}=\{\mu\underbrace{(2,-2,1)}_{v_3}/\ \mu\in\mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=-2 \\ \lambda_3=4 \end{cases}$$, unde $m_a(\lambda_1)=m_a(\lambda_2)=m_a(\lambda_3)=1$

~~vectori proprii~~ Avem 1) $m_a(\lambda_1)+m_a(\lambda_2)+m_a(\lambda_3)=3$
$=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$

2) $m_a(\lambda_i)=m_g(\lambda_i),\ (\forall)\ i=\overline{1,2}$

$\dim V_{\lambda_1}=1$

$\dim V_{\lambda_2}=1$

$\dim V_{\lambda_3}=1$

$m_g(\lambda_1)=m_g(\lambda_2)=1$ multiplicitățile geometrice

$\Rightarrow f$ este diagonalizabilă, deci $(\exists)\ B \subset \mathbb{R}^3$ bază formată din vectorii proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care sunt liniar indep. deoarece valorile proprii sunt distincte)

c) $B = \{v_1 = (-1, -\frac{1}{2}, 1), v_2 = (\frac{1}{2}, 1, 1), v_3 = (2, -2, 1)\}$

În raport în care, matricea asociată lui f are forma diagonală:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. a) $\Pi_1 \cap \Pi_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 1 \\ 4x_2 - 2 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 1 \\ x_3 = 3x_2 - 2 \end{cases}$

$x = (2x_2 - 1, x_2, 3x_2 - 2) \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

$\left.\begin{array}{l} A = (1, 1, 1) \\ 1 = 2 \cdot 1 - 1 \\ 1 = 1 \cdot \\ 1 = 3 \cdot 1 - 2 \end{array}\right| \Rightarrow A \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

b) $B = (1, 2, 1)$

$B \in \Pi$

$\Pi \parallel \Pi_1 \Rightarrow \Pi : x_1 + x_2 - x_3 + \underset{\uparrow}{d} = 0$

necunoscuta

$(1,2,1) \in \Pi \Rightarrow \cancel{1} + 2 - \cancel{1} + d = 0$

$\Rightarrow d = -2$

$\Pi : x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$

4. $C: x^2+y^2-6xy+6x-6y+4=0$

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix} \to \delta=\det A = 1-9=-8$

$A'=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -3 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=\det A' = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix}\delta<0\\ \Delta\neq 0\end{matrix}}$

$\Rightarrow C$ HIPERBOLĂ

b) Centrul conicii C este $P_0(x^0, y^0)$, unde coord (x^0, y^0) se determină ca sol. unică a sist. de ec. liniare

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-6y+6=0 & |:2\\ 2y-6x-6=0 & |:2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-3y+3=0\\ \cancel{x-3y-3=0}\\ y-3x-3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-3y+3=0 & |\cdot 3\\ -3x+y-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x-9y+9=0\\ -3x+y-3=0\end{cases}$$

$-8y+6=0$

$8y=6$

$y=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$x-3\cdot\frac{3}{4}+3=0$

$x-\frac{9}{4}+\overset{4)}{3}=0$

$x=\frac{9-12}{4}=-\frac{3}{4}$

Deci: $P_0\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \to$ centrul conicei C

Efectuăm translația t

$t: \begin{cases} x' = x - x^0 \\ y' = y - y^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \frac{3}{4} \\ y' = y - \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x' - \frac{3}{4} \\ y = y' + \frac{3}{4} \end{cases}$

$-\frac{4}{8} = -\frac{2}{4}$
$= -\frac{1}{2}$

$t(C): (x')^2 - 6x'y' + (y')^2 \underbrace{- \frac{1}{2}}_{f(x^0, y^0) = \frac{4}{8}} = 0$

Avem $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Determinăm valorile proprii ale lui A

Rezolvăm $\boxed{\det(A - \lambda I_2) = 0}$, în R
(ec. caracteristică)

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda-4) = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$ valorile proprii

Determinăm subsp. proprii corespunzătoare

$S_\lambda : \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$

$m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = 1$ multiplic. algebrice

Atunci:

$S_{\lambda_1} : \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

$\{\lambda_1 = -2\}$ $rg(A - \lambda_1 I_2) = 1$

$\Delta_1 = |3| = 3 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \text{ nec. princip.} \\ y = \alpha, \alpha \in R \text{ nec. sec.} \end{cases}$

$3x = 3y$

$x = y \qquad y = \alpha \in \mathbb{R}$

$x = \alpha$

Deci $V_{\lambda_1} = \{\alpha(\underset{v_1}{1,1}) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$S'_{\lambda_2} : \begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

$\{\lambda_2 = 4\}$

$\Delta_p = -3 \Rightarrow \begin{cases} x \text{ nec. princip} \\ y \text{ nec sec}, \ y = \beta, \ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$rg(A_f - \lambda_2 I_2) = 1$

$3x = -3y \quad$. Deci $V_{\lambda_2} = \{\beta(\underset{v_2}{-1,1}), \beta \in \mathbb{R}\}$

$x = -y$

$x = -\beta$

Considerăm vectorii proprii

$\begin{cases} f_1 = (1,1) \\ f_2 = (-1,1) \end{cases} \qquad \langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow f_1 \perp f_2$

Normăm vectorii f_1, f_2 și obținem un reper ortonormat:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \Rightarrow & e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} & e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) \end{cases}$$

Efectuăm rotația r

$$r = \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y'' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

m. rotație

$R\,{}^tR = I_2 \Rightarrow R$ m. ortogonală

$$\to R^{-1} = {}^tR \Rightarrow \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') \end{aligned}$$

$$\text{rot}(C): \; -2(x'')^2 + 4(y'')^2 - \frac{1}{2} = 0 \;\Big|\; : \frac{1}{2}$$

$$\frac{-2(x'')^2}{\frac{1}{2}} + \frac{4(y'')^2}{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

$$-4(x'')^2 + 8(y'')^2 - 1 = 0$$

~~, unde $a = 1/2$ și $b = 1$~~ ~~forma canonică obt. prin izometrii~~

$$-\frac{\cancel{4}(x'')^2}{\cancel{4}\frac{1}{4}} + \frac{(y'')^2}{\frac{1}{8}} = 1$$

forma canonică
dt. prin
izometrii

unde

$$a = \sqrt{\frac{1}{4}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

c) $$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\frac{^{2)}1}{4} + \frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{\cancel{8}_2} \cdot \frac{\cancel{4}}{1}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

CONTINUARE PAGINA 12

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\frac{3}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{3}{\cancel{8}} \cdot \cancel{8}} =$$

$$= \boxed{\sqrt{3}}$$

CONTINUARE PAG 12.

3. a) $||f_1|| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$||f_2|| = \sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$$\cos\theta = \frac{f_1 \cdot f_2}{||f_1|| \cdot ||f_2||} = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 2}{3\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{1-4+2}{3\sqrt{6}} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$$

b) $f_3 \perp f_1 \Leftrightarrow \langle f_3, f_1 \rangle = 0$

$f_3 \perp f_2 \Leftrightarrow \langle f_3, f_2 \rangle = 0$

$\langle f_1, (x_1, x_2, x_3) \rangle = \langle f_2, (x_1, x_2, x_3) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -x_1$

$-4x_2 = x_3$

$-2x_2 - 4x_2 = -x_1 \Leftrightarrow x_1 = 6x_2$

$x_3 = -4x_2$

$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 12$

$x_3 = -8$

$f_3 = (12, 2, -8)$

c) $\{f_1, f_2, f_3\} \to \{l_1, l_2, l_3\} \to \left\{\frac{l_1}{\|l_1\|}, \frac{l_2}{\|l_2\|}, \frac{l_3}{\|l_3\|}\right\}$

arbitrar ortogonal ortonormat

$$l_1 = f_1 = (1,-2,1)$$

$$l_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, l_1\rangle}{\langle l_1, l_1\rangle} \cdot l_1 = (1,2,2) - \frac{1-4+2}{1+4+1}(1,-2,1)$$

$$= (1,2,2) - \frac{1}{2}(1,-2,1) = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

la fel orientat cu $(1,6,3)$

$$l_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, l_1\rangle}{\langle l_1, l_1\rangle} \cdot l_1 - \frac{\langle f_3, l_2\rangle}{\langle l_2, l_2\rangle} \cdot l_2 =$$

$$= (12,2,-8) - \underbrace{\frac{12-4-8}{\langle l_1, l_1\rangle}}_{=0} \cdot l_1 - \underbrace{\frac{12+12-24}{\langle l_2, l_2\rangle}}_{=0} \cdot l_2 =$$

$$= (12,2,-8)$$

$\{(1,-2,1), (1,6,3), (12,2,-8)\}$ ortogonal

$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,6,3), \frac{1}{\sqrt{212}}(12,2,-8)\right\}$

~~ortogonal~~ ortonormat

d) $(1,2,3) = a(1,-2,1) + b(1,6,3) + c(12,2,-8)$

$$\begin{cases} a+b+12c = 1 \mid \cdot 6 \\ -2a+6b+2c = 2 \\ a+3b-8c = 3 \mid \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+70c = 4 \mid \cdot 3 \\ -3a+18c = -4 \mid \cdot 8 \\ a+3b-8c = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 354c = -20 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{10}{177} \\ a = 176 \\ b = -\frac{30701}{531} \end{cases}$$

$$\left(176, -\frac{30701}{531}, -\frac{10}{177}\right)$$

1. Fie W_0 sp. vectorial atunci

$$\left.\begin{matrix} \forall x, y \in W_1 \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}\right| \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W_1$$

Verificăm

$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 0\}$

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$ $(\alpha x_1 + \beta y_1)^2 + 3(\alpha x_2 + \beta y_2)^2 +$

$+5(\alpha x_3+\beta y_3) = \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha\beta x_1 y_1 + \beta^2 y_1^2 +$

$+3\alpha^2 x_2^2 + 6\alpha\beta y_2 + 3\beta^2 y_2^2 + 5\alpha^2 x_3^2 +$

$+10\alpha\beta x_3 y_3 + 5\beta^2 y_3^2 =$

$= \alpha^2(x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2) + \beta^2(y_1^2 + 3y_2^2 + 5y_3^2)$

$+2\alpha\beta x_1 y_1 + 6\alpha\beta x_2 y_2 + 10\alpha\beta x_3 y_3$

Primele 2 paranteze sunt 0, rămâne

$2\alpha\beta x_1 y_1 + 6\alpha\beta x_2 y_2 + 10\alpha\beta x_3 y_3 \neq 0,$

$\forall x, y \in W_1$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

W_1 nu este ssp. vectorial

b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0\}$

Din aceleași motive ca exercițiul mai sus, W_2 nu e ssp. vectorial

ne rămâne nesimplificat

$2\alpha\beta x_1 y_1 + 9\alpha\beta x_2 y_2 + 6\alpha\beta x_3 y_3 \neq 0$

W_2 ssp. vectorial

c) $W_3 = \{\alpha(2,-1,3) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Fie $x = a(2,-1,3) \in W_3$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$y = b(2,-1,3) \in W_3$

$\alpha x + \beta y \in W_3 \Leftrightarrow \alpha \cdot a(2,-1,3) + \beta b(2,-1,3) \in W_3$

$\Leftrightarrow (\alpha a + \beta b)(2,-1,3) \in W_3$

Adevărat, fiindcă $\alpha a + \beta b \in \mathbb{R}$

$\forall \alpha, a, \beta, b \in \mathbb{R}$

W_3 ssp vectorial

d) $\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3 + \beta y_1 + 2\beta y_2 - y_3 =$

$= \alpha(\underbrace{x_1 + 2x_2 - x_3}_{=0}) + \beta(\underbrace{y_1 + 2y_2 - y_3}_{=0}) = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot x + \beta y \in W_4 \Rightarrow W_4$ ssp. vectorial

e) $\alpha x_1 + 5\alpha x_2 - 4\alpha x_3 + \beta y_1 + 5\beta y_2 -$

$- 4\beta y_3 = \alpha(\underbrace{x_1 + 5x_2 - 4x_3}_{=1}) + \beta(\underbrace{y_1 + 5y_2 - 4y_3}_{=1})$

$= \alpha + \beta \neq 1, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x + \beta y \notin W_5$

$\forall x, y \in W_5$

$\Rightarrow W_5$ nu este ssp. vectorial