FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 13

(S13.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z (f(x) = c \land \neg(g(x,z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u (P(u,y) \rightarrow Q(y,z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \lor \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x,z) \lor R(x)) \rightarrow (R(u) \lor \neg Q(v,u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x (f(x) = c \land \neg(g(x,z) = d)_z(h(x)) = \forall x (f(x) = c \land \neg(g(x,h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u (P(u,y) \rightarrow Q(y,z))_z(p(y)) = \forall y \exists u (P(u,y) \rightarrow Q(y,p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y (P(u,y) \rightarrow Q(y,p(y)))_u(j(y)) = \forall y (P(j(y),y) \rightarrow Q(y,p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \lor \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z (P(m,u) \lor \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y (P(m,u) \lor \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_z(k(u,y)) = \forall u \forall y (P(m,u) \lor \neg(S(y) \rightarrow R(k(u,y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem $\varphi^1 = \forall z \forall x \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) = \forall z \forall x \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v, n(z,x))))$, unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$

(S13.2) Să se axiomatizeze următoarele clase de mulţimi:

(i) mulţimile care au între 3 şi 5 elemente;

(ii) mulţimile nevide care au mai puţin de 7 elemente;

(iii) mulţimile care au între 20 şi 300 elemente;

(iv) mulţimile care au cel puţin 10 elemente.

Demonstraţie: Se ia $\mathcal{L}_=$. Atunci $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulţimile nevide.

(i) Considerăm enunţul
$$\varphi := \exists^{=3} \vee \exists^{=4} \vee \exists^{=5}.$$
Atunci $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$.

(ii) $\mathcal{K} = Mod(\exists^{\leq 6})$.

(iii) Considerăm enunţul
$$\psi := \exists^{\geq 20} \wedge \exists^{\leq 300}.$$
Atunci $\mathcal{K} = Mod(\psi)$.

(iv) $\mathcal{K} = Mod(\exists^{\geq 10})$.

$\square$

(S13.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile infinite;

(iv) grafurile care au cel puţin un ciclu de lungime 3.

Demonstraţie: Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$. Teoria grafurilor este $Th(\Gamma)$, iar clasa grafurilor este axiomatizată de Γ.

(i) Fie $\mathcal{K}_1$ clasa grafurilor complete. Considerăm enunţul

$$\varphi_1 := \forall x \forall y(\neg(x = y) \to \dot{E}(x, y)).$$

Atunci $\mathcal{K}_1 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_1\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_1)$.

(ii) Fie $\mathcal{K}_2$ clasa grafurilor care au proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă. Considerăm enunţul

$$\varphi_2 := \forall x \exists y \dot{E}(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z(\dot{E}(x, y) \wedge \dot{E}(x, z) \to y = z).$$

Atunci $\mathcal{K}_2 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_2\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_2)$.

(iii) Fie $\mathcal{K}_3$ clasa grafurilor infinite. Considerăm mulţimea de enunţuri

$$\Delta := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Aplicând Propoziţia 3.58, rezultă că $\mathcal{K}_3 = Mod(\Gamma \cup \Delta)$.

(iv) Fie $\mathcal{K}_4$ clasa grafurilor care au cel puţin un ciclu de lungime 3. Considerăm enunţul

$$\psi := \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \left(\dot{E}(v_1, v_2) \wedge \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_1)\right).$$

Atunci $\mathcal{K}_4 = Mod(\Gamma \cup \{\psi\}) = Mod((IREFL), (SIM), \psi)$.

$\square$

Definiţia 1. *O $\mathcal{L}$-teorie T se numeşte completă dacă pentru orice enunţ φ, avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.*

(S13.4) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, definim

$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunţ şi } \mathcal{A} \vDash \varphi\}.$$

Demonstraţi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie completă.

Demonstraţie: Demonstrăm mai întâi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie. Fie φ un enunţ a.î. $Th(\mathcal{A}) \vDash \varphi$. Deoarece, evident, $\mathcal{A}$ este un model al $Th(\mathcal{A})$, rezultă că $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Prin urmare, $\varphi \in Th(\mathcal{A})$. Aşadar, $Th(\mathcal{A})$ este o teorie.

Demonstrăm în continuare că $Th(\mathcal{A})$ este completă. Fie φ un enunţ arbitrar. Avem două cazuri:

- $\mathcal{A} \models \varphi$. Rezultă că $\varphi \in Th(\mathcal{A})$.
- $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Atunci $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, prin urmare $\neg\varphi \in Th(\mathcal{A})$.

$\square$

(S13.5) Peste orice limbaj $\mathcal{L}$, pentru orice enunţ φ, numim **spectrul finit al lui** φ mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente care satisface φ.

(i) Dacă $\mathcal{L}$ este limbajul cu un singur simbol de relaţie de aritate 2, să se scrie un enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine spectrul finit al lui φ.

(ii) Să se găsească câte un limbaj şi câte un enunţ peste el astfel încât spectrul finit al enunţului să fie, pe rând:

  (a) mulţimea puterilor de numere prime;

  (b) mulţimea numerelor de forma $2^n 3^m$, cu n, $m \geq 0$;

  (c) mulţimea numerelor compuse.

Demonstraţie:

(i) Enunţul φ va fi conjuncţia celor trei proprietăţi ale relaţiilor de echivalenţă, împreună cu:

$$\forall x \exists y (x \sim y \wedge \neg(x = y) \wedge \forall z (z \sim x \rightarrow (z = x \vee z = y))).$$

Este imediat faptul că o mulţime finită poate fi înzestrată cu o asemenea relaţie dacă şi numai dacă are un număr par de elemente. Aşadar, spectrul finit al lui φ este mulţimea numerelor naturale nenule pare.

(ii) (a) Un rezultat de algebră spune că un corp finit are un număr de elemente ce este putere de număr prim, iar pentru orice putere de număr prim, există (şi este chiar unic până la izomorfism) un corp ce o are ca număr de elemente. Aşadar, luăm enunţul să fie conjuncţia axiomelor de corp.

  (b) Considerăm limbajul ce conţine un simbol de operaţie binar, $\cdot$, şi o constantă e. Luăm enunţul format din conjuncţia axiomelor de grup, în care e va juca rolul de element neutru, împreună cu:

$$\forall x (x^6 = e).$$

  Pentru orice n, $m \geq 0$, grupul $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_3^m$ satisface enunţul, deci numărul $2^n 3^m$ este în spectru. Vrem să arătăm că acestea sunt toate elementele spectrului. Dacă ar mai fi un altul, k, atunci acela ar avea un divizor prim p diferit de 2 şi 3. Fie o structură cu k elemente ce satisface enunţul. Atunci aceasta este neapărat un grup. Cum p divide ordinul său, din teorema lui Cauchy, el va avea un element de ordin p, ceea ce contrazice aserţiunea din enunţ "orice element are ordin ce divide pe 6".

(c) **Indicaţie:** un număr compus este de forma ab cu a, $b > 1$. Intuitiv, o mulţime cu ab elemente se poate desena în forma unui dreptunghi de laturi a şi b. Considerăm cele două relaţii de echivalenţă sugerate de această aşezare, anume "a fi pe aceeaşi linie" şi "a fi pe aceeaşi coloană". Limbajul va avea aşadar două simboluri de relaţie de aritate 2, R şi S, iar enunţul va conţine faptul că ele denotă relaţii de echivalenţă, împreună cu suficiente constrângeri cât să garanteze formarea unei configuraţii de tip dreptunghi cu laturi de lungimi netriviale, anume:

- fiecare relaţie are cel puţin două clase: $\exists x \exists y \neg xRy \wedge \exists x \exists y \neg xSy$;
- fiecare linie/coloană este completă: $\forall x \forall y \exists z (xRz \wedge ySz)$;
- fiecare intersecţie de linie şi coloană are un singur element:

$$\forall x \forall y (xRy \wedge xSy \to x = y).$$

Acum se poate arăta că funcţia canonică $\pi_{R,S} : A \to A/R \times A/S$ este bijectivă.

$\square$

Teorema 2 (N. D. Jones, A. L. Selman, 1974)**.** *O mulţime de numere naturale este spectrul finit al unui enunţ dacă şi numai dacă există o maşină Turing nedeterministă care decide în timp exponenţial dacă un număr aparţine mulţimii respective.*

Problemă deschisă (G. Asser, 1955): Este complementul unui spectru tot un spectru?
Vezi şi: A. Durand, N. D. Jones, J. A. Makowsky, M. More, Fifty years of the spectrum problem: survey and new results. *Bull. Symbolic Logic* 18 (2012), no. 4, 505–553. Disponibil la https://arxiv.org/abs/0907.5495.