

Seminar 12

(S12.1) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d) \\ \varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z)) \\ \varphi_3 &= \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z)) \\ \varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))\end{aligned}$$

(S12.2)

- (i) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de \mathcal{L}_{ar} -formule $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ astfel încât pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$,

- (a) $\mathcal{N} \models \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;
- (b) $\mathcal{N} \models \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;
- (c) $\mathcal{N} \models \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

- (ii) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r = (\dot{+}, \dot{\times})$ și \mathcal{L}_r -structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de \mathcal{L}_r -formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R} \models \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

(S12.3) Considerăm limbajul \mathcal{L} ce conține un singur simbol, anume un simbol de funcție de aritate 2. Să se găsească un enunț φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\models \varphi$.