

Seminar 11

Notăția 1. Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice $e : V \rightarrow A$ și orice $a, b \in A$, avem că:

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Așadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S11.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

- (i) $\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi$;
- (ii) $\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$;
- (iii) $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$;
- (iv) $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$.

(S11.2) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, \mathcal{L} , și de formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} astfel încât:

- (i) $\forall x (\varphi \vee \psi) \not\models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;
- (ii) $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\models \exists x (\varphi \wedge \psi)$;
- (iii) $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

(S11.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (1)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (2)$$

$$\varphi \models \exists x\varphi \quad (3)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (4)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi. \quad (5)$$