Ce contează la Logică?

1.2. A echipotentă cu B dacă există o bijecție $f: A \to B$ $(A \sim B)$

Mulțimi numărabile $(\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathbb{Q})$
+ orice e echipotent cu $\mathbb{N}$ (1.7)

! $\mathbb{R}$ și $2^{\mathbb{N}}$ nu sunt numărabile

Mulțime finită sau numărabilă = mulțime cel mult numărabilă

pag 8

Logică ~~propo~~ propozițională - SEMANTICA

O evaluare $e: V \to \{0,1\}$ e model al lui φ dacă $e^+(\varphi)=1$ $(e \models \varphi)$

φ e tautologie dacă orice evaluare e model $(\models \varphi)$

$Mod(\varphi)$ = mulțimea modelelor lui φ

$\psi \models \varphi$ (~~ψ sat~~ φ e consecință semantică a lui ψ) dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$

De Morgan: $\varphi \vee \psi \sim \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
$\varphi \wedge \psi \sim \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Se notează $\varphi \to \varphi$ cu $\top$ (adevărul)
$\neg(\varphi \to \varphi)$ cu $\perp$ (falsul)

Fie Γ o mulțime de formule
$e \models \Gamma$ dacă $e \models \gamma, \forall \gamma \in \Gamma$
Γ e satisfiabilă dacă are un model
$\Gamma \models \varphi$ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$

pag 47

SINTAXA LP

A1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

A2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

A3 $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

Regula de deducție (Modus Ponens)

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

pag 72

2.38. i) dacă φ axiomă $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
ii) dacă $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
iii) $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, $\Rightarrow \Gamma \vdash \psi$

2.46 Teorema deducției (T.D.)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \varphi \to \psi$

2.50 Falsa ipoteză

$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$

2.51

$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$ (37)
$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$ (40)
$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ (41)
(R.A3) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (42)

2.53.

$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$ (46) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$ (47)
$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ (48)
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \iff \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$ (49)

~~pag~~ 50

2.58.

Γ e consistentă dacă există o formulă φ a.î. $\Gamma \nvdash \varphi$
Γ e inconsistentă dacă $\Gamma \vdash \perp$

2.67 Teorema de completitudine tare - V2.

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

pag 109

φ e în FNC dacă
$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$$

φ e în FND dacă
$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$$

$L_{i,j}$ = literal < variabilă / negația unei variabile

orice φ e echivalentă cu φ^{FND} și φ^{FNC}

pag 112

Transformare FNC / FND

1. Se înlocuiesc → și ↔ cu:

$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

2. $\neg\neg\varphi \sim \varphi$ + De Morgan:

$\neg(\varphi \vee \psi) \to \neg\varphi \wedge \neg\psi$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\varphi \vee \neg\psi$

3. pt. FNC distribuim ∨ față de ∧

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \to (\varphi \vee (\psi)) \wedge (\varphi \vee \chi)$

$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \to (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$

FND pe dos

pag 122

Cu tabel

v_1	v_2	v_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$

$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$

$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$

$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$

$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$

$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$

$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$

$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

FNC: $D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$

FND: $C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$

p120

Clauză = mulțime de literali:

$C = \{L_1, \dots, L_n\}$

$e: V \to \{0, 1\}$ e model ($e \vDash C$) dacă

$\exists L \in C$ a.î. $e \vDash L$

2.84. C trivială dacă $L \in C$ și $L^c \in C$

$\square \to$ clauza vidă

$S = \{C_1, C_2, \dots, C_n\} \to$ mulțime de clauze

$\square \in S \to$ S e nesatisfiabilă

$\emptyset$ e validă (orice evaluare e model)

pag 125

2.88. Rezoluția

Fie C_1, C_2 două clauze.

dacă $\exists L$ a.î. $L \in C_1$ și $L^c \in C_2$, atunci

$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$

↳ rezolvent

p131

Davis Putnam

1. S - mulțime de clauze netriviale

$S_i \leftarrow S$, alegem x_i variabilă din S_i

$T_i^1 = \{C \in S_i \mid x_i \in C\}$

$T_i^0 = \{C \in S_i \mid \neg x_i \in C\}$

2. dacă $T_i^1 \neq \emptyset$ și $T_i^0 \neq \emptyset$

$U_i = \underbrace{\{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in T_i^1 \text{ și } C_0 \in T_i^0\}}_{\text{mulțimea rezolvenților}}$

altfel $U_i = \emptyset$

3. $S_{i+1}' = (S_i \setminus (T_i^0 \cup T_i^1)) \cup U_i$

$S_{i+1} = S_{i+1}' \setminus \{C \text{ trivială} \mid C \in S_{i+1}'\}$

4. $S_{i+1} = \square \Rightarrow$ S e satisfiabilă

$\square \in S_{i+1} \Rightarrow$ S e nesatisfiabilă

else goto 1.

pag 138

Forma normală prenex

- aducem cuantificatorii în față

$\neg\exists x\varphi \vDash\!\!\!\dashv \forall x \neg\varphi$

$\neg\forall x\varphi \vDash\!\!\!\dashv \exists x \neg\varphi$

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\dashv \varphi \wedge \forall x \psi$

$\exists x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\dashv \varphi \wedge \exists x \psi$

$\forall x(\varphi \to \psi) \vDash\!\!\!\dashv \varphi \to \forall x \psi$

$\exists x(\varphi \to \psi) \vDash\!\!\!\dashv \varphi \to \exists x \psi$

$\forall x(\psi \to \varphi) \vDash\!\!\!\dashv \exists x \psi \to \varphi$

$\exists x(\psi \to \varphi) \vDash\!\!\!\dashv \forall x \psi \to \varphi$

pag 180 / 196

Nu uitați să substituiți variabilele cuantificate multiplu

Forma normală Skolem.

$\exists x$ se înlocuiește cu un nou simbol de constantă

$\forall x \exists y$ se înlocuiește cu o nouă funcție de aritate 1, $f(x)$

$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y$ se înlocuiește cu o nouă funcție de aritate n. $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$

pag 200

$\forall x \varphi \vDash \exists x \varphi$

$\varphi \vDash \exists x \varphi$

$\forall x \varphi \vDash \varphi$

$\forall x \forall y \varphi \mathrel{\vDash\!\dashv} \forall y \forall x \varphi$

$\exists x \exists y \mathrel{\vDash\!\dashv} \exists y \exists x \varphi$

~~$\exists y \forall x \varphi \vDash$~~

$\exists y \forall x \varphi \vDash \forall x \exists y \varphi$

pag 172

O interpretare (evaluare) a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ e o funcție $e : V \to A$

e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$

nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$

3.16. $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$

$\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$

$\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$

$\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$

3.17 $(\varphi \underset{\leftrightarrow}{\overset{\wedge}{\vee}} \psi)^{\mathcal{A}}(e) \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \underset{\leftrightarrow}{\overset{\wedge}{\vee}} \psi^{\mathcal{A}}(e)$

3.18 $\mathcal{A} \vDash (\varphi \underset{\leftrightarrow}{\overset{\vee}{\wedge}} \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și (sau, dacă) $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$

pag 167