- TEMA -

STATISTICĂ ȘI PROBABILITĂȚI

POPESCU PAULLO ROBERTTO KARLOSS
GRUPA 231

LABORATOR 1

Problema 4 Soluție:

Nr. total de perechi în care pot fi alese 6 mașini din 20: $C_{20}^{6} = 38760$.

$n_{pos} = 38760$.

2 limuzine pot fi alese în $C_{11}^{2} = 55$ moduri
3 furgonete pot fi alese în $C_{6}^{3} = 20$ moduri
1 cabriolet poate fi ales în $C_{3}^{1} = 3$ moduri

Alegerea celor 2 limuzine, 3 furgonete și 1 cabriolet este independentă.

$$\Rightarrow n_{fav} = 55 \cdot 20 \cdot 3 = 3300$$

A: "Garanția extinsă este acordată pentru 2 limuzine, 3 furgonete și 1 cabriolet"

$$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{3300}{38760} \approx 0,08$$

Problema 5 Soluție:

a) Știm că 1 bob de grâu cântărește 30 miligrame.

Întrebare: Câte boabe se găsesc în 300 de Kg?

1 bob ...... 30 miligrame

x boabe ...... 300.000.000 miligrame

Am transformat kg în miligrame,

300 kg = 300.000.000 miligrame

$$x = \frac{300.000.000}{30} = 10.000.000$$ boabe sunt conținute în 300 Kg

Deci $n_{pos} = 10.000.000$

$n_{fav} = 1$ (se alege un singur bob de grâu marcat)

A: "Se alege 1 bob de grâu (marcat dinainte) dintr-un hambar cu 300 kg de grâu"

$$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{1}{10.000.000} = 0,0000001$$

Nr. total de perechi de 6 numere din 49 este $C_{49}^{6} = 13983816$

Deci $n_{pos} = 13983816$

Alegerea numerelor este independentă

$\Rightarrow n_{fav} = 1$ (se ghicesc cele 6 numere câștigătoare)

B: "Se ghicesc cele 6 numere câștigătoare la Loto 6 din 49"

$$P(B) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{1}{13983816} = 0,00000007$$

$C_6^6 \cdot C_{43}^0 = 1 \cdot 1$ ← se greșesc 0 numere; ← se ghicesc 6 numere

Deci $P(A) > P(B)$; Probabilitatea de a găsi bobul de grâu este mai mare decât cea de a ghici cele 6 numere câștigătoare la Loto.

b) Știm că 1 bob de grâu cântărește 30 miligrame.

Întrebare: Câte boabe se găsesc în 1,5 kg?

Transformăm 1,5 Kg în miligrame.

1,5 Kg = 1.500.000 miligrame

1 bob .... 30 miligrame

x boabe .... 1500.000 miligrame

$x = \frac{1.500.000}{30} = 50.000$ boabe sunt conținute în 1,5 Kg

Deci $n_{pos} = 50.000$

$n_{fav} = 1$ (se alege un singur bob de grâu marcat)

A: "Se alege 1 bob de grâu (marcat dinainte) dintr-un hambar cu 300 kg de grâu"

$$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{1}{50.000} = 0{,}00002$$

Nr. total de perechi de perechi de 6 numere din 49 este $C_{49}^{6} = 13983816$

Deci $n_{pos} = 13983816$

se pot ghici toate cele 6 numere câștigătoare

$$n_{fav} = \underbrace{C_6^5 \cdot C_{43}^1}_{\text{alegem 6 numere și doar 5 sunt corecte}} + 1 = 258 + 1 = 259$$

B: "Se ghicesc cel puțin 5 din cele 6 numere câștigătoare la Loto 6 din 49"

$$P(B) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{259}{13983816} = 0{,}00001852$$

Deci $P(A) > P(B)$

Probabilitatea de a găsi bobul de grâu este mai mare decât cea de a ghici cel puțin 5 numere la Loto.

Problema 6 Soluție:

Știm că $1h = 60$ min și că din 10 în 10 min se analizează 1 roată.

Deci în prima oră se analizează $\frac{60}{10} = 6$ roți.

Avem 15 roți în total $\Rightarrow n_{pos} = 15^6$

2 roți se pot alege în $C_6^2 = 15$ moduri. Pentru fiecare combinație se pot alege $6^2 = 36$ roți de tip A.

Deci 2 roți de tip A se pot analiza în $C_6^2 \cdot 36 =$
$= 15 \cdot 36 = 540$ moduri

Au rămas 4 roți, se poate alege 1 roată în $C_4^1 =$
$= 4$ moduri. Pentru fiecare combinație se pot alege $5^1 = 5$ roți de tip B.

Deci 1 roată de tip B se poate analiza în $C_4^1 \cdot 5 =$
$4 \cdot 5 = 20$ moduri

Au rămas 3 roți, se pot alege 3 roți în $C_3^3 = 1$ moduri

Pentru fiecare combinație se pot alege $4^3 = 64$ moduri roți de tip C. Deci 3 roți de tip C se pot analiza în $C_3^3 \cdot 64$ moduri $= 64$

$\Rightarrow n_{fav} = C_6^2 \cdot 36 \cdot C_4^1 \cdot 5 \cdot C_3^3 \cdot 64 = 540 \cdot 20 \cdot 64 =$
$= \boxed{691.200}$

A: "În prima oră se analizează 2 roți de tip A, 1 roată de tip B și 3 roți de tip C."

$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{691.200}{15^6} \simeq 0{,}06$

Problema 8 Soluție:

Nr. total de perechi de pagini $= C_{10}^{2} = 45$ de perechi

$\Rightarrow n_{pos} = 45$

$n_{fav} = 1$ (se aleg paginile 3 și 9)

A: "Inspectorii aleg la întâmplare fix cele 2 pagini 3, respectiv 9, iar firma este amendată"

$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{1}{45} \simeq 0{,}02$

Problema 9 Soluție:

Nr. total de perechi de 6 numere din 49 este

$C_{49}^{6} = 13983816$

Deci $n_{pos} = 13983816$

Alegerea numerelor este independentă

$\Rightarrow n_{fav} = \underbrace{C_6^6}_{\text{se ghicesc 6 numere}} \cdot \underbrace{C_{43}^{0}}_{\text{se greșesc 0 numere}} = 1 \cdot 1 = 1$

A: "Se ghicesc toate ale 6 numere câștigătoare"

$$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{1}{13983816} = 0,00000007$$

$\boxed{\text{CATEGORIA 1}}$

$$n_{fav} = C_6^5 \cdot C_{43}^1 = 258$$

se ghicesc 5 numere

se greșesc 1 număr

B: "Se ghicesc 5 numere din 6"

$$P(B) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{258}{13983816} = 0,00001845$$

$\boxed{\text{CATEGORIA 2}}$

$$n_{fav} = C_6^4 \cdot C_{43}^2 = 15 \cdot 903 = 13.545$$ (se ghicesc 4 numere câșt.)

C: "Se ghicesc 4 numere din 6"

$$P(C) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{13.545}{13983816} = 0,00096862$$

$\boxed{\text{CATEGORIA 3}}$

$$n_{fav} = C_6^3 \cdot C_{43}^3 = 20 \cdot 12341 = 246.820$$ (se ghicesc 3 numere câșt)

D: "Se ghicesc 3 numere din 6"

$$P(D) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{246.820}{13983816} = 0,0176504$$

$\boxed{\text{CATEGORIA 4}}$

Problema 10 Soluție:

a) $A \cap B^c \cap C^c$

b) $A \cap B^c \cap C$

c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

f) $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

g) $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

Problema 11 Soluție:

a) $A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)$

b) $B = (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)$

c) $C = (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup$

$A \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c)$

d) $D = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$B \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c)$

e) $E = \bigcup_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c)$

Problema 12 Soluție:

a) Notăm cu:

n – nr. de șosete negre

r – nr. de șosete roșii

Nr. total de perechi de șosete $= C_{n+r}^2 \Rightarrow n_{pos} = C_{n+r}^2$ moduri

Două șosete roșii le putem alege în C_r^2 moduri

$\Rightarrow n_{fav} = C_r^2$

A: "Sunt scoase 2 șosete de culoare roșie"

$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}}$, Știm că $P(A) = \frac{1}{2}$ (din ipoteză)

$$\frac{1}{2} = \frac{C_r^2}{C_{n+r}^2} \Rightarrow C_{n+r}^2 = 2 \cdot C_r^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{(n+r)!}{2!(n+r-2)!} = 2 \cdot \frac{r!}{2!(r-2)!}}$$

Știm că:

$$C_{n+r}^2 = \frac{(n+r)!}{2!(n+r-2)!} = \frac{\cancel{(n+r-2)!}(n+r-1)(n+r)}{2!\cancel{(n+r-2)!}} =$$

$$= \frac{(n+r-1)(n+r)}{2}$$

$$C_r^2 = \frac{r!}{2!(r-2)!} = \frac{\cancel{(r-2)!}(r-1)r}{2!\cancel{(r-2)!}} =$$

$$= \frac{r(r-1)}{2}$$

$$\Rightarrow C_{n+r}^2 = 2\cdot C_r^2 \Leftrightarrow \frac{(n+r-1)(n+r)}{2} = \cancel{2}\cdot\frac{r(r-1)}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow (n+r-1)(n+r) = 2r(r-1)$$

Dacă $r=2 \Rightarrow (n+1)(n+2)=4 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

Dacă $r=3 \Rightarrow (n+2)(n+3)=12 \Rightarrow n=1$

Deci sunt minim 4 șosete (3 de culoare roșie și 1 de culoare neagră)

b) Știm de la punctul a) că $(n+r-1)(n+r)=2r(r-1)$

$$\Leftrightarrow n^2+2n\cdot r+r^2-n-r = 2r^2-2r$$

$$\Leftrightarrow n^2+2nr-r^2-n+r=0$$

$$\Leftrightarrow r^2-2nr+n-n^2-r=0$$

$$\Leftrightarrow r^2-r(2n+1)+n-n^2=0$$

$\Rightarrow \Delta = (2n+1)^2 - 4(n - n^2) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n + 4n^2 =$

$= 8n^2 + 1$

$\Rightarrow r = \dfrac{2n+1 \pm \sqrt{8n^2+1}}{2}$

Dacă $n = 2 \Rightarrow r = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2} \Rightarrow r \notin \mathbb{N}$

Dacă $n = 4 \Rightarrow r = \dfrac{9 \pm \sqrt{129}}{2} \Rightarrow r \notin \mathbb{N}$

Dacă $n = 6 \Rightarrow r = \dfrac{13 \pm \sqrt{289}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{13 \pm 17}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = \dfrac{30}{2} = 15$

și

$r_2 < 0 \notin \mathbb{N}$

Deci sunt 6 șosete negre.

Problema 14 Soluție:

Sunt 3 crapi și 7 carași. Total 10 pești

a) A: "unul din cei patru pești prinși este crap" Nr. total de perechi de pești $= C_{10}^{4} = 210$ moduri

$\Rightarrow n_{pos} = 210$

$n_{fav} = C_3^1 \cdot C_7^3 = 105$

$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{105}{210} = 0,5$

b) $n_{pos} = 210$

$n_{fav} = C_3^3 \cdot C_7^1 + C_3^2 \cdot C_7^2 + C_3^1 \cdot C_7^3 = 7 + 63 + 105 =$
$= 175$

B: "cel puțin unul din cei patru pești prinși este un crap"

$P(B) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{175}{210} = 0,8(3)$

c) $n_{pos} =$ 10 (pt. că sunt 10 pești lângă casa lui)

$n_{fav} = 3$ (avem 3 crapi lângă casă)

C: "primul pește prins este un crap"

$P(C) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{3}{10} = 0,3$

d) Avem A_{10}^4 modalități de a prinde 4 pești

$\Rightarrow n_{pos} = A_{10}^4 = 5040$

Cel de-al doilea peste poate fi unul din cei 3 carasi, iar restul de pesti pot fi amestecați în $A_9^3 = 504$ moduri

$\Rightarrow n_{fav} = 3 \cdot A_9^3 = 3 \cdot 504 = 1512$

D: "al doilea peste prins este un crap"

$P(D) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{1512}{5040} = 0,3$

e) $n_{pos} = 5040$

2 carasi îi putem prinde în $A_3^2 = 6$ moduri

restul de 2 pesti în $A_8^2 = 56$ moduri

$\Rightarrow n_{fav} = A_3^2 \cdot A_8^2 = 6 \cdot 56 = 336$

E: "primii doi pești prinși sunt crapi"

$P(E) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{336}{5040} \simeq 0,06$

f) F: "cel puțin unul din primii doi pești prinși este crap"

Știm că $F = C \cup D$, Deci $P(F) = P(C \cup D)$

$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(\underbrace{C \cap D}_{E}) = P(C) + P(D) - P(E) =$

$= 0,3+0,3-0,06 \simeq 0,54$

Problema 13 Soluție:

$n_{pos} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$

$n_{fav} = \frac{99999}{495} - \frac{10000}{495} = 182$

A: "Numărul de cinci cifre extras este divizibil cu 495"

$P(A) = \frac{n_{fav}}{n_{pos}} = \frac{182}{27216} \simeq 0,006$

Problema 15 Soluție:

$P(A \cup B) = 0,5$

$P(A \cup \overline{B}) = 0,1$

FORMULĂ:

$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Deci $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B})$

$0,6 = 2P(A) + P(B) + P(\overline{B})$

$0,6 = 2P(A) \cancel{+ P(B)} + 1 \cancel{- P(B)}$

$0,6 = 2P(A) + 1$

$2P(A) = -0,4$

$\boxed{P(A) = -0,2}$