

- TEMA 2 -
STATISTICĂ ȘI PROBABILITĂȚI

POPESCU PAULLO ROBERTTO KARLOSS
GRUPA 231

LABORATOR 3

Problema 1 Soluție: 1.

A: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 5"

B: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 7"

C: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri nu este nici 5, dar nici 7"

$$\begin{aligned} \text{Știm că } n_{\text{fav}}(A) = 4, n_{\text{pos}}(A) = 36 &\Rightarrow P(A) = \frac{n_{\text{fav}}(A)}{n_{\text{pos}}(A)} = \\ &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$n_{\text{fav}}(B) = 6, n_{\text{pos}}(B) = 36 \Rightarrow P(B) = \frac{n_{\text{fav}}(B)}{n_{\text{pos}}(B)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} \right) =$$

$$= \frac{18}{1} - \frac{5}{13} = \frac{13}{18}$$

$$P(E_n) = [P(C)]^{n-1} \cdot P(A) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9}$$

E: "Efectuăm o aruncare, și suma 5 apare înainte de suma 7"

$$P(E) = \sum_{n \geq 1} P(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} - 1}{\frac{13}{18} - 1} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{-1}{\frac{13-18}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{-1}{\frac{-5}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{18}{5} = \frac{2}{5}$$

2. A: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 2"

B: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 7"

C: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri nu este nici 2, dar nici 7."

E_n : "În primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma și nici suma 7, iar în a n -a aruncare a apărut 2"

$$\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{36} \\ P(B) = \frac{6}{36} \end{array} \quad \left| \Rightarrow P(C) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{6}{36} \right) = \right.$$

$$\left. = \frac{36}{36} - \frac{7}{36} = \frac{29}{36} \right.$$

E : "Suma 2 apare înainte de suma 7"

$$P(E_n) = [P(C)]^{n-1} \cdot P(A) = \left(\frac{29}{36} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(E) = \sum_{n \geq 1} P(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{29}{36} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{29}{36} \right)^{n-1} = \frac{1}{36} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{29}{36} \right)^{n-1} - 1}{\frac{29}{36} - 1} =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{36}{7} = \frac{1}{7}$$

Problema 2 Soluție:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P\left(X > -\frac{1}{3}\right) = P(X \in \{0, 1\}) = 0,2 + 0,5 = 0,7$$

$$P\left(X < \frac{1}{4} \mid X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X < \frac{1}{4}, X \geq -\frac{1}{2}\right)}{P\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)}$$

$$P\left(X < \frac{1}{4}, X \geq -\frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right) = P(X \in \{0\}) = 0,2$$

$$P\left(X \geq -\frac{1}{2}\right) = P(X \in \{0, 1\}) = 0,2 + 0,5 = 0,7$$

$$\text{Deci, } P\left(X < \frac{1}{4} \mid X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{0,2}{0,7} \approx 0,2857$$

Problema 4 Soluție:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(x) dx}_{=0} + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-kx} dx$$

$$\int x^2 e^{-kx} dx = \int x^2 \cdot \left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)' dx = \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} - \int 2x \cdot \frac{e^{-kx}}{-k} dx$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} - 2 \int x \frac{e^{-kx}}{-k} dx = \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k} \int x \frac{e^{-kx}}{(-k)} dx$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k} \left(\frac{x e^{-kx}}{-k} - \int \frac{e^{-kx}}{-k} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k} \left(\frac{x e^{-kx}}{-k} + \frac{1}{k} \int \frac{e^{-kx}}{1} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k} \left(\frac{x e^{-kx}}{-k} + \frac{e^{-kx}}{-k^2} \right) = \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} +$$

$$+ 2 \frac{(kx+1) e^{-kx}}{-k^3} = \frac{e^{-kx} (k^2 x^2 + 2kx + 2)}{-k^3}$$

$$\text{Deci } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-kx} (k^2 x^2 + 2kx + 2)}{-k^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{k^3} \right)$$

$$\text{Calculăm } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-kx} (k^2 x^2 + 2kx + 2)}{-k^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k^2 x^2 + 2kx + 2}{-k^3 e^{kx}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2k^2x + 2k}{-k^4 e^{kx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2k^3x + 2k^2}{-k^5 e^{kx}} = 0$$

$$\int_0^{+\infty} \alpha x^2 \cdot e^{-kx} dx = \alpha \cdot \frac{-2}{k^3} \Rightarrow -\frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

$$\text{Deci } \alpha = \frac{-k^3}{2}$$

$$b) \text{ Dacă } a \geq 0 \Rightarrow F_x(a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-kt} (k^2 t^2 + 2kt + 2)}{-k^3}$$

$$\text{Dacă } a < 0 \Rightarrow F_x(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt = 0$$

$$= \frac{-k^3}{2} \cdot \frac{e^{-k \cdot a} (k^2 a^2 + 2ka + 2)}{-k^3} = -\frac{e^{-ka} (k^2 a^2 + 2ka + 2)}{2}$$

$$\text{Deci } F_x(a) = \begin{cases} -\frac{e^{-ka} (k^2 a^2 + 2ka + 2)}{2}, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

$$c) P(0 < X < k^{-1}) = F(k^{-1}) - F(0) =$$

$$= -\frac{e^{-1} (1 + 2 + 2)}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2} = -\frac{5}{2e} + 1 = \frac{-5 + 2e}{2e} \approx 0,08$$

Problema 5 Solutie

$$EX = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \frac{(1-p)^n}{-n \log(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(1-p)^n}{-n \log(p)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{-\log(p)} = -\frac{1}{\log p} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-p) \cdot (1-p)^n - 1}{1-p-1} =$$

$$= \frac{p-1}{\log(p)} \cdot \frac{-1}{-p} = \frac{p-1}{p \log(p)}$$

Problem 6 Solution:

$$a) X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} n p_n = \sum_{n \geq 1} n p_n = \sum_{n \geq 1} [p_n + (n-1)p_n] =$$

$$= \sum_{n \geq 1} p_n + \sum_{n \geq 1} [(n-1)p_n] = P(X \geq 1) + \sum_{n \geq 2} (n-1)p_n$$

$$= P(X \geq 1) + \sum_{n \geq 2} [p_n + (n-2)p_n] = P(X \geq 1) + \sum_{n \geq 2} p_n +$$

$$+ \sum_{n \geq 2} (n-2)p_n = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 2)$$

$$+ \sum_{n \geq 3} (n-2)p_n = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \dots + P(X \geq n) + \dots$$

$$= \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$$

$$b) E(X) = \int_0^{+\infty} P(X \geq x) dx$$

$$\int_0^{+\infty} P(X \geq x) dx = \int_0^{+\infty} E(1_{\{X \geq x\}}) dx = E\left(\int_0^{+\infty} 1_{\{X \geq x\}} dx\right)$$

$$= E\left[\int_0^X dx\right] = E[X]$$

Problema 7 Soluție:

$$a) P(X > \Delta + t | X > \Delta) = \frac{P(X > \Delta, X > \Delta + t)}{P(X > \Delta)} =$$

$$= \frac{P(X > \Delta + t)}{P(X > \Delta)}$$

Problema 3 Soluție:

$$\begin{aligned} a) X \sim P(\lambda) &\Leftrightarrow p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \Leftrightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} = \\ &= \frac{\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}}{\frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!}} = \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{I } P(X=k) \text{ maxim} &\Rightarrow \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \text{ maxim} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} \text{ maxim} \Rightarrow \begin{cases} k=0, \text{ dacă } \lambda \in [0, 1) \\ k=\lambda, \text{ dacă } \lambda \in (1, +\infty) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II } P(X=k) \text{ maxim} &\Rightarrow \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \text{ maxim} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\lambda^k}{e^{\lambda}} \text{ maxim} \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

Problema 5 continuare Soluție: b)

$$E[X] = M_1(X) \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{f(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$E[X^2] = M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$c) \text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Problema 7 continuare Soluție: b)

Presupunem că X nu este repartită exponențială.
Verificăm ecuația pentru repartitia normală
și rezultă că relația 1) nu se îndeplinește.

Analog procedăm pentru repartitia uniformă.

În concluzie, X este repartizată exponențial.

PROBLEMA 8.

Stocam intr-un vector numarul de minute petrecute la telefon

```
vectorMinute <- c(106,123,123,111,125,113,130,  
                  113,114,100,120,130,118,114,  
                  127,112,121,114,120,119,127,  
                  114,108,127,131,157,102,133)
```

Vom folosi un vector auxiliar pentru a stoca pentru fiecare zi totalul de minute petrecute

pe parcursul a 4 saptamani

de exemplu daca avem 4 saptamani in auxiliar[1] va calcula totalul de minute petrecute luni la telefon

total = (prima saptamana, ziua luni) + (a doua saptamana, ziua luni) + (a treia saptamana, ziua luni) + (a patra saptamana, ziua luni)

```
auxiliar <- 0
```

```
maxi = 0
```

```
mini = 9999
```

```
zile <- c('Luni','Marti','Miercuri','Joi','Vineri', 'Sambata','Duminica')
```

```
ziuaMaxi = "
```

```
ziuaMini = "
```

```
contor = 1;
```

```
zilePeste120 <- 0;
```

```
for(i in 1:7) {
```

```
    auxiliar[i] <- (vectorMinute[i] + vectorMinute[i+7] + vectorMinute[i+14] + vectorMinute[i+21])/4
```

```

if(auxiliar[i] > 120) {
    zilePeste120[contor] = zile[i];
    contor = contor + 1;
}
if(auxiliar[i] > maxi) {
    maxi = auxiliar[i];
    ziuaMaxi = zile[i];
}
else if(auxiliar[i] < mini) {
    mini = auxiliar[i];
    ziuaMini = zile[i];
}
}

```

```

cat("Ziua inca care s-a vorbit cel mai mult la telefon este: ", ziuaMaxi, "\n")

```

```

cat("Ziua inca care s-a vorbit cel mai putin la telefon este: ", ziuaMini, "\n")

```

```

# Zilele in care am vorbit peste 120 minute in medie pe parcursul a 4 saptamani

```

```

cat("Zilele in care am vorbit mai mult de 120 minute sunt: ")

```

```

for(i in 1:contor-1) {
    cat(zilePeste120[i], " ")
}

```

```

#### SAU ####

```

```

# Afisarea tuturor zilelor in care am vorbit peste 120 de minute

```

```

cat("Zilele in care s-a vorbit peste 120 de minute sunt: ")

```



```

for(i in 1:28) {

  if(vectorMinute[i]>120)

    cat(i, " ")

}

```

Print-Screen:

The screenshot shows the RStudio interface with a script editor, environment pane, and console.

Script Editor (script_1.R):

```

1 # Problema 8
2 # Stocam intr-un vector numarul de minute petrecute la telefon
3
4 vectorMinute <- c(106,123,123,111,125,113,130,
5                  113,114,100,120,130,118,114,
6                  127,112,121,114,120,119,127,
7                  114,108,127,131,157,102,133)
8
9 # Vom folosi un vector auxiliar pentru a stoca pentru fiecare zi totalul de minute petrecute
10 # pe parcursul a 4 saptamani
11 # de exemplu daca avem 4 saptamani in auxiliar[i] va calcula totalul de minute petrecute luni la telefon
12 # total = (prima saptamana, ziua luni) + (a doua saptamana, ziua luni) + (a treia saptamana, ziua luni) + (a patra saptamana, ziua luni)
13
14 auxiliar <- 0
15
16 maxi = 0
17 mini = 9999
18
19 zile <- c('Luni','Marti','Miercuri','Joi','Vineri','Sambata','Duminica')
20
21 ziuaMaxi = ''
22 ziuaMini = ''
23
24 contor = 1;
25 zilePestel20 <- 0;
26
27 for(i in 1:7) {
28   auxiliar[i] <- (vectorMinute[i] + vectorMinute[i+7] + vectorMinute[i+14] + vectorMinute[i+21])/4
29   if(auxiliar[i] > 120) {
30     ...
31   }
32 }

```

Environment Pane:

Variable	Value
auxiliar	num [1:7] 115 114 118 119 133 ...
contor	3
i	28L
maxi	133
mini	113
vectorMinute	num [1:28] 106 123 123 111 125 113 130 113 114 100 ...
zile	chr [1:7] "Luni" "Marti" "Miercuri" "Joi" "Vineri" "Sambata" "Duminica"
zilePestel20	chr [1:2] "Vineri" "Duminica"
ziuaMaxi	"Vineri"
ziuaMini	"Sambata"

Files Pane:

Name	Size	Modified
..		
.RData	50 B	Oct 12, 2021, 5:41 PM
.Rhistory	1004 B	Oct 26, 2021, 5:52 PM
Rproj	218 B	Nov 1, 2021, 7:55 PM
script_1.R	1.7 KB	Nov 1, 2021, 6:49 PM

Console:

```

> cat("Ziua inca care s-a vorbit cel mai mult la telefon este: ", ziuaMaxi, "\n")
Ziua inca care s-a vorbit cel mai mult la telefon este: Vineri
>
> cat("Ziua inca care s-a vorbit cel mai putin la telefon este: ", ziuaMini, "\n")
Ziua inca care s-a vorbit cel mai putin la telefon este: Sambata
>
> # Zilele in care am vorbit peste 120 minute in medie pe parcursul a 4 saptamani
> cat("Zilele in care am vorbit mai mult de 120 minute sunt: ")
Zilele in care am vorbit mai mult de 120 minute sunt: > for(i in 1:contor-1) {
+   cat(zilePestel20[i], " ")
+ }
Vineri Duminica
> #### SAU ####
>
> # Afisarea tuturor zilelor in care am vorbit peste 120 de minute
> cat("Zilele in care s-a vorbit peste 120 de minute sunt: ")
Zilele in care s-a vorbit peste 120 de minute sunt: > for(i in 1:28) {
+   if(vectorMinute[i]>120)
+     cat(i, " ")
+ }
2 3 5 7 12 15 17 21 24 25 26 28
>

```

PROBLEMA 9.

Punctul a)

```

for(tipTransmisie in unique(mtcars$am)) {

  greutateMedie = mean(mtcars$wt[tipTransmisie == mtcars$am])

  cat("Greutatea medie pentru tipul de transmisie ", tipTransmisie, " este: ", greutateMedie, ".\n")

}

```

Punctul b)

```
for(nrCilindri in unique(mtcars$cy1)) {  
  
  greutateMedie = mean(mtcars$wt[nrCilindri == mtcars$cy1])  
  
  cat("Greutatea medie pentru ", nrCilindri, " cilindrii este: ", greutateMedie, ".\n")  
  
}
```

Punctul c)

```
combinariCilindriTransmisie = unique(mtcars[c("cy1", "am")])  
  
for(i in 1:nrow(combinariCilindriTransmisie)) {  
  
  nrCilindrii = combinariCilindriTransmisie[i, "cy1"]  
  
  tipTransmisie = combinariCilindriTransmisie[i, "am"]  
  
  cat("Consumul mediu pentru ", nrCilindrii, " cilindrii si transmisia ", tipTransmisie, " este: ")  
  
  cat(mean(mtcars$mpg[tipTransmisie == mtcars$am & nrCilindrii == mtcars$cy1]), ".\n")  
  
}
```

Print-Screen:

The screenshot displays the RStudio interface with the following components:

- Script Editor:** Contains R code for three tasks (Punctul a, b, c). Task 'a' calculates average weight by transmission type. Task 'b' calculates average weight by cylinder count. Task 'c' calculates average fuel consumption by cylinder count and transmission type.
- Environment:** Shows the data frame 'combinariCilindriTransmisie' with 6 observations and 2 variables: 'cy1' and 'am'.
- Console:** Displays the output of the R code, showing average weights and fuel consumption values for different cylinder counts and transmission types.

```
# Punctul a)  
greutateMedie = mean(mtcars$wt[tipTransmisie == mtcars$am])  
cat("Greutatea medie pentru tipul de transmisie ", tipTransmisie, " este: ", greutateMedie, ".\n")  
  
# Punctul b)  
for(nrCilindri in unique(mtcars$cy1)) {  
  greutateMedie = mean(mtcars$wt[nrCilindri == mtcars$cy1])  
  cat("Greutatea medie pentru ", nrCilindri, " cilindrii este: ", greutateMedie, ".\n")  
}  
  
# Punctul c)  
combinariCilindriTransmisie = unique(mtcars[c("cy1", "am")])  
for(i in 1:nrow(combinariCilindriTransmisie)) {  
  nrCilindrii = combinariCilindriTransmisie[i, "cy1"]  
  tipTransmisie = combinariCilindriTransmisie[i, "am"]  
  cat("Consumul mediu pentru ", nrCilindrii, " cilindrii si transmisia ", tipTransmisie, " este: ")  
  cat(mean(mtcars$mpg[tipTransmisie == mtcars$am & nrCilindrii == mtcars$cy1]), ".\n")  
}
```

Console Output:

```
> for(tipTransmisie in unique(mtcars$am)) {  
+   greutateMedie = mean(mtcars$wt[tipTransmisie == mtcars$am])  
+   cat("Greutatea medie pentru tipul de transmisie ", tipTransmisie, " este: ", greutateMedie, ".\n")  
+ }  
Greutatea medie pentru tipul de transmisie 1 este: 2.411 .  
Greutatea medie pentru tipul de transmisie 0 este: 3.768895 .  
>  
> # Punctul b)  
> for(nrCilindri in unique(mtcars$cy1)) {  
+   greutateMedie = mean(mtcars$wt[nrCilindri == mtcars$cy1])  
+   cat("Greutatea medie pentru ", nrCilindri, " cilindrii este: ", greutateMedie, ".\n")  
+ }  
Greutatea medie pentru 6 cilindrii este: 3.117143 .  
Greutatea medie pentru 4 cilindrii este: 2.285727 .  
Greutatea medie pentru 8 cilindrii este: 3.999214 .  
>  
> # Punctul c)  
> combinariCilindriTransmisie = unique(mtcars[c("cy1", "am")])  
> for(i in 1:nrow(combinariCilindriTransmisie)) {  
+   nrCilindrii = combinariCilindriTransmisie[i, "cy1"]  
+   tipTransmisie = combinariCilindriTransmisie[i, "am"]  
+   cat("Consumul mediu pentru ", nrCilindrii, " cilindrii si transmisia ", tipTransmisie, " este: ")  
+   cat(mean(mtcars$mpg[tipTransmisie == mtcars$am & nrCilindrii == mtcars$cy1]), ".\n")  
+ }  
Consumul mediu pentru 6 cilindrii si transmisia 1 este: 20.56667 .  
Consumul mediu pentru 4 cilindrii si transmisia 2 este: 28.075 .  
Consumul mediu pentru 6 cilindrii si transmisia 0 este: 19.125 .  
Consumul mediu pentru 8 cilindrii si transmisia 0 este: 15.05 .  
Consumul mediu pentru 4 cilindrii si transmisia 0 este: 22.9 .  
Consumul mediu pentru 8 cilindrii si transmisia 1 este: 15.4 .  
>
```


PROBLEMA 10.

Comanda outer aplica pe o matrice formata din 2 vectori o functie

```
construire = function (i, j) {
```

```
  element = 1 / sqrt(abs(i-j) +1)
```

```
  return (element)
```

```
}
```

```
construire2 = function (i, j) {
```

```
  element = i / j**2
```

```
  return (element)
```

```
}
```

```
M = outer(1:10, 1:10, construire)
```

```
N = outer(1:10, 1:10, construire2)
```

```
print(M)
```

```
print(N)
```

Print-Screen:

The screenshot displays the RStudio interface. The script editor on the left contains the following R code:

```
58. for(i in 1:28) {
59.   if(vectorMinute[i]>120)
60.     cat(i, " ")
61. }
62.
63.
64. # Problema 10
65. # Comanda outer aplica pe o matrice formata din 2 vectori o functie
66.
67. construire = function (i, j) {
68.   element = 1 / sqrt(abs(i-j) +1)
69.   return (element)
70. }
71.
72. construire2 = function (i, j) {
73.   element = i / j**2
74.   return (element)
75. }
76.
77. M = outer(1:10, 1:10, construire)
78. N = outer(1:10, 1:10, construire2)
79.
80. print(M)
81.
82. print(N)
83.
```

The console on the right shows the output of the script:

```
> print(M)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,] 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000 0.4472136 0.4082483 0.3779645 0.3535534 0.3333333 0.3162278
[2,] 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000 0.4472136 0.4082483 0.3779645 0.3535534 0.3333333
[3,] 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000 0.4472136 0.4082483 0.3779645 0.3535534
[4,] 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000 0.4472136 0.4082483 0.3779645
[5,] 0.4472136 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000 0.4472136 0.4082483
[6,] 0.4082483 0.4472136 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000 0.4472136
[7,] 0.3779645 0.4082483 0.4472136 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503 0.5000000
[8,] 0.3535534 0.3779645 0.4082483 0.4472136 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068 0.5773503
[9,] 0.3333333 0.3535534 0.3779645 0.4082483 0.4472136 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000 0.7071068
[10,] 0.3162278 0.3333333 0.3535534 0.3779645 0.4082483 0.4472136 0.5000000 0.5773503 0.7071068 1.0000000
>
> print(N)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,] 1 0.25 0.1111111 0.0625 0.04 0.02777778 0.02040816 0.015625 0.01234568 0.01
[2,] 2 0.50 0.2222222 0.1250 0.08 0.05555556 0.04081633 0.031250 0.02469136 0.02
[3,] 3 0.75 0.3333333 0.1875 0.12 0.08333333 0.06122449 0.046875 0.03703704 0.03
[4,] 4 1.00 0.4444444 0.2500 0.16 0.11111111 0.08163265 0.062500 0.04938272 0.04
[5,] 5 1.25 0.5555556 0.3125 0.20 0.13888889 0.10204082 0.078125 0.06172840 0.05
[6,] 6 1.50 0.6666667 0.3750 0.24 0.16666667 0.12244898 0.093750 0.07407407 0.06
[7,] 7 1.75 0.7777778 0.4375 0.28 0.19444444 0.14285714 0.109375 0.08641975 0.07
[8,] 8 2.00 0.8888889 0.5000 0.32 0.22222222 0.16326531 0.125000 0.09876543 0.08
[9,] 9 2.25 1.0000000 0.5625 0.36 0.25000000 0.18367347 0.140625 0.11111111 0.09
[10,] 10 2.50 1.1111111 0.6250 0.40 0.27777778 0.20408163 0.156250 0.12345679 0.10
>
```