TEMĂ BONUS CURS

POPESCU PAULLO ROBERTTO KARLOSS
GRUPA 231

1. Fie $G = (V, E)$ un graf planar conex, cu $n = |V| > 2$ și $m = |E|$

Atunci:

a) $m \leq 3n - 6$

b) $\exists\, x \in V$ cu $d(x) \leq 5$

Rezolvare b) Pp. că $\forall x \in V,\ d(x) \geq 6$

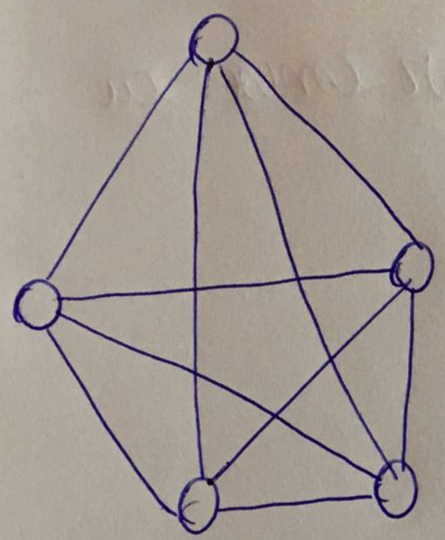
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sum\limits_{x \in V} d(x) \geq 6 \cdot n \\ \sum\limits_{x \in V} d(x) = 2m \end{array}\right| \Rightarrow 2m \geq 6n$$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow m \geq 3n \Rightarrow m > 3n - 6 \\ \text{Știm că într-un graf planar} \quad m \leq 3n - 6 \end{array}\right| \Rightarrow \text{Presupunerea este falsă (CONTRADICȚIE)}$$

Deci în $\forall$ graf planar $\exists x \in V$ cu $d(x) \leq 5$

* Dem K_5 nu este graf planar

VARIANTĂ 1



$n = |V| = 5$

$m = |E| = 10$

Știm că $\forall$ un graf planar $m \leq 3n - 6$

Pentru $m = 10$ și $n = 5 \Rightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6$

$10 \leq 15 - 6$

$10 \leq 9$ Fals $\Rightarrow$

K_5 nu respectă condiția de graf planar $m \leq 3n - 6 \Rightarrow K_5$ nu este un graf planar

VARIANTA 2

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$$5 - 10 + |F| = 2$$

$$|F| = 7$$

$d_M f(f) \geq 3$ (dimensiunea unei fețe)

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2 \cdot |E|$$

$$3 \cdot 7 = 2 \cdot |E|$$

$$21 = 2 \cdot |E|$$

$m = |E| = 11 \neq 10$ CONTRADICȚIE!

$\Rightarrow K_5$ nu este un graf planar

2. Fie $G=(V,E)$ un graf planar conex bipartit, cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$

Atunci:

a) $m \leq 2n-4$

b) $\exists\, x \in V$ cu $d(x) \leq 3$

Rezolvare a) $|V|-|E|+|F|=2$ Teorema lui Euler

$d_M f(f) \geq$ (dimensiunea unei fețe)

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2 \cdot |E|$$

$$\Rightarrow |V|-|E|+|2E|/4 \leq 2| \cdot 4$$

$$4|V| - 4|E| + |2E| \leq 8$$

$$4 \cdot |V| - 4|E| + 2|E| \leq 8$$

$$4 \cdot |V| - 2|E| \leq 8 \quad |:2$$

$$2|V| - |E| \leq 4 \Rightarrow a)$$

Rezolvare b) Pp. că $\forall x \in V,\ d(x) \geq 4$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sum_{x \in V} d(x) \geq 4 \cdot n \\ \sum_{x \in V} d(x) = 2m \end{array}\right| \Rightarrow 2m \geq 4n$$

$\Leftrightarrow m \geq 2n \Rightarrow m > 2n-4$

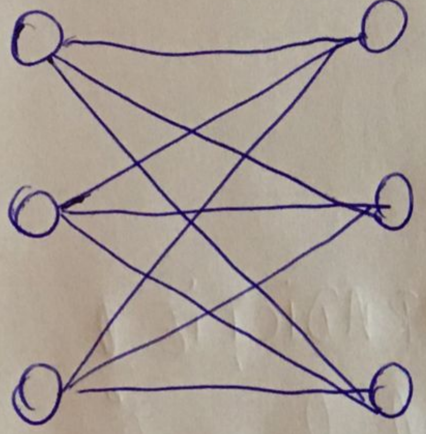
Știm că într-un graf planar bipartit $m \leq 2n-4$

$\Rightarrow$ Presupunerea este falsă (CONTRADICȚIE)

Deci în $\forall$ graf planar bipartit $\exists x \in V$ cu $d(x) \leq 3$

* Dem că, $K_{3,3}$ nu este graf planar

VARIANTA 1



$n = |V| = 6$

$m = |E| = 9$

Știm că $\forall$ un graf planar bipartit $m \leq 2n-4$

Pentru $n = 6$ și $m = 9 \Rightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4$

$9 \leq 12 - 4$

$9 \leq 8$ Fals $\Rightarrow$

$\Rightarrow K_{3,3}$ nu respectă condiția de graf planar bipartit $m \leq 2n-4 \Rightarrow K_{3,3}$ nu este un graf planar

VARIANTA 2

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$$6 - 9 + |F| = 2$$

$$|F| = 5$$

$d_M f(f) \geq 4$ (dimensiunea unei fețe)

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2 \cdot |E|$$

$$4 \cdot 5 = 2 \cdot |E|$$

$$20 = 2 \cdot |E|$$

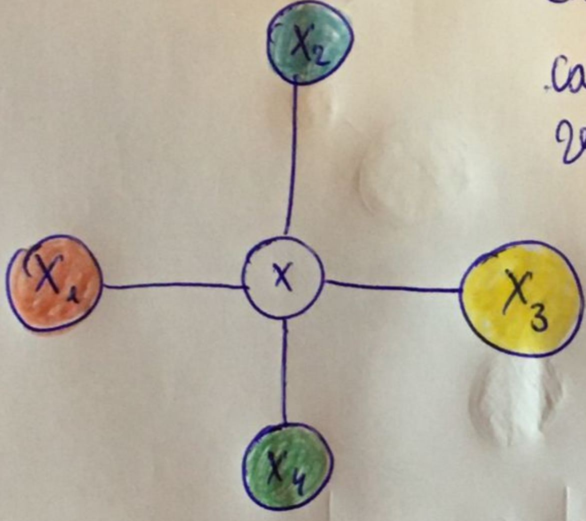
$m = |E| = 10 \neq 9 \Rightarrow$ CONTRADICȚIE !

$\Rightarrow K_{3,3}$ nu este un graf planar bipartit

3. Teorema celor 5 culori + algoritm

Știm că $\forall x \in V$, $d(x) \leq 5$ (din formula lui Euler)

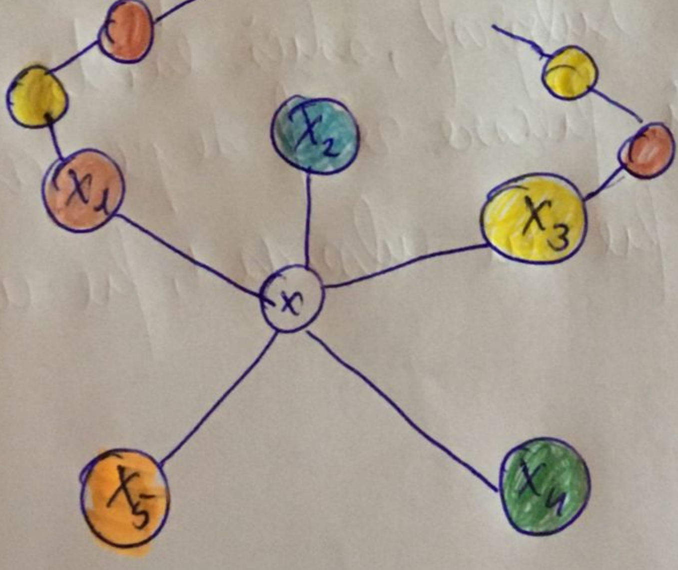
Cazul 1: $d(x) \leq 4$



Există cel mult 4 culori care au fost folosite pe vecinii lui x. Există cel puțin o culoare disponibilă pentru x.

$\Rightarrow$ V poate fi colorat cu 5 culori.

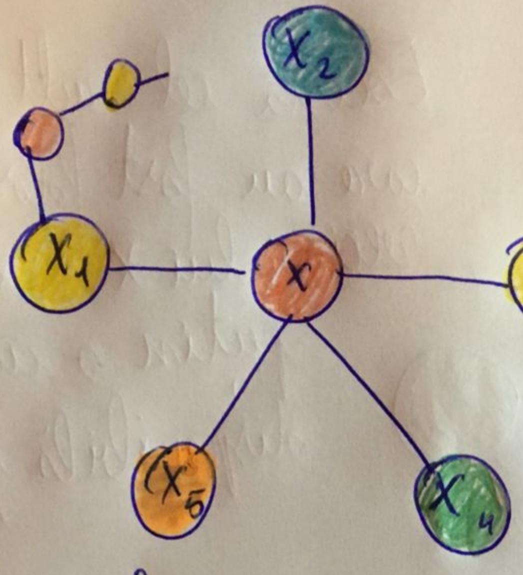
Cazul 2: $d(x) = 5$



Dacă doi dintre vecinii lui x sunt colorați cu aceeași culoare, atunci există o culoare disponibilă pentru x.

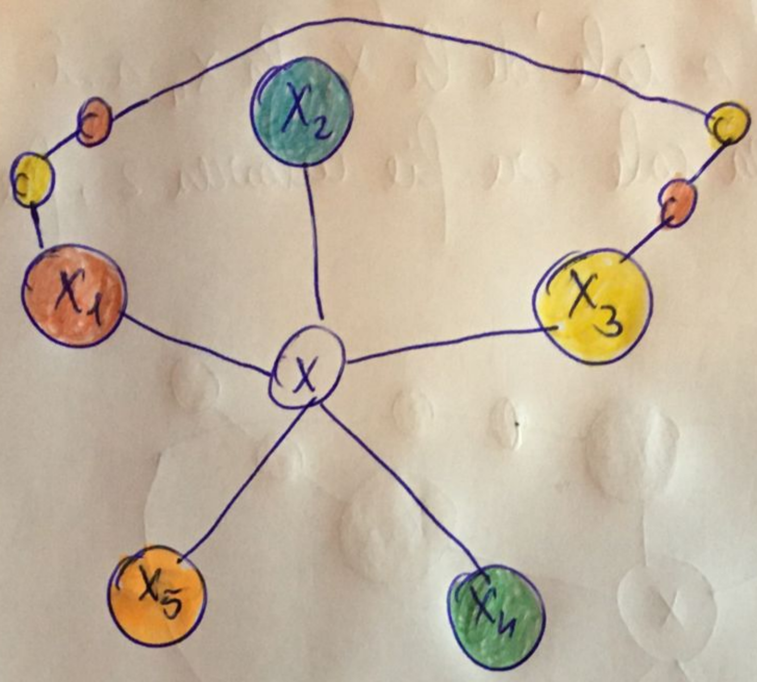
Nodurile adiacente cu x sunt colorate cu 1, 2, 3, 4, 5.

Dacă acest subgraf este deconectat și x_1 și x_2 se află în componente diferite, atunci putem schimba culorile 1 și 3 în componenta x_1

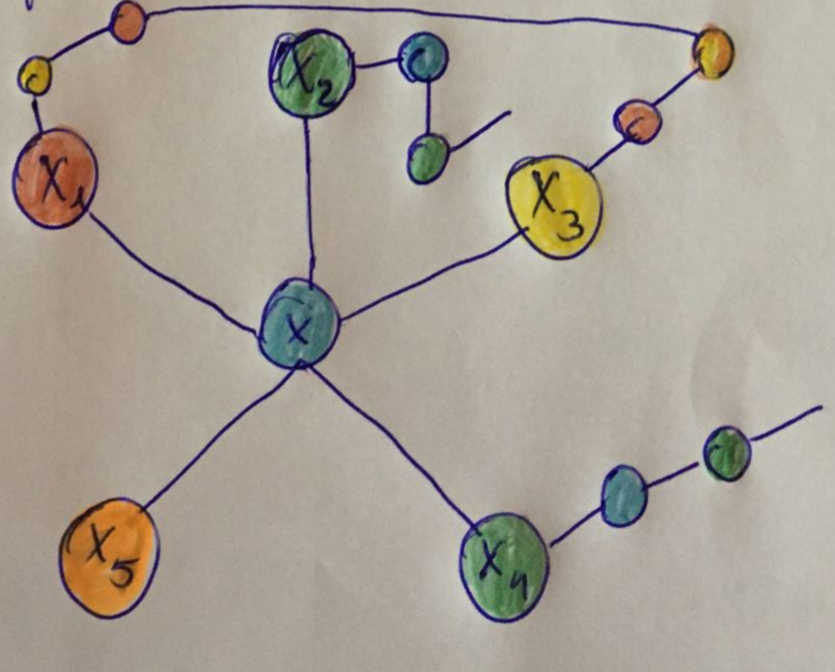


Acesta va fi 5 colorat în continuare. x_1 este colorat cu culoarea 3 și x_3 tot cu 3. Culoarea 1 ar fi disponibilă pt. o contradicție.

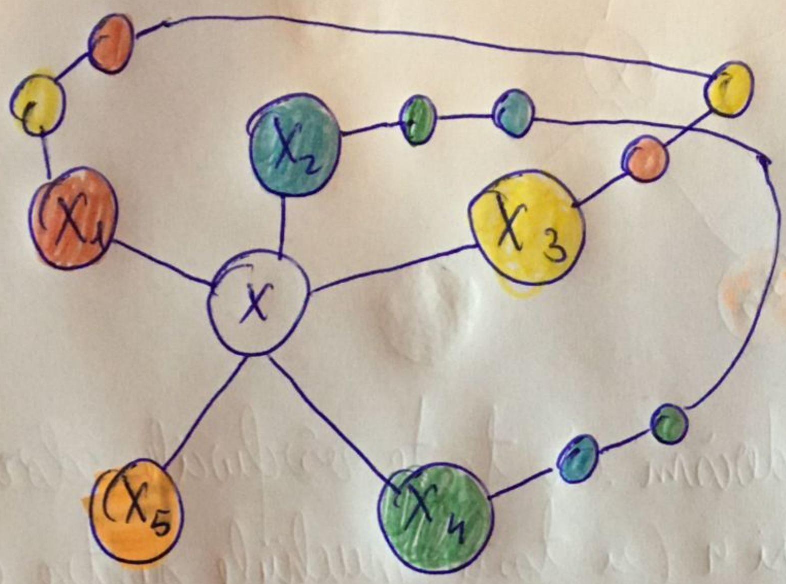
Prin urmare, x_1 și x_3 trebuie să fie în aceeași componentă în acel subgraf, adică există o cale de la x_1 la x_3 a.î. fiecare vârf de pe această cale să fie colorat fie cu culoarea 1, fie cu culoarea 3.



Acum, considerăm că toate vârfurile colorate cu culorile 2 și 4 (și toate muchiile dintre ele). Dacă x_2 și x_4 nu se află în aceași componentă conectată, atunci putem schimba culorile din lanț începând cu x_2 și folosim culoarea rămasă pentru x.



Dacă se află în aceeași componentă conectată, atunci există o cale de la x_2 la x_4 a. î. fiecare vârf de pe acea cale are fie culoarea 2, fie 4.



Asta înseamnă că trebuie să existe 2 muchii care se intersectează. Contradicție