FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 3

(S3.1) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

p = Merg în parc. q = Îmi termin treaba. r = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

s = Plouă. t = Putem observa stelele.

Atunci $\psi = t \rightarrow \neg s$.

(iii) Fie θ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

w = Treci examenul la logică. z = Înţelegi subiectul.

Atunci $\theta = w \rightarrow z$.

(iv) Fie χ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propoziţiile atomice:

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \quad v = \text{Faci o prezentare de calitate.}$$

Atunci $\chi = v \to u$.

□

(S3.2) Fie LP logica propoziţională. Demonstraţi că mulţimea $Expr$ a expresiilor lui LP este numărabilă.
Demonstraţie: Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup Sim \cup \bigcup_{n\geq 2} Sim^n = A \cup B$, unde $A = \{\lambda\} \cup Sim$ şi $B = \bigcup_{n\geq 2} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \to\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din Corolarul 1.10, că Sim este numărabilă. Aplicând încă o dată Corolarul 1.10, rezultă că A este numărabilă.
Conform Propoziţiei 1.13.(iii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 2$. Este evident că $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ este numărabilă (se poate verifica imediat că $h : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{N},\ h(n) = n - 2$ este bijecţie). Putem aplica Propoziţia 1.13.(i) pentru a concluziona că B este cel mult numărabilă. Evident, B este nevidă.
Aplicând din nou Corolarul 1.10, obţinem că $Expr$ este cel mult numărabilă. □

(S3.3) Fie A o mulţime infinită. Demonstraţi următoarele, pentru orice mulţime B,

(i) Dacă există o funcţie injectivă $f : A \to B$, atunci B este infinită.

(ii) Dacă $A \subseteq B$, atunci B este infinită.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin reducere la absurd că B este finită. Cum A este nevidă şi există o funcţie $f : A \to B$, avem că B este nevidă. Aşadar, există o bijecţie $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$. Obţinem că funcţia $h : A \to \{1, \ldots, n\},\ h = g \circ f$ este injectivă. Prin urmare, $A \sim h(A) \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Rezultă că există $k \leq n$ astfel încât $A \sim \{1, \ldots, k\}$, deci că A este finită. Am obţinut o contradicţie.

(ii) Funcţia incluziune $\iota : A \to B,\ \iota(a) = a$ este injectivă. Aplicăm (i) pentru a concluziona că B este infinită.

□

(S3.4) Demonstraţi următoarele:

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este mulţime cel mult numărabilă.

(ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie cel mult numărabilă de mulţimi cel mult numărabile. Aşadar, I este nevidă şi cel mult numărabilă şi mulţimile $A_i, i \in I$ sunt cel mult numărabile. Conform Propoziţiei 1.9.(iii), există pentru fiecare $i \in I$ o funcţie injectivă $f_i : A_i \to \mathbb{N}$.

Definim $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{N} \times I$ astfel:

$$\text{dacă } a \in \bigcup_{i\in I} A_i, \text{ alegem } i_a \in I \text{ cu } a \in A_{i_a} \text{ şi definim } f(a) = (f_{i_a}(a), i_a).$$

Rezultă uşor că f este injectivă: dacă $a, b \in \bigcup_{i\in I} A_i$ sunt a.î. $(f_{i_a}(a), i_a) = (f_{i_b}(b), i_b)$, atunci $i_a = i_b$ şi $f_{i_a}(a) = f_{i_a}(b)$, deci $a = b$, deoarece f_{i_a} este injectivă.

Conform Corolarului 1.10, $\mathbb{N}\times I$ este numărabilă. Aplicând din nou Propoziţia 1.9.(iii), obţinem că $\bigcup_{i\in I} A_i$ este cel mult numărabilă.

(ii) Fie $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n$ mulţimi numărabile şi $A := A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Aplicând (i) pentru $I = \{1, \ldots, n\}$, obţinem că A este cel mult numărabilă. Deoarece $A_1 \subseteq A$ şi A_1 este infinită, rezultă, din (S3.3).(i), că A este infinită. Prin urmare, A este numărabilă.

□

(S3.5) Demonstraţi că $\mathbb{Q}$ este numărabilă.
Demonstraţie: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ şi $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, $f_n(m) = \frac{m}{n}$. Este evident că f_n este bijectivă. Cum $\mathbb{Z}$ este numărabilă, rezultă că A_n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, aplicăm Propoziţia 1.13.(i) şi faptul că $\mathbb{Q}$ este infinită pentru a obţine numărabilitatea lui $\mathbb{Q}$. □

(S3.6) Arătaţi că $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.
Demonstraţie: Cum ştim din (S1.3) că intervalul $(0, 1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente, este suficient să arătăm că intervalul $(0, 1)$ nu este numărabil. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Vom reprezenta funcţia f folosind tabelul de mai jos:

$$\begin{array}{c|c}
0 & 0, a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}\ldots \\
1 & 0, a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\
2 & 0, a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\
3 & 0, a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Aşa cum se observă, pentru orice i, $j \in \mathbb{N}$, $a_{i,j}$ este a $(j+1)$-a zecimală a lui $f(i)$. Deoarece f este surjectivă, fiecărui număr din codomeniul acesteia, $(0,1)$, îi este asociat un număr natural. Cu alte cuvinte, toate numerele reale ce compun intervalul $(0,1)$ ar trebui să se regăsească în coloana a doua a tabelului de mai sus. Vom arăta că aceasta este imposibil, construind un număr $x \in (0,1)$ ce nu se poate găsi în coloana a doua a niciunei linii din tabel. Fie $x := 0, d_0 d_1 d_2 d_3 ... d_j ...$, unde fiecare cifră d_j din reprezentarea zecimală a lui x este obţinută astfel:

$$d_j := \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_{j,j} = 1 \\ 1, & \text{dacă } a_{j,j} \neq 1. \end{cases}$$

Având în vedere construcţia numărului x, prima zecimală a acestuia va fi diferită de prima zecimală a lui $f(0)$, a doua zecimală va fi diferită de a doua zecimală a lui $f(1)$, ..., a n-a zecimală a lui x va fi diferită de a n-a zecimală a lui $f(n-1)$, şi aşa mai departe. În concluzie, numărului x nu îi este asociat un număr natural a a.î. $x = f(a)$, deci f nu este o bijecţie. Contradicţie. $\square$