FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y,z) = d) \\
\varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \\
\varphi_3 &= \exists x\forall y P(x,y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z)) \\
\varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x,z) \lor \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \land \forall x\exists z Q(z,x))
\end{aligned}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \land \neg\forall z(g(y,z) = d) \quad &\boxminus \quad \forall x(f(x) = c) \land \exists z\neg(g(y,z) = d) \\
&\boxminus \quad \forall x\exists z(f(x) = c \land \neg(g(y,z) = d)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \quad &\boxminus \quad \forall y\exists z(\forall x P(x,y) \to Q(x,z)) \\
&\boxminus \quad \forall y\exists z(\forall u P(u,y) \to Q(x,z)) \\
&\boxminus \quad \forall y\exists z\exists u(P(u,y) \to Q(x,z)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists x\forall y P(x,y) \lor \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z)) \quad &\boxminus \quad \exists x(\forall y P(x,y) \lor \neg\exists y\forall z(S(y) \to R(z))) \\
&\boxminus \quad \exists x(\forall y P(x,y) \lor \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z))) \\
&\boxminus \quad \exists x(\forall u P(x,u) \lor \forall y\exists z\neg(S(y) \to R(z))) \\
&\boxminus \quad \exists x\forall u\forall y\exists z(P(x,u) \lor \neg(S(y) \to R(z))).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z,x)) &\quad \text{⫤⊨} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (\neg\neg\exists x R(x) \vee \neg\forall x \exists z Q(z,x)) &\quad \text{⫤⊨} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (\exists x R(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z,x)) &\quad \text{⫤⊨} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x(R(x) \vee \forall z \neg Q(z,x)) &\quad \text{⫤⊨} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x \forall z(R(x) \vee \neg Q(z,x)) &\quad \text{⫤⊨} \\
\exists z \exists x(Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow \exists u \forall v(R(u) \vee \neg Q(v,u)) &\quad \text{⫤⊨} \\
\forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x,z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v,u))). &
\end{aligned}
$$

$\square$

(S12.2)

(i) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$,

(a) $\mathcal{N} \vDash \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;

(b) $\mathcal{N} \vDash \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;

(c) $\mathcal{N} \vDash \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

(ii) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r = (\dot{+}, \dot{\times})$ şi $\mathcal{L}_r$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_r$-formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R} \vDash \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

Demonstraţie:

(i) (a) Luăm

$$\varphi_1 := \exists v_1(v_1 \dot{+} v_1 = v_0).$$

(b) Luăm

$$\varphi_2 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((v_1 \dot{<} v_0 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \rightarrow v_1 = \dot{S}\dot{0}).$$

(c) Luăm

$$\varphi_3 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((\dot{S}\dot{0} \dot{<} v_1 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \rightarrow \exists v_2(v_1 = v_2 \dot{+} v_2)).$$

(ii) Luăm

$$\psi := \exists v_2(v_1 = v_0 \dot{+} v_2 \wedge \exists v_3(v_2 = v_3 \dot{\times} v_3)).$$

$\square$

(S12.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de funcţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\vDash \varphi$.

Demonstraţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind

$$\forall x \forall y ((\neg \exists z (x = z + z) \wedge \neg \exists z (y = z + z)) \rightarrow \exists z (x + y = z + z)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente "nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula "impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.
A doua soluţie: se ia φ ca fiind

$$\exists t \forall x (\exists z (x = z + z) \vee \exists z (x = z + z + t)),$$

ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, luând $t := 1$ (orice număr este ori de forma $2z$, ori de forma $2z + 1$), dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de elementele pare are patru clase, şi nu două. $\square$