

Model Examen 2021

Nume: _____

Prenume: _____

Grupa: _____

Indicații:

- În cazul exercițiilor cu forma normală prenex și forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține:

- două simboluri de relații unare S, T și un simbol de relație binară R ;
- un simbol de operație unară f și un simbol de operație binară g ;
- trei simboluri de constante a, b, c .

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Fie următoarea formulă în \mathcal{L} :

$$\chi := \exists u R(x, u) \wedge \exists u T(u) \rightarrow \neg \exists y S(y) \vee \exists z \neg T(z)$$

Găsiți o formă normală prenex pentru χ .

(P2) [2 puncte] Să se ofere un exemplu justificat de mulțime infinită de formule din logica propozițională a cărei mulțime de modele să fie infinită și nenumărabilă.

(P3) [1 punct] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcția Mod ce asociază fiecărei formule din logica propozițională mulțimea modelelor sale.

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, ψ formule în logica propozițională. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi.$$

(P5) [2 puncte]

- (i) Să se dea exemplu de mulțime de \mathcal{L} -enunțuri Γ ce are proprietatea că pentru orice \mathcal{L} -structură $\mathcal{A} = (A)$ (unde A este o mulțime nevidă), avem:

$$\mathcal{A} \models \Gamma \text{ dacă și numai dacă } A \text{ are un număr par de elemente.}$$

- (ii) Să se dea exemplu de \mathcal{L}_{Graf} -enunț φ astfel încât pentru orice graf \mathcal{G} ,

$$\mathcal{G} \models \varphi \text{ dacă și numai dacă fiecare nod al lui } \mathcal{G} \text{ are grad } 2.$$

(P6) [1,5 puncte] Fie B o mulțime și $f : \mathbb{N} \rightarrow B$ o funcție surjectivă. Arătați că B este cel mult numărabilă.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziționale:

$$\theta := (v_2 \leftrightarrow v_4) \rightarrow \neg(v_2 \wedge \neg v_4)$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \wedge v_4) \rightarrow v_4)$ pentru orice evaluare e .
- ☐ B: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \wedge \neg v_2) \rightarrow (v_2 \wedge \neg v_2))$ pentru orice evaluare e .
- ☐ C: $e^+(\theta) = e^+(v_2 \rightarrow (v_2 \wedge v_4))$ pentru orice evaluare e .
- ☐ D: $e^+(\theta) = e^+(v_2 \wedge \neg v_2)$ pentru orice evaluare e .
- ☐ E: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \leftrightarrow v_4) \rightarrow (\neg v_2 \wedge v_4))$ pentru orice evaluare e .

(P8) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea \mathcal{S} și alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_3$, $x_3 := v_2$ obținem:

- ☐ A: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_2, \neg v_4\}\}$.
- ☐ B: $\mathcal{S}_4 = \{\square\}$.
- ☐ C: $\mathcal{T}_3^1 = \emptyset$.
- ☐ D: $\mathcal{S}_4 = \{\{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.
- ☐ E: $\mathcal{T}_3^0 = \{\{v_4, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.

(P9) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := x \dot{<} \dot{2} \text{ și } \psi := x \dot{<} \dot{4}, \text{ unde } \dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}, \dot{4} := \dot{S}\dot{S}\dot{2}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: $\mathcal{N} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e]$.
- ☐ B: $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$.
- ☐ C: $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e]$.
- ☐ D: $\mathcal{N} \models (\exists x(\varphi \wedge \neg\psi))[e]$.
- ☐ E: $\mathcal{N} \models (\varphi \vee \psi)[e_{x \leftarrow 3}]$.

(P10) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (\neg v_1 \rightarrow v_2) \leftrightarrow (v_3 \vee v_1)$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: $(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3)$ este FNC a lui ψ .
- ☐ B: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ .
- ☐ C: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a lui ψ .
- ☐ D: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ .
- ☐ E: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a lui ψ .

(P11) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- ☐ A: \mathcal{S} este nesatisfiabilă.
- ☐ B: \mathcal{S} nu este nici nesatisfiabilă, nici satisfiabilă.
- ☐ C: $\{v_4 \rightarrow (v_1 \vee v_2), v_2 \rightarrow \neg v_3, v_1 \vee v_4, v_3\} \models v_1 \wedge v_3$.
- ☐ D: \mathcal{S} este satisfiabilă.
- ☐ E: $\{v_4 \rightarrow (v_1 \vee v_2), v_2 \rightarrow \neg v_3, v_1 \vee v_4, v_3\} \models \neg v_1 \vee \neg v_3$.

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := \neg(v_1 \wedge v_2) \rightarrow (\neg v_3 \wedge v_2)$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- ☐ A: $v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3 \vee v_2$ este FNC și FND a lui φ .
- ☐ B: $v_1 \vee v_2 \vee (\neg v_3 \wedge v_2)$ este FND a lui φ .
- ☐ C: $(v_1 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_3 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_2)$ este FND a lui φ .
- ☐ D: $(v_1 \wedge v_2) \vee \neg v_3 \vee v_2$ este FND a lui φ .
- ☐ E: $(v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_3 \wedge v_2)$ este FND a lui φ .

(P13) [2 răspunsuri corecte] Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru orice formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} ?

- ☐ A: $\forall x(\varphi \vee \psi) \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$, pentru orice variabilă x .
- ☐ B: $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
- ☐ C: $\forall x(\varphi \vee \psi) \models \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x .
- ☐ D: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
- ☐ E: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunț în \mathcal{L} :

$$\psi := \forall x \exists u \forall y \exists v ((S(u) \rightarrow R(v, y)) \vee (S(v) \rightarrow T(x)))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru ψ ?

- ☐ A: $\forall x \forall y ((S(n(x)) \rightarrow R(h(x, y), y)) \vee (S(h(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde n este simbol nou de operație unară, iar h este simbol nou de operație binară.
- ☐ B: $\forall x \forall y ((S(n(x)) \rightarrow R(h(x, y), y)) \vee (S(n(x)) \rightarrow T(x)))$, unde n este simbol nou de operație unară, iar h este simbol nou de operație binară.
- ☐ C: $\forall x \forall y ((S(n(x, y)) \rightarrow R(h(x, y), y)) \vee (S(h(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde n și h sunt simboluri noi de operații binare.
- ☐ D: $\forall x \forall y ((S(h(x)) \rightarrow R(n(x, y), y)) \vee (S(n(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde h este simbol nou de operație unară, iar n este simbol nou de operație binară.
- ☐ E: $\forall x \forall y ((S(h(x)) \rightarrow R(n(x, y))) \vee (S(n(x, y)) \rightarrow T(x)))$, unde h este simbol nou de operație unară, iar n este simbol nou de operație binară.

(P15) [1 răspuns corect] Considerăm următoarea formulă în limbajul logicii propoziționale:

$$\psi := (v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_3)) \rightarrow (v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată (pentru orice evaluare e)?

- ☐ A: Dacă $e(v_2) = 1$ și $e^+(\neg v_3) = 1$, atunci $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$.
- ☐ B: Dacă $e^+(v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_3)) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 0$ și $e(v_3) = 1$.
- ☐ C: Dacă $e(v_1) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$.

- ☐ D: Dacă $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$, atunci $e(v_2) = 1$ și $e(v_3) = 0$.
☐ E: $e^+(\psi) = 1$ numai dacă $e(v_1) = e(v_3) = 1$ și $e(v_2) = 0$.

(P16) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulțime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_4\}, C_2 = \{\neg v_2, \neg v_3\}, C_3 = \{\neg v_1, \neg v_3\}, C_4 = \{v_1, v_4\}, C_5 = \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluție?

- ☐ A: $C_6 = \{\neg v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_4) și $C_7 = \{v_1, v_2, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_6).
☐ B: $C_6 = \{v_1, v_2\}$ (rezolvent al C_1, C_4) și $C_7 = \{v_1, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).
☐ C: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_2, C_3).
☐ D: $C_6 = \{v_1, \neg v_4, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_2) și $C_7 = \{v_1, \neg v_4, v_3\}$ (rezolvent al C_3, C_5).
☐ E: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_2, C_3) și $C_7 = \{\neg v_1, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).