FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 11

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice $e : V \to A$ şi orice a, $b \in A$, avem că:*

$$(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a} = (e_{x\leftarrow a})_{y\leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b}$. Aşadar,

$$e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b} : V \to A, \quad e_{x\leftarrow a,y\leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \textit{dacă } v \neq x \textit{ şi } v \neq y \\ a & \textit{dacă } v = x \\ b & \textit{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S11.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\neg\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\neg\varphi$;

(ii) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(iii) $\exists y\forall x\varphi \vDash \forall x\exists y\varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ şi $e : V \to A$.

(i) Ştim că "$\exists x$" este o prescurtare pentru "$\neg\forall x\neg$".
$\mathcal{A} \vDash (\neg\exists x\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\neg\neg\forall x\neg\varphi)[e] \iff$ nu este adevărat că $\mathcal{A} \vDash (\neg\forall x\neg\varphi)[e]$ $\iff$ nu este adevărat că nu este adevărat că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\neg\varphi)[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi\wedge\psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi\wedge\psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big)$ şi $\big($pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\big) \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y\leftarrow b})_{x\leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x\leftarrow c})_{y\leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow c, y\leftarrow d}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**).

Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow c, y\leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b-ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a, y\leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow c, y\leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$, lucru pe care îl putem scrie şi $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) \to \psi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1$ sau chiar $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a})$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \to \forall x \psi)[e]$, ceea ce este echivalent, din aceleaşi considerente, cu $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e)$.

Dacă $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, suntem OK. Presupunem, aşadar, că $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. pentru orice $b \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow b}) = 1$ (**).

Ne rămâne de arătat că $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. că pentru orice $c \in A$, $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow c}) = 1$. Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow c})$, iar din (**), că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow c}) = 1$. Deci $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow c}) = 1$, ceea ce ne trebuia.

$\square$

(S11.2) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\vDash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;

(ii) $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

(iii) $\forall x \exists y \varphi \not\vDash \exists y \forall x \varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ şi $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \nvDash (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \nvDash (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \nvDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Avem:

(a) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \vDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \nvDash \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x\dot{<}y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}\text{, avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y\varphi)[e_{x\leftarrow n}] \\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\exists y\forall x\varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e_{y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\
&\qquad \text{avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow n, y\leftarrow m}] \\
&\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \nvDash (\exists y\forall x\varphi)[e].$$

$\square$

(S11.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \wedge \forall x\psi && (1)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \vee \exists x\psi && (2)\\
\varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\varphi && (3)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \to \forall x\psi && (4)\\
\exists x(\psi \to \varphi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\psi \to \varphi. && (5)
\end{aligned}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

Demonstrăm (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 3.27)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 3.27)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ (aplicând P. 3.27)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (4):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 3.27)}\\
&\iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (5):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\psi \to \varphi))[e] \quad &\iff \quad \text{există } a \in A \;\text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \\
&\iff \quad \text{există } a \in A \;\text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\big) \\
&\iff \quad \text{există } a \in A \;\text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\big) \text{ (aplicând P. 3.27)} \\
&\iff \quad (\text{există } a \in A \;\text{ a.î. } \mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
&\iff \quad \mathcal{A} \nvDash \forall x\psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
&\iff \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e].
\end{aligned}
$$

□