FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Model Examen 2021

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Indicaţii:

- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
  - trei simboluri de constante a, b, c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\chi := \exists u R(x,u) \wedge \exists u T(u) \rightarrow \neg \exists y S(y) \vee \exists z \neg T(z)$$

Găsiţi o formă normală prenex pentru χ.
Demonstraţie: Avem:

$$\begin{aligned}
\chi \quad & \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \exists u R(x,u) \wedge \exists w T(w) \rightarrow \forall y \neg S(y) \vee \exists z \neg T(z)\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \exists u (R(x,u) \wedge \exists w T(w)) \rightarrow \forall y \neg S(y) \vee \exists z \neg T(z)\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \exists u \exists w (R(x,u) \wedge T(w)) \rightarrow \forall y \neg S(y) \vee \exists z \neg T(z)\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \exists u \exists w (R(x,u) \wedge T(w)) \rightarrow \forall y (\neg S(y) \vee \exists z \neg T(z))\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \exists u \exists w (R(x,u) \wedge T(w)) \rightarrow \forall y \exists z (\neg S(y) \vee \neg T(z))\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \forall u \big(\exists w (R(x,u) \wedge T(w)) \rightarrow \forall y \exists z (\neg S(y) \vee \neg T(z))\big)\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \forall u \forall w \big(R(x,u) \wedge T(w) \rightarrow \forall y \exists z (\neg S(y) \vee \neg T(z))\big)\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \forall u \forall w \forall y \big(R(x,u) \wedge T(w) \rightarrow \exists z (\neg S(y) \vee \neg T(z))\big)\\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \quad \forall u \forall w \forall y \exists z \big(R(x,u) \wedge T(w) \rightarrow \neg S(y) \vee \neg T(z)\big).
\end{aligned}$$

$\square$

(P2) [2 puncte] Să se ofere un exemplu justificat de mulţime infinită de formule din logica propoziţională a cărei mulţime de modele să fie infinită şi nenumărabilă.

Demonstraţie: Luăm mulţimea $\Gamma = \{v_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Clar, Γ este infinită, iar o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model pentru Γ dacă şi numai dacă ia valoarea 1 pentru toate variabilele de indice par, rămânând "spaţiu de manevră" pe variabilele de indice impar. Definim funcţia $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to Mod(\Gamma)$ astfel: pentru orice $A \subseteq \mathbb{N}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$,

$$g(A)(v_n) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este par;} \\ 1, & \text{dacă } n \text{ este impar şi } \frac{n-1}{2} \in A; \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar şi } \frac{n-1}{2} \notin A. \end{cases}$$

Vom demonstra în continuare că g este bijectivă. Atunci va rezulta, având în vedere că $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ este o mulţime infinită şi nenumărabilă, că şi $Mod(\Gamma)$ este infinită şi nenumărabilă.

Ca să demonstrăm că g este injectivă, luăm A, $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ cu $A \neq B$ şi vrem să arătăm că $g(A) \neq g(B)$. Dat fiind că $A \neq B$, există m cu $m \in A \setminus B$ sau $m \in B \setminus A$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem $m \in A \setminus B$. Notăm $n := 2m+1$. Atunci n este impar şi $\frac{n-1}{2} = m$. Cum $\frac{n-1}{2} \in A$, avem că $g(A)(v_n) = 1$, iar cum $\frac{n-1}{2} \notin B$, avem $g(B)(v_n) = 0$. Aşadar, $g(A) \neq g(B)$.

Ca să demonstrăm că g este surjectivă, luăm $e \in Mod(\Gamma)$ şi vrem să găsim $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ astfel încât $g(A) = e$. Alegem

$$A := \{m \in \mathbb{N} \mid e(v_{2m+1}) = 1\}.$$

Atunci rămâne de arătat că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g(A)(v_n) = e(v_n)$.

Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă n este par, $v_n \in \Gamma$, iar cum $e \vDash \Gamma$, $e(v_n) = 1$. Din definiţia lui g, $g(A)(v_n) = 1$, deci $g(A)(v_n) = e(v_n)$. Dacă n este impar, atunci există m cu $n = 2m+1$ şi deci $m = \frac{n-1}{2}$. Din definiţia lui g, avem că $g(A)(v_n) = 1$ este echivalent cu $m \in A$, ceea ce este, mai departe, echivalent, din definiţia lui A, cu faptul că $e(v_n) = 1$. Aşadar, şi în acest caz, $g(A)(v_n) = e(v_n)$. $\square$

(P3) [1 punct] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcţia Mod ce asociază fiecărei formule din logica propoziţională mulţimea modelelor sale.

Demonstraţie: Se observă că $Mod : Form \to \mathcal{P}(\{0,1\}^V)$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} \text{(R0)} & Mod(v) & = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v) = 1\} \\ \text{(R1)} & Mod(\neg\varphi) & = \{0,1\}^V \setminus Mod(\varphi) \\ \text{(R2)} & Mod(\varphi \to \psi) & = (\{0,1\}^V \setminus Mod(\varphi)) \cup Mod(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = \mathcal{P}(\{0,1\}^V)$ şi pentru

$$\begin{array}{ll} G_0 : V \to A, & G_0(v) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v) = 1\} \\ G_\neg : A \to A, & G_\neg(X) = \{0,1\}^V \setminus X \quad \text{pentru orice } X \subseteq \{0,1\}^V \\ G_\to : A \times A \to A, & G_\to(X,Y) = (\{0,1\}^V \setminus X) \cup Y \text{ pentru orice } X, Y \subseteq \{0,1\}^V \end{array}$$

pentru a concluziona că Mod este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). $\square$

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, ψ formule în logica propoziţională. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \land \neg\varphi) \to \psi.$$

Demonstraţie: Avem:

(1)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(S6.2)
(2)	$\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(1) şi (S7.2).(iv)
(3)		$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$	Teorema deducţiei pentru (2).

$\square$

(P5) [2 puncte]

(i) Să se dea exemplu de mulţime de $\mathcal{L}_=$-enunţuri Γ ce are proprietatea că pentru orice $\mathcal{L}_=$-structură $\mathcal{A} = (A)$ (unde A este o mulţime nevidă), avem:

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \text{ dacă şi numai dacă } A \text{ are un număr par de elemente.}$$

(ii) Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{Graf}$-enunţ φ astfel încât pentru orice graf $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G} \vDash \varphi \text{ dacă şi numai dacă fiecare nod al lui } \mathcal{G} \text{ are grad 2.}$$

Demonstraţie:

(i) Considerăm următoarea mulţimea de enunţuri

$$\Gamma = \left\{ \bigvee_{k \leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2(l+1)} \mid l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{A} = (A)$ o $\mathcal{L}_=$-structură astfel încât A are un număr par de elemente, deci $|A| = 2n$ pentru un $n \geq 1$. Considerăm $l \in \mathbb{N}^*$ arbitrar. Vrem să arătăm că

$$\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k \leq l} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2(l+1)},$$

deci că fie există $k \leq l$ cu $\mathcal{A} \vDash \exists^{=2k}$ (adică $|A| = 2k$), fie $\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq 2(l+1)}$ (adică $|A| \geq 2(l+1)$). Dacă $n \leq l$, ne aflăm în primul caz (luând $k := n$); dacă $n > l$, ne aflăm în al doilea caz.

"$\Rightarrow$" Fie $\mathcal{A} = (A)$ o $\mathcal{L}_=$-structură astfel încât $\mathcal{A} \vDash \Gamma$. Presupunem prin reducere la absurd că A are un număr impar de elemente, deci că $|A| = 2n - 1$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\mathcal{A} \vDash \Gamma$, luând $l := n$ obţinem că

$$\mathcal{A} \vDash \bigvee_{k \leq n} \exists^{=2k} \vee \exists^{\geq 2(n+1)},$$

deci (ca mai sus), ori există $k \leq n$ astfel încât $|A| = 2k$, fie $|A| \geq 2(n+1) = 2n + 2$. Deoarece $|A| = 2n - 1$, am ajuns la o contradicţie.

(ii) Luăm

$$\varphi := \forall v_1 \exists v_2 \exists v_3 (\neg(v_2 = v_3) \wedge \forall v_4 (\dot{E}(v_1, v_4) \leftrightarrow v_4 = v_2 \vee v_4 = v_3)).$$

$\square$

(P6) [1,5 puncte] Fie B o mulţime şi $f : \mathbb{N} \to B$ o funcţie surjectivă. Arătaţi că B este cel mult numărabilă.

Demonstraţie: Cum f este surjectivă, pentru fiecare $b \in B$ putem fixa un $n_b \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(n_b) = b$. Definim funcţia $g : B \to \mathbb{N}$, pentru orice $b \in B$, prin $g(b) := n_b$.
Demonstrăm că g este injectivă. Fie b, b' cu $g(b) = g(b')$. Atunci $n_b = n_{b'}$ şi deci $f(n_b) = f(n_{b'})$. Dar cum $f(n_b) = b$ şi $f(n_{b'}) = b'$, avem că $b = b'$.
Aplicând (S2.4), obţinem că B este cel mult numărabilă. □

Partea II. Probleme de tip grilă

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\theta := (v_2 \leftrightarrow v_4) \to \neg(v_2 \land \neg v_4)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \land v_4) \to v_4)$ pentru orice evaluare e.
☒ B: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \land \neg v_2) \to (v_2 \land \neg v_2))$ pentru orice evaluare e.
☐ C: $e^+(\theta) = e^+(v_2 \to (v_2 \land v_4))$ pentru orice evaluare e.
☐ D: $e^+(\theta) = e^+(v_2 \land \neg v_2)$ pentru orice evaluare e.
☐ E: $e^+(\theta) = e^+((v_2 \leftrightarrow v_4) \to (\neg v_2 \land v_4))$ pentru orice evaluare e.

(P8) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_3$, $x_3 := v_2$ obţinem:
☐ A: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ B: $\mathcal{S}_4 = \{\square\}$.
☒ C: $\mathcal{T}_3^1 = \emptyset$.
☐ D: $\mathcal{S}_4 = \{\{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ E: $\mathcal{T}_3^0 = \{\{v_4, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.

(P9) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := x\dot{<}\dot{2} \text{ şi } \psi := x\dot{<}\dot{4}, \text{ unde } \dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0},\ \dot{4} := \dot{S}\dot{S}\dot{2}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{N} \vDash (\forall x(\varphi \land \psi))[e]$.
☒ B: $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$.
☐ C: $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e]$.
☐ D: $\mathcal{N} \vDash (\exists x(\varphi \land \neg\psi))[e]$.
☒ E: $\mathcal{N} \vDash (\varphi \lor \psi)[e_{x \leftarrow 3}]$.

(P10) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (\neg v_1 \to v_2) \leftrightarrow (v_3 \lor v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $(v_1 \land \neg v_2 \land \neg v_3) \lor (v_1 \land v_2 \land \neg v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ B: $(\neg v_1 \lor \neg v_2 \lor \neg v_3) \land (v_1 \lor v_2 \lor v_3)$ este FNC a lui ψ.
☒ C: $(v_1 \lor \neg v_2 \lor v_3) \land (v_1 \lor v_2 \lor \neg v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ D: $(v_1 \lor \neg v_2 \lor v_3) \land (\neg v_1 \lor v_2 \lor v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ E: $(\neg v_1 \lor \neg v_2 \lor \neg v_3) \land (\neg v_1 \lor v_2 \lor v_3)$ este FNC a lui ψ.

(P11) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ B: $\mathcal{S}$ nu este nici nesatisfiabilă, nici satisfiabilă.
☒ C: $\{v_4 \to (v_1 \lor v_2), v_2 \to \neg v_3, v_1 \lor v_4, v_3\} \vDash v_1 \land v_3$.
☐ D: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ E: $\{v_4 \to (v_1 \lor v_2), v_2 \to \neg v_3, v_1 \lor v_4, v_3\} \vDash \neg v_1 \lor \neg v_3$.

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := \neg(v_1 \land v_2) \to (\neg v_3 \land v_2)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $v_1 \lor v_2 \lor \neg v_3 \lor v_2$ este FNC şi FND a lui φ.
☐ B: $v_1 \lor v_2 \lor (\neg v_3 \land v_2)$ este FND a lui φ.
☐ C: $(v_1 \land \neg v_3) \lor (\neg v_3 \land v_2) \lor (v_1 \land v_2)$ este FND a lui φ.
☐ D: $(v_1 \land v_2) \lor \neg v_3 \lor v_2$ este FND a lui φ.
☒ E: $(v_1 \land v_2) \lor (\neg v_3 \land v_2)$ este FND a lui φ.

(P13) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$?
☐ A: $\forall x(\varphi \lor \psi) \vDash \forall x\varphi \lor \forall x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ B: $\exists x(\varphi \to \psi) \Dashv \varphi \to \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☒ C: $\forall x(\varphi \lor \psi) \vDash \exists x\varphi \lor \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ D: $\forall x(\varphi \land \psi) \Dashv \varphi \lor \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☒ E: $\forall x(\varphi \land \psi) \vDash \varphi \lor \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunţ în $\mathcal{L}$:

$$\psi := \forall x \exists u \forall y \exists v\, ((S(u) \to R(v, y)) \lor (S(v) \to T(x)))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru ψ?
☒ A: $\forall x \forall y\, ((S(n(x)) \to R(h(x, y), y)) \lor (S(h(x, y)) \to T(x)))$, unde n este simbol nou de operaţie unară, iar h este simbol nou de operaţie binară.
☐ B: $\forall x \forall y\, ((S(n(x)) \to R(h(x, y), y)) \lor (S(n(x)) \to T(x)))$, unde n este simbol nou de operaţie unară, iar h este simbol nou de operaţie binară.
☐ C: $\forall x \forall y\, ((S(n(x, y)) \to R(h(x, y), y)) \lor (S(h(x, y)) \to T(x)))$, unde n şi h sunt simboluri noi de operaţii binare.
☒ D: $\forall x \forall y\, ((S(h(x)) \to R(n(x, y), y)) \lor (S(n(x, y)) \to T(x)))$, unde h este simbol nou de operaţie unară, iar n este simbol nou de operaţie binară.

☐ E: $\forall x \forall y\, ((S(h(x)) \to R(n(x,y))) \vee (S(n(x,y)) \to T(x)))$, unde h este simbol nou de operaţie unară, iar n este simbol nou de operaţie binară.

(P15) [1 răspuns corect] Considerăm următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\psi := (v_1 \to (v_2 \to v_3)) \to (v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată (pentru orice evaluare e)?
☐ A: Dacă $e(v_2) = 1$ şi $e^+(\neg v_3) = 1$, atunci $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$.
☐ B: Dacă $e^+(v_1 \to (v_2 \to v_3)) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 0$ şi $e(v_3) = 1$.
☐ C: Dacă $e(v_1) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$.
☒ D: Dacă $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$, atunci $e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.
☐ E: $e^+(\psi) = 1$ numai dacă $e(v_1) = e(v_3) = 1$ şi $e(v_2) = 0$.

(P16) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_4\}, C_2 = \{\neg v_2, \neg v_3\}, C_3 = \{\neg v_1, \neg v_3\}, C_4 = \{v_1, v_4\}, C_5 = \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluţie?
☒ A: $C_6 = \{\neg v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_4) şi $C_7 = \{v_1, v_2, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_6).
☒ B: $C_6 = \{v_1, v_2\}$ (rezolvent al C_1, C_4) şi $C_7 = \{v_1, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).
☐ C: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_2, C_3).
☐ D: $C_6 = \{v_1, \neg v_4, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_2) şi $C_7 = \{v_1, \neg v_4, v_3\}$ (rezolvent al C_3, C_5).
☐ E: $C_6 = \{\neg v_2, \neg v_1\}$ (rezolvent al C_2, C_3) şi $C_7 = \{\neg v_1, \neg v_3\}$ (rezolvent al C_2, C_6).