Examen[1] la algebră, anul I, sem. I, informatică
(subiect de examen pentru studenţii din anul III)
03.02.2021

Problema 1. Definim pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ următoarea relaţie binară:

$$x\rho y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{R}.$$

(1) Să se arate că ρ este o relaţie de echivalenţă. (**5 pct.**)

(2) Aflaţi clasa de echivalenţă a lui 1 în raport cu ρ. (**5 pct.**)

(3) Aflaţi clasa de echivalenţă a lui $3 - i$ în raport cu ρ. (**5 pct.**)

(4) Aflaţi clasa de echivalenţă a lui $a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, în raport cu ρ. (**5 pct.**)

(5) Determinaţi un sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru ρ. (**5 pct.**)

(6) Folosind teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri să se arate că grupul factor $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$. (**10 pct.**)

Problema 2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \in S_{11}$.

(1) Descompuneţi σ în produs de cicli disjuncţi. (**5 p.**)

(2) Descompuneţi σ în produs de transpoziţii. (**5 p.**)

(3) Calculaţi $\operatorname{sgn}(\sigma)$ şi $\operatorname{ord}(\sigma)$. (**5 p.**)

(4) Există permutări de ordin 35 în S_{11}? (**5 p.**)

(5) Rezolvaţi ecuaţia $x^{2011} = \sigma$ în S_{11}. (**10 p.**)

Problema 3. Se consideră grupul (aditiv) $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

(1) Aflaţi ordinele elementelor $(\widehat{4}, \overline{3})$, respectiv $(\widehat{3}, \overline{5})$. (**10 pct.**)

(2) Formează $\{(\widehat{4}, \overline{3}), (\widehat{3}, \overline{5})\}$ un sistem de generatori pentru G? Justificaţi. (**10 pct.**)

(3) Este G grup ciclic? Justificaţi. (**10 pct.**)

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 5 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore. Succes!**