Examen[1] la algebră, anul I, sem. I, informatică
(subiect de examen pentru studenţii din anii I şi II)
03.02.2021

Problema 1. Fie $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$.

(1) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^2 = \sigma$, $x \in S_5$. **(5 pct.)**

(2) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^{2021} = \sigma$, $x \in S_5$. **(5 pct.)**

(3) Aflaţi numărul de elemente din $H = \langle \sigma \rangle$ (subgrupul generat de σ în S_5). **(5 pct.)**

(4) Aflaţi indicele lui H în S_5. **(5 pct.)**

(5) Arătaţi că H nu este subgrup normal în S_5. **(5 pct.)**

(6) Determinaţi cel mai mic subgrup normal al lui S_5 care-l conţine pe H. **(10 pct.)**

Problema 2. Fie idealele $I = (X^2 - 1)$ şi $J = (X^3 - 1)$ ale inelului de polinoame $\mathbb{R}[X]$.

(1) Este adevărat că $X^4 - 1 \in I$? Dar că $X^4 - 1 \in J$? Justificaţi. **(10 p.)**

(2) Determinaţi un generator pentru fiecare din idealele $I \cap J$, respectiv $I + J$. **(5 p.)**

(3) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/I \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. **(5 p.)**

(4) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/J \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. **(5 p.)**

(5) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/I \not\simeq \mathbb{R}[X]/J$. **(5 p.)**

Problema 3. Fie polinomul $P(X) = X^3 + n^2X^2 - 5$, $n \in \mathbb{Z}$. Studiaţi ireductibilitatea lui P, în funcţie de n, peste fiecare din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$, iar în cazurile în care polinomul este reductibil descompuneţi-l în factori ireductibili. Justificaţi răspunsurile. **(30 pct.)**

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 5 puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore. Succes!**