Primitive grafice. Fața și spatele unui poligon convex

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2022 - 2023

Motivație

- Codurile sursă `02_02_fata_spatele_polig.cpp`, `02_03_poligoane3d_old.cpp`, `02_04_poligoane3d_new.cpp`.

Motivație

- Codurile sursă 02_02_fata_spatele_polig.cpp, 02_03_poligoane3d_old.cpp, 02_04_poligoane3d_new.cpp.
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?

Motivație

- Codurile sursă `02_02_fata_spatele_polig.cpp`, `02_03_poligoane3d_old.cpp`, `02_04_poligoane3d_new.cpp`.
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - **NU:** reguli pentru aplicarea reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON` - se presupune că vârfurile determină un poligon convex

Motivație

- Codurile sursă `02_02_fata_spatele_polig.cpp`, `02_03_poligoane3d_old.cpp`, `02_04_poligoane3d_new.cpp`.
- Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - **NU:** reguli pentru aplicarea reguli pentru aplicarea funcției `GL_POLYGON` - se presupune că vârfurile determină un poligon convex
  - **DA:** fața și spatele unui poligon convex

Reguli pentru aplicarea opțiunii GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.

Reguli pentru aplicarea opțiunii GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia poligonală să nu aibă autointersecții.

Reguli pentru aplicarea opțiunii GL_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL_POLYGON este utilizată pentru un șir de vârfuri $P_1, P_2, \ldots, P_N$, distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia poligonală să nu aibă autointersecții.
3. Poligonul trebuie să fie convex.

1. Coplanaritatea

De verificat: condiția de coplanaritate

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{P_1} & x_{P_2} & x_{P_3} & \dots & x_{P_N} \\ y_{P_1} & y_{P_2} & y_{P_3} & \dots & y_{P_N} \\ z_{P_1} & z_{P_2} & z_{P_3} & \dots & z_{P_N} \end{pmatrix} = 3 \qquad (1)$$

sau faptul că

$$\dim_{\mathbb{R}}\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_N}\rangle = 2. \qquad (2)$$

Fapt: O condiție alternativă este coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4}$, ..., $\overrightarrow{P_{N-1}P_N} \times \overrightarrow{P_NP_1}$, $\overrightarrow{P_NP_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}$. Altfel spus: punctele $P_1, P_2, \dots, P_N$ sunt coplanare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, N$, cu convenții modulo N) sunt coliniari.

Exemplu

Punctele $P_1 = (7,1,1)$, $P_2 = (-3,3,9)$, $P_3 = (1,-1,9)$, $P_4 = (8,-4,5)$ sunt coplanare.

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$

$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (16, 16, 16)$

$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (32, 32, 32)$

$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (48, 48, 48)$

vectorii sunt proporționali, deci coliniari $\Longleftrightarrow$ punctele sunt coplanare

$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-3,3,9) - (7,1,1) = (-10, 2, 8)$

$\overrightarrow{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (1,-1,9) - (-3,3,9) = (4,-4,0)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} -10 & 4 & e_1 \\ 2 & -4 & e_2 \\ 8 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ultima coloană}]{\text{dezv.}} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} e_3 =$$

$$= 32e_1 + 32e_2 + 32e_3 = (32, 32, 32)$$

Exemplu

Punctele $P_1 = (7, 1, 1), P_2 = (-3, 3, 9),\ P_3 = (1, -1, 9),\ P_4 = (11, -3, 1)$ sunt coplanare.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (16, 16, 16)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (48, 48, 48)$$

2. Linie poligonală fără autointersecții

De verificat: intersecții de segmente.

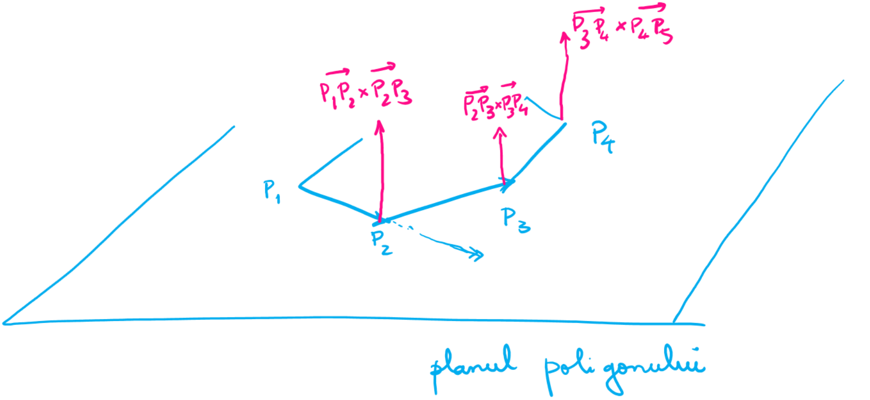
Varianta 1 Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează $\Leftrightarrow$ A și B sunt de o parte și de alta a dreptei CD **și** C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB. Două puncte M și N sunt de o parte și de alta a dreptei d de ecuație $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow f(M) \cdot f(N) < 0$.

Varianta 2 Se folosește reprezentarea segmentelor cu ajutorul combinațiilor afine. Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ se intersectează $\Leftrightarrow$

$$\exists s_0, t_0 \in [0,1] \quad \text{a.î.} \quad (1-t_0)A + t_0 B = (1-s_0)C + s_0 D.$$

Această variantă poate fi aplicată și în context 3D.

3. Convexitatea poligonului - figura



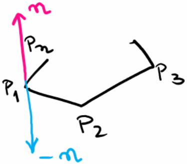
În cazul unui poligon convex, vectorii $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3}\times\overrightarrow{P_3P_4}$, ... au același sens (și reciproc!)

Convexitatea poligonului - observație

<u>Obs.</u> Fie $P_1P_2\dots P_n$ un poligon convex.

(i) Parcurgerea $P_1P_2\dots P_n$ $\rightsquigarrow$ vector normal n

(ii) Parcurgerea $P_nP_{n-1}\dots P_1$ $\rightsquigarrow$ —"— —"— $-n$



<u>Justificare</u>:

Ptr. (i) calculăm $\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_2P_3}$, apoi normalizare

Ptr. (ii) calculăm $\overrightarrow{P_3P_2}\times\overrightarrow{P_2P_1} = (-\overrightarrow{P_2P_3})\times(-\overrightarrow{P_1P_2})$

$$= \overrightarrow{P_2P_3}\times\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_2P_3}$$

3. Convexitatea poligonului

De verificat: convexitatea (folosind produse vectoriale).
Observație. (i) Fie =$(P_1, P_2, \dots, P_N)$ un poligon (sensul de parcurgere este important!). Poligonul $\mathcal{P}$ este convex dacă și numai dacă pentru orice trei vârfuri consecutive P_{i-1}, P_i, P_{i+1} (modulo N) ale poligonului sensul vectorul $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ este independent de i.
(ii) Vectorii menționați au toți aceeași direcție (perpendiculari pe planul poligonului), deoarece punctele sunt coplanare (vezi condiția 1).
(iii) Pentru un poligon convex, vectorul

$$\mathrm{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de i.
Exemplu. Punctele $P_1 = (7, 1, 1), P_2 = (-3, 3, 9),\ P_3 = (1, -1, 9),$ $P_4 = (11, -3, 1)$ determină un poligon convex.

Definiție - vector normal

Lemă. Pentru un poligon convex, vectorul

$$n = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de i.

Definiție. Fie $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ un poligon convex. Se alege $i = 1, \ldots, n$. Vectorul

$$n = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

se numește **vector normal (normală)** la planul poligonului / poligonul $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$.

Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu P_1, P_2, P_3, având coordonatele $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $A_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$, respectiv $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$.

Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu P_1, P_2, P_3, având coordonatele $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$, $A_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$, respectiv $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$.
2. Se scrie ecuația planului determinat de cele trei puncte sub forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde coeficienții A, B, C și D sunt dați de formulele

$$A = \begin{vmatrix} y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} x_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{P_1} & 1 & z_{P_1} \\ x_{P_2} & 1 & z_{P_2} \\ x_{P_3} & 1 & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \qquad D = -\begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

fiind deduși din condiția de coliniaritate

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pe scurt: se dezvoltă după linia I determinantul de mai sus.

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

4 În final:

$$\mathrm{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C).$$

Conceptul de față / spate al unui poligon convex

Definiție. Pentru un punct $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notăm

$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$ se află **în fața planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$;

Conceptul de față / spate al unui poligon convex

Definiție. Pentru un punct $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ notăm

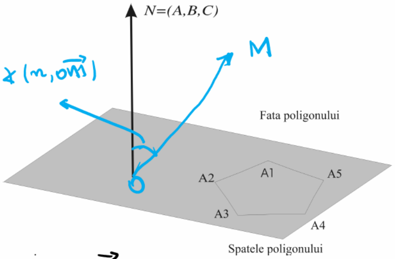
$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

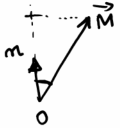
Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$ se află **în fața planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$;
- $M = (x, y, z)$ se află **în spatele planului (poligonului)** $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) < 0$.

Interpretare - “normala indică fața poligonului”

Presupunem că $D = 0$, adică planul trece prin originea $O = (0, 0, 0)$.





M este în fața poligonului $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{Ax + By + Cz}_{\text{produs scalar între vectorii } (A,B,C) \text{ și } (x,y,z)} > 0$

(unde $M = (x, y, z)$)

$\Leftrightarrow \langle (A,B,C), (x,y,z) \rangle > 0$

produs scalar

$\Leftrightarrow \langle n, \overrightarrow{OM} \rangle > 0$

$(\overrightarrow{OM} = (x, y, z))$

$\Leftrightarrow \cos(\sphericalangle(n, \overrightarrow{OM})) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sphericalangle(n, \overrightarrow{OM}) < 90^\circ \Leftrightarrow$

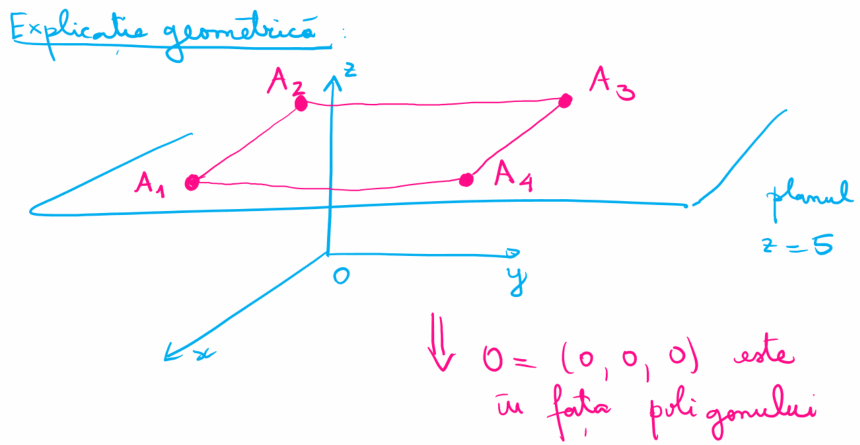
proiecția lui M pe dreapta det. de n are același sens cu n $\Leftrightarrow$ n și $\overrightarrow{OM}$ de aceeași parte a planului

Intrepretare - sinteză

- Presupunem că $D = 0$, deci planul trece prin origine, iar ecuația sa este $\pi(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$.
- Considerând vectorul $\mathrm{n} = (A, B, C)$ care direcționează normala la plan, avem $\pi(A, B, C) > 0$, deci vectorul n indică partea din față a poligonului (planului).
- În general, un vector (x, y, z) este orientat înspre partea din față a planului dacă $\pi(x, y, z) > 0$, i.e. $\langle (x, y, z), \mathrm{n}, \rangle > 0$, ceea ce înseamnă că proiecția vectorului (x, y, z) pe N este la fel orientată ca și n.
- Prin translație, aceste rezultate pot fi extinse pentru un plan arbitrar. Mai mult, presupunând că parcurgem poligonul $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ în sens trigonometric și că rotim un burghiu drept în sensul indicat de această parcurgere, acesta se va deplasa în sensul indicat de vectorul N, deci înspre fața poligonului (vezi figura).
- **Intuitiv + concluzie:** din față un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens trigonometric, iar din spate un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens orar.

Exemplul 1. Cod sursă `02_03_poligoane3d_old.cpp`

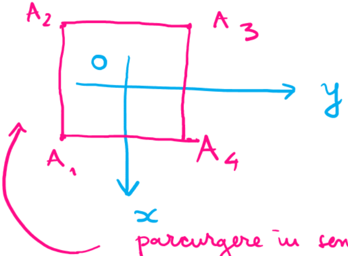
$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

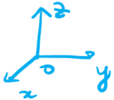


Exemplul 1. Cod sursă `02_03_poligoane3d_old.cpp`

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

"văzut de sus"

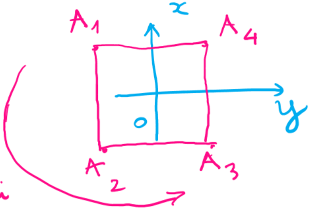




parcurgere în sens orar

"văzut de jos"

Concluzie: (0, 0, 0) este în fața poligonului



parcurgere în sens trigonometric

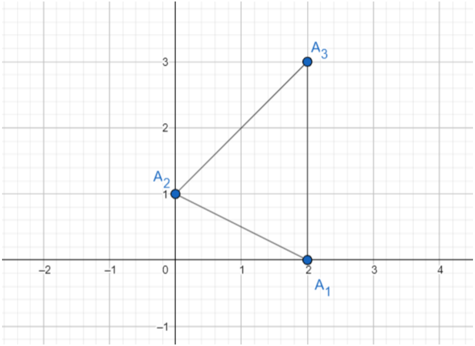
Exemplul 1. Cod sursă `02_03_poligoane3d_old.cpp`

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

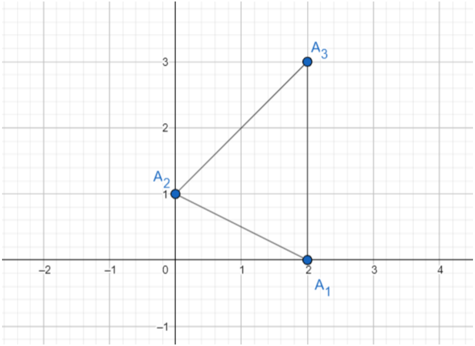
Exemplul 1. Cod sursă `02_03_poligoane3d_old.cpp`

$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$

De reținut (și de aplicat la cerința 2, L2)!



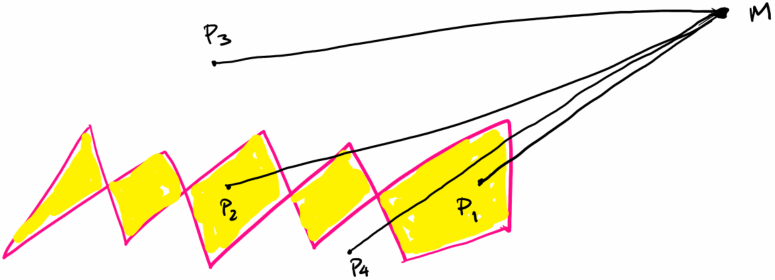
De reținut (și de aplicat la cerința 2, L2)!



Dacă în codul sursă vârfurile sunt indicate în ordinea A_1, A_3, A_2, atunci triunghiul $A_1A_2A_3$ este "văzut din față" și se aplică regulile pentru `GL_FRONT`, iar dacă sunt indicate în ordinea A_1, A_2, A_3, atunci triunghiul este "văzut din spate" și se aplică regulile pentru `GL_BACK`. Ordinea de parcurgere face referire la modul implicit (`GL_CCW`).

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula par-impar *(odd-even rule)*



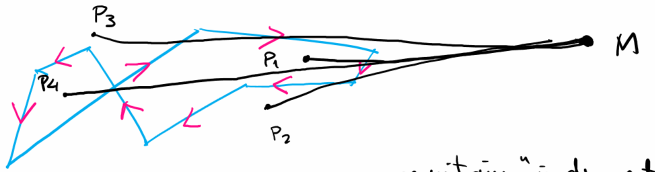
- se alege un punct M "departe" în afara poligonului
- pentru un punct P nesituat pe laturi: paritatea nr. de intersecții dintre segmentul [PM] și linia poligonală → decizie

nr. par de intersecții → exterior

impar —"— → interior

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula indexului nenul *(non-zero winding number rule)*



ne uităm „în dreapta": +

Convenție: ne deplasăm de la M la P : —„— „în stânga": —

Notăm: n_+ : nr. de intersecții cu semnul „+"

n_- : —„— —„— „—"

Indexul unui punct P este $i_P = n_+ - n_-$

Ptr. regula indexului: un punct este exterior dacă indexul este 0

—„— interior —„— $\neq 0$

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Observație

Legătura dintre cele două reguli

Obs: $(n_+ + n_-)$ = numărul total de intersecții, iar paritatea acestuia ne dă regula par/impar.

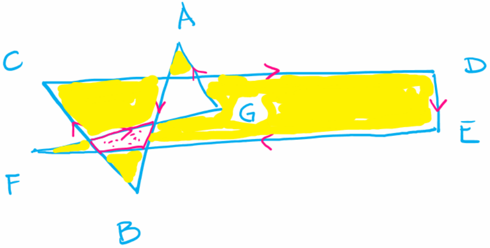
- P exterior ptr. regula indexului $\Rightarrow n_+ = n_-$

$\Rightarrow (n_+ + n_-)$ este par $\to$ P exterior ptr par/impar

$\not\Leftarrow$ NU este neapărat adevărat

Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Exemplu



exterior și
ptr. p/i și
ptr. index

interior și
ptr. index
și ptr. p/i

exterior
ptr.
par/impar
interior ptr.
index