

- (S1.1)** Daca  $T$  este o multime,  $A, B, X \subseteq T$  cu  $A \cap B = \emptyset$  și  $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$ ., atunci  $X = A$ .
- (S1.2)** Nu există o funcție surjectivă cu domeniul  $X$  și codomeniul  $\mathcal{P}(X)$ , unde  $X$  este o multime.
- (S1.3)**
- (i) Orice intervale deschise  $(a, b), (c, d)$  ale lui  $\mathbb{R}$  sunt echipotente.
  - (ii)  $(0, 1), (0, 1], [0, 1], [0, 1]$  și  $\mathbb{R}$  sunt echipotente.

- (S2.1)**
- (i)  $\mathbb{N}^*$  este numărabilă.
  - (ii)  $\mathbb{Z}$  este numărabilă.
  - (iii)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  este numărabilă.
- (S2.2)** Orice mulțime infinită are o submulțime numărabilă.
- (S2.3)** Orice submultime infinită a unei mulțimi numărabile este numărabilă.
- (S2.4)** O multime  $A$  este cel mult numărabilă dacă și numai dacă există o funcție injectivă de la  $A$  la o multime numărabilă (pe care o putem lua ca fiind  $\mathbb{N}$  ).
- (S2.5)**
- (i) Produsul cartezian a două multimi cel mult numărabile este cel mult numărabil.
  - (ii) Reuniunea a două multimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

- (S3.2)** Mulțimea Expr a expresiilor lui LP este numărabilă.
- (S3.3)** Fie  $A$  o mulțime infinită. Pentru orice multime  $B$ ,
- (i) Dacă există o funcție injectivă  $f : A \rightarrow B$ , atunci  $B$  este infinită.
  - (ii) Dacă  $A \subseteq B$ , atunci  $B$  este infinită.
- (S3.4)**
- (i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este mulțime cel mult numărabilă.
  - (ii) Reuniunea unui număr finit ( $\geq 2$ ) de multimi numărabile este numărabilă.
- (S3.5)**  $\mathbb{Q}$  este numărabilă.
- (S3.6)**  $\mathbb{R}$  nu este numărabilă.

**(S4.2)** Pentru orice  $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}$ , avem:

- (i)  $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$ ;
- (ii)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$
- (iii)  $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$
- (iv)  $\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

**(S4.4)** Pentru orice formulă  $\varphi$ ,  $\varphi$  este tautologie dacă și numai dacă  $\neg \varphi$  este nesatisfiabilă.

**(S4.5)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- (i)  $\psi \models \varphi$  dacă și numai dacă  $\models \psi \rightarrow \varphi$ .
- (ii)  $\psi \sim \varphi$  dacă și numai dacă  $\models \psi \leftrightarrow \varphi$ .

**(S5.2)** Fie  $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$ .

- (i) Dacă  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ , atunci  $\Gamma \models \psi$ .
- (ii)  $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$  dacă și numai dacă  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .
- (iii)  $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$  dacă și numai dacă  $\Gamma \models \varphi$  și  $\Gamma \models \psi$ .

**(S5.3)** Pentru orice multime de formule  $\Gamma$  și orice formulă  $\varphi$  avem că  $\Gamma \models_{fin} \varphi$  dacă și numai dacă  $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  nu este finit satisfiabilă.

**Notatie.** Pentru orice multime  $\Gamma$  de formule și orice formulă  $\varphi$ , notăm  $cu\Gamma \models_{fin} \varphi$  faptul că există o submultime finită  $\Delta$  a lui  $\Gamma$  a. i.  $\Delta \models \varphi$ .

**(S5.4)** Următoarele afirmatii sunt echivalente:

- (V1)** Pentru orice  $\Gamma \subseteq \text{Form}$ ,  $\Gamma$  este satisfiabilă ddacă  $\Gamma$  este finit satisfiabilă.

**(V2)** Pentru orice  $\Gamma \subseteq \text{Form}$ ,  $\Gamma$  este nesatisfiabilă ddacă  $\Gamma$  nu este finit satisfiabilă.

**(V3)** Pentru orice  $\Gamma \subseteq \text{Form}$ ,  $\varphi \in \text{Form}$ ,  $\Gamma \models \varphi$  dacă și numai dacă  $\Gamma \models_{fin} \varphi$ .

**(S6.1) (Metoda reducerii la absurd)** Pentru orice mulțime de formule  $\Gamma$  și orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\Gamma \cup \{\neg \psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$$

**(S6.2)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

- (i)  $\{\psi, \neg \psi\} \vdash \varphi$
- (ii)  $\vdash \neg \psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (iii)  $\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$ ;
- (iv)  $\vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$ .

**(S6.3) ("Reciproca" axiomei 3)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$$

**(S6.4)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$ ,

$$\{\psi, \neg \varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$$

**(S7.1)** Să se arate că pentru orice formulă  $\varphi$ ,

$$\vdash (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

**(S7.2)** Să se arate că pentru orice formule  $\varphi, \psi, \chi$  avem:

- (i)  $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$ ;
- (ii)  $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$ ;
- (iii)  $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$
- (iv)  $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$  ddacă  $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$

**(S8.5)**

- (i) Multimea modelelor unei multimi satisfiabile și finite de formule este infinită.

**(S10.1)** Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I,  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{L}$ -structură și  $e : V \rightarrow \mathcal{A}$  o interpretare a lui  $\mathcal{L}$  în  $\mathcal{A}$ . Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x$  :

- (i)  $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$
- (ii)  $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$
- (iii)  $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$ ;
- (iv)  $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in \mathcal{A} \text{ a.i. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

**(S11.1)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabile  $x, y$  cu  $x \neq y$  avem,

- (i)  $\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi$ ;
- (ii)  $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$ ;
- (iii)  $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$ ;
- (iv)  $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$ .

**(S11.3)** Pentru orice formule  $\varphi, \psi$  și orice variabilă  $x \notin FV(\varphi)$ ,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x \psi \quad (1)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x \psi \quad (2)$$

$$\varphi \models \exists x \varphi \quad (3)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x \psi \quad (4)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x \psi \rightarrow \varphi \quad (5)$$