FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0,1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$

(S4.2) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi \to \psi$;

(ii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iii) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(iv) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$\begin{array}{rcl} a \to b = 1 & \iff & a \leq b, \\ 1 \to a = a, & & a \to 1 = 1 \\ 0 \to a = 1, & & a \to 0 = \neg a \\ 1 \wedge a = a, & & 0 \wedge a = 0, \\ 1 \vee a = 1, & & 0 \vee a = a. \end{array}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \to \chi)$	$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{array}{rcl} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) & = & e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) & = & e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{array}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iii) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \qquad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S4.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S4.4) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

Demonstraţie:

Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \neg e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

□

(S4.5) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\psi \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \vDash \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este şi model pentru } \varphi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{dacă } e^+(\psi) = 1,\ \text{atunci } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \le e^+(\varphi) \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \to e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \to \varphi.
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \sim \varphi &\iff Mod(\psi) = Mod(\varphi) \\
&\iff Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \text{ şi } Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \\
&\iff \psi \vDash \varphi \text{ şi } \varphi \vDash \psi \\
&\overset{(i)}{\iff} \vDash \psi \to \varphi \text{ şi } \vDash \varphi \to \psi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) \wedge e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \leftrightarrow \varphi.
\end{aligned}$$

□

(S4.6) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie: Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 = \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \vee e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \vee e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \vee 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. □

(S4.7) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Avem:

$$
\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi}\\
&\qquad\ \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1\\
&\iff \models \varphi \text{ şi} \models \psi.
\end{aligned}
$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ şi $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

$\square$