# - TEMA 2 -
# STATISTICĂ ȘI PROBABILITĂȚI

POPESCU PAULLO ROBERTTO KARLOSS
GRUPA 231

## LABORATOR 3

**Problema 1** Soluție: 1.

A: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 5"

B: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 7"

C: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri nu este nici 5, dar nici 7"

Știm că $n_{fav}(A) = 4$, $n_{pos}(A) = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n_{fav}(A)}{n_{pos}(A)} =$

$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$n_{fav}(B) = 6$, $n_{pos}(B) = 36 \Rightarrow P(B) = \frac{n_{fav}(B)}{n_{pos}(B)} = \frac{6}{36} =$

$= \frac{1}{6}$

$P(C) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right) =$

$= \frac{18}{1 - \frac{5}{13}} = \frac{13}{18}$

$P(E_n) = [P(C)]^{n-1} \cdot P(A) = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9}$

E: "Efectuăm o aruncare și suma 5 apare înainte de suma 7"

$P(E) = \sum_{n \geq 1} P(E_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9} =$

$= \frac{1}{9} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} - 1}{\frac{13}{18} - 1} =$ ($\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \to 0$)

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{-1}{\frac{13-18}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{-1}{\frac{-5}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{18}{5} =$

$= \frac{2}{5}$

2. A: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 2"

B: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri este 7"

C: "Efectuăm o aruncare, iar suma celor două zaruri nu este nici 2, dar nici 7."

$E_n$: "În primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma $s$ nici suma 7, iar în a $n$-a aruncare a apărut 2"

$$P(A)=\frac{1}{36}$$
$$P(B)=\frac{6}{36}$$
$$\Rightarrow P(C)=1-(P(A)+P(B))=1-\left(\frac{1}{36}+\frac{6}{36}\right)=$$
$$=1-\frac{7}{36}=\frac{29}{36}$$

E: "Suma 2 apare înainte de suma 7"

$$P(E_n)=[P(C)]^{n-1}\cdot P(A)=\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(E)=\sum_{n\geq 1}P(E_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{36}=$$

$$=\frac{1}{36}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}=\frac{1}{36}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}-1}{\frac{29}{36}-1}=$$

($\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}\to 0$)

$$=\frac{1}{\cancel{36}}\cdot\frac{\cancel{36}}{7}=\frac{1}{7}$$

## Problema 2 Soluție:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P\left(X > -\frac{1}{3}\right) = P(X \in \{0,1\}) = 0,2 + 0,5 = 0,7$$

$$P\left(X < \frac{1}{4} \mid X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X < \frac{1}{4}, X \geq -\frac{1}{2}\right)}{P\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)}$$

$$P\left(X < \frac{1}{4}, X \geq -\frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right) = P(X \in \{0\}) = 0,2$$

$$P\left(X \geq -\frac{1}{2}\right) = P(X \in \{0,1\}) = 0,2 + 0,5 = 0,7$$

Deci, $P\left(X < \frac{1}{4} \mid X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{0,2}{0,7} \simeq 0,2857$

## Problema 4 Soluție:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \alpha x^2 e^{-kx}\,dx$$

$$\int x^2 e^{-kx}\,dx = \int x^2 \cdot \left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)' dx = \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} - \int 2x \cdot \frac{e^{-kx}}{-k}\,dx$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} - 2\int x \frac{e^{-kx}}{-k}\,dx = \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k}\int x\left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)dx$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k}\left(\frac{x e^{-kx}}{-k} - \int \frac{e^{-kx}}{-k}\,dx\right) =$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k}\left(\frac{x e^{-kx}}{-k} + \frac{1}{k}\int \frac{e^{-kx}}{1}\,dx\right) =$$

$$= \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} + \frac{2}{k}\left(\frac{x e^{-kx}}{-k} + \frac{e^{-kx}}{-k^2}\right) = \frac{x^2 e^{-kx}}{-k} +$$

$$+ 2\,\frac{(kx+1)e^{-kx}}{-k^3} = \frac{e^{-kx}(k^2x^2+2kx+2)}{-k^3}$$

Deci $\int_0^{+\infty} \alpha x^2 e^{-kx}\,dx = \alpha \cdot \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{-kx}(k^2x^2+2kx+2)}{-k^3} - \right.$

$\left. - \frac{2}{k^3}\right)$

Calculăm $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-kx}(k^2x^2+2kx+2)}{-k^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{k^2x^2+2kx+2}{-k^3 \cdot e^{kx}} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2k^2x+2k}{-k^4 e^{kx}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2k^3x+2k^2}{-k^5 e^{kx}} = 0$$

$$\int_0^{+\infty} \alpha x^2 \cdot e^{-kx}\,dx = \alpha \cdot \frac{-2}{k^3} \Rightarrow -\frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

Deci $\alpha = \frac{-k^3}{2}$

b) Dacă $a \geq 0 \Rightarrow F_X(a) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-kt}(k^2t^2+2kt+2)}{-k^3} - \frac{e^{-ka}(k^2a^2+2ka+2)}{-k^3}$

Dacă $a < 0 \Rightarrow F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = 0$

$$-\frac{-k^3}{2} \cdot \frac{e^{-k\cdot a}(k^2a^2+2ka+2)}{-k^3} = -\frac{e^{-ka}(k^2a^2+2ka+2)}{2}$$

Deci $F_X(a) = \begin{cases} \frac{-e^{-k\cdot a}(k^2a^2+2ka+2)}{2}, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$

c) $P(0 < X < k^{-1}) = F(k^{-1}) - F(0) =$

$$= -\frac{e^{-1}(1+2+2)}{2} + \frac{1\cdot 2}{2} = -\frac{5}{2e} + 1 = \frac{-5+2e}{2e} \approx 0{,}08$$

## Problema 5 Soluție

$$EX = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \frac{(1-p)^n}{-n\log(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(1-p)^n}{-n\log(p)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{-\log(p)} = -\frac{1}{\log p} \lim_{n\to\infty} (1-p)\cdot \frac{(1-p)^n - 1}{1-p-1} =$$

$$= \frac{p-1}{\log(p)} \cdot \frac{-1}{-p} = \frac{p-1}{p\log(p)}$$

## Problema 6 Soluție:

a) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$

$$E(X) = \sum_{n\geq 0} n p_n = \sum_{n\geq 1} n p_n = \sum_{n\geq 1} [p_n + (n-1)p_n] =$$

$$= \sum_{n\geq 1} p_n + \sum_{n\geq 1} [(n-1)p_n] = P(X\geq 1) + \sum_{n\geq 2} (n-1)p_n$$

$$\| \quad P(X\geq 1)$$

$$= P(X \geq 1) + \sum_{n \geq 2} [p_n + (n-2)p_n] = P(X \geq 1) + \sum_{n \geq 2} p_n +$$

$$+ \sum_{n \geq 2} (n-2) p_n = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \quad \| \quad P(X \geq 2)$$

$$+ \sum_{n \geq 3} (n-2) p_n = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + \ldots + P(X \geq n) + \ldots$$

$$= \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$$

b) $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X \geq x)\, dx$

$$\int_0^{+\infty} P(X \geq x)\, dx = \int_0^{+\infty} E(1_{\{X \geq x\}})\, dx = E\left(\int_0^{+\infty} 1_{\{X \geq x\}}\, dx\right)$$

$$= E\left[\int_0^X dx\right] = E[X]$$

**Problema 7** Soluție:

a) $P(X > s+t \mid X > s) = \dfrac{P(X > s, X > s+t)}{P(X > s)} =$

$$= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

**Problema 3** Soluție:

a) $X \sim P(\lambda) \Leftrightarrow p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \Leftrightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} =$

$$= \frac{\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}}{\frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!}} = \frac{\lambda}{n}$$

b) I $P(X=k)$ maxim $\Rightarrow \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ maxim $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\lambda^k}{k!}$ maxim $\Rightarrow$ / $k=0$, dacă $\lambda \in [0,1)$
/ $k=\lambda$, dacă $\lambda \in (1,+\infty)$

II $P(X=k)$ maxim $\Rightarrow \frac{\lambda^k \cdot e^{-}}{k!}$ maxim $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\lambda^k}{e^{\lambda}}$ maxim $\Rightarrow \lambda = 1$

**Problema 5 continuare** Soluție: b)

$$E[X] = M_1(X) \Leftrightarrow \frac{p-1}{p \ln(p)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$E[X^2] = M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

c) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

Problema 7 continuare Soluție: b)

Presupunem că X nu este repartiție exponențială
Verificăm ecuația pentru repartiția normală
și rezultă că relația 1 nu se îndeplinește.

Analog procedăm pentru repartiția uniformă.

În concluzie, X este repartizată exponențial.

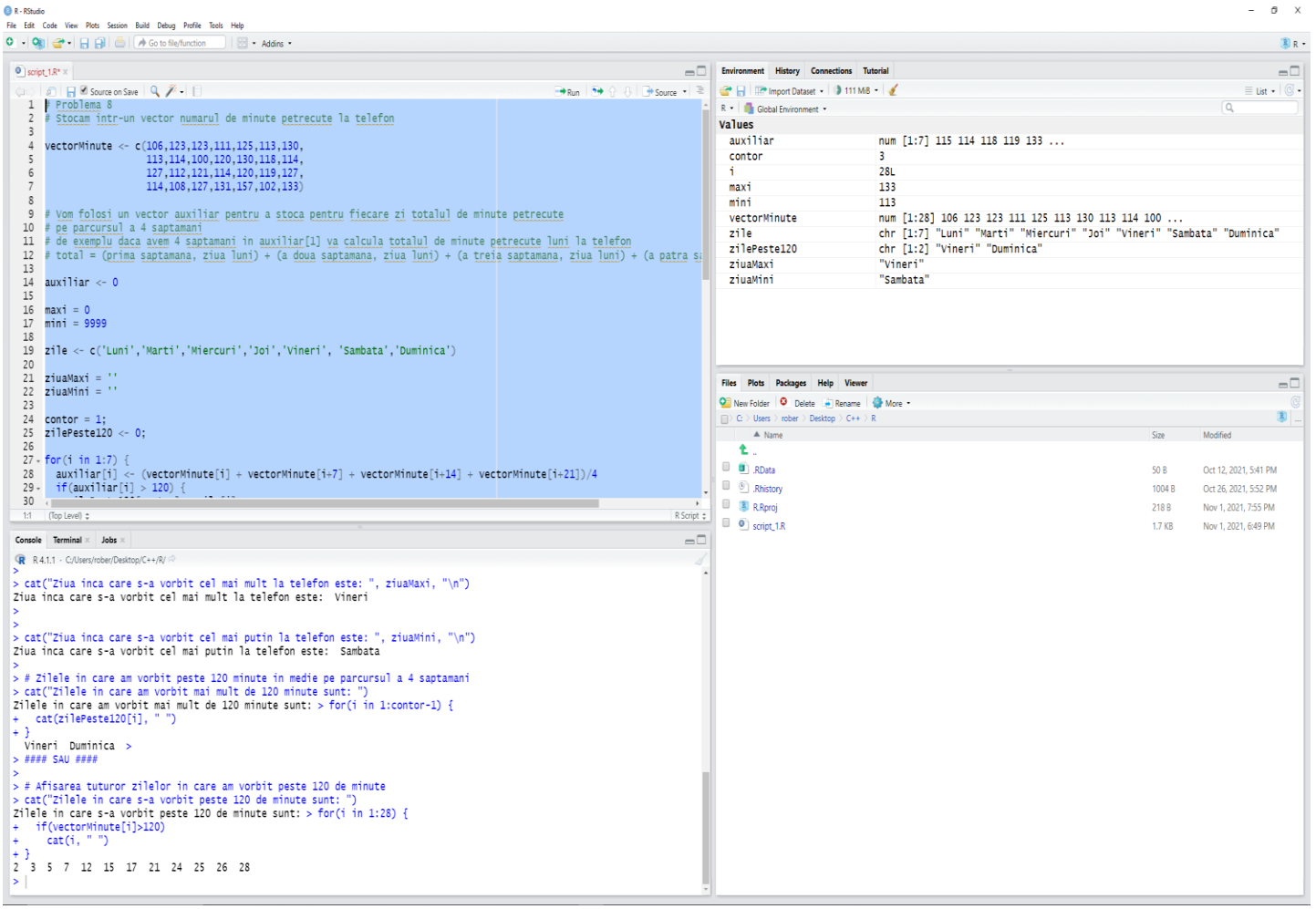
***PROBLEMA 8.***

```
# Stocam intr-un vector numarul de minute petrecute la telefon


vectorMinute <- c(106,123,123,111,125,113,130,
                  113,114,100,120,130,118,114,
                  127,112,121,114,120,119,127,
                  114,108,127,131,157,102,133)


# Vom folosi un vector auxiliar pentru a stoca pentru fiecare zi totalul de minute petrecute
# pe parcursul a 4 saptamani
# de exemplu daca avem 4 saptamani in auxiliar[1] va calcula totalul de minute petrecute luni la telefon
# total = (prima saptamana, ziua luni) + (a doua saptamana, ziua luni) + (a treia saptamana, ziua luni) + (a patra saptamana, ziua luni)


auxiliar <- 0


maxi = 0
mini = 9999


zile <- c('Luni','Marti','Miercuri','Joi','Vineri', 'Sambata','Duminica')


ziuaMaxi = ''
ziuaMini = ''


contor = 1;
zilePeste120 <- 0;


for(i in 1:7) {
  auxiliar[i] <- (vectorMinute[i] + vectorMinute[i+7] + vectorMinute[i+14] + vectorMinute[i+21])/4
```

```
  if(auxiliar[i] > 120) {
    zilePeste120[contor] = zile[i];
    contor = contor + 1;
  }
  if(auxiliar[i] > maxi) {
    maxi = auxiliar[i];
    ziuaMaxi = zile[i];
  }
  else if(auxiliar[i] < mini) {
    mini = auxiliar[i]
    ziuaMini = zile[i]
  }
}

cat("Ziua inca care s-a vorbit cel mai mult la telefon este: ", ziuaMaxi, "\n")


cat("Ziua inca care s-a vorbit cel mai putin la telefon este: ", ziuaMini, "\n")

# Zilele in care am vorbit peste 120 minute in medie pe parcursul a 4 saptamani
cat("Zilele in care am vorbit mai mult de 120 minute sunt: ")
for(i in 1:contor-1) {
  cat(zilePeste120[i], " ")
}

#### SAU ####

# Afisarea tuturor zilelor in care am vorbit peste 120 de minute
cat("Zilele in care s-a vorbit peste 120 de minute sunt: ")
```

```
for(i in 1:28) {
  if(vectorMinute[i]>120)
    cat(i, " ")
}
```

***Print-Screen:***

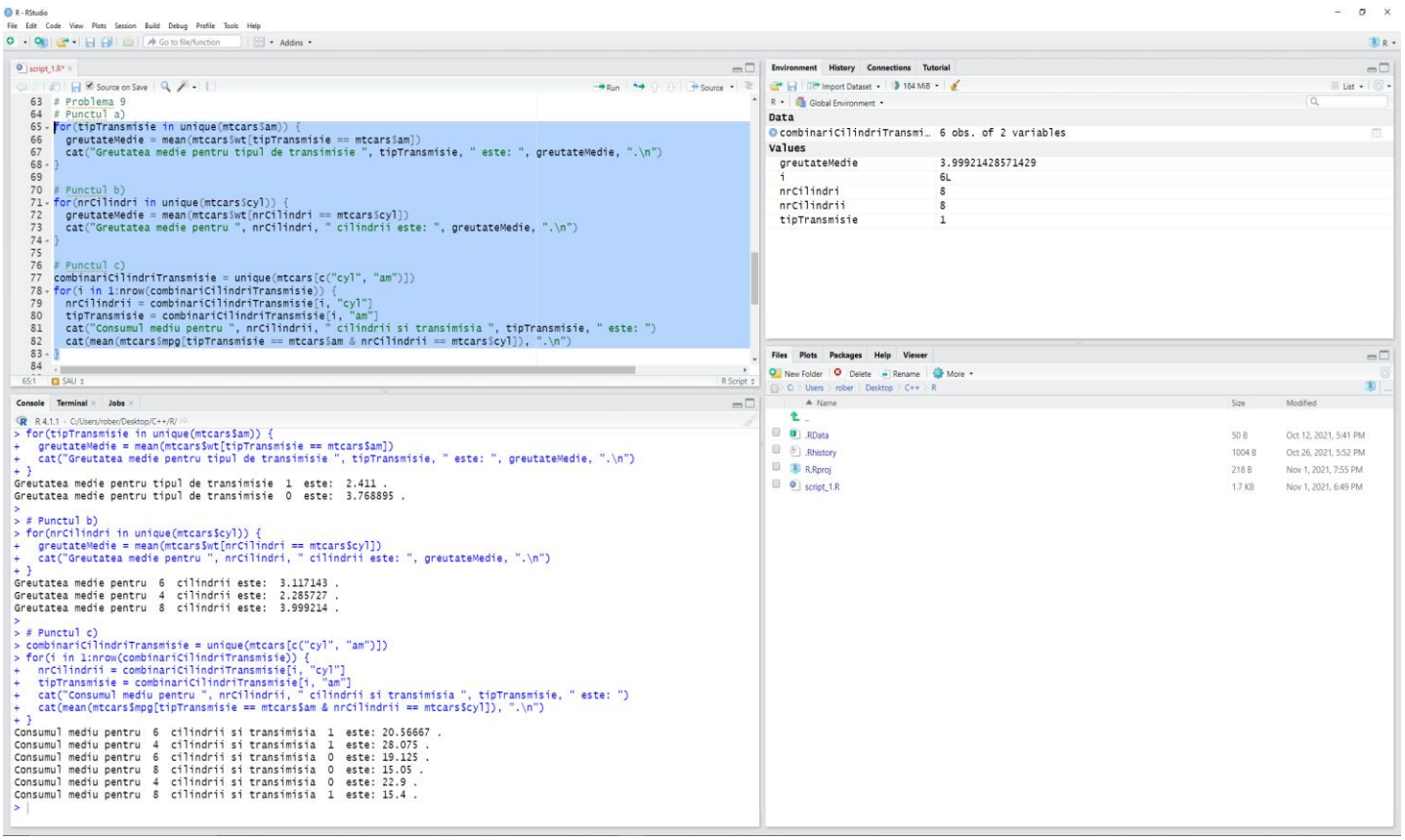



***PROBLEMA 9.***

```
# Punctul a)
for(tipTransmisie in unique(mtcars$am)) {
  greutateMedie = mean(mtcars$wt[tipTransmisie == mtcars$am])
  cat("Greutatea medie pentru tipul de transimisie ", tipTransmisie, " este: ", greutateMedie, ".\n")
}
```

```
# Punctul b)
for(nrCilindri in unique(mtcars$cyl)) {
  greutateMedie = mean(mtcars$wt[nrCilindri == mtcars$cyl])
  cat("Greutatea medie pentru ", nrCilindri, " cilindrii este: ", greutateMedie, ".\n")
}
# Punctul c)
combinariCilindriTransmisie = unique(mtcars[c("cyl", "am")])
for(i in 1:nrow(combinariCilindriTransmisie)) {
  nrCilindrii = combinariCilindriTransmisie[i, "cyl"]
  tipTransmisie = combinariCilindriTransmisie[i, "am"]
  cat("Consumul mediu pentru ", nrCilindrii, " cilindrii si transimisia ", tipTransmisie, " este: ")
  cat(mean(mtcars$mpg[tipTransmisie == mtcars$am & nrCilindrii == mtcars$cyl]), ".\n")
}
```

***Print-Screen:***



***PROBLEMA 10.***

```
# Comanda outer aplica pe o matrice formata din 2 vectori o functie
construire = function (i, j) {
  element = 1 / sqrt(abs(i-j) +1)
  return (element)
}
construire2 = function (i, j) {
  element = i / j**2
  return (element)
}
M = outer(1:10, 1:10, construire)
N = outer(1:10, 1:10, construire2)
print(M)
print(N)
```

***Print-Screen:***