

Seminar 10

(S10.1) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I, \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o interpretare a lui \mathcal{L} în \mathcal{A} . Să se demonstreze că pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x :

- (i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;
- (iv) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstrație:

(i) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 & \iff (\neg \varphi \rightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ & \iff \neg \varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ & \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 & \iff (\neg(\varphi \rightarrow \neg \psi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ & \iff \neg(\varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \neg \psi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ & \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned} (\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 & \iff ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\ & \iff (\varphi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)) \wedge (\psi^{\mathcal{A}}(e) \rightarrow \varphi^{\mathcal{A}}(e)) = 1 \\ & \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1. \end{aligned}$$

(iv) Avem:

$$\begin{aligned}
(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \neg(\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\
&\iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\
&\iff \text{nu e adevărat că } (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \\
&\iff \text{nu e adevărat că pentru orice } a \in A, (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \neq 1 \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1.
\end{aligned}$$

□

(S10.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

- (i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, și $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.
- (ii) Fie $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

Demonstrație:

- (i) Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}
t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\
&= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\
&= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))).
\end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

- (ii) Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\
&\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau} \\
&\quad \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (x = y)[e] \\
&\iff <(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\
&\quad \text{sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\
&\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y).
\end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

□

(S10.3) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Demonstrație: Fie $e : V \rightarrow \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \leftarrow a}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) < e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) = e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e_{v_4 \leftarrow a}(v_3) \leq e_{v_4 \leftarrow a}(v_4) \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e(v_3) \leq a \\ &\iff e(v_3) = 0. \end{aligned}$$

□