FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 1

(S1.1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.
Demonstraţie: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$.
Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$. $\square$

(S1.2) Fie X o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul X şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.
Demonstraţie: Presupunem că ar exista, şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{t \in X \mid t \notin f(t)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $x \in X$ cu $f(x) = A$. Dar atunci: $x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x) = A \Leftrightarrow x \notin A$, ceea ce este o contradicţie. $\square$

(S1.3) Două mulţimi sunt echipotente dacă există o bijecţie între ele.

(i) Demonstraţi că orice intervale deschise (a, b), (c, d) ale lui $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

(ii) Demonstraţi că $(0, 1), (0, 1], [0, 1), [0, 1]$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Demonstraţie:

(i) Definim

$$f : (a, b) \to (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \text{ pentru orice } x \in (a, b).$$

Definiţia lui f este corectă: dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ şi $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d - c$, deci $c < f(x) < d$. Definim

$$g : (c, d) \to (a, b), \quad g(y) = \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a \text{ pentru orice } y \in (c, d).$$

Se observă uşor că f şi g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, $|(a, b)| = |(c, d)|$.

(ii) Ştim că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0,1)$.

O soluţie directă este: se ia funcţia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0,1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente.

Se ia apoi funcţia $h : (0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in (0,1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0,1) \to (0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0,1]$ şi $(0,1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcţia $j : [0,1] \to (0,1)$, definită, pentru orice $x \in [0,1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0,1) \to [0,1]$ este definită, pentru orice $y \in (0,1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ şi $[0, 1]$ sunt echipotente.

În sfârşit, se observă uşor că funcţia $F : (0, 1] \to [0, 1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0, 1]$ şi $[0, 1)$ sunt echipotente.

$\square$