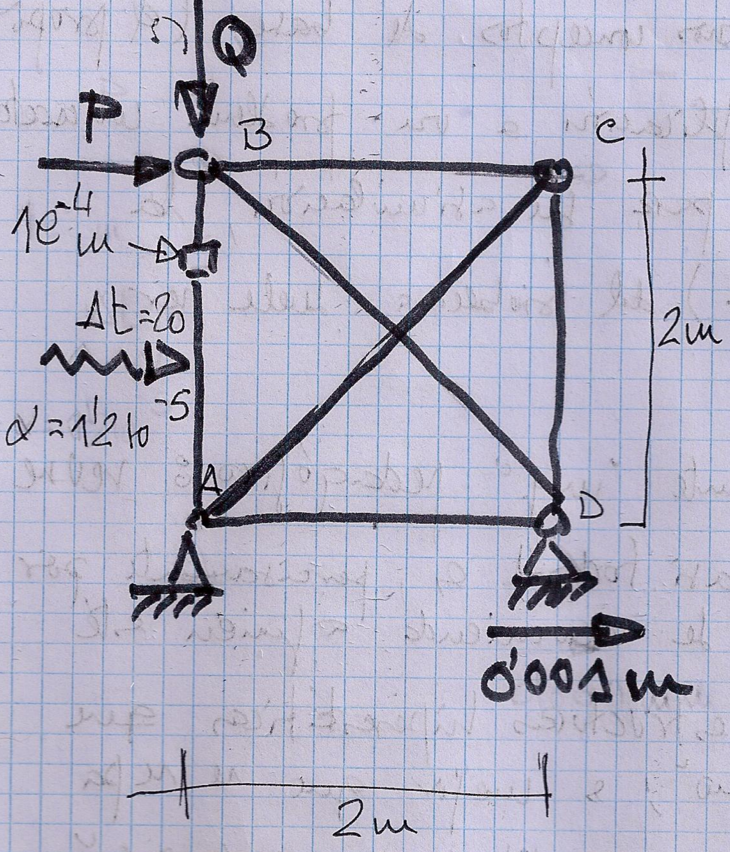
- PROBLEMA 19 -



La estructura de la figura está sometida a las siguientes acciones:

1) Cargas P = 1000 kp y Q = 10000 kp

2) Una dilatación en la barra AB por un aumento de la temperatura de 20°C ($\alpha = 1'2\ 10^{-5}$)

3) Un error de montaje en la misma barra: es 0'0001 m más larga de su longitud nominal (2,0 m)

4) Un desplazamiento imprevisto del apoyo "D" que lo lleva 0'001 m a la derecha

Calcular tensiones en las barras de la estructura ($A = 2'5\ 10^{-3}\ m^2$)

Nota Preliminar: Como ya se ha advertido en casi la totalidad de los problemas de esta colección (y en la "portada") la resolución de estructuras hiperestáticas por los métodos de flexibilidad/compatibilidad (y PTV) no es un asunto fácil ni ligero

En efecto, además de unos conceptos de base (el propio PTV) y operativos (la aplicación a un problema concreto) que requieren de tiempo para su asimilación, la resolución final (algebráica) del problema suele ser complicada.

Este problema (aparentemente "muy" pedagógico) reúne todos los supuestos —o casi todos— y, precisamente por eso, muy complicado. Se recomienda a quien esté aprendiendo a resolver estructuras hiperestáticas que lo "deje para el último"; o mejor que se sepa resolver con soltura todos sus "hermanos pequeños", concretamente los problemas 3, 4, 5, 16, 17 y 18.

FIN NOTA PRELIMINAR

GdH: 2. $(6+4-2\times4)$

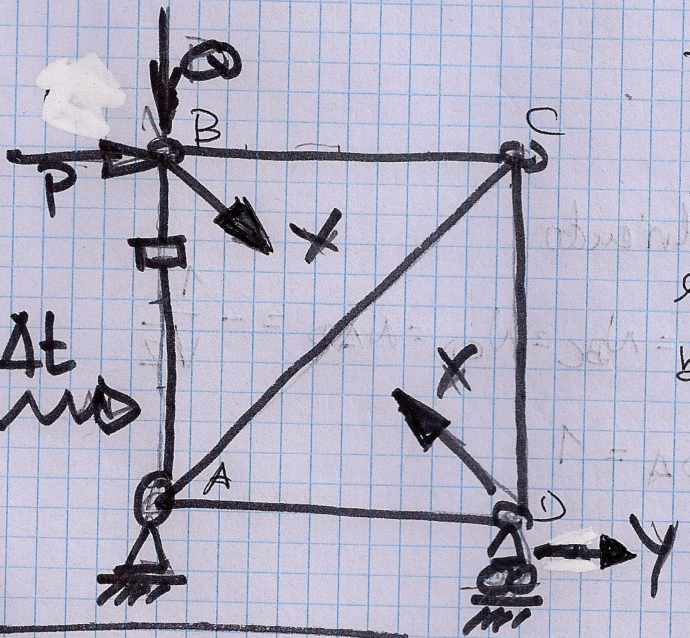
Hay, por tanto, que liberar dos ligaduras.

Cómo se ha visto en los problemas más sencillos, en general vale con eliminar (casi) cualquier barra o reacción para resolver el problema. En este problema concreto hay un desplazamiento (nudo "D")

Parece, por tanto, que una de las variables a sustituir por una reacción hiperestática sea precisamente esa, es decir, convertir el apoyo D en deslizante y añadir una variable hiperestática ("y") que "lo ~~sujete~~ arrastre" (que "lo ~~sujete~~ arrastre" hasta que se desplace 0'001 m, como veremos más adelante)

SISTEMA ISOSTÁTICO EQUIVALENTE

Eliminando también una diagonal (y añadiendo en su lugar una fuerza "X" que coincidirá, finalmente, con la tensión real de la barra eliminada):



S. ISOSTÁTICO EQ.

NOTA MUY IMPORTANTE: El valor de "X" (su sentido) es tal que corresponde con la barra BD trabajando A TRACCIÓN. Esto será de aplicación cuando se calcule el trabajo virtual de la fuerza unitaria (doble) aplicada en B y D; ésta - la fuerza unitaria - tendrá el mismo sentido que "X", por lo que, contraintuitivamente, su signo (el de la fuerza virtual) es el contrario al del desplazamiento (o, mejor dicho, acortamiento/alargamiento) de la barra BC producido por "X": la fuerza unitaria tiende a acercar B y D, mientras que un valor positivo de "X" corresponde con que B y D se han alejado entre sí (tracción).

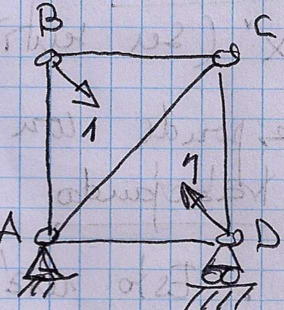
CÁLCULO ESTR. ISOSTÁTICA.
(Ver al final los cálculos de los esfuerzos)

Resolviendo la estructura isostática tenemos

$$N_{AB} = -\left(Q + \frac{X}{\sqrt{2}}\right) \quad ; \quad N_{BC} = N_{CD} = -\left(P + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N_{DA} = y - \frac{X}{\sqrt{2}} \quad ; \quad N_{AC} = P\sqrt{2} + X$$

SISTEMA VIRTUAL 1

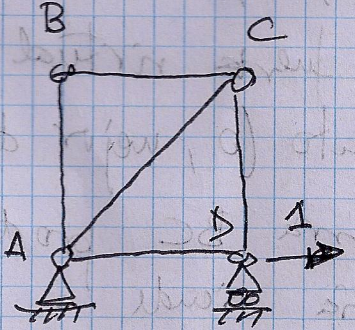


Resolviendo

$$N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = N_{AD} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N_{DA} = 1$$

SISTEMA VIRTUAL 2



Resolviendo:

$$N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = N_{AC} = 0$$

$$N_{AD} = 1$$

(**)

	long (*)	N^R	$N^{4'}_1$	$N^{4'}_2$	ΔL^R	$\Delta L^R \times N_1^{4'}$	$\Delta L^R N^{4'}_2$
AB	L	$-\left(Q+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\left(Q+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{AE}+\left[0'0001+20\alpha L\right]$	$\left[-\left(Q+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{AE}+\left[10^{-4}+20\alpha L\right]\right]\times\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	0
BC	L	$-\left(P+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\left(P+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{AE}$	$\left[-\left(P+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{AE}\right]\times\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	0
CD	L	$-\left(P+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\left(P+\frac{X}{\sqrt{2}}\right)L/AE$	$-\left[\left(P+X/\sqrt{2}\right)\frac{L}{AE}\right]\times\left(-1/\sqrt{2}\right)$	0
DA	L	$Y-\frac{X}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\left(Y-X/\sqrt{2}\right)L/AE$	$\left(Y-X/\sqrt{2}\right)\left(-1/\sqrt{2}\right)\frac{L}{AE}$	$\left(Y-\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{AE}$
AC	$L\sqrt{2}$	$P\sqrt{2}+X$	1	0	$\left(P\sqrt{2}+X\right)\frac{\sqrt{2}L}{AE}$	$\left[P\sqrt{2}+X\right]\left(\frac{\sqrt{2}L}{AE}\right)\times 1$	0
							$W_2^{4'_2}$

(*) $L = 2m$

(**) Se incorporan aquí los efectos debidos al error de montaje ($0'0001m - 10^{-4}$) y a la dilatación. Aunque su procedencia no tiene nada que ver entre sí, al final se suman, ya que, en definitiva, la barra es más larga en $0'0001 + 20\alpha L$ ($\alpha = 1'2\,10^{-5}$; $L = 2m$).

Así como en otros problemas parecidos (y algo más simples) merece la pena llevar a la cabecera de la tabla los "factores comunes" (por lo general $\frac{1}{AE}$; $\frac{L}{AE}$) en este problema es mejor no hacerlo. (Hay términos que NO están afectados)

De la aplicación del PTV a los valores de la tabla emanarán dos ecuaciones en "x" y "y" con las que resolveremos el problema.

En este caso, dada la abundancia de "0" en la columna de $\Delta L^R N^{4'_2}$ parece conveniente empezar por el S.V.2 (en realidad da lo mismo empezar por el S.V.1)

El PTV iguala el trabajo virtual de la fuerza virtual de valor "1" aplicada en "D"

$$W^{4/}_{2} = 1 \times \Delta L_{AD} = 1 \times \underbrace{0'001\ m}_{\text{"Dato" del prob.}}$$

(Trabajo "+"; fuerza y desplazamiento coinciden)

al de las fuerzas virtuales en la structura.

$$W^{4/}_{2} = \sum_{barras} = \left(y - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \frac{L}{\Delta E}$$

$L \to 2\ m$; $E \to 2'1 \times 10^{11}\ Pa$; $A \to 2'5\ 10^{-3}\ m^2$

lo que, resolviendo, nos da:

$$y - \frac{x}{\sqrt{2}} = 2'625 \times 10^{5}\ Nw$$

NOTA (Que se puede saltar): Este resultado se podría haber obtenido simplemente con el equilibrio de fuerzas en el nudo "D" (ecuación [4] de los cálculos). La aplicación "formal" del PTV es más que correcta, pero, si el problema se "atasca", a veces conviene tener otro tipo de recursos.

Con el S.V. 1 tenemos

$$W^{4/}_{1} = -1 . \Delta L_{BD} = -1 \times \frac{L\sqrt{2}}{\Delta E} \times N_{BD} = -\frac{L\sqrt{2}}{\Delta E} \times X$$

ΔL_{BD} → suma de los desplazamientos de los nudos "B" y "D"

$-$ → ver amplio comentario en página 3

$$\sum_{barras} \Delta L_i N_i^{4/}{}_1 = -\left(0 + \frac{X}{\sqrt{2}}\right) . \frac{L}{\Delta E} . \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left[10^{-4} + 20\alpha . 2\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \left[-\left(P + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)\frac{L}{\Delta E}\right] . \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ldots$$

(viene de la página anterior

$$\cdots + \left[-\left(P + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \frac{L}{AE} \right] \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(y - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \frac{L}{AE} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(P\sqrt{2} + x \right) \left(\frac{\sqrt{2}\,L}{AE} \right) \cdot 1$$

NOTA 1: El autor de este documento NO asegura que no se haya confundido en algún signo o que no se le haya olvidado algún sumando completo o cualquier otro error de transcripción (esta expresión no es más que la columna $\Delta L_i^{R} \cdot N_1^{4,1}$ en forma de expresión algebraica). Quién esté usando estos apuntes haría bien en verificarla.

NOTA 2: El siglo pasado un grupo de psicólogos demostró que la probabilidad de que una persona haciendo sumas de dos sumandos menores de 100 se equivoque antes de hacer 50 (cincuenta) sumas consecutivas es del 100%. Es decir, la mente humana NO es un ordenador y tiene una tendencia preocupante a equivocarse.
Con problemas como este pasa algo parecido: Es tal el fárrago de sumas, signos, exponentes de 10, etcétera, que resolver el sistema de ecuaciones (dos ecuaciones lineales en "x" e "y") lleva un buen rato.

NOTA 3: No sólo eso, es que, además, uno obtiene un valor de x y hay que verificarlo de alguna manera. Ahí es donde entra en juego MEFI. Se modela el caso real con sus cargas, sus dilataciones, etcétera, y se comprueba. Se adjunta la solución.

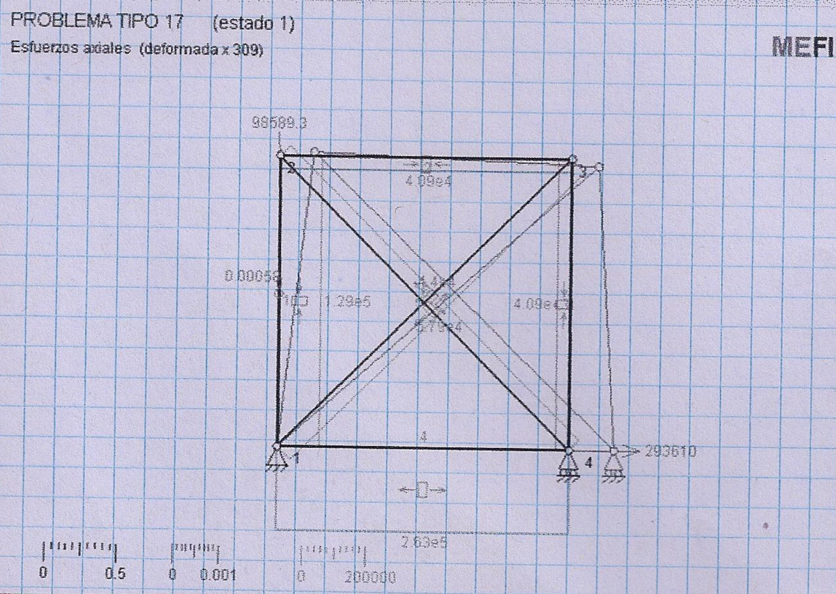
MEFI

Archivo Edición Proceso Ver Plantillas Opciones Idioma Ayuda

Estado 1 Deformada x 309

REAL.mefi REAL_CON_DESPLAZAMIENTO.mefi

```
L       2
P1      1000*9.81
P2      10000*9.81

PUNTOS
1       0               0
2       0               L
3       L               L
4       L               0

LINEAS
1       POL     1       2
2       POL     2       3
3       POL     3       4
4       POL     4       1
5       POL     2       4
6       POL     3       1

PROPIEDADES
2       2.5E-3

ELEMENTOS_LINEAS
  TOD ART ACE 2

CARGAS_GLOBALES_PUNTOS
2       1       0.0     -P2
2       1       P1      0
4       1       2.9361E5        0

DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
1       1       0.0     0.0
4       1       LIB     0

CARGAS_AJUSTE_LINEAS
1   1   0.0001+(20*1.2E-5*L)
```




```
pun        desX        desY        reaX        reaY
---------------------------------------------------
  1  0.0000e+00  0.0000e+00 -3.0342e+05  8.8290e+04
  2  7.5262e-04  8.7784e-05
  3  5.9675e-04 -1.5587e-04
  4  1.0000e-03  0.0000e+00              9.8100e+03
---------------------------------------------------
lin punIni punFin         axi         nor
---------------------------------------------------
  1      1      2 -1.2921e+05 -5.1683e+07
  2      2      3 -4.0917e+04 -1.6367e+07
  3      3      4 -4.0917e+04 -1.6367e+07
  4      4      1  2.6250e+05  1.0500e+08
  5      2      4  4.3992e+04  1.7597e+07
  6      3      1  5.7865e+04  2.3146e+07
---------------------------------------------------
```

Solución

N_{AB} $-1'29 \; 10^{5}$ N

N_{BC} $-4'09 \; 10^{4}$ N

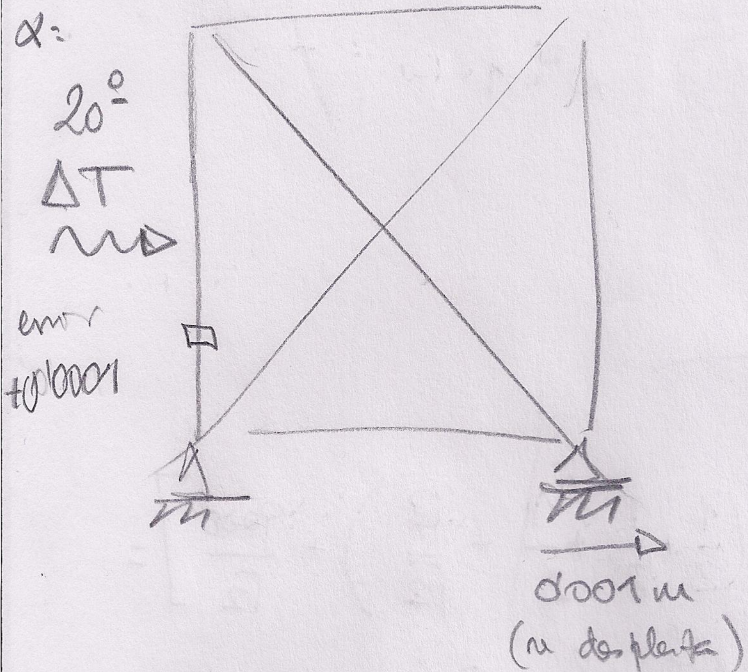
N_{CD} $-4'09 \; 10^{4}$ N

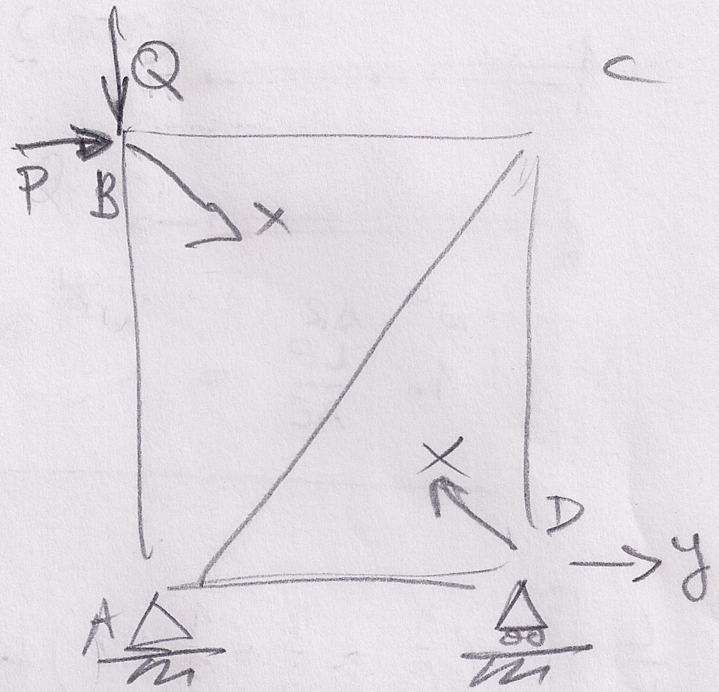
N_{AD} $2'63 \; 10^{5}$ N

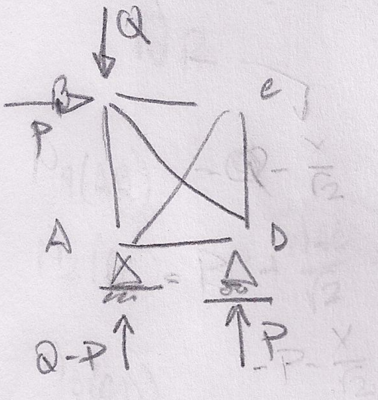
N_{BD} $4'40 \; 10^{4}$ N

N_{AC} $5'79 \; 10^{4}$ N

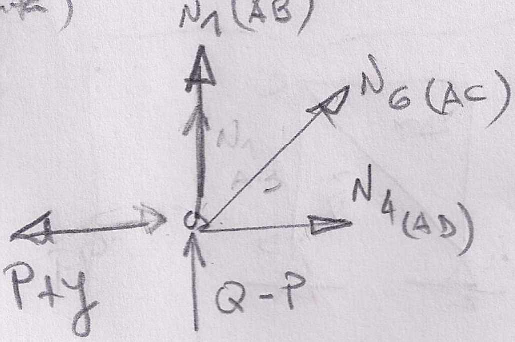
CUADRADO ~~[illegible]~~ CON SU CAMISITA Y SU CANESÚ







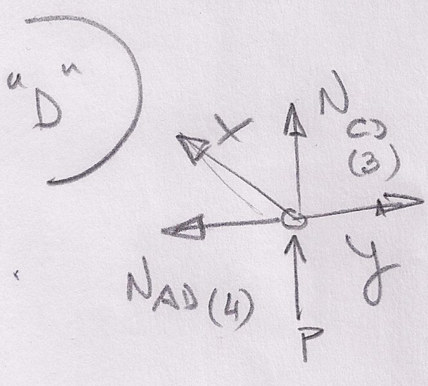
$\boxed{\text{"A"}}$



$$P + y = \underset{(AD)}{N_4} + N_6 \sqrt{2} \qquad [1]$$

$$Q - P + N_{AB} + \underset{(AC)}{N_6}/\sqrt{2} = 0 \qquad [2]$$

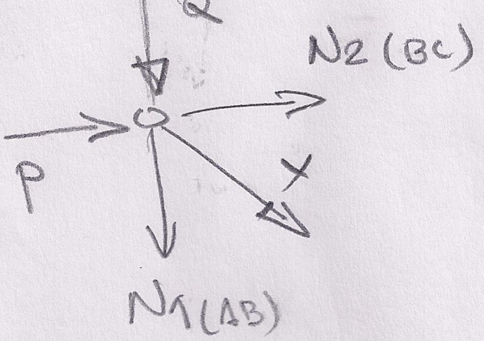
"D"



$$P + N_{CD} + x/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{CD} = -P - \frac{x}{\sqrt{2}} \qquad [3]$$

$$y = x/\sqrt{2} + N_{AD} \qquad N_{AD} = y - \frac{x}{\sqrt{2}} \qquad [4]$$

$\boxed{\text{"B"}}$



$$P + N_2 + \frac{X}{\sqrt{2}} = 0$$

$$N_{2(BC)} = -\left(P + \frac{X}{\sqrt{2}}\right) [5]$$

$$N_1 + Q + \frac{X}{\sqrt{2}} = 0 \qquad N_{1(AB)} = -\left(Q + \frac{X}{\sqrt{2}}\right) [6]$$

$$[2] \quad Q - P + N_{AB} + \frac{N_{6}(AC)}{\sqrt{2}} = 0 \;\Rightarrow\; N_{6(AC)}/\sqrt{2} = P - Q - N_{AB} \overset{[6]}{=} P - Q + \left(Q + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)$$

$$N_{6(AC)}/\sqrt{2} = P + \frac{X}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; N_{6(AC)} = P\sqrt{2} + X \; [7]$$

$$[1] \quad P + y - N_6/\sqrt{2} = N_4 \Rightarrow N_4 = y - \frac{X}{\sqrt{2}} \checkmark$$

		N^R	N^{4_1}	N^{4_2}	$\Delta L^R \left(\times \frac{AE}{L}\right)$
1 - AB	L	$-\left(Q + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)$	$-1/\sqrt{2}$	0	$-\left(Q + \frac{X}{\sqrt{2}}\right) + \frac{AE}{L}\left[0'001 + 2\alpha\Delta T\right]$
2 - BC	L	$-(P + X/\sqrt{2})$	$-1/\sqrt{2}$	0	$-(P + X/\sqrt{2})$
3 - CD	L	$-(P + X/\sqrt{2})$	$-1/\sqrt{2}$	0	$-(P + X/\sqrt{2})$
4 - DA	L	$y - \frac{X}{\sqrt{2}}$	$-1/\sqrt{2}$	1	$(y - X/\sqrt{2})$
6 - AC	$L\sqrt{2}$	$P\sqrt{2} + X$	1	0	$(P\sqrt{2} + X)\sqrt{2}$

del 4_2 $\quad \frac{L}{AE} \underbrace{\left(y - X/\sqrt{2}\right)}_{\text{se "acomodan" para que así sea*}} = 0'001 \Rightarrow$

* A diferencia del error de montaje o la dilatación.