1.11.2 Estructuras articuladas hiperestáticas

Si una estructura articulada es hiperestática es porque el número de incógnitas del problema, o sea, el número de reacciones exteriores nr más el número de axiles a determinar nb (igual al número de barras) es mayor que el número de ecuaciones de la estática que se pueden plantear, o sea, para un problema plano, el doble del número de nudos $2nn$. Esto es:

$$nr + nb > 2nn \tag{1.17}$$

La condición (1.17) refleja que para resolver estructuras articuladas hiperestáticas no basta con imponer de forma sistemática las condiciones de equilibrio. La resolución de estructuras hiperestáticas requiere, además, la consideración de las condiciones de compatibilidad sobre la deformada de la estructura. En la presente Sección mostraremos la aplicación de los métodos de compatibilidad y de equilibrio a la resolución de estructuras articuladas hiperestáticas. Los métodos se ilustran con la ayuda de algunos ejemplos.

Ejemplo 1.11.2.1

La estructura de la Figura 1.47 está formada por tres barras articuladas del mismo material e idéntica sección. Para una carga P vertical como la dibujada, determinar: (a) los axiles actuantes sobre cada barra; (b) los movimientos vertical y horizontal del punto O; (c) la secuencia de rotura de las barras y la carga de rotura, si la tensión de rotura del material es σ_r.

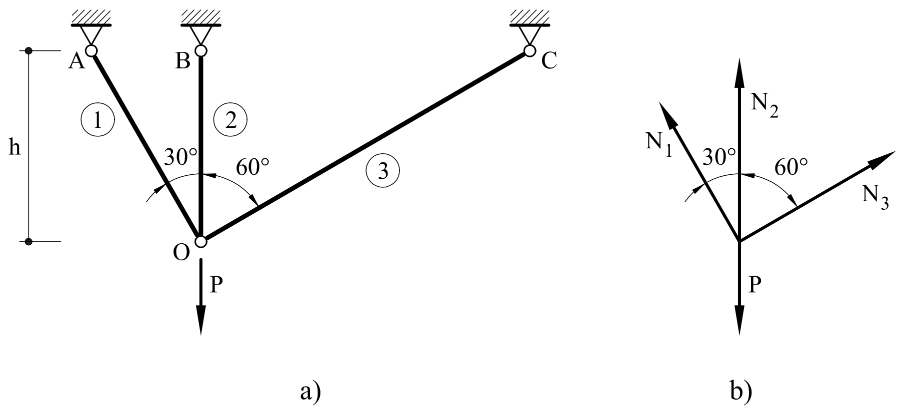

Fig. 1.47: Estructura hiperestática del Ejemplo 1.11.2.1

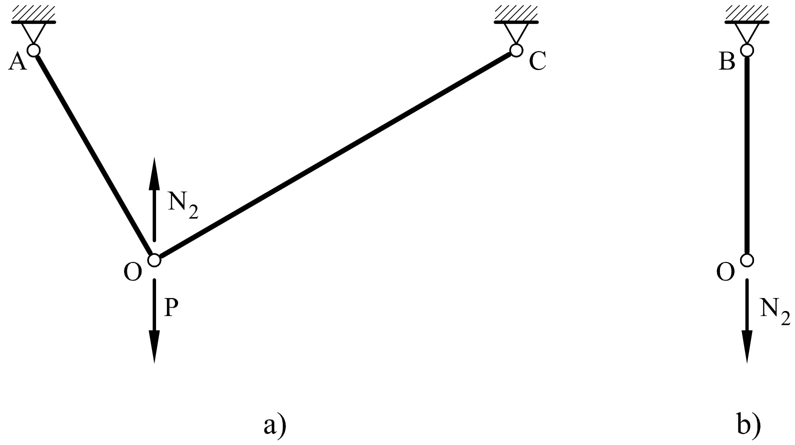

Fig. 1.48: Descomposición de la estructura hiperestática del Ejemplo 1.11.2.1

a) Consideremos el equilibrio de fuerzas en el punto O, tal como se muestra en la Figura 1.47b. Llamando N_1, N_2 y N_3 a los axiles en las barras OA, OB y OC, respectivamente, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\sum F_h &= 0 = N_1 \sin 30^o - N_3 \sin 60^o \\
\sum F_v &= 0 = N_1 \cos 30^o + N_2 + N_3 \cos 60^o - P
\end{aligned}
$$

La estructura es hiperestática de grado 1 puesto que sólo se tienen dos ecuaciones de equilibrio para resolver los tres axiles incógnita. Resolveremos el problema utilizando el *método de compatibilidad*. Para ello, se elige el axil N_2 como incógnita hiperestática y se expresan los otros dos axiles en función de P y N_2. A partir de las ecuaciones de equilibrio se tiene:

$$N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(P - N_2) \qquad \text{y} \qquad N_3 = \frac{1}{2}(P - N_2)$$

El problema se resuelve compatibilizando el desplazamiento vertical de la estructura *isostática* formada por las barras OA y OC sometida a las fuerzas P y N_2 (en la Figura 1.48a) con el alargamiento de la barra OB (en la Figura 1.48b). Para ello, se calculan primero los alargamientos de las barras OA, OB y OC. Sean éstos δ_1, δ_2 y δ_3, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{N_1\, h/\cos 30^o}{EA} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{N_1}{k} \\
\delta_2 &= \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{N_2\, h}{EA} = \frac{N_2}{k}
\end{aligned}
$$

$$\delta_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} = \frac{N_3\, h/\cos 60^o}{EA} = 2\frac{N_3}{k}$$

donde $k = EA/h$. Se calcula luego el desplazamiento vertical del punto O en la Figura 1.48a, en función de los alargamientos de las barras 1 y 3. Según la Figura 1.49, se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta_v &= \delta_1 \cos 30^o + \delta_3 \sin 30^o \\
&= \frac{1}{k}\,(N_1 + N_3) \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2k}\,(P - N_2)
\end{aligned}$$

Imponiendo la condición de compatibilidad $\delta_v = \delta_2$ se tiene la ecuación que permite hallar N_2 :

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2k}\;(P - N_2) = \frac{N_2}{k}$$

de donde:

$$N_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} P = 0,577\; P$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,(P - N_2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}\;P = 0,366\; P \\
N_3 &= \frac{1}{2}\,(P - N_2) = \frac{1}{\sqrt{3}+3}\;P = 0,211\; P
\end{aligned}$$

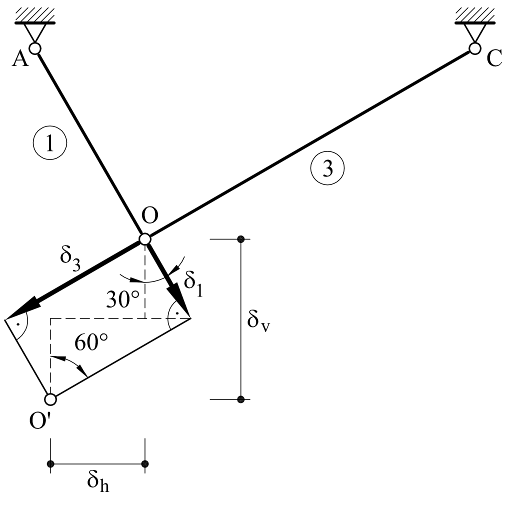

Fig. 1.49: Composición de movimientos en Ejemplo 1.11.2.1