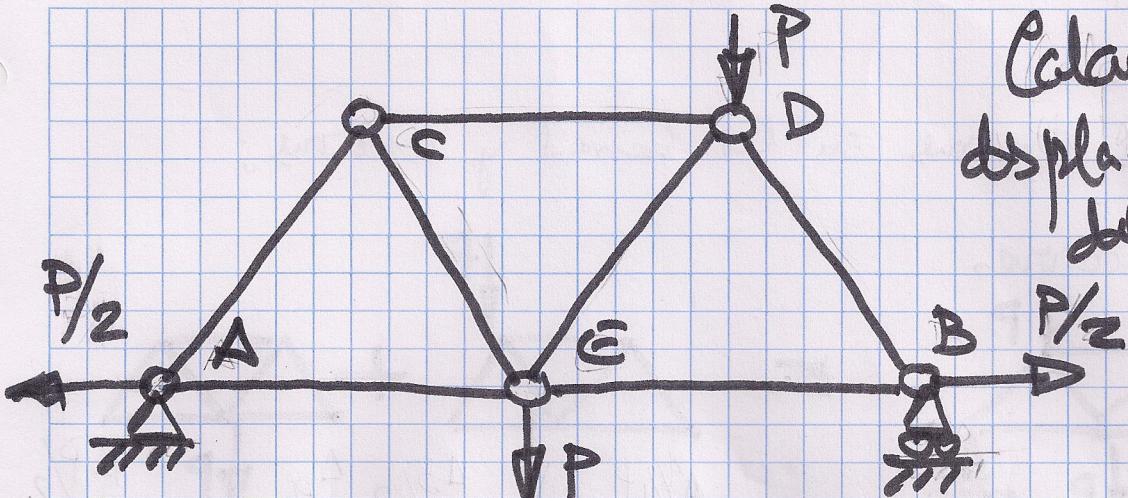


PROBLEMA 16 Técnica vso PTV



NOTAS

1) NO se trata de una estructura hiperestática ($7 + 3 - 2 \times 5 = 0$). Es un ejemplo de como aplicar el PTV

2) Para que la parte conceptual del desarrollo del problema quede lo mas clara posible, los desarrollos algebraicos estan al final, en borrador. Tambien los calculos de las tensiones en las barras.

3) Se insiste en que el PTV conduce a desarrollos algebraicos muy largos, por lo que en este problema se indican algunos "trucos" que lo hagan algo menos propenso a equivocaciones.

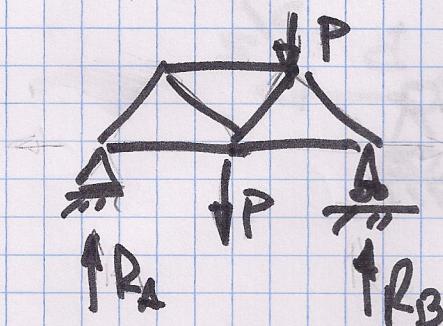
Calcular el desplazamiento del nodo E"

$\frac{P}{2}$

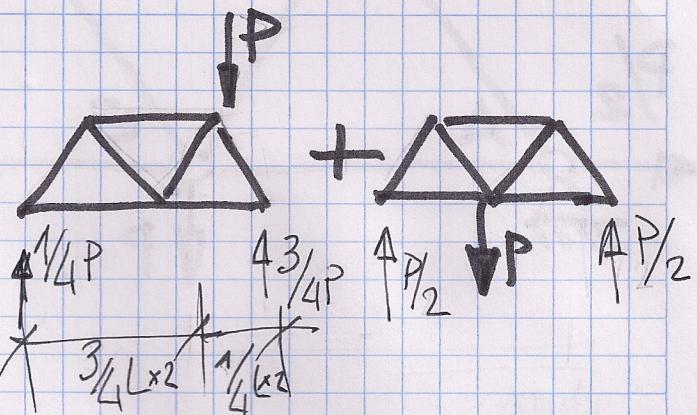
Solución:

1) Cálculo tensiones en los barres y reacciones:

1A) Reacciones



=



$$R_A = \frac{3}{4}P \quad \# \quad R_B = \frac{7}{4}P \quad (\text{Aplicando } \sum M = 0)$$

1B) tensiones (ver bocadillo de cálculo al final)

NOTA: Cuando se está aplicando el PVI
salvo que el estado de tracción/compresión
de todas las barras tanto en el sistema real
como en los virtuales este muy claro,
conviene seguir A RAJATABLA el convenio
de signos, en este caso (+) tracción (-)
compresión y, por tanto, suponer, al resolver
la estructura por el método de los nudos,
que las barras trabajan a tracción.

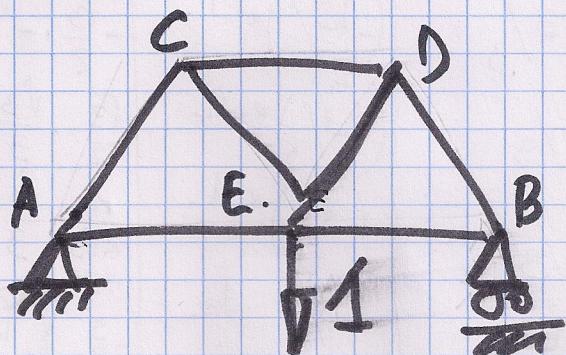
↓ ↓ → Simplificando al máximo (para que el desarrollo sea
lo más simple posible)

$$N_{AE} = +\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right) P \quad N_{EB} = P \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) \# N_{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$N_{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2} P \quad \# N_{BD} = P/2\sqrt{3} \quad N_{DB} = -\frac{5}{2\sqrt{3}} P \quad \# N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{2} P$$

2) Plantamiento del sistema virtual.

A diferencia de cuando se emplea el PTV para resolver un sistema hipostático (en el que hay que decidir dónde aplicar los esfuerzos virtuales), en este problema nos pide calcular el desplazamiento del nudo "E", por lo que se trata de un caso de aplicación directa.



Ahora hay que calcular los esfuerzos en las barras debidas a la carga virtual. Dale:

$$N_{AE} = N_{EB} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad N_{AC} = N_{DB} = N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad N_{CE} = N_{ED} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3) TABLA 8: Incluso en los casos más simples (ver problema 2 resuelto por PTV) conviene tabular los resultados

BARRA	long	N^R	N^L	$\Delta L^R (\times AE)$	$N^{(4)} \times \Delta L^R (\frac{AE}{PL})$
AE	L	$P(\sqrt{3}/4 + 1/2)$	$\sqrt{3}/6$	$P(\sqrt{3}/4 + 1/2) \times L$	$(\sqrt{3}/4 + 1/2)(\sqrt{3}/6) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}$
EB	L	$P(\frac{5}{4\sqrt{3}} + 1/2)$	$\sqrt{3}/6$	$P(\frac{5}{4\sqrt{3}} + 1/2) \times L$	$(\frac{5}{4\sqrt{3}} + 1/2)(\sqrt{3}/6) = \frac{5}{24} + \frac{\sqrt{3}}{12}$
AC	L	$P(-\sqrt{3}/2)$	$-\sqrt{3}/3$	$P(-\sqrt{3}/2) \times L$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1/2$
CE	L	$P(\sqrt{3}/2)$	$\sqrt{3}/3$	$P(\sqrt{3}/2) \times L$	$(\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/3) = 1/2$
ED	L	$P(1/2\sqrt{3})$	$\sqrt{3}/3$	$P(1/2\sqrt{3}) \times L$	$(\frac{1}{2\sqrt{3}})(\sqrt{3}/3) = 1/6$
DB	L	$P(-5/2\sqrt{3}) - \sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$P(-5/2\sqrt{3}) \times L$	$(-\frac{5}{2\sqrt{3}})(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 5/6$
CD	L	$P(-\sqrt{3}/2)$	$-\sqrt{3}/3$	$P(-\sqrt{3}/2) \times L$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1/2$

(1) (2) (3) (4) (5) = $3 \times 2 \times AE$ (6) = 5×4

!! → (Como se ve, se procure simplificar al máximo los resultados (incluso llevar a la cabecera los "factores comunes": P , L , A.E) para que la posibilidad de error al operar a continuación sea mínima)

!! → Aplicación del PTV. Concepto: Es frecuente que en los problemas se pida "plantear" la resolución de la estructura aplicando el PTV, dado que el desarrollo, como ya se ha dicho varias veces, es algebráicamente muy sencillo y propuesto

a equivocaciones.

Por esta razón, conviene que el planteamiento de la tabla y la ecuación (o ecuaciones) que encierra(n) de ella (a continuación) se entiendan perfectamente.

El Principio de los Trabajos Virtuales, es un teorema que tiene que ver con la energía que almacena una estructura de comportamiento elástico sometida a un estado de cargas ("el real") y la que origina un estado "virtual" de cargas. El teorema demuestra que el trabajo "virtual" realizado por la carga virtual si esta originado el desplazamiento real del punto en que se aplica, es igual al trabajo -también virtual- que las tensiones internas originadas por la carga virtual (N_i^R), proponen los acortamientos o alargamientos reales (ΔL_i^R) -en este caso, estructura articulada-.

Por eso es tan importante el correcto encabezamiento de la tabla.

N^R Tensiones reales en las barras producidas por el sistema de cargas real

N^{4i} Idee carga virtual "n"

ΔL^R Alargamiento debido a la carga real.

y, ahora, se aplica el PTU

Trabajo "virtual" de la carga "virtual"

$$W^V = 1 \times \sum_E L$$

| Desplazamiento real del nodo E
| Valor de la carga virtual

Trabajo "virtual" interno

$$W_i^V = \sum_{\text{barras}} N_i^V \times \Delta L_j^R = N_i^V \times \frac{L_j}{AE} \times N_j^R$$

Valor en
columna 4
(Tensión virtual
de cada barra)

Alargamiento producido por
la carga real en
cada barra
(columna 5)

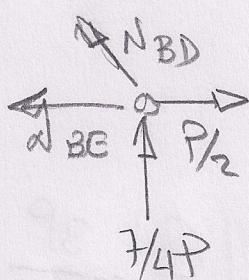
e, igualando,

$$\sum_E = \left[\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{5}{24} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \right] \times \frac{PL}{AE} = \left[\frac{17}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right] \times \frac{PL}{AE}$$

(Resultado que se ha comprobado con MEF I)

CALCULO TENSIONES 1/2

NUDO "B"



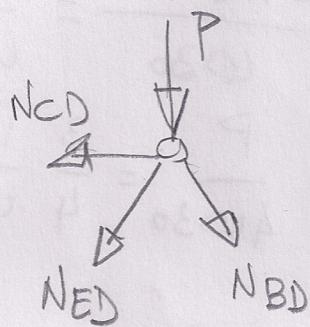
$$N_{BE} + \frac{1}{2} N_{BD} = \frac{P}{2}$$

$$N_{BD} \times \cos 30 + \frac{7}{4}P = 0$$

$$N_{BD} = -\frac{5}{4 \cos 30} P \quad \#$$

$$N_{BE} = -\frac{1}{2} N_{BD} + \frac{P}{2} = P \left(\frac{5}{8 \cos 30} + \frac{1}{2} \right)$$

NUDO "D"



$$\sum F_V = 0 = P - \frac{5}{4} \frac{P}{\cos 30} \times \cos 30 + N_{ED} \cos 30$$

$$N_{ED} = \frac{P}{4 \cos 30}$$

CALCULO TENSIONES (2/2)

"D" cont.

$$\sum F_{H20} \quad N_{CD} + N_{SD}/2 - N_{6/2} = 0$$

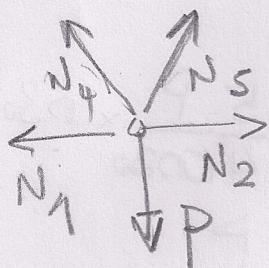
$$N_{CD} = -\frac{P}{8w30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \frac{P}{w30} = \frac{P}{w30} \left(\frac{6}{8} \right) - \frac{3P}{4w30}$$

$\boxed{N_7}$

"E"

$$\sum F_H = 0$$

$$N_1 + N_2 w30 = N_5 w60 + N_2$$



$$\sum F_j = 0 \quad N_4 w30 + N_5 w30 = P$$

$$N_4 = \frac{P - N_5 w30}{w30} = \frac{P}{w30} - w_5$$

$$= \frac{P}{w30} - \frac{P}{4w30} = \frac{3}{4} \frac{P}{w30}$$

$\boxed{N_4}$

$$N_1 = N_5/2 + N_2 - N_4/2 = \frac{P}{8} w30 + \frac{5}{8} \frac{P}{w30} + P/2 - \frac{3}{8} \frac{P}{w30} = \frac{5P}{8w30} + \frac{P}{2}$$

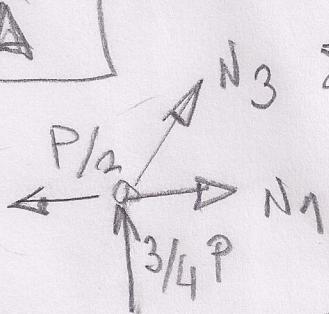
$$= \frac{3}{8} \frac{P}{w30} + \frac{P}{2}$$

$\boxed{N_1}$

$\boxed{\frac{1}{4} P/w30}$

$\boxed{\frac{3}{8} P/w30}$

"A"



$$\sum F_H / P/2 = N_1 + N_3 w60 = N_1 + N_3/2$$

$$N_3 = 2(P/2 - N_1) = 2 \left(-\frac{3}{8} \frac{P}{w30} \right) = -\frac{3}{4} \frac{P}{w30}$$

$\boxed{N_3}$

$$\sum F_V \quad \frac{3}{4} P + N_3 w30 = 0$$

$$N_3 = -\frac{3}{4} P \cdot \frac{1}{w30}$$

✓