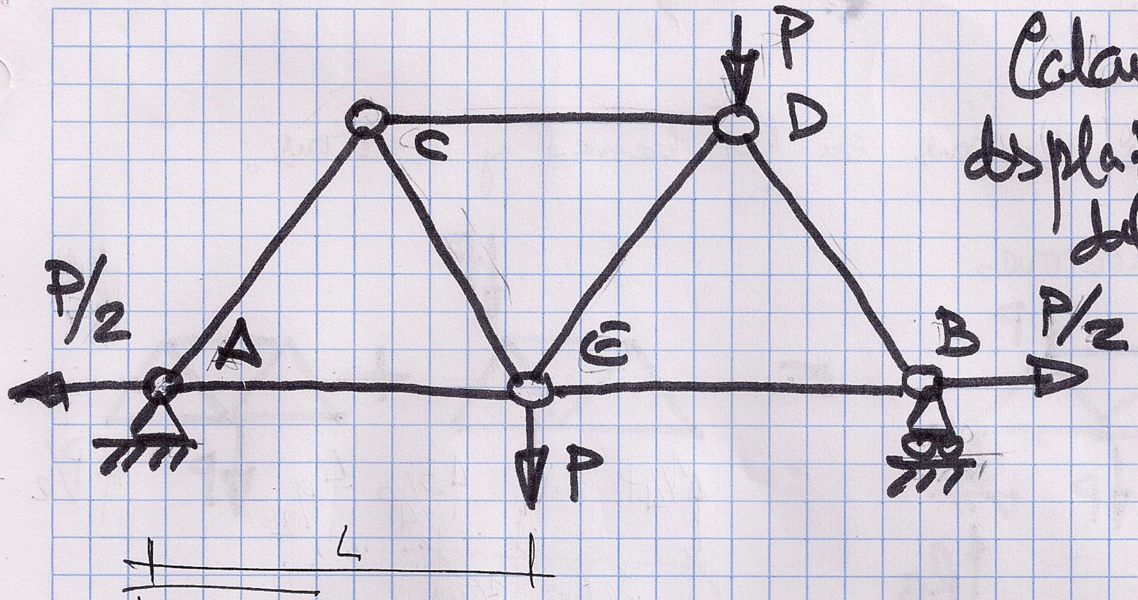
PROBLEMA 16 Técnica uso PTV

Calcular el desplazamiento del nudo "E"



NOTAS:

1) NO se trata de una estructura hiperestática ($7 + 3 - 2 \times 5 = 0$). Es un ejemplo de como aplicar el PTV

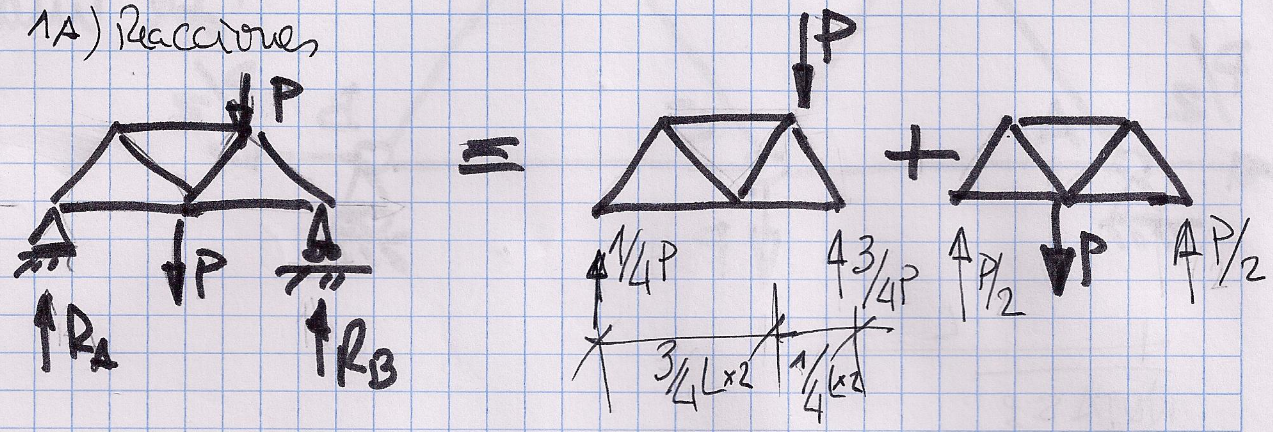
2) Para que la parte conceptual del desarrollo del problema quede lo más clara posible, los desarrollos algebraicos están al final, en borrador. También los cálculos de las tensiones en las barras.

3) Se insiste en que el PTV conduce a desarrollos algebraicos muy farragosos, por lo que en este problema se indican algunos "trucos" que lo hagan algo menos propensos a equivocaciones.

Solución:

1) Cálculo tensiones en las barras y reacciones:

1A) Reacciones



$R_A = 3/4\, P$ # $R_B = 5/4\, P$ (Aplicando $\sum M = 0$)

Corregido 15/2/2023

1B) tensiones (ver borrador de cálculo al final)

¡¡ → NOTA: Cuando se esté aplicando el PTV salvo que el estado de tracción/compresión de todas las barras tanto en el sistema real como en los virtuales esté muy claro, conviene seguir A RAJATABLA el convenio de signos, en este caso (+) tracción (−) compresión y, por tanto, suponer, al resolver la estructura por el método de los nudos, que las barras trabajan a tracción.

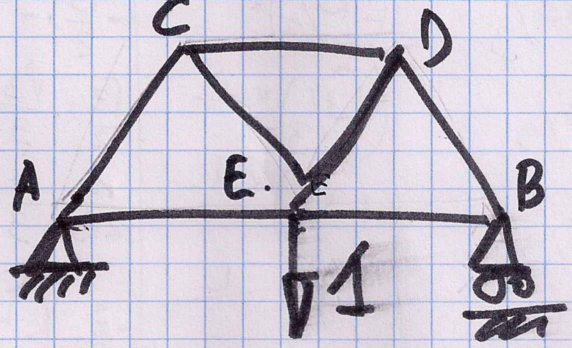
¡¡ → Simplificando al máximo (para que el desarrollo sea lo más simple posible)

$N_{AE} = P\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$ # $N_{EB} = P\left(\frac{5}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$ # $N_{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{2} P$

$N_{CE} = \sqrt{3}/2\, P$ # $N_{ED} = P/2\sqrt{3}$ # $N_{DB} = -\frac{5}{2\sqrt{3}} P$ # $N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{2} P$

2) Planteamiento del <u>sistema virtual</u>.

A diferencia de cuando se emplea el PTV para resolver un sistema hiperestático (en el que hay que decidir dónde aplicar los esfuerzos virtuales), en este problema nos pide calcular el desplazamiento del nudo "E", por lo que se trata de un caso de aplicación directa.



Ahora hay que calcular los esfuerzos en las barras debidos a la carga virtual. Sale:

$$N_{AE} = N_{EB} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \# \quad N_{AC} = N_{DB} = N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \# \quad N_{CE} = N_{ED} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3) TABLA: Incluso en los casos más simples (ver problema 2 solucionado por PTV) conviene tabular los resultados

BARRA	long	N^R	N^4	$\Delta L^R\ (\times AE)$	$N^{4'} \times \Delta L^R\ \left(\times \frac{AE}{PL}\right)$
AE	L	$P\left(\sqrt{3}/4 + 1/2\right)$	$\sqrt{3}/6$	$P\left(\sqrt{3}/4 + 1/2\right) \times L$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{3}/6\right) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}$
EB	L	$P\left(\frac{5}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{3}/6$	$P\left(5/4\sqrt{3} + 1/2\right) \times L$	$\left(\frac{5}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{5}{24} + \frac{\sqrt{3}}{12}$
AC	L	$P\left(-\sqrt{3}/2\right)$	$-\sqrt{3}/3$	$P\left(-\sqrt{3}/2\right) \times L$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1/2$
CE	L	$P\left(\sqrt{3}/2\right)$	$\sqrt{3}/3$	$P\left(\sqrt{3}/2\right) \times L$	$\left(\sqrt{3}/2\right)\left(\sqrt{3}/3\right) = 1/2$
ED	L	$P\left(1/2\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}/3$	$P\left(1/2\sqrt{3}\right) \times L$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}/3\right) = 1/6$
DB	L	$P\left(-5/2\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}/3$	$P\left(-5/2\sqrt{3}\right) \times L$	$\left(-5/2\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}/3\right) = 5/6$
CD	L	$P\left(-\sqrt{3}/2\right)$	$-\sqrt{3}/3$	$P\left(-\sqrt{3}/2\right) \times L$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1/2$
1	2	3	4	5	6

!! → (Como se ve, se procura simplificar al máximo los resultados (incluso llevar a la cabecera los "factores comunes": P, L, A.E) para que la posibilidad de error al operar a continuación sea mínima)

!! → Aplicación del PTV. Concepto: Es frecuente que en los problemas se pida "plantear" la resolución de la estructura aplicando el PTV, dado que el desarrollo, como ya se ha dicho varias veces, es algebráicamente muy farragoso y propenso a equivocaciones.

Por esta razón, conviene que el planteamiento de la tabla y la ecuación (o ecuaciones) que emana(n) de ella (a continuación) se entiendan perfectamente.

El Principio de los Trabajos Virtuales, es un teorema que tiene que ver con la energía que almacena una estructura de comportamiento elástico sometida a un estado de cargas ("el real") y la que origina un estado "virtual" de cargas. El teorema demuestra que el trabajo "virtual" realizado por la carga virtual si esta originase el desplazamiento real del punto en que se aplica, es igual al trabajo —también virtual— que las tensiones internas originadas por la carga virtual (N_i^u), produjesen los acortamientos o alargamientos reales (ΔL_i^R) —en este caso, estructura articulada—.

Por eso es tan importante el correcto encabezamiento de la tabla.

N^R tensiones reales en las barras producidas por el sistema de cargas real

N^u Idem carga virtual "u"

ΔL^R Alargamiento debido a la carga real.

Y, ahora, se aplica el PTV

Trabajo "virtual" de la carga "virtual"

$W^{4'} = 1 \times \delta_E$

└ Desplazamiento real del nudo "E"

└ Valor de la carga virtual

Trabajo "virtual" interno

$$W_i^{4'} = \sum_{\text{barras}} N_i^{4'} \times \Delta L_i^R = N_i^{4'} \times \frac{L_i}{AE} \times N_i^R$$

Valor en columna 4 (Tensión virtual de cada barra)

Alargamiento producido por la carga real en cada barra (Columna "5")

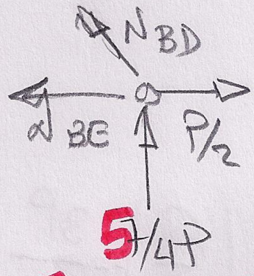
e, igualando,

$$\delta_E = \left[\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{5}{24} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right] \times \frac{PL}{AE} = \left[\frac{17}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right] \times \frac{PL}{AE}$$

(Resultado que está comprobado con MEFI)

CALCULO TENSIONES 1/2

NUDO "B"



$$N_{BE} \pm \frac{1}{2} N_{BD} = P/2$$

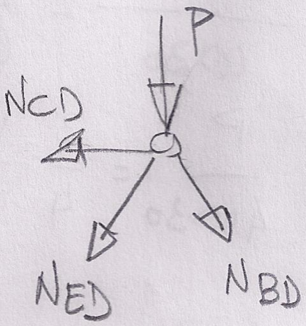
$$N_{BD} \times \cos 30 + 5/4 P = 0$$

$$N_{BD} = -\frac{5\,P}{4\cos 30} \quad \#$$

$$N_{BE} = -\frac{1}{2} N_{BD} + P/2 = P\left(\frac{5}{8\cos 30} + \frac{1}{2}\right)$$

CORREGIDO 15/2/2023
(Todo el cálculo posterior
está bien: "5/4"

NUDO "D"



$$\sum F_V = 0 = P - \frac{5}{4}\frac{P}{\cos 30} \times \cos 30 + N_{ED} \cos 30$$

$$N_{ED} = \frac{P}{4\cos 30}$$

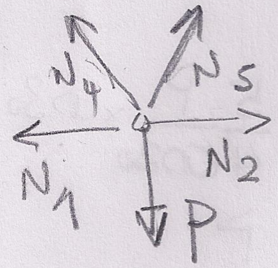
CÁLCULO TENSIONES (2/2)

"D" cont.

$\sum F_H = 0 \quad N_{CD} + N_{ED_5}/2 - N_6/2 = 0$

$$N_{CD_7} = -\frac{P}{8\cos 30} - \frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{P}{\cos 30} = -\frac{P}{\cos 30}\left(\frac{6}{8}\right) = -\frac{3P}{4\cos 30} \qquad \boxed{N_7}$$

"E"



$\sum F_H = 0 \qquad N_1 + N_4\cos 60 = N_5\cos 60 + N_2$

$\sum F_V = 0 \qquad N_4\cos 30 + N_5\cos 30 = P$

$$N_4 = \frac{P - N_5\cos 30}{\cos 30} = \frac{P}{\cos 30} - N_5$$

$$= \frac{P}{\cos 30} - \frac{P}{4\cos 30} = \frac{3}{4}\,\frac{P}{\cos 30} \qquad \boxed{N_4}$$

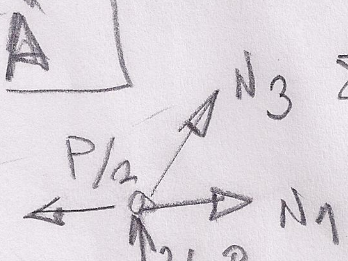
$$N_1 = N_5/2 + N_2 - N_4/2 = \frac{P}{8}\cos 30 + \frac{5}{8}\,\frac{P}{\cos 30} + P/2 - \frac{3}{8}\,\frac{P}{\cos 30} =$$

$$= \frac{3}{8}\,\frac{P}{\cos 30} + \frac{P}{2} \qquad \boxed{N_1}$$

$1/4\ P/\cos 30$

$3/8\ P/\cos 30$

"A"



$\sum F_H) \quad P/2 = N_1 + N_3\cos 60 = N_1 + N_3/2$

$$N_3 = 2\left(P/2 - N_1\right) = 2\left(-\frac{3}{8}\,\frac{P}{\cos 30}\right) = -\frac{3}{4}\,\frac{P}{\cos 30} \qquad \boxed{N_3}$$

$\sum F_V) \quad \frac{3}{4}P + N_3\cos 30 = 0$

$$N_3 = -\frac{3}{4}P \cdot \frac{1}{\cos 30} \quad ✓$$