Notas de Cálculo Diferencial

October 13, 2024

1 Introducción

El cálculo diferencial estudia las tasas de cambio instantáneas de las funciones. Se basa principalmente en el concepto de derivada, que mide cómo una función cambia respecto a su variable independiente.

2 Límites

El concepto de límite es fundamental en el cálculo diferencial y se usa para definir la continuidad y las derivadas.

2.1 Definición de límite

El límite de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a a es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

2.2 Teorema del Sándwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x en un entorno de a, y

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

3 Derivadas

La derivada de una función $f(x)$ con respecto a x se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3.1 Propiedades de las derivadas

- **Linealidad**:
$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$

- **Regla del producto**:
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- **Regla del cociente**:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- **Regla de la cadena**:
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

3.2 Teorema de Rolle

Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en (a, b), y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = 0$$

3.3 Teorema del Valor Medio

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4 Aplicaciones de la derivada

- **Cálculo de máximos y mínimos locales**: Se utiliza la derivada primera para identificar puntos críticos (donde $f'(x) = 0$) y la derivada segunda para determinar la concavidad.

- **Optimización**: Se puede usar para maximizar o minimizar funciones en problemas de la vida real.

- **Movimiento**: La derivada representa la velocidad de una partícula y su segunda derivada, la aceleración.

5 Formulario de derivadas

5.1 Derivadas comunes

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

5.2 Derivadas de funciones compuestas

$$\frac{d}{dx}\sin(g(x)) = \cos(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)}g'(x)$$