Notas de Cálculo Integral

October 13, 2024

1 Introducción

El cálculo integral se enfoca en la acumulación de cantidades y el cálculo de áreas bajo curvas. Las integrales se dividen en indefinidas y definidas.

2 Integrales indefinidas

Una integral indefinida es el proceso inverso de la diferenciación y se denota como:

$$\int f(x)\,dx$$

El resultado es una familia de funciones que difieren en una constante C.

3 Teoremas Importantes

3.1 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema Fundamental del Cálculo conecta el cálculo diferencial con el cálculo integral. Tiene dos partes principales:

1. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y se define la función $F(x)$ como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

entonces $F'(x) = f(x)$.

4 Propiedades de las integrales

- **Linealidad**:
$$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$
- **Cambio de variable**:
$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$
donde $u = g(x)$.
- **Integración por partes**:
$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

5 Integrales definidas

Una integral definida se denota como:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

y representa el área bajo la curva de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

6 Aplicaciones de la integral

- **Cálculo de áreas**: El área bajo una curva entre dos puntos se calcula usando la integral definida.
- **Volúmenes de sólidos de revolución**: El volumen de un sólido generado al rotar una curva alrededor de un eje se calcula mediante integrales.
- **Trabajo y energía**: Las integrales se utilizan en física para calcular el trabajo hecho por una fuerza variable.

7 Formulario de integrales

7.1 Integrales comunes

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$
$$\int e^x\, dx = e^x + C$$
$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$$
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

7.2 Integrales de funciones compuestas

$$\int \sin(g(x))g'(x)\,dx = -\cos(g(x)) + C$$

$$\int e^{g(x)}g'(x)\,dx = e^{g(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$