

Model stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsen i Sheparda

I. Wprowadzenie

Rozważać będziemy następujący model opisujący dynamikę logarytmów cen aktywów

$$dy^*(t) = (\mu + \beta\sigma^2(t))dt + \sigma(t)dB(t), \quad (1)$$

gdzie $(y^*(t))_{t \geq 0}$ proces logarytmów cen aktywów, parametr μ jest dryfem, a parametr β jest premią za ryzyko. Zakładamy, że proces wariancji chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ jest niezależny od procesu Wienera $(B(t))_{t \geq 0}$. Barndorff-Nielsen i Shepard (2001) zaproponowali, aby proces zmienności natychmiastowej opisać za pomocą niegaussowskiego procesu Ornsteina-Uhlenbecka, będącego rozwiązaniem równania

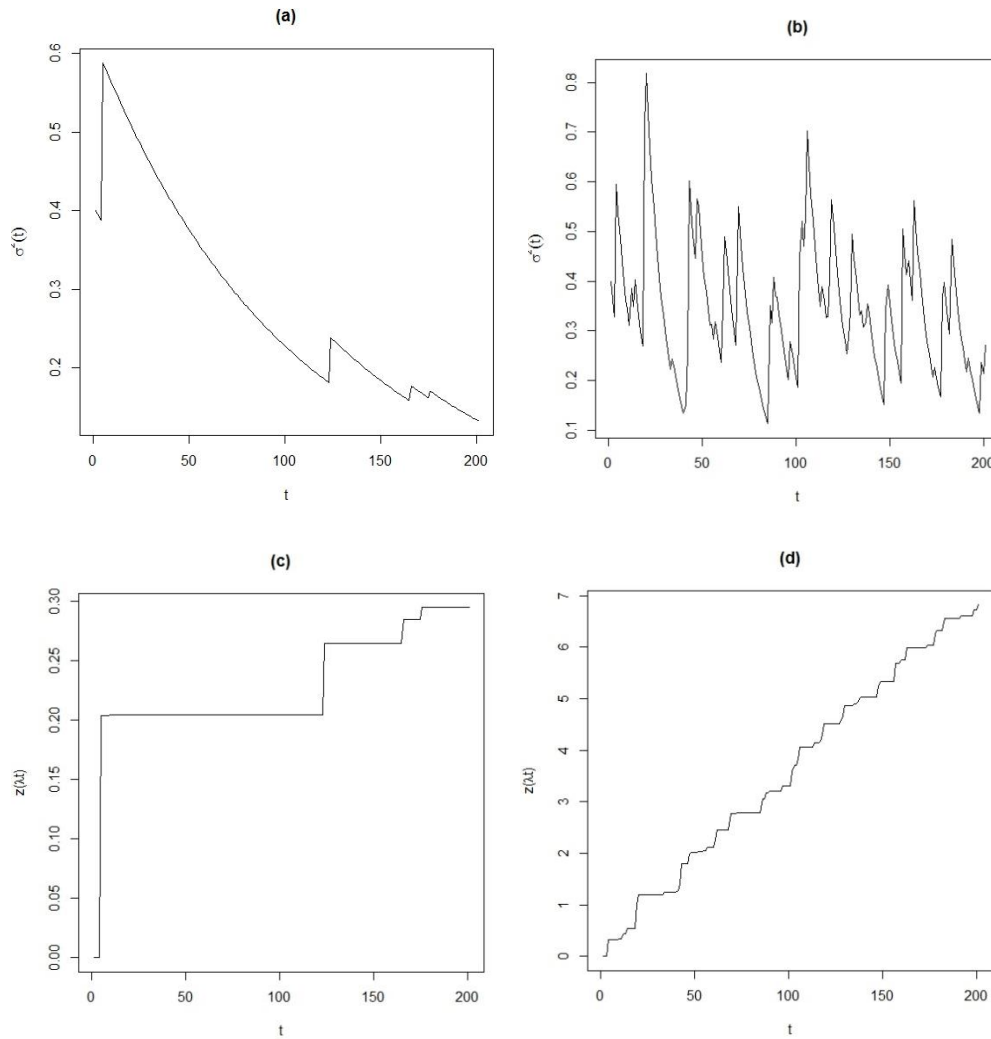
$$d\sigma^2(t) = -\lambda\sigma^2(t)dt + dz(\lambda t), \quad (2)$$

gdzie $(z(\lambda t))_{t \geq 0}$ jest nieujemnym procesem Lévy'ego bez składnika gaussowskiego. Taki proces nazywany jest podporządkowanym (ang. *subordinator*) lub prowadzącym procesem Lévy'ego ukrytym w tle (ang. *Background Driven Lévy Process*, w skrócie *BDLS*). Rozwiązaniem równania (2) jest proces:

$$\sigma^2(t) = \sigma^2(0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dz(\lambda s). \quad (3)$$

Własności procesu zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka (OUSV):

- 1) Proces $\sigma^2(t)$ porusza się do góry za pomocą skoków i maleje wykładniczo ze stopą λ (por. rysunek 1).
- 2) Skoki w procesie $\sigma^2(t)$ są związane ze skokami procesu $z(\lambda t)$ i pojawiają się wg stopy λ (por. rysunek 1).
- 3) $\sigma^2(t)$ ma rozkład niezależny od wyboru parametru λ , co wynika z zastosowanie nietypowego indeksowania różniczki $dz(\lambda t)$ w równaniu (2).



Rysunek 1. Przykładowe trajektorie procesu zmienności chwilowej o tym rozkładzie brzegowym gamma z parametrem kształtu $\nu=4$ oraz parametrem skali $\alpha=0,1$ (a) i (b) oraz odpowiadające im procesy Lévy'ego z parametrami odpowiednio $\lambda=0,01$ i $\lambda=0,1$.

Źródło: opracowanie własne.

4) Proces zmienności chwilowej określony przez równanie (3) jest ściśle stacjonarny, to znaczy istnieje rozkład prawdopodobieństwa D określonego na zbiorze liczb rzeczywistych, zwany rozkładem stacjonarnym lub brzegowym, taki że dla dowolnego $t > 0$ zmienna losowa $\sigma^2(t)$ ma rozkład prawdopodobieństwa D , jeśli tylko $\sigma^2(0)$ ma rozkład D (por. rysunek 2)

5) Dla każdego jednowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa D typu samodekompozycyjnego (*self-decomposable*) istnieje proces $\sigma^2(t)$ typu Ornsteina-Uhlenbecka postaci (3), dla którego $\sigma^2(t) \sim D$ dla pewnego procesu Lévy'ego $z(t)$. Twierdzenie odwrotne też jest prawdziwe.

Rozkłady samodekompozycyjne

Rozkład D nazywamy samodekompozycyjnym, gdy funkcja charakterystyczna φ spełnia następujący warunek

$$\forall_{\zeta \in R} \quad \forall_{c \in (0,1)} \quad \varphi(\zeta) = \varphi(c\zeta)\varphi_c(\zeta) \quad (2.10)$$

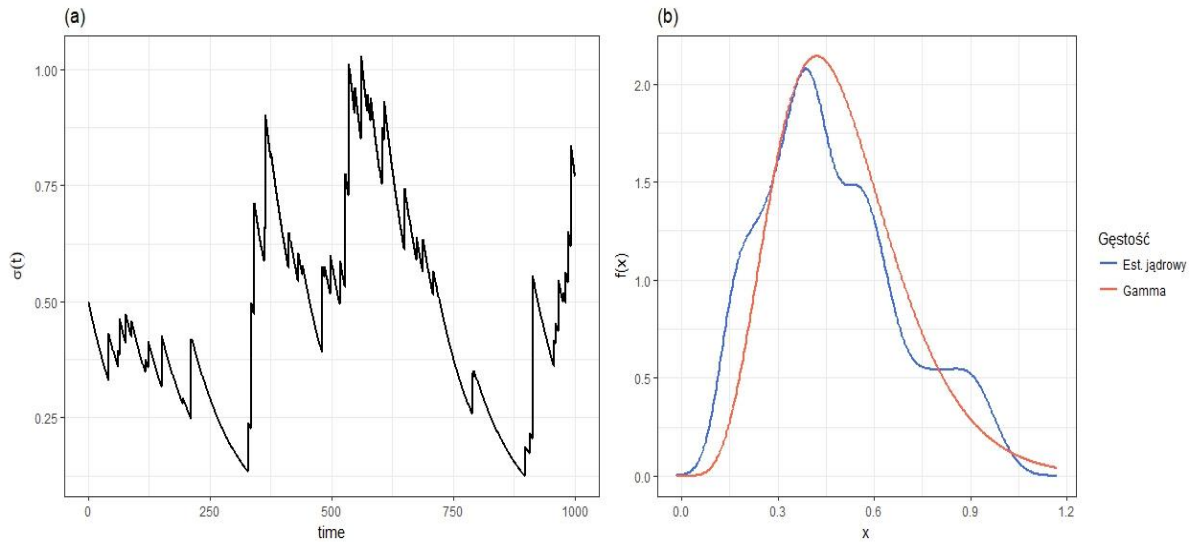
dla pewnej rodziny funkcji charakterystycznych $\{\varphi_c : c \in (0,1)\}^1$. Równoważnie, zmienna losowa X ma rozkład samodekompozycyjny dokładnie wtedy, gdy dla dowolnego $c \in (0,1)$ istnieje zmienna losowa X_c niezależna od X taka że

$$X = cX + X_c. \quad (2.11)$$

Wiele rozkładów stosowanych do modelowania zjawisk finansowych należy do tej klasy rozkładów m.in. logarytmiczno-normalny, czy uogólniony odwrotny gaussowski (*general inverse gaussian*, w skrócie *GIG*), którego specjalnymi przypadkami są rozkłady: gamma, odwrotny gaussowski, dodatni hiperboliczny. W przypadku, gdy proces zmienności $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ ma rozkład brzegowy będący rozkładem uogólnionym odwrotnym gaussowskim to stopy zwrotu mają uogólniony rozkład hiperboliczny (*generalised hyperbolic distribution*, w skrócie *GH*). Wynika to z następującej własności: jeżeli $\sigma^2 \sim GIG$ i jest niezależny $\varepsilon \sim N(0,1)$, to $x = \mu\Delta + \beta\sigma^2 + \sigma\varepsilon \sim GH^2$. Uogólniony rozkład hiperboliczny jest często stosowany do modelowania stóp zwrotu, ze względu na możliwość dopasowania do obserwowanych grubych ogonów rozkładu. Szczególnymi przypadkami tego rozkładu są m.in. rozkład t-Studenta, normalny odwrotny gaussowski (*normal inverse gaussian*), rozkład hiperboliczny.

¹ Twierdzenie (2.1) w Barndorff-Nielsen i Shepard (2001) na podstawie prac Wolfe (1982), Jurek i Vervaat (1983).

² Jednocześnie z równania (7) wynika, że stopy zwrotu są postaci $y_n = \mu\Delta + \beta\sigma_n^2 + \sigma_n\varepsilon$.



Rysunek 3. Przykładowa trajektoria procesu zmienności chwilowej o rozkładzie brzegowym gamma z parametrem kształtu $\nu=6,26$ oraz parametrem skali $\alpha=12,5$ (co odpowiada wartości oczekiwanej $\xi=0,5$ i odchyleniu standardowym $\omega=0,2$) (lewy rysunek) oraz traktując $\sigma^2(t)$ dla $t = 1, \dots, 1000$ jako próbę losową prostą prawy rysunek przedstawia wykresy gęstości rozkładu gamma (kolor czerwony) oraz estymator gęstości (kolor niebieski). Średnia wartość z próby to 0,4699, a odchylenie standardowe z próby 0,2125.

Źródło: opracowanie własne.

6) Scałkowaną zmienność $\sigma^{2*}(t)$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$\sigma^{2*}(t) = \int_0^t \sigma^2(u) du = \frac{1}{\lambda} \left(z(\lambda t) - \sigma^2(t) + \sigma^2(0) \right) \quad (4)$$

7) Ze wzoru (4) wynika ważna, ze względu na zastosowanie do wyceny opcji i zarządzaniu ryzykiem, własność modelu jaką jest możliwość wyznaczenie zmienności aktualnej bez odwoływania się do zmienności scałkowanej za pomocą wzoru:

$$\sigma_n^2 = \int_{\Delta(n-1)}^{\Delta n} \sigma^{2*}(t) dt = \frac{1}{\lambda} \left[z(\lambda \Delta n) - z(\lambda \Delta(n-1)) - (\sigma^2(\Delta n) - \sigma^2(\Delta(n-1))) \right] \quad (5)$$

8) Przyjmując model opisujący logarytmny cen aktywów za pomocą równania różniczkowego (1) otrzymujemy:

$$y_n = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} dy^*(t) = y^*(n\Delta) - y^*((n-1)\Delta), \quad (6)$$

Ze wzoru (6) wynika, że rozkład warunkowy logarytmicznej stopy zwrotu w okresie n względem zmienności aktualnej w okresie n jest rozkładem normalnym

$$y_n | \sigma_n^2 \sim N(\mu\Delta + \beta\sigma_n^2, \sigma_n^2) \quad (7)$$

Bezwarunkowy rozkład logarytmicznych stóp zwrotu w okresie n jest mieszaniną rozkładów normalnego (ang. *scale location mixture of normals*), co pozwala uzyskać rozkłady logarytmicznych stóp zwrotu o własnościach obserwowanych empirycznie: o grubych ogonach i z własnością normalności agregacyjnej, to znaczy wraz ze wzrostem Δ rozkłady zbliżają się do rozkładu normalnego.

9) Wzory do wyceny opcji opartych na podstawie modelu są wyprowadzone w postaci jawnych wzorów.

10) Zakładając, że proces zmienności chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ ma wartość oczekiwaną ξ oraz wariancję ω^2 istnieje wówczas także funkcja autokorelacji

$$r(u) = \exp(-\lambda|u|). \quad (8)$$

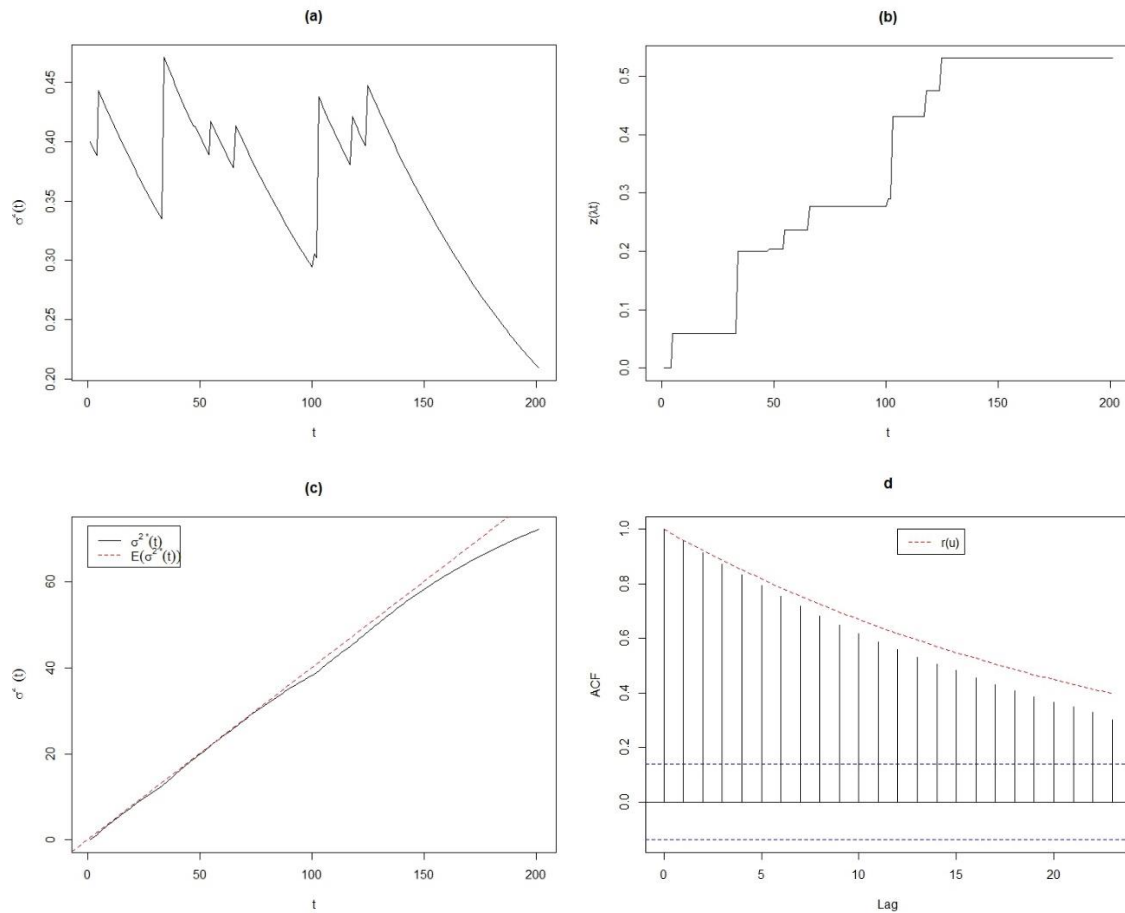
Na rysunku 3 (d) przedstawiono empiryczną funkcję autokorelacji oraz teoretyczną (linia czerwona) wyznaczoną za pomocą wzoru (10).

Ponadto można również wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmienności scałkowanej i aktualnej

$$\begin{aligned} E(\sigma^{2*}(t)) &= \xi t, & Var(\sigma^{2*}(t)) &= 2\omega^2 r^{**}(t), \\ E(\sigma_n^2(t)) &= \xi \Delta, & Var(\sigma_n^2(t)) &= 2\omega^2 r^{**}(\Delta), \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie $r^{**}(\cdot)$ oznacza podwójną całkę z funkcji autokorelacji

$$r^{**}(t) = \int_0^t \int_0^s r(u) du ds = \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda|s|} - 1 + \lambda s). \quad (10)$$



Rysunek 3. Przykładowa symulacja trajektorii procesu zmienności chwilowej o rozkładzie brzegowym gamma z parametrem kształtu $\nu=4$ oraz parametrem skali $\alpha=0,1$ (a) odpowiadający mu BDLP z parametrem $\lambda=0,01$ (b), proces zmienności scałkowanej (c) oraz empiryczna funkcja autokorelacji. Kolorem czerwonym oznaczono wartość oczekiwaną zmienności scałkowanej (c) oraz funkcję autokorelacji zmienności chwilowej (d).

Źródło: opracowanie własne.

II. Symulacje

Proces zmienności chwilowej $(\sigma^2(t))_{t \geq 0}$ można, jako rozwiązanie równania (2), zapisać w postaci

$$\sigma^2(t) = e^{-\lambda t} \sigma^2(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dz(\lambda s) = e^{-\lambda t} \sigma^2(0) + e^{-\lambda t} \int_0^{\lambda t} e^s dz(s).$$

Zatem do symulacji trajektorii procesu konieczne jest możliwość symulacji całki stochastycznej postaci

$$\int_0^{\lambda \Delta} f(s) dz(s), \quad (11)$$

dla pewnej ustalonej funkcji f . Pierwsza możliwość to symulacja procesu Lévy'ego $(z(t))_{t \geq 0}$ a następnie aproksymacja całki schematem Eulera (por. Protter i Talay 1997, Izydoreczyk, Janicki 2001). Podejście to jest trudne w implementacji i obliczeniowo czasochłonne. Druga możliwość to wykorzystanie rozwijania całki (11) w nieskończony szereg zmiennych losowych:

$$\int_0^{\lambda \Delta} f(s) dz(s) = \sum_{i=1}^{\infty} W^{-1}\left(\frac{a_i}{\lambda \Delta}\right) f(\lambda r_i), \quad (12)$$

dla niezależnych ciągów zmiennych losowych $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$, gdzie $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem kolejnych zgłoszeń procesu Poissona o intensywności 1, a $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym na przedziale $[0,1]$.

Funkcje W, W^+, W^{-1}

Oznaczmy przez W miarę Lévy'ego dla $z(1)$ o gęstości w , W^+ gęstość rozkładu ogona rozkładu (ang. *tail mass function*), to jest funkcję

$$W^+(x) = \int_x^{\infty} w(y) dy, \quad (13)$$

natomiast przez W^{-1} odwrotność funkcji W^+ , czyli funkcję

$$W^{-1}(x) = \inf \{y > 0 : W^+(y) \leq x\}.$$

Przykładem procesu zmienności chwilowej, dla którego szereg nieskończony (12) redukuje się do skończonej ilości wyrazów jest proces Ornsteina-Uhlenbecka o rozkładzie brzegowym gamma z parametrami kształtu ν oraz skali α , dla których funkcje W^+ i W^{-1} można zapisać odpowiednio przez

$$W^+(x) = \nu \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \text{ oraz } W^{-1}(x) = \max\left\{0, -\alpha \ln\left(\frac{x}{\nu}\right)\right\}. \quad (14)$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda\Delta} f(s) dz(s) &= \sum_{i=1}^{\infty} W^{-1}\left(\frac{a_i}{\lambda\Delta}\right) f(\lambda r_i) = -\alpha \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[0, \nu]} \left(\frac{a_i}{\lambda\Delta}\right) \ln\left(\frac{\frac{a_i}{\lambda\Delta}}{\nu}\right) f(\lambda r_i) = \\ &= -\alpha \sum_{i=1}^{N(\lambda\Delta\nu)} \ln\left(\frac{a_i}{\lambda\Delta\nu}\right) f(\lambda r_i) = \alpha \sum_{i=1}^{N(1)} \ln\left(\frac{1}{c_i}\right) f(\lambda r_i) \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie $c_1 < \dots < c_i < \dots c_{N(1)}$ jest ciągiem kolejnych zgłoszeń procesu Poissona o intensywności $\lambda\Delta\nu$, a $N(1)$ jest liczbą zgłoszeń do czasu 1 w tym ciągu. W szczególności ciąg może być pusty, to znaczy pierwsze zgłoszenie może być większe od 1. Odpowiada to sytuacji, gdy w przedziale czasu $[0, \lambda\Delta]$, proces $(z(\lambda t))_{t \geq 0}$ jest stały, różniczka $dz(\lambda t) = 0$, a proces zmienności maleje zgodnie z częścią deterministyczną (por. rysunek 1). Ponadto można także wyznaczyć prawdopodobieństwo pojawienie się co najmniej jednego skoku w trajektorii procesu zmienności w jednostce czasu $\Delta = 1$: $P(c_1 < 1) = 1 - \exp(-\lambda\omega)$. W przypadku wartości parametrów α, ν takich jak na rysunku 1, dla parametrów $\lambda=0,01$ i $\lambda=0,1$ prawdopodobieństwa te są równe odpowiednio 0,03920 i 0,32968.

III. Estymacja

Estymacja modelu OUSV jest trudna, ponieważ nie jest znana postać funkcji przejścia procesu. Barndorff-Nielsen i Shephard (2001) proponowali użycie podejścia bayesowskiego (markowskie metody Monte Carlo, *Markov Chain Monte Carlo*), estymacji pośredniej (Gourieroux, Monfort, Renault 1993), filtrów Kalmana i cząsteczkowych (sekwencyjna metoda Monte Carlo, zob. Pitt i Shephard 1999) oraz funkcji estymujących (Bibby i in. 1995). W dalszych pracach dotyczących estymacji modelu OUSV najwięcej uwagi zostało poświęcone metodzie *MCMC*: Roberts i in. (2004), Gander i Stephens (2007a,b) oraz Griffin i Steel (2006, 2010). Ponadto wykorzystano tak różnorodne podejścia jak: empiryczne funkcje charakterystyczne (Taufer i in. 2011), martyngałowe funkcje estymujące (Hubalek i Posedel 2011), czy *Particle Markov chain Monte Carlo* (Andrieu i in. 2010). Złożenie procesów zmienności postaci zostało uwzględnione m.in. w pracach Griffina i Steela (2006, 2010), Taufer i in. (2011) Szczepocki (2018). Rozwijane jest także podejście wielowymiarowe Pigorsch i Stelzer (2009), Barndorff-Nielsen i Stelzer (2013), Stelzer i in. (2015).

Filtr Kalmana

Barndorff-Nielsen i Shephard (2001) zaproponowali jak przedstawić model stochastycznej zmienności (1-2) w postaci umożliwiającej zastosowanie filtru Kalmana. Punktem wyjścia są dwie własności:

- 1) Liniowa reprezentacja przestrzeni pomiaru:

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\Delta \\ \mu^2\Delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} x_n + u_n, \quad (16)$$

gdzie:

$$E(u_n) = E\left(\begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \end{bmatrix}\right) = 0, \quad Var(u_n) = 2\omega \begin{bmatrix} \xi\Delta & 2\mu\Delta^2\xi \\ 2\mu\Delta^2\xi & 4\mu^2\Delta^3\xi + 2(2\omega^2 r^{**}(\Delta) + \xi^2\Delta^2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

- 2) Liniowa postać równania przejścia procesu zmienności:

$$x_n = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 \\ \sigma^2(\Delta n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - e^{-\lambda\Delta} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix} x_{n-1} + \tilde{\eta}_n, \quad (18)$$

gdzie:

$$\eta_n = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1n} - \tilde{\eta}_{2n} \\ \tilde{\eta}_{2n} \end{bmatrix}, \quad E(\tilde{\eta}_n) = E\left(\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1n} \\ \tilde{\eta}_{2n} \end{bmatrix}\right) = \xi \begin{bmatrix} 1 - e^{-\lambda\Delta} \\ \lambda\Delta \end{bmatrix}, \quad Var(\tilde{\eta}_n) = 2\omega \begin{bmatrix} 1/2(1 - e^{-2\lambda\Delta}) & (1 - e^{-\lambda\Delta}) \\ (1 - e^{-\lambda\Delta}) & \lambda\Delta \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Równania (16) i (18) można połączyć w układ równań postaci:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_n \\ y_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\Delta \\ \mu^2\Delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \\ x_n = \begin{bmatrix} \xi(1 - e^{-\lambda\Delta}) \\ \xi\lambda\Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix} x_{n-1} + \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1n} - \tilde{\eta}_{2n} - \xi(1 - e^{-\lambda\Delta}) \\ \tilde{\eta}_{2n} - \xi\lambda\Delta \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (20)$$

Postać przestrzeni stanów (20) i algorytm filtru Kalmana umożliwia zastosowania metody quasi-największej wiarygodności.

Filtr cząsteczkowy

Barndorff-Nielsen i Shephard (2001) zaproponowali także jak przedstawić model stochastycznej zmienności (1-2) w postaci umożliwiającej zastosowanie filtru cząsteczkowego. Zmienną pomiaru (obserwacji) są logarytmiczne stopy zwrotu, a procesem ukrytym jest

dwuwymiarowy wektor losowy $\begin{bmatrix} \sigma_n^2 \\ \sigma^2(\Delta n) \end{bmatrix}$.

1) Proces pomiaru ma gęstość rozkładu warunkowego (7):

$$y_n | \sigma_n^2 \sim N(\mu\Delta + \beta\sigma_n^2, \sigma_n)$$

2) Nie jest znana postać funkcji przejścia, ale można losować z funkcji przejścia zgodnie ze wzorem (18) postaci:

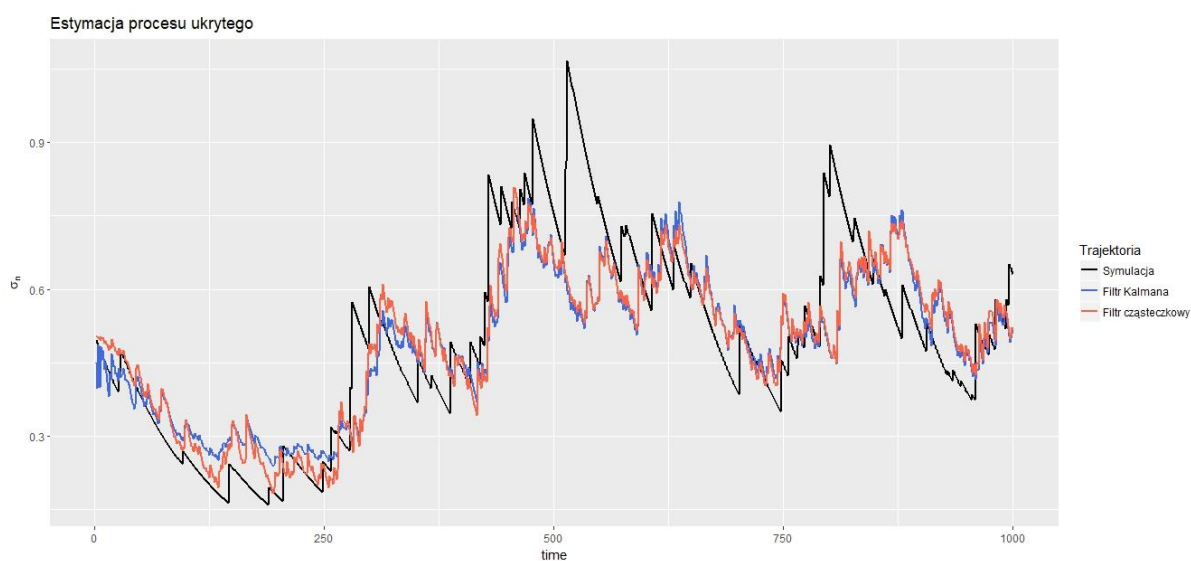
$$x_n = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 \\ \sigma^2(\Delta n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - e^{-\lambda\Delta} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix} x_{n-1} + \tilde{\eta}_n$$

Użycie filtru cząsteczkowego umożliwia wykorzystania iterowanej filtracji.

IV. Przykład symulacyjny

Dokonałem symulacji trajektorii procesu stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsena i Sheparda, przy czym proces Ornsteina-Uhlenbecka miał rozkład brzegowym gamma z parametrami kształtu $\nu=6,25$ oraz skali $\alpha=12,5$. Odpowiada to wartości oczekiwanej rozkładu brzegowego $\xi=0,5$ i odchyleniu standardowym $\omega=0,2$. Ponadto przyjąłem $\mu=0$ oraz $\lambda=0,01$.

- 1) Najpierw sprawdziłem dokładność estymacji ukrytego procesu zmienności przy znanych parametrach. Wyniki przedstawia rysunek 1 i tablica 1.



Rysunek 4. Przykładowa symulacja trajektorii procesu zmienności aktualnej (kolor czarny) oraz jej aproksymacja filtrem Kalman (kolor niebieski) i filtrem cząsteczkowym z 1000 cząsteczek (kolor czerwony).

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 1. Dokładność aproksymacji procesu zmienności aktualnej filtrem Kalman i filtrem cząsteczkowym z 1000 cząsteczek

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Filtr Kalmana	0,0093	0,1201	0,0868	-5,2156	18,5219
Filtr cząsteczkowy	0,0086	0,1159	0,0828	-3,8445	16,7692

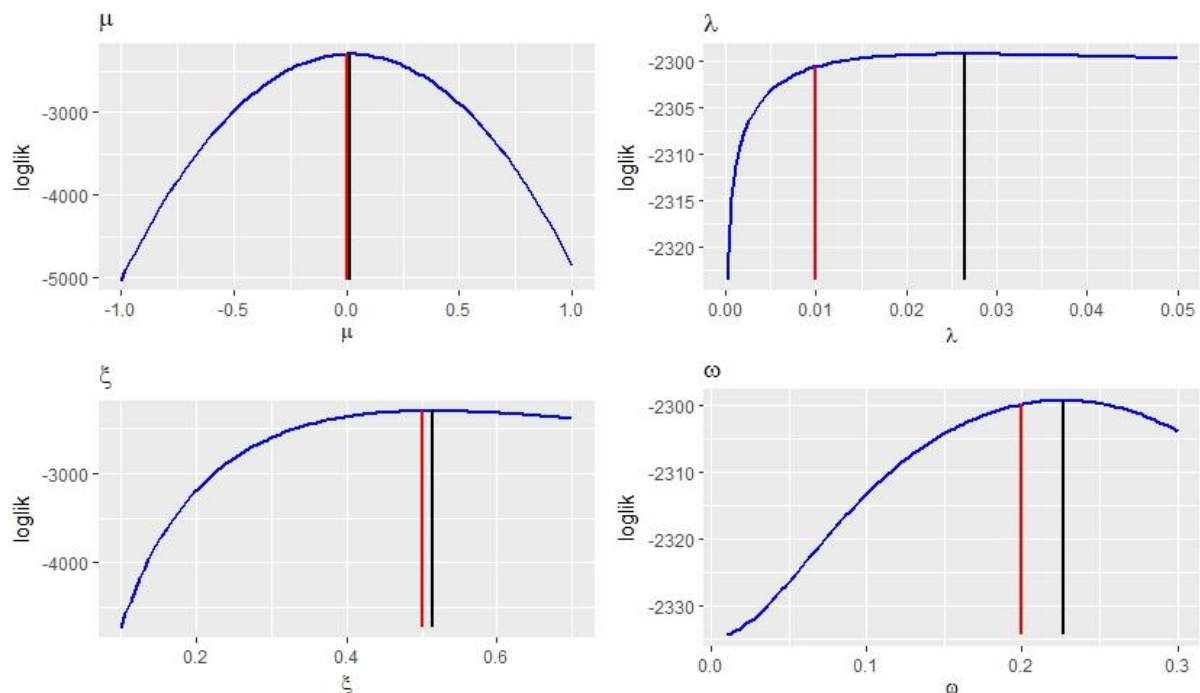
Źródło: opracowanie własne.

- 1) Następnie dokonałem estymacji parametrów. Wyniki przedstawia tablica 2. Profile funkcji wiarygodności dla metody quasi-największej wiarygodności przedstawia rysunek 5, diagram diagnostyczny dla iterowanej filtracji przedstawia rysunek 6.

Tablica 2. Wyniki estymacji parametrów filtrem Kalman (metoda quasi-największej wiarygodności) i filtrem cząsteczkowym (iterowana filtracja) z 1000 cząsteczek.

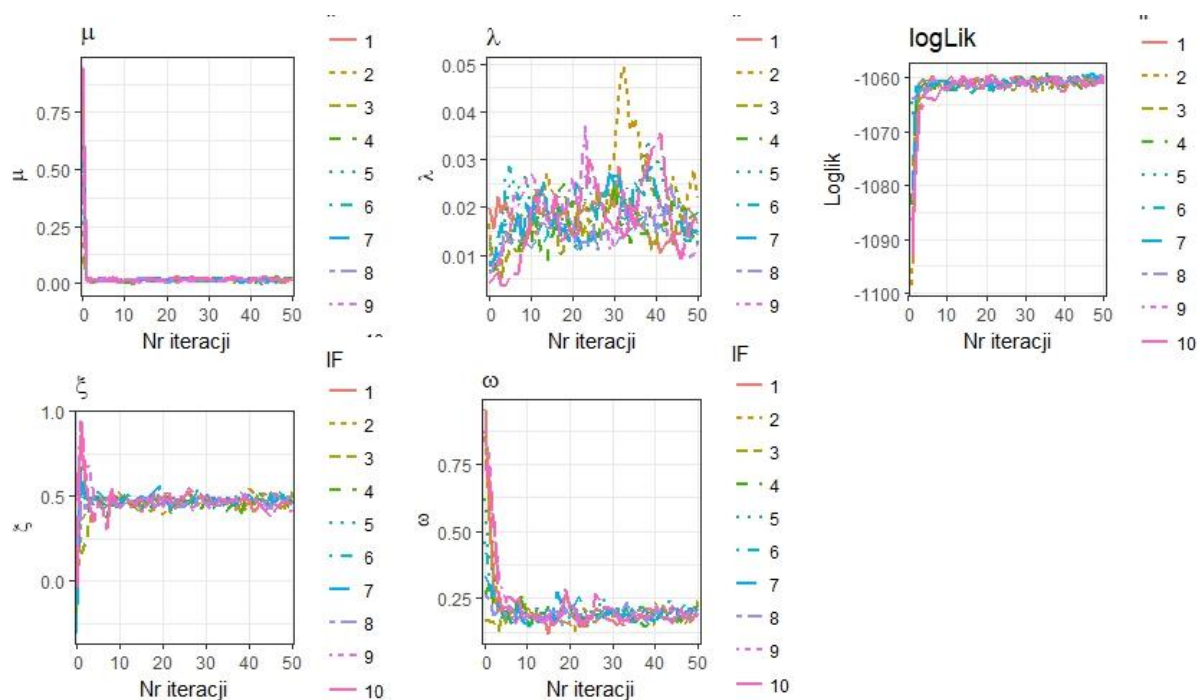
	$\mu=0$	$\lambda=0,01$	$\xi=0,5$	$\omega=0,2$
Filtr Kalmana (metoda quasi-największej wiarygodności)	0,01730	0,02653	0,51356	0,22645
Filtr cząsteczkowy (iterowana filtracja)	0,01264	0,01518	0,48231	0,20501

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 5. Profile funkcji wiarygodności wyznaczone za pomocą filtru Kalmana (kolor niebieski). Czarna linia odpowiada oszacowanej wartości parametru, natomiast linia czerwona prawdziwej wartości parametru.

Źródło: opracowanie własne.

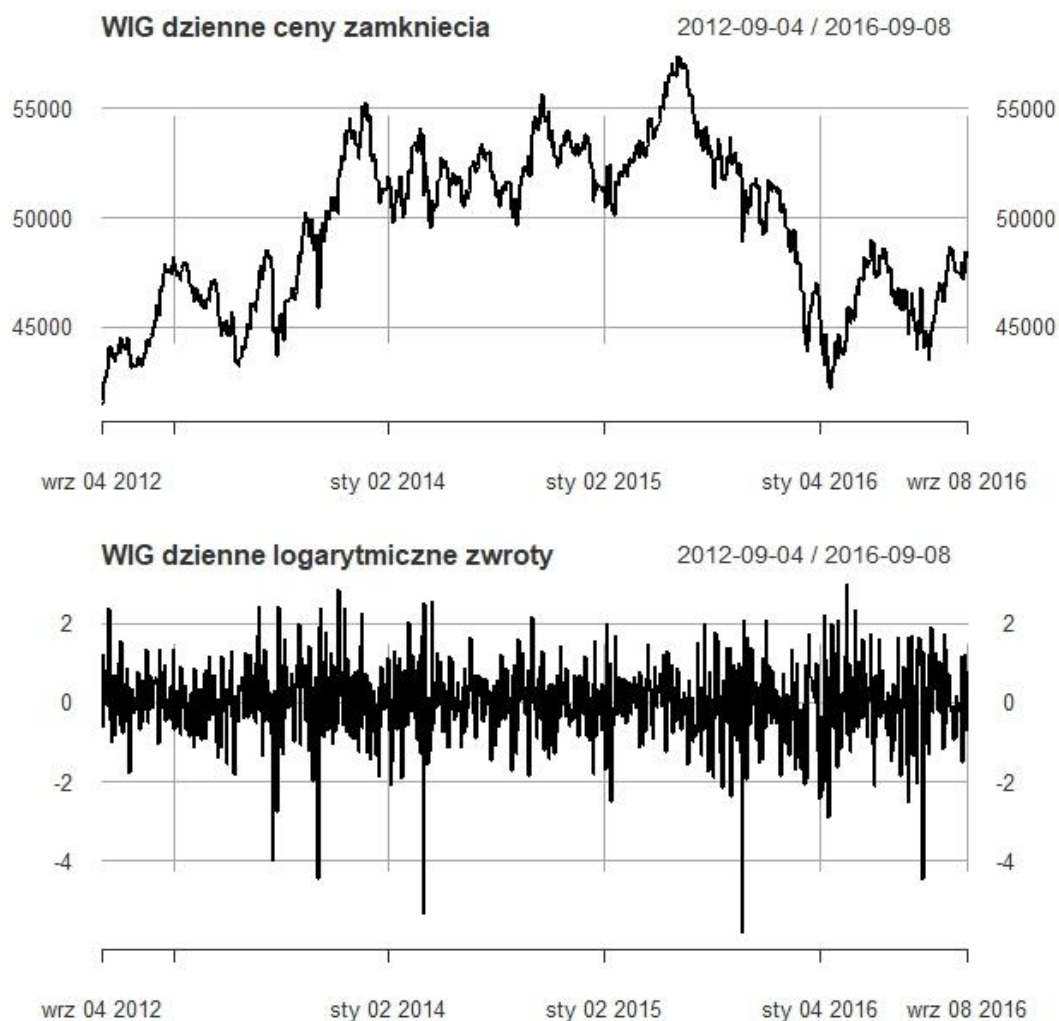


Rysunek 6. Diagram diagnostyczny dla metody iterowanej filtracji.

Źródło: opracowanie własne.

V. Przykład empiryczny

Następnie dokonałem estymacji modelu stochastycznej zmienności dla danych empirycznych – wartości indeksu WIG. Dane dzienne pochodzą z okresu 4.09.2012-08.09.2016 (1000 obserwacji). Wykres kursu oraz logarytmiczne stopy zwrotu przemnożone przez 100 przedstawia rysunek 7. Otrzymane oszacowania parametrów przedstawia tablica 3. Profile funkcji wiarygodności dla metody quasi-największej wiarygodności przedstawia rysunek 8, diagram diagnostyczny dla iterowanej filtracji przedstawia rysunek 9. Na rysunku 10 porównałem parami oszacowania ukrytego procesu zmienności dla modelu stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsena i Sheparda oszacowane filtrem Kalmana i iterowaną filtracją z oszacowaniem uzyskanym z klasycznego modelu stochastycznej zmienności oszacowanego metodą iterowanej filtracji.



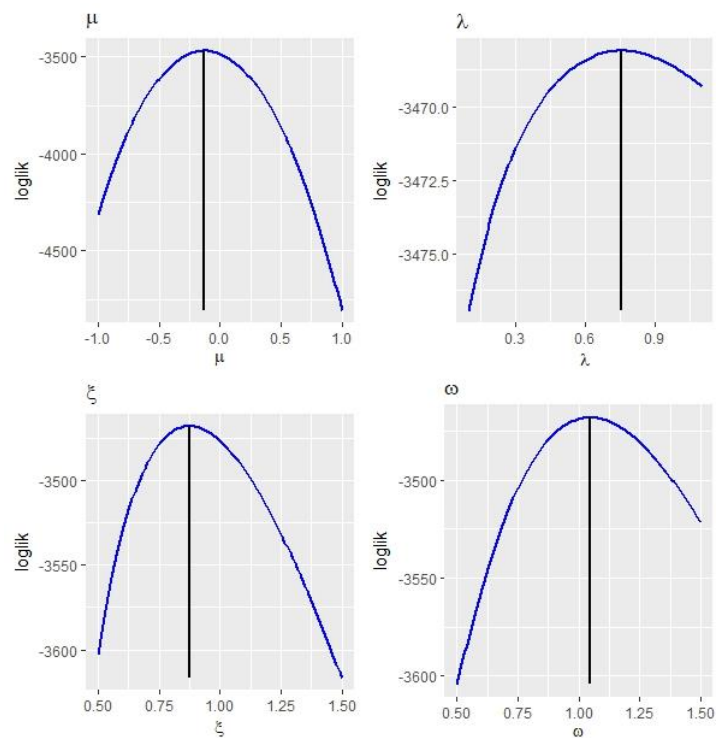
Rysunek 7. Wykres kursu oraz logarytmiczne stopy zwrotu przemnożone przez 100 indeksu WIG w okresie 4.09.2012-08.09.2016.

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 3. Wyniki estymacji parametrów filtrem Kalman (metoda quasi-największej wiarygodności) i filtrem cząsteczkowym (iterowana filtracja) z 1000 cząsteczek.

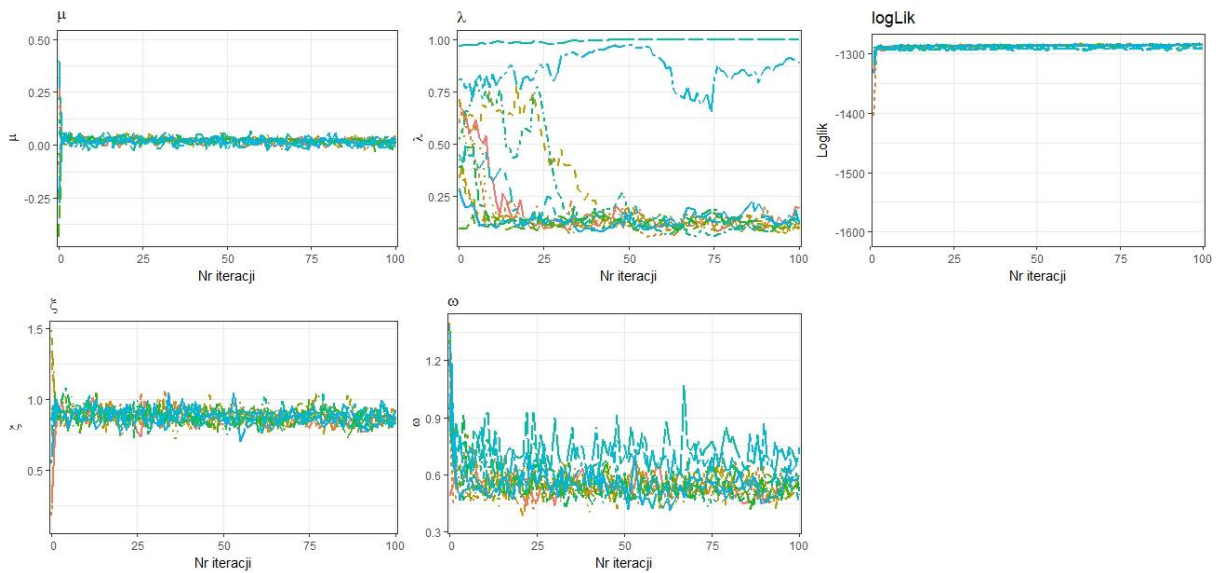
	μ	λ	ξ	ω
Filtr Kalmana (metoda quasi-największej wiarygodności)	-0,12573	0,75653	0,87462	1,04461
Filtr cząsteczkowy (iterowana filtracja)	0,02323	0,12875	0,12875	0,51031

Źródło: opracowanie własne.



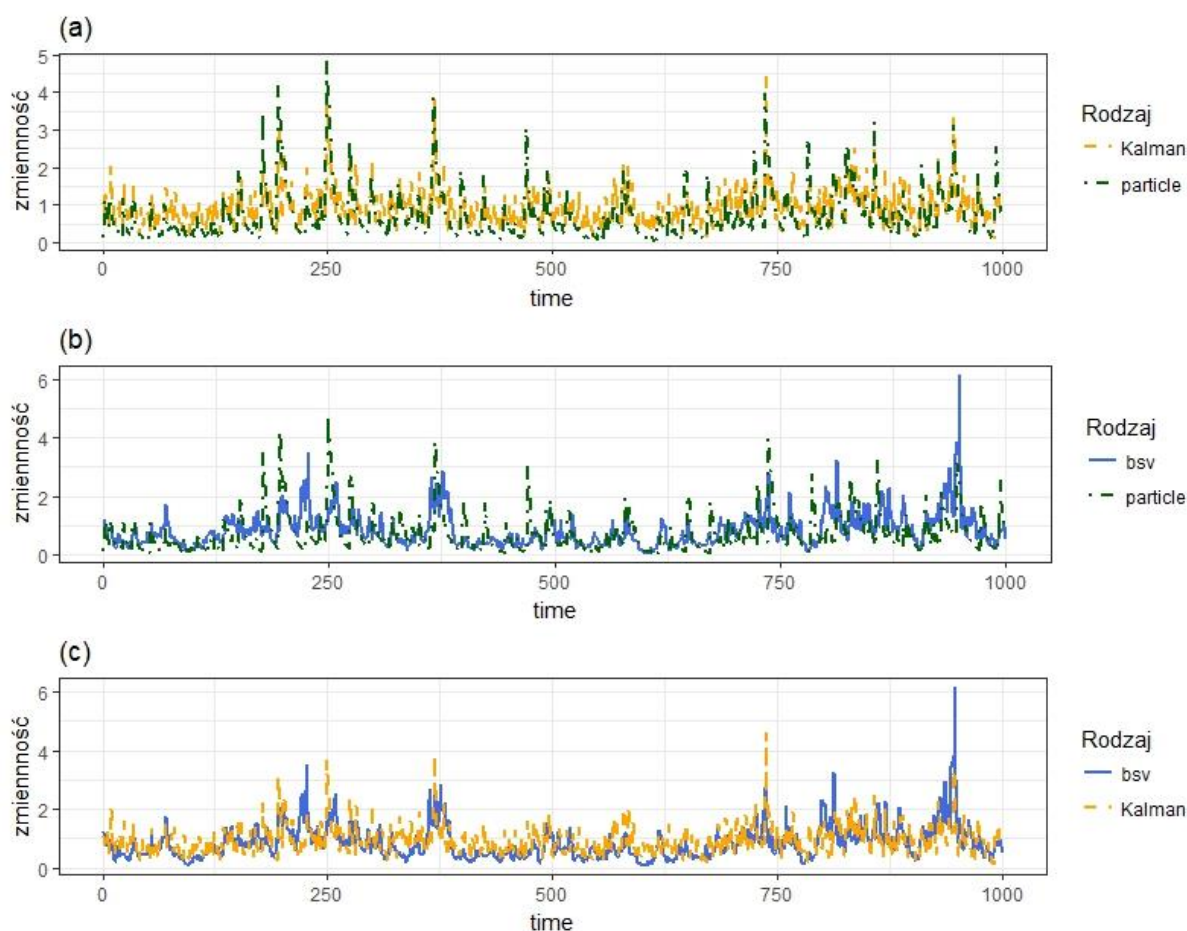
Rysunek 8. Profile funkcji wiarygodności wyznaczone za pomocą filtru Kalmana (kolor niebieski). Czarna linia odpowiada oszacowanej wartości parametru.

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 9. Diagram diagnostyczny dla metody iterowanej filtracji.

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 10. Porównanie oszacowania ukrytego procesu zmienności:

- (a) dla modelu stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsen i Sheparda oszacowanego filtrem Kalmana (*Kalman*) i iterowaną filtracją (*particle*),
- (b) dla modelu stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsen i Sheparda oszacowanego iterowaną filtracją (*particle*) oraz klasycznego modelu stochastycznej zmienności oszacowanego metodą iterowanej filtracji (*bsv*),
- (c) dla modelu stochastycznej zmienności Barndorff-Nielsen i Sheparda oszacowanego filtrem Kalmana (*Kalman*) oraz klasycznego modelu stochastycznej zmienności oszacowanego metodą iterowanej filtracji (*bsv*).

Pierwiastki błędu średniokwadratowego wynoszą odpowiednio: 0,4756553, 0,6648258, 0,568282.

Źródło: opracowanie własne.