

# 凯哥不定积分笔记——3 分部积分与换元

---

## 套路集合：

- 套路1：使用换元法打开局面
- 套路2：利用分部积分，对分母进行降阶
- 套路3：分部积分，分到积分再现
  - 有些积分题，需要把一个积分拆成两个积分的和，其中一个  $I_1$  不动，另一个使用分部积分，使得分部之后得到的新积分和  $I_1$  抵消。
  - $[e^x f(x)]' = e^x [f(x) + f'(x)]$
- 套路 4：形如

$$\int \frac{dx}{(x+d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

或

$$\int \frac{dx}{(x+d)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

的积分，可以用倒代换  $x+d = \frac{1}{t}$ .

- 分部积分的口诀：“反对幂三指”  
谁在后面，就把谁凑到 d 里面去。

如

$$\int x e^x dx$$

故这里要把  $e^x$  凑到 d 里去。

即

$$\int x e^x dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x dx$$

---

## 题目列表：

1.

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$$

2.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$$

3.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

4.

$$\int \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) dx$$

5.

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} dx$$

6.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} dx$$

7.

$$\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x}) \cdot \sqrt{x}} dx$$

8.

$$\int \frac{1}{1 + \exp \frac{x}{2} + \exp \frac{x}{3} + \exp \frac{x}{6}} dx$$

9.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx$$

10.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$$

11.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} dx$$

12.

$$\int x \sqrt{2x-x^2} dx$$

13.

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$$

14.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}dx$$

15.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

16.

$$\int x \arctan x dx$$

17.

$$\int x \ln(1+x^2) \arctan x dx$$

18.

$$\int e^x \sin x dx$$

19.

$$\int x e^x \sin x dx$$

20.

$$\int \ln^2 \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) dx$$

21.

$$\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x-1} dx$$

22.

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

23.

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{x}{2}}} dx$$

24.

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

25.

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}} dx$$

26.

$$\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx$$

27.

$$\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx$$

28.

$$\int \arctan(1 + \sqrt{x}) dx$$

29.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

30.

$$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$$

31.

$$\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$$

32.

$$\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

33.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} dx$$

34.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$$

35.

$$\int e^x \left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx$$

36.

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx$$

37.

$$\int \frac{e^{-\sin x} \cdot \sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx$$

38.

$$\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

39.

$$\int e^{\sin x} \cdot \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^3 x} dx$$

40.

$$\int \left( \ln \ln x + \frac{1}{\ln x} \right) dx$$

41.

已知  $f''(x)$  连续,  $f'(x) \neq 0$ . 求

$$\int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3} \right] dx$$

42.

$$\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$$

## 一些要记的

1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

2.

$$f(x) := \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

是奇函数。

3.

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x, x \rightarrow 0$$