

凯哥不定积分笔记——2 三角函数

套路集合

- 套路1: 万能代换

令 $t = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

-
- 套路2: 缩分母

- 共轭表达式:

对于分母为 $1 + \cos x$ 或 $1 + \sin x$ 的, 分式上下同乘 $1 - \cos x$ 或 $1 - \sin x$

- 倍角公式
 - 辅助角公式
-

- 套路3: 凑偶次方

如果被积函数 $R(\sin x, \cos x)$ 满足 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 或 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. 这里把前者称为对 $\cos x$ 有“奇性”, 后者为对 $\sin x$ 有“奇性”。

做法是, 对 $\cos x$ 有奇性时凑 $d \sin x$; 对 $\sin x$ 有奇性时凑 $d \cos x$.

- 套路4: 凑 $d \tan x$

如果被积函数满足 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 考虑凑 $d \tan x$.

- 套路5:

形如

$$\int \frac{A \sin x + B \cos x}{C \sin x + D \cos x} dx$$

的积分，可以通过假设

$$\text{分子} = p \cdot \text{分母} + q \cdot (\text{分母})'$$

然后使用待定系数解出 p, q ，从而化简积分。

- 套路6：统一角度

当被积函数出现不同角度，先统一角度。

- 套路7：积化和差公式

形如

$$\int \sin ax \sin bx dx, (a \neq b)$$

的积分，可以使用积化和差公式化简积分。

积化和差公式，立即推！

由和角公式有

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & (1) \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & (2) \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & (3) \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & (4) \end{cases}$$

那么得

$$\begin{cases} (1) + (2) : \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] = \sin a \cos b \\ (3) + (4) : \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] = \cos a \cos b \\ (4) - (3) : \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] = \sin a \sin b \end{cases}$$

题目列表：

1.

$$\int \frac{1}{3 + 5 \cos x} dx$$

2.

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

3.

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

4.

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

5.

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

6.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

7.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$$

8.

$$\int \frac{\cos^3 x - 2 \cos x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} dx$$

9.

$$\int \sec^3 x dx$$

10.

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx$$

11.

$$\int \sec^5 x dx$$

12.

$$\int \sec^n x dx$$

13.

$$\int \tan^n x dx$$

14.

$$\int \csc^n x dx$$

15.

$$\int \cot^n x dx$$

16.

$$\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx$$

17.

$$\int \frac{5 + 4 \cos x}{(2 + \cos x)^2 \sin x} dx$$

18.

$$\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

19.

$$\int \frac{1}{(3 \sin x + 2 \cos x)^2} dx$$

20.

$$\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

21.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

22.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

23.

$$\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

24.

$$\int \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$$

25.

$$\int \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx$$

26.

$$\int \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x} dx$$

27.

$$\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

28.

$$\int \sin 2x \sin 3x dx$$

29.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

30.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

31.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

32.

$$\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

33.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

解答之：