

凯哥不定积分笔记——2 三角函数

套路集合

- 套路1: 万能代换

令 $t = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \\ &= \frac{2t}{t^2 + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\end{aligned}$$

- 套路2: 缩分母

- 共轭表达式:

对于分母为 $1 + \cos x$ 或 $1 + \sin x$ 的, 分式上下同乘 $1 - \cos x$ 或 $1 - \sin x$

- 倍角公式
- 辅助角公式

- 套路3: 凑偶次方

如果被积函数 $R(\sin x, \cos x)$ 满足 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ 或 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. 这里把前者称为对 $\cos x$ 有“奇性”, 后者为对 $\sin x$ 有“奇性”。

做法是, 对 $\cos x$ 有奇性时凑 $d \sin x$; 对 $\sin x$ 有奇性时凑 $d \cos x$.

- 套路4: 凑 $d \tan x$

如果被积函数满足 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 考虑凑 $d \tan x$.

- 套路5:

形如

$$\int \frac{A \sin x + B \cos x}{C \sin x + D \cos x} dx$$

的积分，可以通过假设

$$\text{分子} = p \cdot \text{分母} + q \cdot (\text{分母})'$$

然后使用待定系数解出 p, q ，从而化简积分。

-
- 套路6：统一角度

当被积函数出现不同角度，先统一角度。

-
- 套路7：积化和差公式

形如

$$\int \sin ax \sin bx dx, (a \neq b)$$

的积分，可以使用积化和差公式化简积分。

积化和差公式，立即推！

由和角公式有

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & (1) \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & (2) \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & (3) \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & (4) \end{cases}$$

那么得

$$\begin{cases} (1) + (2) : \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] = \sin a \cos b \\ (3) + (4) : \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] = \cos a \cos b \\ (4) - (3) : \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = \sin a \sin b \end{cases}$$

题目列表：

1.

$$\int \frac{1}{3 + 5 \cos x} dx$$

2.

$$\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

3.

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

4.

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

5.

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

6.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

7.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx$$

8.

$$\int \frac{\cos^3 x - 2 \cos x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} dx$$

9.

$$\int \sec^3 x dx$$

10.

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx$$

11.

$$\int \sec^5 x dx$$

12.

$$\int \sec^n x dx$$

13.

$$\int \tan^n x dx$$

14.

$$\int \csc^n x dx$$

15.

$$\int \cot^n x dx$$

16.

$$\int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx$$

17.

$$\int \frac{5 + 4 \cos x}{(2 + \cos x)^2 \sin x} dx$$

18.

$$\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

19.

$$\int \frac{1}{(3 \sin x + 2 \cos x)^2} dx$$

20.

$$\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$$

21.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

22.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

23.

$$\int \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

24.

$$\int \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$$

25.

$$\int \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx$$

26.

$$\int \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x} dx$$

27.

$$\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

28.

$$\int \sin 2x \sin 3x dx$$

29.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

30.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x} dx$$

31.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

32.

$$\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$$

33.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

解答之：

1.

令 $t = \tan \frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{1}{3+5\cos x} dx \\ &= \int \frac{1}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{4-t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\int \frac{dt}{2-t} + \int \frac{dt}{2+t} \right] \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\tan \frac{x}{2}}{2-\tan \frac{x}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln |1+t| + C \\ &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

3.

因

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

故

$$\begin{aligned} I &:= \int \frac{1}{1+\cos x} dx \\ &= \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx \\ &= \tan \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{\sin x + 1 - 1}{1 + \sin x} dx \\
 &= x - \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \\
 &= x - \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx \\
 &= x - \tan x - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} \\
 &= x - \tan x + \sec x + C
 \end{aligned}$$

5.

有公式

$$\int \csc x dx = \ln |\cot x - \csc x| + C \quad (1)$$

那么

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int \frac{d(x + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})} \\
 &= \int \frac{d(x + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|
 \end{aligned}$$

6.

法1: 共轭

又有公式

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int \frac{\cos x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \\
 &= \int \frac{\cos^2 x - \sin x \cos x}{\cos 2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2x + 1}{\cos 2x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C
 \end{aligned}$$

法2: 组合积分法

$$\begin{aligned}
 I &:= \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\
 J &:= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx
 \end{aligned}$$

那么,

$$\begin{aligned}I + J &= x + C \\ I - J &= \ln |\sin x + \cos x| + C\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}I &:= \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}[(I + J) + (I - J)] \\ &= \frac{1}{2}x + \ln |\sin x + \cos x| + C\end{aligned}$$

7.

公式证明:

$$\int \csc x dx = \ln |\cot x - \csc x| + C \quad (1)$$

证明:

这是一个对 $\sin x$ 有奇性的积分。

$$\begin{aligned}I &:= \int \csc x dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= - \int \frac{1}{1 - \cos^2 x} d \cos x \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\cos x - 1)^2}{\cos^2 x - 1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\sin x} \right| + C \\ &= \ln |\cot x - \csc x| + C\end{aligned}$$

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C \quad (2)$$

证明:

这是一个对 $\cos x$ 有奇性的积分。

$$\begin{aligned}
I &:= \int \sec x dx \\
&= \int \frac{d \sin x}{\cos^2 x} \\
&= \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| + C \\
&= \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \\
&= \ln |\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$