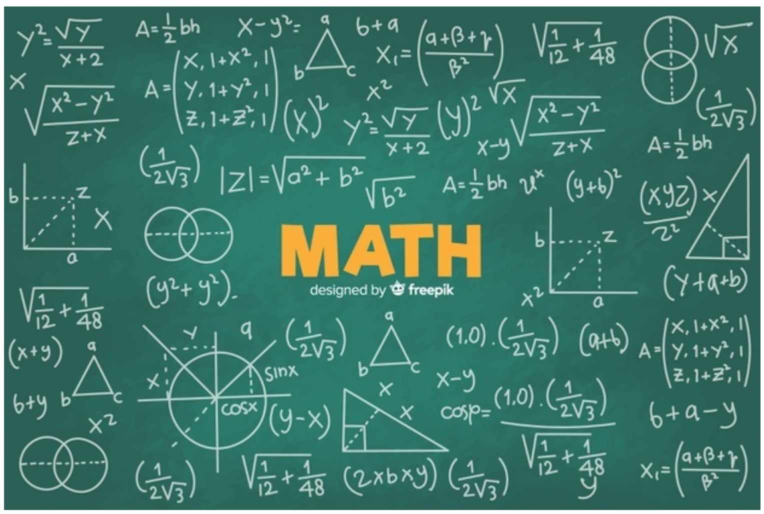
Nombre de descentes et de pics dans une permutation aléatoire



Mariette DUPUY, Clément GUERIN,

Maxime LABORDE, Mariama DIALLO

Enseignant : Bernard BERCU

Discipline : Algorithmes stochastiques

Table des matières

1 Introduction

Soit S_n l'ensemble des permutations des n premiers entiers avec $n \geq 1$. On dit qu'une permutation π de S_n a une descente à la position k si $\pi(k+1) < \pi(k)$.

On note D_n la variable aléatoire comptant le nombre de descentes d'une permutation choisie aléatoirement dans S_n. Il est clair que $D_1 = 0$ et $\mathbb{P}(D_2 = 0) = \mathbb{P}(D_2 = 1) = 1/2$.

On s'intéresse au comportement asymptotique de la suite (D_n). On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(D_1, ..., D_n)$ et $p_n = \frac{n-Dn}{n+1}$.

2 Nombre de descentes à l'étape n+1

Tout d'abord , nous nous sommes intéressés aux probabilités conditionnelles de D_{n+1} sachant D_n. Dans le but de connaître la probabilité d'avoir une descente de plus à l'étape n+1.

$$\begin{cases} \mathbb{P}(D_{n+1} = D_n + 1 | D_n) = \frac{n-D_n}{n+1} \\ \mathbb{P}(D_{n+1} = D_n | D_n) = \frac{D_n+1}{n+1} \end{cases}$$

2.1 Preuve de la première égalité

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = D_n + 1 | D_n) = \frac{n-Dn}{n+1}$$

A l'instant n nous avons k descentes avec k $\in [\![0, n-1]\!]$. A l'instant n+1 si le n plus unième élément est rajouté entre deux éléments a et b tels que $(a < b)$ composants une montée c'est à dire $\pi(a) < \pi(b)$, alors nous avons $k+1$ descentes à l'étape $n+1$. En effet rajouter un élement dans une montée a pour effet de créer après cet élement, qui est le plus grand de l'ensemble, une descente. De plus, si le nouvel élément est ajouté au tout début de la permutation, cela a aussi pour effet de rajouter une descente. La probabilité que le n plus unième élément soit rajouté dans une des (n-k-1) montées ou au début est égale à :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}} = \frac{\text{n-k}}{\text{n+1}} = \frac{n-D_n}{\text{n+1}}$$

Nous avons bien démontré la première égalité.

2.2 Preuve de la deuxième égalité

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = D_n | D_n) = \frac{D_{n+1}}{n+1}$$

A l'instant n on a k qui représente le nombre descentes avec k $\in [\![0, n-1]\!]$. A l'instant n+1, si le n plus unième élément est rajouté entre deux éléments a et b tels que $(a < b)$ composants une descente c'est-a-dire $\pi(a) > \pi(b)$. Alors à l'étape $n+1$, il y a k descentes. De plus si le nouvel élément est rajouté à la fin de la permutation, cela a aussi pour effet de ne pas rajouter de descentes.

La probabilité que le n plus unième élément soit rajouté dans une des k descentes, ou à la fin de la permutation est égale à :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}} = \frac{\text{k+1}}{\text{n+1}} = \frac{D_n+1}{n+1}$$

Nous avons bien démontré la deuxième égalité.

3 Calculs des espérances conditionnelles

3.1 Espérance de D_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$

Nous pouvons dire que le nombre de descentes de D_{n+1} est représenté par le nombre de descentes à l'étape n : D_n auquel nous ajoutons 1 ou 0 suivant si une descente a été rajoutée ou non. Nous pouvons représenter ce nombre par la variable ϵ_{n+1}.

Nous pouvons ainsi dire que $\mathcal{L}(\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathcal{B}(p_n)$. Ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}|F_n) = \mathbb{E}(D_n + \epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

Or D_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable donc nous pouvons le sortir de l'espérance ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) = D_n + \mathbb{E}(\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

Une Bernouilli de paramètre p_n, possède une espérance égale à p_n.

$$\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) = D_n + p_n$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) = D_n + \tfrac{n-D_n}{n+1}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \tfrac{D_n(n+1)}{n+1} + \tfrac{n-D_n}{n+1}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \tfrac{n(D_n+1)}{n+1}$$

3.2 Espérance de D_{n+1}^2 sachant $\mathcal{F}_n$

Précédemment, nous avons observé que :

$$D_{n+1} = D_n + \epsilon_{n+1}$$
$$\Longrightarrow$$
$$D_{n+1}^2 = (D_n + \epsilon_{n+1})^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$D_{n+1}^2 = D_n^2 + 2D_n\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n+1}^2$$

En revenant au calcul de l'espérance nous obtenons donc que :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(D_n^2 + 2D_n\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$$

Par linéarité de l'espérance, nous pouvons écrire que :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(D_n^2|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(2D_n\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(\epsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$$

Or D_n^2 et D_n sont $\mathcal{F}_n$ mesurables donc nous pouvons les sortir de l'espérance. Ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = D_n^2 + 2D_n\mathbb{E}(\epsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(\epsilon_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$$

D'après les questions précédentes nous avons vu que la loi de ϵ_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est une Bernouilli de paramètre p_n. L'espérance de ϵ_{n+1}^2 sachant $\mathcal{F}_n$ est identique à l'espérance de ϵ_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$. Nous obtenons donc l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = D_n^2 + 2D_np_n + p_n$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = D_n^2 + p_n(2D_n + 1)$$

En développant p_n :

$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = D_n^2 + \tfrac{n-D_n}{n+1}(2D_n + 1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = D_n^2 + \tfrac{1}{n+1}(2nD_n + n - 2D_n^2 - D_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \tfrac{1}{n+1}((n+1)D_n^2 + 2nD_n + n - 2D_n^2 - D_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \tfrac{1}{n+1}((n-1)D_n^2 + (2n-1)D_n + n)$$

4 Calculs des espérances et de la variance de D_n

4.1 Calcul de $\mathbb{E}(D_n) = \frac{n-1}{2}$

Nous avons vu précédemment que $\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) = D_n + p_n$

Donc,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(D_n + p_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = \mathbb{E}(D_n) + \mathbb{E}(p_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = \mathbb{E}(D_n) + \tfrac{n}{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\mathbb{E}(D_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}) = \tfrac{n}{n+1} + \tfrac{n}{n+1}\mathbb{E}(D_n)$$

En posant $d_n = \mathbb{E}(D_n)$, on obtient :

$$d_{n+1} = \tfrac{n}{n+1} + \tfrac{n}{n+1}d_n$$

qui est une relation de récurrence du premier ordre avec $g_n = \frac{n}{n+1}$ et $f_n = \frac{n}{n+1}$.

Pour la résoudre nous allons utiliser la formule suivante :

$$d_n = d_1 \textstyle\prod_{i=1}^{n-1} g_i + \sum_{k=1}^{n-1}[f_k \prod_{i=k+1}^{n-1} g_i]$$

En sachant que d_1=0, le membre à gauche du signe '+' vaut 0. Ensuite,

$$\textstyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

De plus, nous avons que :

$$\textstyle\prod_{i=1}^{n-1} g_i = \prod_{i=1}^{k} g_i \prod_{i=k+1}^{n-1} g_i$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\textstyle\prod_{i=k+1}^{n-1} g_i = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} g_i}{\prod_{i=1}^{k} g_i} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{n}$$

Ce qui donne donc ,

$$d_n = 0 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1}[\frac{k}{k+1}\frac{k+1}{n}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Nous venons donc de démontrer que

$$\mathbb{E}(D_n) = \tfrac{n-1}{2}$$

Passons maintenant à la seconde espérance.

4.2 Calcul de $\mathbb{E}(D_n^2) = \frac{1}{12}(3n^2 - 5n + 4)$

Nous repartons du même processus.

$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \tfrac{1}{n+1}((n-1)D_n^2 + (2n-1)D_n + n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(D_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)) = \tfrac{1}{n+1}\mathbb{E}((n-1)D_n^2 + (2n-1)D_n + n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2) = \tfrac{1}{n+1}[\mathbb{E}(D_n^2)(n-1) + \mathbb{E}(D_n)(2n-1) + n]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathbb{E}(D_{n+1}^2) = \tfrac{1}{n+1}[\mathbb{E}(D_n^2)(n-1) + \tfrac{n-1}{2}(2n-1) + n] = \mathbb{E}(D_n^2)\tfrac{n-1}{n+1} + \tfrac{(n-1)(2n-1)+2n}{2(n+1)} = \mathbb{E}(D_n^2)\tfrac{n-1}{n+1} + \tfrac{2n^2-n+1}{2n+2}$$

Nous pouvons noter alors $g_n = \frac{n-1}{n+1}$ et $f_n = \frac{2n^2-n+1}{2n+2}$ et ainsi nous pouvons utiliser la formule suivante pour résoudre notre problème :

$$\mathbb{E}(D_n^2) = \textstyle\prod_{i=2}^{n-1} g_i \underbrace{(\mathbb{E}(D_2^2) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{i=2}^{k} g_i})}_{A}$$

Nous commençons les produits de g_i à k=2 sinon $g_1 = 0$. De plus,

$$\textstyle\prod_{k=2}^{n} g_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{(n-1)!}{\frac{(n+1)!}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

Nous avons aussi,

$$\frac{f_k}{\frac{2}{k(k+1)}} = \frac{2k^2-k+1}{2k+2}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{(2k^2-k+1)k(k+1)}{4(k+1)} = \frac{2k^3-k^2+k}{4}$$

Analysons (A) maintenant, il s'avère qu'en évaluant $\frac{2k^3-k^2+k}{4}$ en k=1 nous trouvons $\frac{1}{2}$ or $\mathbb{E}(D_2^2) = \frac{1}{2}$.

Ce qui signifie que,

$$\mathbb{E}(D_2^2) + \textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2k^3-k^2+k}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^3-k^2+k}{4}$$

Il suffit donc maintenant de calculer :

$$\mathbb{E}(D_n^2) = \tfrac{2}{n(n-1)} \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^3-k^2+k}{4}$$

Nous allons calculer les différentes sommes :

- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}k^3 = \frac{1}{2}(\frac{(n-1)n}{2})^2 = \frac{1}{8}(n-1)^2n^2$
- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}k = \frac{1}{4}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{8}$

Ce qui nous donne :

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k^3-k^2+k}{4} = \frac{(n-1)^2n^2}{8} - \frac{1}{24}(n-1)n(2n-1) + \frac{n(n-1)}{8} = \frac{(n-1)n}{8}((n-1)n - \frac{2n-1}{3} + 1) = \frac{(n-1)n}{8}(\frac{3(n-1)n-2n+1+3}{3}) = \frac{(n-1)n}{8}(\frac{3n^2-5n+4}{3})$

Ce qui donne,

$$\mathbb{E}(D_n^2) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n}{8} \frac{3n^2-5n+4}{3} = \frac{1}{12}(3n^2 - 5n + 4)$$

Passons maintenant à la partie sur la variance de D_n.

4.3 Calcul de $\mathbb{V}(D_n) = \frac{n+1}{12}$

Sachant que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

$$\mathbb{V}(D_n) = \frac{1}{12}(3n^2 - 5n + 4) - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{1}{12}(3n^2 - 5n + 4) - \frac{3(n-1)^2}{12} = \frac{3n^2-5n+4-3(n^2-2n+1)}{12} = \frac{n+1}{12}$$

5 La martingale M_n

Soit M_n une suite définie , pour tout $n \geq 1$, par :

$$M_n = n(D_n - \tfrac{(n-1)}{2})$$

La suite M_n est une martingale si elle vérifie les trois propriétés d'une martingale qui sont : adaptabilité , intégrabilité et enfin la propriété de martingale.

5.1 Adaptabilité

D_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable, de plus M_n est une fonction continue. Donc M_n est $\mathcal{F}_n$ adaptée.

5.2 Intégrabilité

Le nombre de descentes D_n est compris entre 0 et $n-1$.

Nous avons donc que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$M_n = n(D_n - \tfrac{(n-1)}{2}) < n(n - \tfrac{(n-1)}{2})$$

or

$$n(n - \tfrac{(n-1)}{2}) = n(\tfrac{2n-n+1)}{2}) = n(\tfrac{n+1)}{2}) < +\infty$$

Alors :

$$\mathbb{E}(|M_n|) < \mathbb{E}(n(\tfrac{(n+1)}{2})) = n(\tfrac{(n+1)}{2})$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(|M_n|) < +\infty$$

La suite M_n est donc intégrable. Nous pouvons également aller plus loin en montrant qu'elle est de carré intégrable c'est-à-dire que :

$$\mathbb{E}(|M_n|^2) < +\infty$$

Nous avons déjà montré que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$M_n = n(D_n - \tfrac{(n-1)}{2}) < n(\tfrac{(n+1)}{2})$$

$$\Rightarrow$$

$$M_n^2 = (n(D_n - \tfrac{(n-1)}{2}))^2 < (n(\tfrac{n+1)}{2}))^2 < +\infty$$

Alors :

$$\mathbb{E}(|M_n|^2) < \mathbb{E}((n(\tfrac{n+1)}{2}))^2) = (n(\tfrac{n+1)}{2})^2$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(|M_n|^2) < +\infty$$

Nous concluons donc que M_n est de carré intégrable $\forall n \in \mathbb{N}$.

5.3 Propriété de martingale

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((n+1)(D_{n+1} - \tfrac{n}{2})|\mathcal{F}_n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((n+1)D_{n+1} - (n+1)\tfrac{n}{2})|\mathcal{F}_n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = (n+1)\mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) - (n+1)\tfrac{n}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = (n+1)(D_n + p_n) - (n+1)\tfrac{n}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = (n+1)(D_n + \tfrac{n-D_n}{n+1}) - (n+1)\tfrac{n}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = (n+1)D_n + n - D_n - (n+1)\tfrac{n}{2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$$

5.4 Inégalités liées à $|M_n - M_{n-1}|$ et $|M_n|$

Tout d'abord nous allons nous intéresser à $|M_n - M_{n-1}|$:

$$|M_n - M_{n-1}| = |n(D_n - \tfrac{n-1}{2}) - (n-1)(D_{n-1} - \tfrac{n-2}{2})|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|M_n - M_{n-1}| = |n(D_{n-1} + \epsilon_n - \tfrac{n-1}{2}) - (n-1)(D_{n-1} - \tfrac{n-2}{2})|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|M_n - M_{n-1}| = |nD_{n-1} + n\epsilon_n - n\tfrac{n-1}{2} - (n-1)D_{n-1} + (n-1)\tfrac{n-2}{2}|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|M_n - M_{n-1}| = |D_{n-1} + n\epsilon_n - \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{2} + \tfrac{n^2}{2} - n - \tfrac{n}{2} + 1|$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|M_n - M_{n-1}| = |D_{n-1} + n\epsilon_n - n + 1|$$

Or :

$$|D_{n-1} + n\epsilon_n - n + 1| \leq (n-2) + n - n + 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|D_{n-1} + n\epsilon_n - n + 1| \leq (n-1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|M_n - M_{n-1}| \leq (n-1)$$

En ce qui concerne $|M_n|$:

$$|M_n| = |n(D_n - \tfrac{n-1}{2})| \leq n((n-1) - \tfrac{n-1}{2})$$

$$\iff$$

$$|M_n| \leq n(\tfrac{n-1}{2})$$

$$\iff$$

$$|M_n| \leq \tfrac{n(n-1)}{2}$$

6 Processus croissant de M_n

Dans cette partie, nous souhaitons montrer que le processus croissant est donné par :

$$< M >_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k - D_k)(D_k + 1)$$

Or nous avons que :

$$M_{k+1} - M_k = (k+1)(D_{k+1} - \frac{k}{2}) - k(D_k - \frac{k-1}{2}) = kD_{k+1} - \frac{k^2}{2} + D_{k+1} - \frac{k}{2} - kD_k + \frac{k^2-k}{2}$$

or comme $D_{k+1} = D_k + \epsilon_{k+1}$ nous avons :

$$M_{k+1} - M_k = kD_k + k\epsilon_{k+1} - \frac{k^2}{2} + D_k + \epsilon_{k+1} - \frac{k}{2} - kD_k + \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} = (k+1)\epsilon_{k+1} + D_k - k$$

par la suite nous avons que :

$$(M_{k+1} - M_k)^2 = (k+1)^2 \epsilon_{k+1}^2 + 2D_k(k+1)\epsilon_{k+1} - 2k(k+1)\epsilon_{k+1} - 2kD_k + D_k^2 + k^2$$

et donc comme nous avons que D_k est $\mathcal{F}_k$ mesurable :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k) &= (k+1)^2 \mathbb{E}(\epsilon_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k) + 2D_k(k+1)\mathbb{E}(\epsilon_{k+1} | \mathcal{F}_k) - 2k(k+1)\mathbb{E}(\epsilon_{k+1} | \mathcal{F}_k) - 2kD_k + D_k^2 + k^2 \\
&= (k+1)^2 p_k + 2(k+1)D_k p_k - 2k(k+1)p_k - 2kD_k + D_k^2 + k^2
\end{aligned}$$

or $p_k = \frac{k-D_k}{k+1}$

$$\begin{aligned}
&= (k+1)^2 (\frac{k-D_k}{k+1}) + 2(k+1)D_k(\frac{k-D_k}{k+1}) - 2k(k+1)(\frac{k-D_k}{k+1}) - 2kD_k + D_k^2 + k^2 \\
&= (k+1)(k-D_k) + 2D_k(k-D_k) - 2k(k-D_k) - 2kD_k + D_k^2 + k^2 \\
&= k^2 - kD_k + k - D_k + 2kD_k - 2D_k^2 - 2k^2 + 2kD_k - 2kDk + D_k^2 + k^2 \\
&= -D_k^2 + kD_k - D_k + k \\
&= (k - D_k)(D_k + 1)
\end{aligned}$$

en conclusion nous avons :

$$< M >_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}((M_{k+1} - M_k)^2 | \mathcal{F}_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k - D_k)(D_k + 1)$$

7 Calcul de la limite de $\frac{D_n}{n}$

Nous avons vu précédemment que :

$$< M >_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k - D_k)(D_k + 1)$$

Or : $0 \leq D_k \leq k - 1 \Longleftrightarrow 1 \leq D_k + 1 \leq k$

Donc :

$$0 \geq -D_k \geq -k + 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$k \geq k - D_k \geq 1$$

Par conséquent :

$$1 \leq (k - D_k)(D_k + 1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 \leq \sum_{k=0}^{n-1}(k - D_k)(D_k + 1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$n \leq \sum_{k=0}^{n-1}(k - D_k)(D_k + 1)$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{n \to +\infty} < M >_n = +\infty$$

Il est donc possible d'appliquer la seconde loi des grands nombres concernant les martingales i.e :

$$\frac{M_n^2}{<M>_n} = o((log < M >_n)^{1+\gamma} \text{ p.s avec } \gamma > 0$$

Or dans la partie suivante nous montrerons que $< M >_n = o(n^3)$

Donc :

$$M_n^2 = o(n^3 log(n)^{1+\gamma}) \text{ p.s}$$

Or :

$$n^3 log(n)^{1+\gamma} \leq n^4$$
$$\Rightarrow$$
$$M_n^2 = o(n^4)$$

Or :

$$M_n^2 = n^2(D_n - \frac{n-1}{2})^2$$

Et :

$$\frac{M_n^2}{n^4} = \frac{(D_n - \frac{n-1}{2})^2}{n^2}$$

Et comme nous avons observé que $M_n^2 = o(n^4)$ nous avons donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{M_n^2}{n^4} = 0$

Et :

$$\frac{M_n^2}{n^4} = \frac{(D_n - \frac{n-1}{2})^2}{n^2}$$

$$\iff$$

$$\frac{M_n^2}{n^4} = (\frac{D_n - \frac{n-1}{2}}{n})^2$$

$$\iff$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n^2}{n^4} = \lim_{n \to +\infty} (\frac{2D_n - n - 1}{2n})^2 = 0$$

Et si :

$$\lim_{n \to +\infty} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} x = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n} - \frac{n-1}{2n} = 0$$

Or comme nous avons que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Cela nous permet de conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n} = \frac{1}{2}$$

8 Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{<M>_n}{n^3} = \frac{1}{12}$ $p.s$

A partir de la partie précédente, nous avons trouvé que :
$< M >_n= \sum_{k=1}^{n-1}(k - D_k)(D_k + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(1 - \frac{D_k}{k})(D_k + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(1 - \frac{D_k}{k})(\frac{D_k}{k} + \frac{1}{k})$

Nous fixons

$$x_k = (1 - \frac{D_k}{k})(\frac{D_k}{k} + \frac{1}{k})$$

et nous posons

$$a_k = k^2$$

ainsi

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Nous avons donc :

$$< M >_n= \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k$$

D'après la partie précédente, nous avons

$$\frac{D_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \ p.s.$$

D'où,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1 - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{4} = x$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

D'après le lemme de Toeplitz, nous avons que :

$$\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{6}{2n^3+n^2+n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{n^3(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2})} \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}$$

Nous avons :

$$\tfrac{3}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \tfrac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{12}$$

Nous avons bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{< M >_n}{n^3} = \frac{1}{12} \; p.s.$$

9 Normalité asymptotique

Les deux conditions à vérifier sont les suivantes :

— il existe l $\in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(\frac{<M>_n}{a_n})$ converge vers l en probabilité

— pour tout $\epsilon > 0$, la suite

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon\sqrt{a_n}}|\mathcal{F}_{k-1})$$

converge vers 0 en probabilité.

La première condition est évidemment vérifiée en prenant $a_n = n^3$ (question précédente) nous pouvons alors noter l $= \frac{1}{12}$. La deuxième condition nécessite un peu plus de réflexion ; nous notons $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$, ce qui nous donne :

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta M_k^2 \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon\sqrt{a_n}}|\mathcal{F}_{k-1}) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\frac{\Delta M_k^4}{\Delta M_k^2} \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \epsilon\sqrt{a_n}}|\mathcal{F}_{k-1})$$

nous utilisons l'indicatrice pour avoir que $\frac{1}{\Delta M_k^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2 n^3}$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\epsilon^2 n^6}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta M_k^4|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2 n^6}\sum_{k=1}^n (k-1)^4 \\
&= \frac{1}{\epsilon^2 n^6}\sum_{k=1}^{n-1} k^4 \\
&\leq \frac{n^5}{\epsilon^2 n^6} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2 n}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n} = 0$ donc la deuxième condition de la condition de Lindeberg est vérifiée également. Pour conclure sur la normalité asymptotique nous allons utiliser les propositions suivantes :

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et si } Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \text{ alors } X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$$

Grâce au théorème, nous avons au sens de la convergence en loi que :

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} M_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, l)$$

Nous procédons aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^3}}M_n &= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}n(D_n - \frac{n-1}{2}) \\ &= \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}(D_n - \frac{n-1}{2}) \\ &= \frac{D_n}{\sqrt{n}} - \frac{n-1}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{D_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Nous posons alors $X_n = \frac{D_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $Y_n = -\frac{1}{2\sqrt{n}}$ nous savons donc grâce au théorème que $X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{12})$ de plus $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Ce qui revient à dire grâce à la proposition précédente que :

$$\frac{D_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{12})$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{D_n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{2} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{12})$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{n}(\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{12})$$

Nous avons ainsi prouvé la normalité asympotique.

10 Quelques informations supplémentaires sur G_n

10.1 Calcul de $\mathbb{E}(G_{n+1}|\mathcal{F}_n)$

On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(G_{n+1}|G_n) \\
&= (G_n+1)(\frac{2}{n+1}) + (G_n+2)(\frac{n-1-G_n}{n+1}) + G_n(\frac{G_n}{n+1}) \\
&= \frac{2G_n + 2 + G_n^2 + nG_n - G_n - G_n^2 + 2n - 2 - 2G_n}{n+1} \\
&= \frac{2n - nG_n - G_n}{n+1} \\
&= \frac{n(2+G_n) - G_n}{n+1}
\end{aligned}$$

10.2 Calcul de $\mathbb{E}(G_n)$

Nous avons que :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(G_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\tfrac{n(2+G_n)-G_n}{n+1})$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_{n+1}) &= \mathbb{E}(\frac{2n - nG_n - G_n}{n+1}) \\
&= \mathbb{E}(\frac{2n + (n-1)G_n}{n+1}) \\
&= \frac{2n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}\mathbb{E}(G_n)
\end{aligned}$$

Nous allons donc utiliser la formule suivante :

$$\mathbb{E}(G_n) = \textstyle\prod_{i=2}^{n-1} g_i(\mathbb{E}(G_2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{i=2}^{k} g_i})$$

Nous commençons la formule à 2 pour éviter les 0 et on note $g_n = \frac{n-1}{n+1}$ et $f_n = \frac{2n}{n+1}$.
Or,

$$\textstyle\prod_{k=2}^{n} g_k = \frac{2}{n(n+1)}$$

Nous avons aussi que :

$$\textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{f_k}{\frac{2}{k(k+1)}} = \sum_{k=2}^{n-1} k^2$$

Mais quand $k = 1$, $k^2 = 1$ et on sait de plus que $\mathbb{E}(G_2) = 1$ donc on peut rentrer l'espérance dans la somme ce qui donne :

$$\mathbb{E}(G_n) = \tfrac{2}{n(n-1)} \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n-1}{3}$$

10.3 Calcul de $\mathbb{E}(G_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$

Procédons aux calculs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(G_{n+1}^2|\mathbb{G}_n) \\
&= (G_n+2)^2\frac{n-1-G_n}{n+1} + (G_n+1)\frac{2}{n+1} + G_n^2\frac{G_n}{n+1} \\
&= (G_n^2+4G_n+4)\frac{n-1-G_n}{n+1} + (G_n^2+2G_n+1)\frac{2}{n+1} + \frac{G_n^3}{n-1} \\
&= \frac{nG_n^2 - G_n^2 - G_n^3 + 4nG_n - 4G_n - 4G_n^2 + 2G_n^2 + 4G_n + 2 + G_n^3 + 4n - 4 - 4G_n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}(G_n^2(n-3) + G_n(4n-4) + 4n-2)
\end{aligned}$$

10.4 Calcul de $\mathbb{E}(G_n^2)$

Nous avons vu précédemment que :

$$\mathbb{E}(G_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \frac{1}{n+1}(G_n^2(n-3) + G_n(4n-4) + 4n-2))$$

Ce qui implique que :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(G_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)) = \frac{1}{n+1}\mathbb{E}(G_n^2(n-3) + G_n(4n-4) + 4n-2)$$

$$\mathbb{E}(G_{n+1}^2) = \frac{n-3}{n+1}\mathbb{E}(G_n^2) + \frac{4n-4}{n+1}\mathbb{E}(G_n) + \frac{4n-2}{n+1}$$

Nous savons que :

$$\mathbb{E}(G_n) = \frac{2n-1}{3}$$

D'où

$$\mathbb{E}(G_{n+1}^2) = \frac{n-3}{n+1}\mathbb{E}(G_n^2) + \frac{4(n-1)(2n-1)}{3(n+1)} + \frac{4n-2}{n+1}$$

$$= \frac{n-3}{n+1}\mathbb{E}(G_n^2) + \frac{8n^2-12n+4+12n-6}{3(n+1)}$$

$$= \frac{n-3}{n+1}\mathbb{E}(G_n^2) + \frac{8n^2-2}{3(n+1)}$$

$$= \frac{n-3}{n+1}\mathbb{E}(G_n^2) + \frac{2}{3}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n+1}$$

Utilisons la formule suivante pour déterminer $\mathbb{E}(G_n^2)$:

$$\mathbb{E}(G_n^2) = \prod_{k=3}^{n-1} g_k \mathbb{E}(G_2^2) + \sum_{k=3}^{n-1}[f_k \prod_{i=k+1}^{n-1} g_i]$$

$$\mathbb{E}(G_n^2) = \prod_{k=3}^{n-1} g_k \mathbb{E}(G_2^2) + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{f_k}{\prod_{i=4}^{k} g_i} \prod_{i=4}^{n-1} g_i$$

Avec

$$g_k = \frac{k-3}{k+1}$$

et

$$f_k = \frac{2}{3}\frac{(2k-1)(2k+1)}{k+1}$$

Nous avons que :

$$\prod_{k=3}^{n-1} \frac{k-3}{k+1}\mathbb{E}(G_2^2) = 0$$

$$\prod_{i=4}^{n-1} \frac{i-3}{i+1} = \frac{24(n-4)!}{n!}$$

$$\prod_{i=4}^{k} \frac{i-3}{i+1} = \frac{24((k-3)!}{(k+1)!}$$

Donc

$$\mathbb{E}(G_n^2) = \sum_{k=3}^{n-1}[f_k \prod_{i=k+1}^{n-1} g_i] = \frac{2}{3}\frac{24(n-4)!}{n!} \sum_{k=3}^{n-1} \frac{(2k-1)(2k+1)}{k+1}\frac{(k+1)!}{24(k-3)!}$$

$$\mathbb{E}(G_n^2) = \frac{2}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{k=3}^{n-1}(2k-1)(2k+1)(k-2)(k-1)k$$

$$\mathbb{E}(G_n^2) = \frac{2}{3}\frac{40n^2-24n-19}{60} = \frac{4n^2}{9} - \frac{4n}{15} - \frac{19}{90}.$$

10.5 Calcul de $\mathbb{V}(G_n)$

$$\mathbb{V}(G_n) = \mathbb{E}(G_n^2) - \mathbb{E}(G_n)^2$$

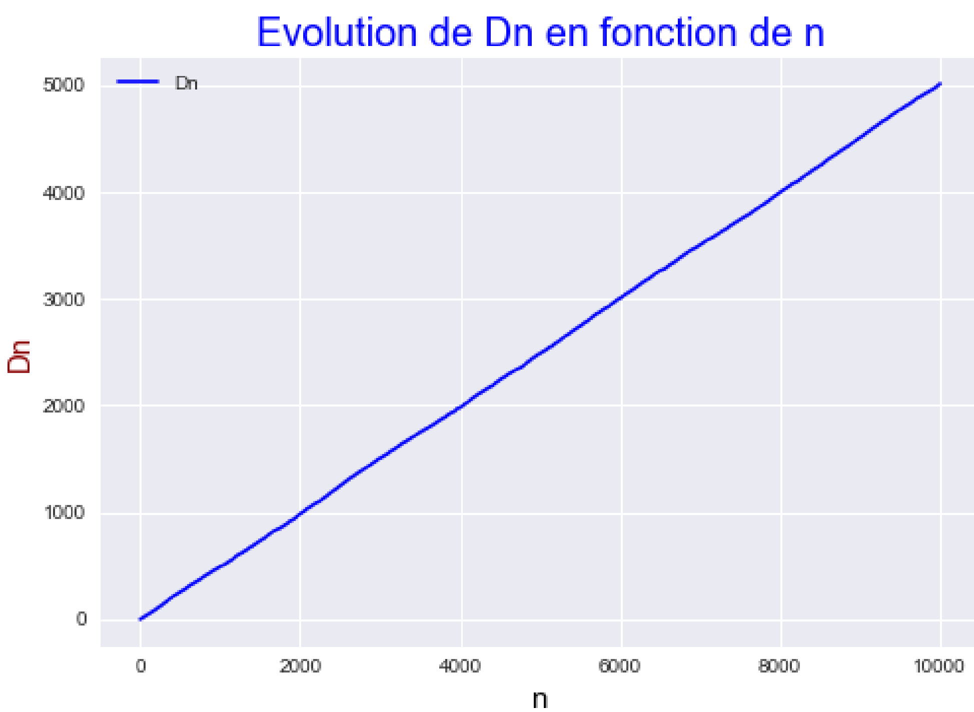
$$\mathbb{V}(G_n) = \frac{4n^2}{9} - \frac{4n}{15} - \frac{19}{90} - \frac{(2n-1)^2}{9} = \frac{40n^2-40n^2-24n+40n-19-10}{90} = \frac{8n}{45} - \frac{29}{90}.$$

11 Quelques résultats informatiques sur D_n (convergence p.s et normalité asymptotique)

11.1 Simulation du processus D_n

Dans cette partie nous souhaitons observer les résultats associés au processus D_n à l'aide de simulations informatiques.

Dans un premier temps nous avons tracé l'évolution du processus en fonction du nombre d'étapes, ici jusqu'à 10000 étapes.

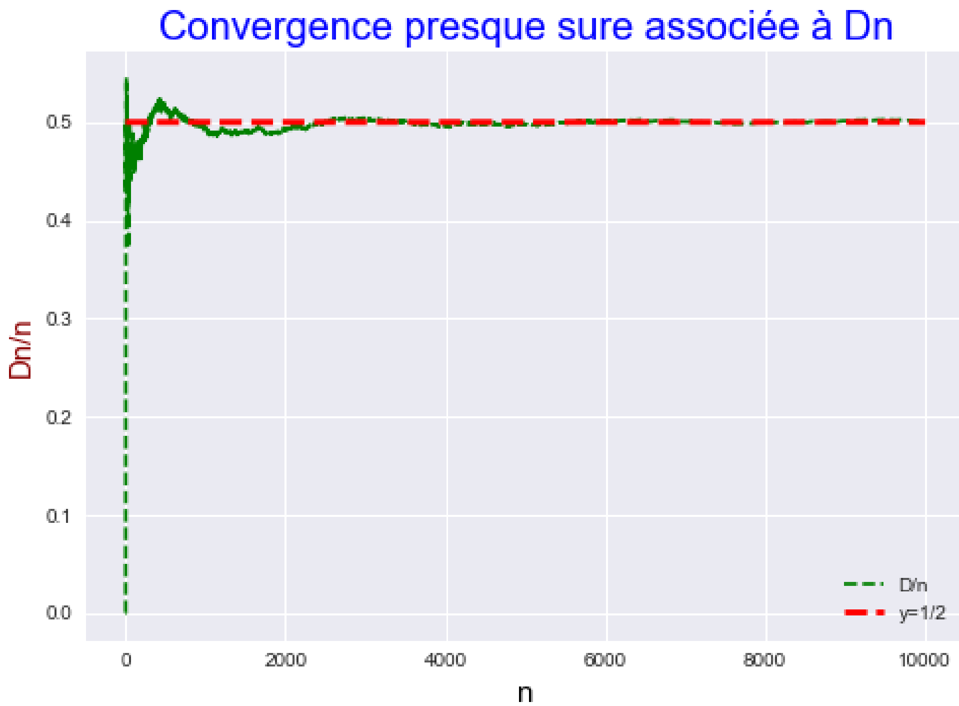


11.2 Convergence presque sûre de D_n

Ensuite nous nous sommes intéressés au résultat démontré lors de la question 7 à savoir :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{D_n}{n} = \frac{1}{2} \text{ p.s}$$

Ainsi en simulant l'évolution de notre processus sur 10000 étapes on observe que $\frac{D_n}{n}$ se comporte de la manière suivante :



Nous observons ainsi la convergence voulue vers $\frac{1}{2}$ et nous retrouvons le résultat théorique.

11.3 Normalité asymptotique associée à D_n

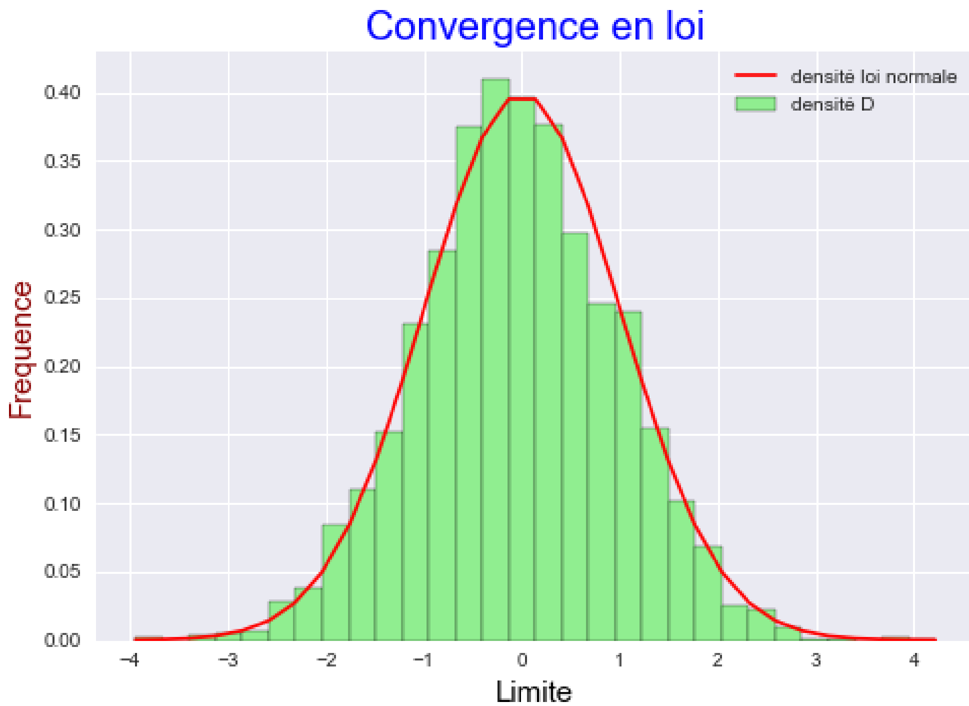
Pour finir nous nous sommes intéressés au résultat démontré à la question 8, à savoir, la normalité asymptotique associée à D_n :

$$\sqrt{n}(\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{12})$$

Pour faire cela il convient de répeter plusieurs fois la simulation du processus et de garder à chaque fois, dans un tableau la dernière valeur du processus obtenue. Ensuite il convient de modifier la formule afin de se ramener à une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour cela nous allons nous intéresser à :

$$\frac{\sqrt{n}(\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2})}{\frac{1}{12}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Pour finir, on trace l'histogramme de ces valeurs. En simulant notre processus sur 4000 étapes et en répétant 4000 fois la simulation, nous obtenons le résultat suivant :



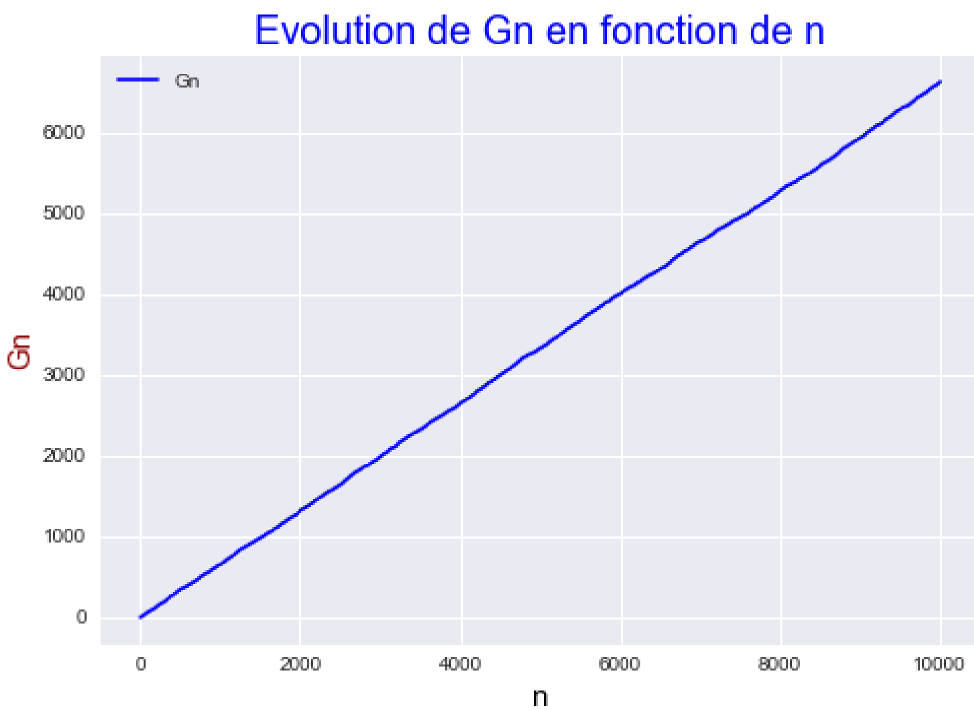
En superposant notre histogramme à la fonction de densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$,on observe ainsi la convergence en loi voulue car notre histogramme suit parfaitement la densité de la $\mathcal{N}(0,1)$.

12 Quelques résultats informatiques sur G_n (convergence p.s et normalité asymptotique)

12.1 Simulation du processus G_n

Dans cette partie nous souhaitons observer les résultats associés au processus G_n à l'aide de simulations informatiques.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés à l'évolution du processus G_n en fonction du nombre d'étapes, ici jusqu'à 10000 étapes.

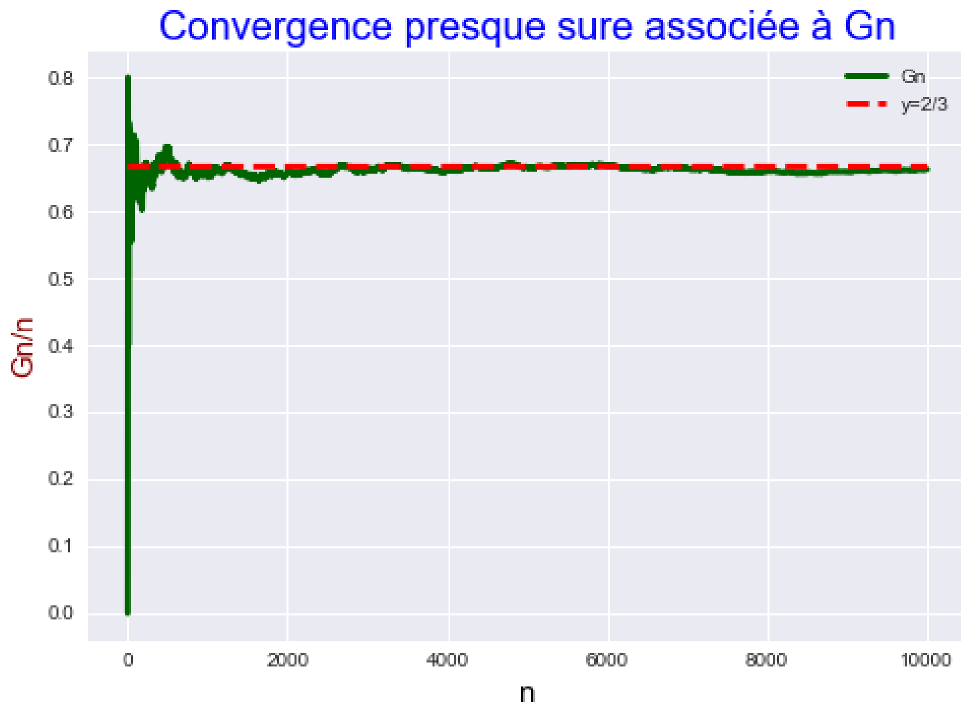


12.2 Convergence presque sûre associée à G_n

Ensuite nous avons voulu retrouver le résultat suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{G_n}{n} = \frac{2}{3} \text{ p.s}$$

Ainsi en simulant l'évolution de notre processus sur 10000 étapes nous observons que $\frac{G_n}{n}$ se comporte de la manière suivante :



Nous observons ainsi la convergence voulue vers $\frac{2}{3}$ et nous retrouvons le résultat théorique.

12.3 Normalité asymptotique associée à G_n

Enfin nous avons voulu retrouver la normalité asymptotique associé à G_n suivante :

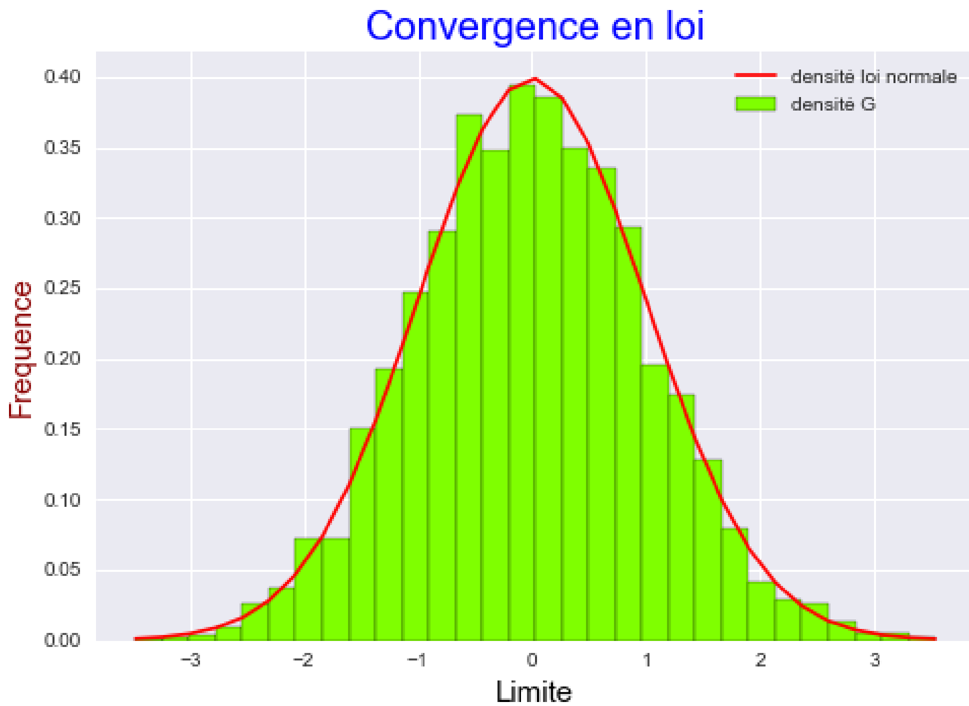
$$\sqrt{n}(\frac{G_n}{n} - \frac{2}{3}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{8}{45})$$

Nous avons donc une nouvelle fois répété plusieurs fois la simulation du processus en gardant à chaque fois dans un tableau la dernière valeur obtenue. Nous nous sommes ensuite ramenés à la formule suivante :

$$\frac{\sqrt{n}(\frac{G_n}{n} - \frac{2}{3})}{\frac{8}{45}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Afin de se ramener à une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En simulant notre processus sur 4000 étapes et en répétant 4000 fois la simulation, nous obtenons le résultat suivant :



Nous observons ainsi la convergence en loi voulue car notre histogramme suit parfaitement la densité de la $\mathcal{N}(0,1)$.

13 Etude du couple (D_n,G_n)

Dans cette partie nous souhaitons savoir si :

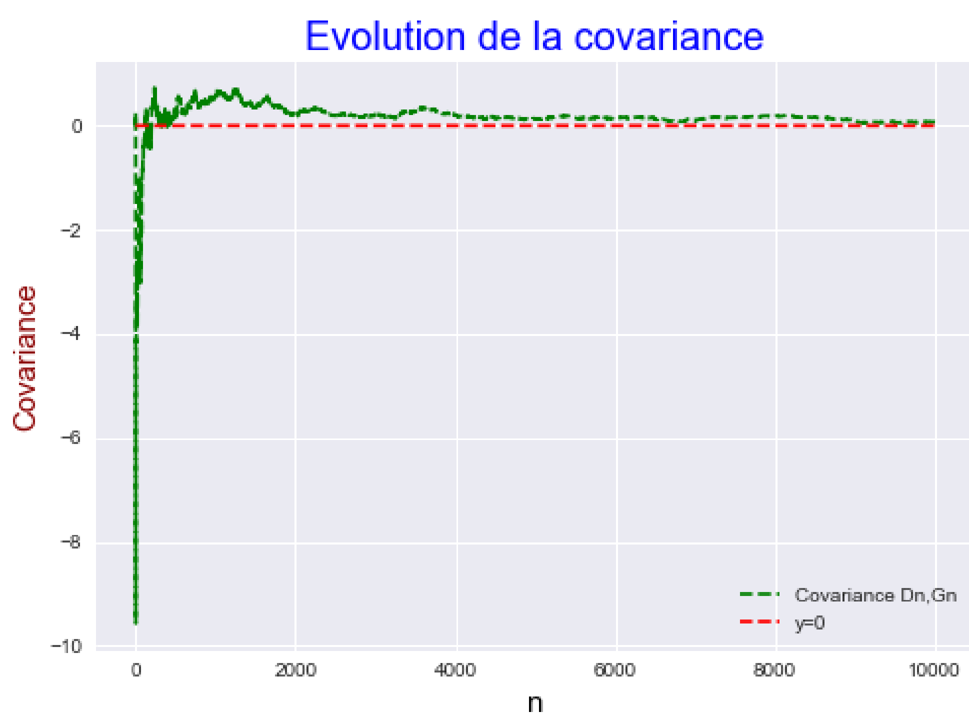
$$\sqrt{n}(\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}, \frac{G_n}{n} - \frac{2}{3}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

avec 0 le vecteur nul de dimension 2 et Γ une matrice de covariance valant $\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & cov \\ cov & \frac{8}{45} \end{pmatrix}$ où "cov" est la covariance entre D_n et G_n.

13.1 Etude de l'évolution de la covariance

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés à la covariance entre D_n et G_n car celle-ci peut nous donner des informations sur la manière de procéder pour effectuer des simulations pour la suite.

Ainsi nous simulons les processus D_n et G_n sur 100 étapes et nous répétons ces simulations 10000 fois afin de stocker les valeurs finales obtenues dans des tableaux dédiés. En regardant l'évolution de la covariance en fonction du nombre de fois que nous répétons l'expérience nous observons que celle-ci tend vers 0. Ce résultat est en accord avec l'article écrit par Mr BERCU avec son collègue américain, qui semble indiquer un résultat similaire, à savoir que la covariance est nulle.



13.2 Normalité asymptotique de (D_n,G_n)

Soit un vecteur colonne :

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{n}(\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}) \\ \sqrt{n}(\frac{G_n}{n} - \frac{2}{3}) \end{pmatrix}$$

Nous souhaitons montrer que :

$$X \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

Soit un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous étudions la convergence suivante :

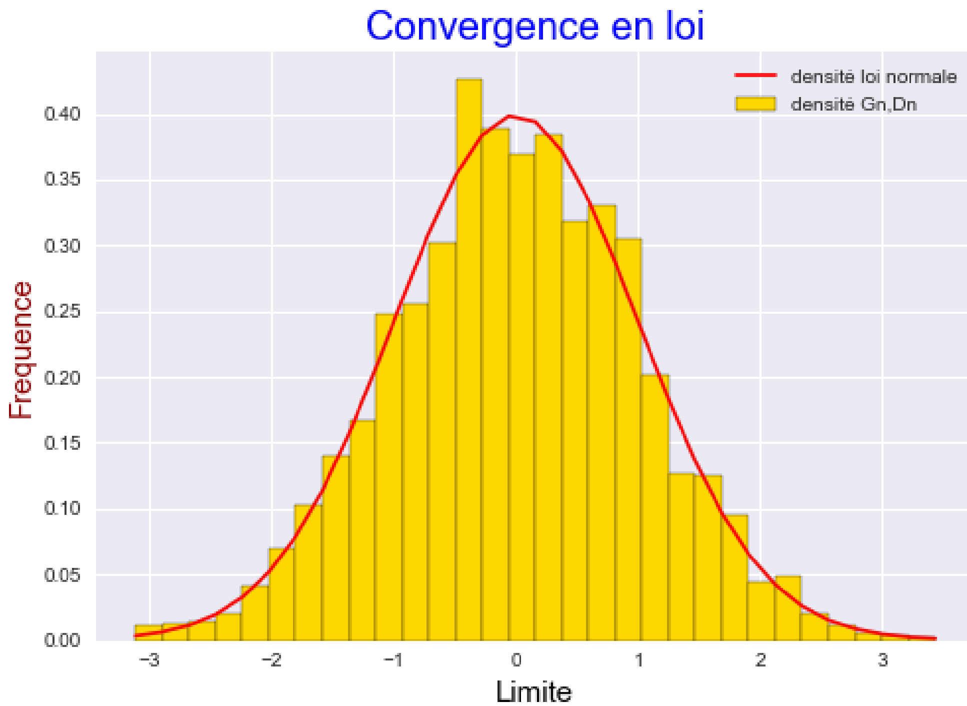
$$u^t X \Rightarrow \mathcal{N}(0, u^t \Gamma u)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{n}(\tfrac{D_n}{n} - \tfrac{1}{2}) + \sqrt{n}(\tfrac{G_n}{n} - \tfrac{2}{3}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(G_n) + \mathbb{V}(D_n) + 2\mathrm{Cov}(D_n, G_n))$$

Sachant que nous avons considéré que $\mathrm{Cov}(D_n, G_n)$ tend vers 0 nous avons que :

$$\sqrt{n}(\tfrac{D_n}{n} - \tfrac{1}{2}) + \sqrt{n}(\tfrac{G_n}{n} - \tfrac{2}{3}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(G_n) + \mathbb{V}(D_n))$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{n}(\tfrac{D_n+G_n}{n} - \tfrac{7}{6}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \tfrac{47}{180})$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sqrt{n}(\tfrac{D_n+G_n}{n} - \tfrac{7}{6})\sqrt{\tfrac{180}{47}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Afin de se ramener à une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

En simulant notre processus sur 3000 étapes et en répétant 3000 fois la simulation, nous obtenons le résultat suivant :



Nous observons ainsi la convergence en loi voulue car notre histogramme suit parfaitement la densité de la $\mathcal{N}(0,1)$.