国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第七章 控制器设计的经典方法

多变量系统动态解耦

Dynamic Decoupling of Multivariable Systems

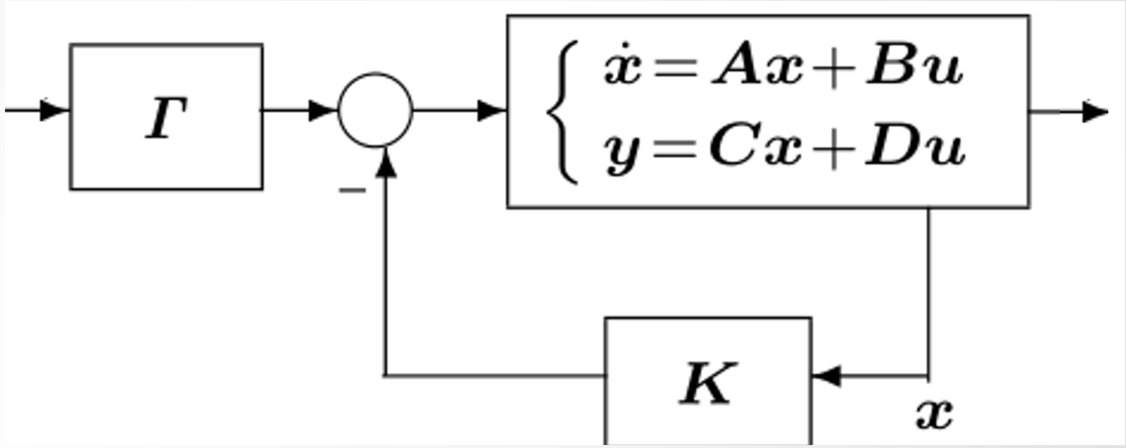
主讲：薛定宇教授

多变量系统的解耦控制

- 解耦的概念与理解，解耦的意义
- 基于状态方程的解耦方法与实现
- 本节主要内容
  - 状态反馈的解耦
  - 标准传递函数
  - 状态反馈的极点配置解耦

状态反馈的解耦

- 开环系统状态方程 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$
- 引入状态反馈 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Gamma r}-\boldsymbol{Kx}$
- 闭环系统的模型



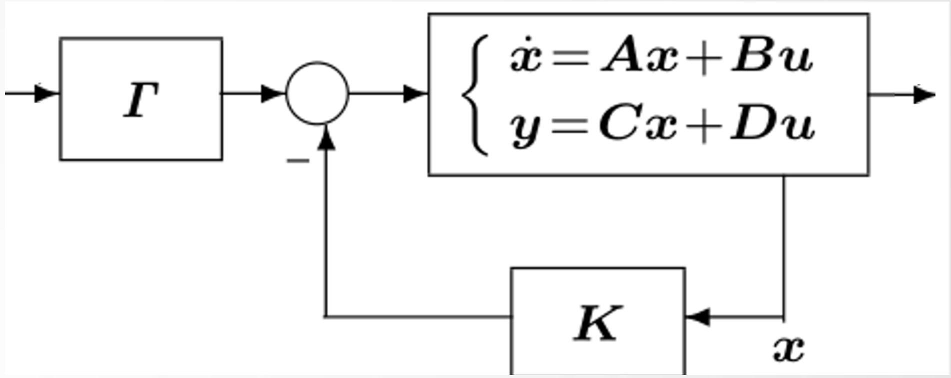
$$\boldsymbol{G}(s)=\left[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{DK})(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{\Gamma}$$

- 定义阶次 d_j，使得 $\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{d_j}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$
- 其中，$\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 的第 j 行

状态反馈解耦

- 如果下面的矩阵非奇异

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{d_1}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{d_m}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$



- 则可以设计出状态反馈解耦矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{F}^{-1},\quad \boldsymbol{K}=\boldsymbol{\Gamma}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{d_1+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{d_m+1}\end{bmatrix}$$

解耦算法的MATLAB实现

$$F=\begin{bmatrix} c_1^{\mathrm{T}} A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_m^{\mathrm{T}} A^{d_m} B \end{bmatrix}$$

- 调用格式 $[G_1, K, d, \Gamma]$=decouple(G)

$$\Gamma = F^{-1}, \quad K = \Gamma \begin{bmatrix} c_1^{\mathrm{T}} A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m^{\mathrm{T}} A^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

```
function [G1,K,d,Gam]=decouple(G)
G=ss(G); A=G.a; B=G.b; C=G.c;
[n,m]=size(G.b); F=[]; K0=[];
for j=1:m, for k=0:n-1
    if norm(C(j,:)*A^k*B)>eps, d(j)=k; break; end, end
    F=[F; C(j,:)*A^d(j)*B]; K0=[K0; C(j,:)*A^(d(j)+1)];
end
Gam=inv(F); K=Gam*K0;
G1=minreal(tf(ss(A-B*K,B,C,G.d))*Gam);
```

例7-19 状态反馈解耦

➢ 受控对象

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2.25 & -5 & -1.25 & -0.5 \\ 2.25 & -4.25 & -1.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.5 & -1.25 & -1 \\ 1.25 & -1.75 & -0.25 & -0.75 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

➢ 解耦

```
>> A=[2.25, -5, -1.25, -0.5;  2.25, -4.25, -1.25, -0.25;
      0.25, -0.5, -1.25,-1;  1.25, -1.75, -0.25, -0.75];
   B=[4, 6; 2, 4; 2, 2; 0, 2]; C=[0, 0, 0, 1; 0, 2, 0, 2];
   G=ss(A,B,C,0); [G1,K,d,Gam]=decouple(G)
```

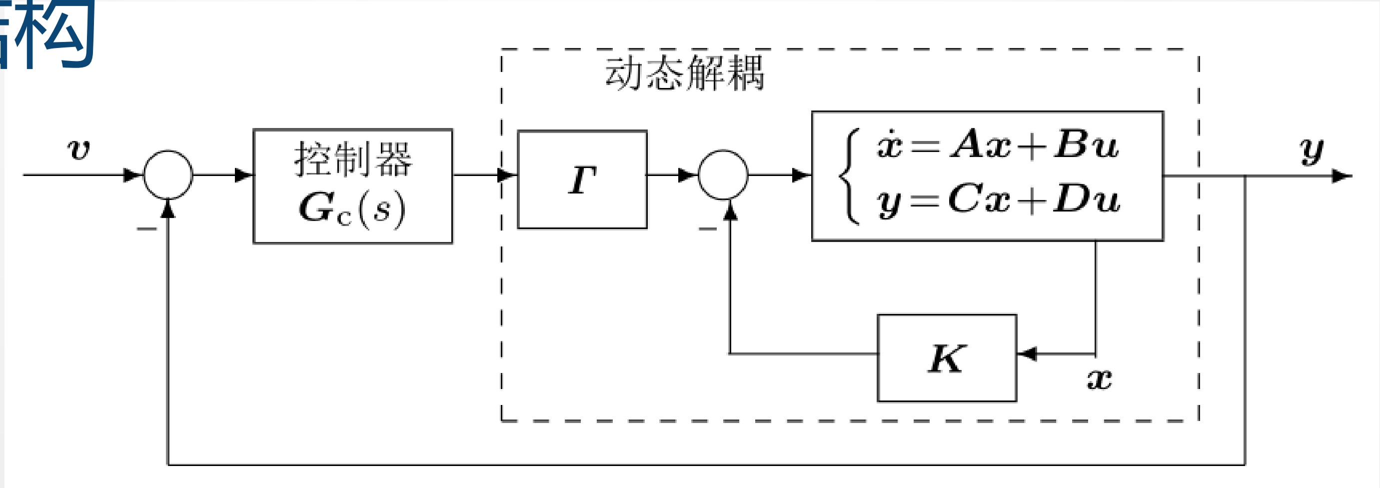
动态解耦的结果

➢ 解耦的结果

$$G_1(s)=\begin{bmatrix}1/s & 0\\ -8.9\times10^{-16}/s & 1/s\end{bmatrix},$$

$$K=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & -3 & -3 & 5\\ 5 & -7 & -1 & -3\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}-1.5 & 0.25\\ 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

➢ 状态反馈结构



标准传递函数

- n 阶标准传递函数

$$T(s)=\frac{a_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

- ITAE最优系数

n	超调量	$\omega_n t_s$	首一化的分母多项式
1			$s+\omega_n$
2	4.6%	6.0	$s^2+1.41\omega_n s+\omega_n^2$
3	2%	7.6	$s^3+1.75\omega_n s^2+2.15\omega_n^2 s+\omega_n^3$
4	1.9%	5.4	$s^4+2.1\omega_n s^3+3.4\omega_n^2 s^2+2.7\omega_n^3 s+\omega_n^4$
5	2.1%	6.6	$s^5+2.8\omega_n s^4+5.0\omega_n^2 s^3+5.5\omega_n^3 s^2+3.4\omega_n^4 s+\omega_n^5$
6	5%	7.8	$s^6+3.25\omega_n s^5+6.6\omega_n^2 s^4+8.6\omega_n^3 s^3+7.45\omega_n^4 s^2+3.95\omega_n^5 s+\omega_n^6$
7	10.9%	10.0	$s^7+4.475\omega_n s^6+10.42\omega_n^2 s^5+15.08\omega_n^3 s^4+15.54\omega_n^4 s^3+10.64\omega_n^5 s^2+4.58\omega_n^6 s+\omega_n^7$

MATLAB实现

- 调用格式 T=std_tf(ω_n,n)
- 程序清单

```
function G=std_tf(wn,n)
M=[1,1,0,0,0,0,0 0; 1,1.41,1,0,0,0,0 0;
   1,1.75,2.15,1,0,0,0 0; 1,2.1,3.4,2.7,1,0,0 0;
   1,2.8,5.0,5.5,3.4,1,0 0;
   1,3.25,6.6,8.6,7.45,3.95,1,0;
   1,4.475,10.42,15.08,15.54,10.64,4.58,1];
G=tf(wn^n,M(n,1:n+1).*(wn.^[0:n]));
```

极点配置状态反馈解耦

- 定义矩阵 $\boldsymbol{E}$，每一行 $\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{d_i} \boldsymbol{B}$
- 另一个矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的第 i 行

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{A}^{d_i+1} + a_{i,1} \boldsymbol{A}^{d_i} + \cdots + a_{i,d_i+1} \boldsymbol{I} \right)$$

- 状态反馈与前置矩阵为 $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{E}^{-1}, \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{F}$
- 编写极点配置状态解耦的MATLAB函数

$$[\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{\Gamma}] = \texttt{decouple\_pp}(\boldsymbol{G}, \omega_{\mathrm{n}})$$

例7-20 前面的系统模型

- 例7-19的系统模型
- 选择期望自然频率 $\omega_{\rm n}=5$
- 输入模型并求取解耦控制器

```
>> A=[2.25, -5, -1.25, -0.5; 2.25, -4.25, -1.25, -0.25;
      0.25, -0.5, -1.25,-1; 1.25, -1.75, -0.25, -0.75];
   B=[4, 6; 2, 4; 2, 2; 0, 2];
   C=[0, 0, 0, 1; 0, 2, 0, 2];
   G=ss(A,B,C,0); [G1,K,d,Gam]=decouple_pp(G,5)
```

得出的结果

- 解耦结果

$$\boldsymbol{G}_1(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+5) & 0 \\ \epsilon & 1/(s+5) \end{bmatrix},\ \epsilon \approx 10^{-14}$$

- 其他矩阵

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 17 & -3 & -35 \\ 5 & -7 & -1 & 17 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

- 解耦模型的阶跃响应

```
>> step(G1,10)
```

例7-21 考虑3×3多变量系统

- 选择 $\omega_\mathrm{n}=3$

```
>> A=[0,0,1.1320,0,-1; 0,-0.0538,-0.1712,0,0.0705;
      0,0,0,1,0; 0,0.0485,0,-0.8556,-1.013;
      0,-0.2909,0,1.0532,-0.6859];
   B=[0,0,0; -0.120,1,0; 0,0,0;
       4.419,0,-1.665; 1.575,0,-0.0732];
   C=eye(3,5); G=ss(A,B,C,0);
   [G1,K,d,Gam]=decouple_pp(G,3)
```

```
>> step(G1,10)
```

- 解耦后模型为 $\boldsymbol{G}_1=\mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{s^2+4.23s+9},\dfrac{1}{s+3},\dfrac{1}{s^2+4.23s+9}\right)$

多变量系统解耦小结

- 给出了状态方程系统解耦的系统结构
- 给出了两种多变量状态方程解耦的方法
  - 解耦成对角积分器模型
  - 解耦成对角标准传递函数模型
- 由解耦模型再设计外环控制器可能得出好的控制效果

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD