国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

# 控制系统仿真与CAD

# 第七章 控制器设计的经典方法

## 多变量频域设计（上）

Frequency Domain Design of Multivariable Systems (I)

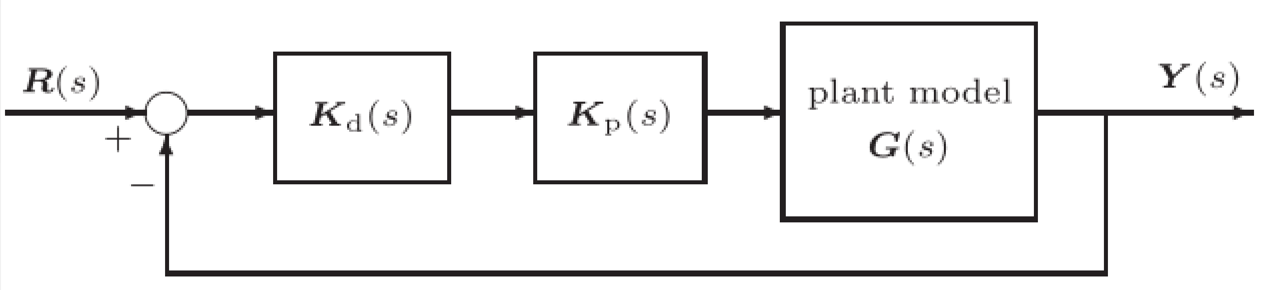
主讲：薛定宇教授

# 多变量系统的频域设计方法

- 多变量系统比单变量系统设计难很多
  - 主要难点：系统不同输入输出对之间的耦合，难点在如何解耦？
  - 解耦后可以单独回路设计，沿用单变量的设计方式，给每回路单独设计控制器，不影响其他
- 本节主要内容
  - 对角占优化方法与伪对角化方法
  - 参数最优化方法

# 对角占优系统与伪对角化

- 典型多变量反馈系统框图




- $K_p(s)$ 预补偿矩阵，使 $G(s)\,K_p(s)$为对角占优矩阵
- $K_d(s)$ 为动态补偿矩阵
- $K_p(s)$ 可以用试凑方法，可以取 $K_p(s) = G^{-1}(0)$
- 还可以采用其他方法，如伪对角化方法

# 伪对角化方法

- 在 $\mathrm{j}\omega_0$ 点处的逆Nyquist阵列（INA）为

$$\hat{g}_{ik}(\mathrm{j}\omega_0) = \alpha_{ik} + \mathrm{j}\beta_{ik},\ \ i,k = 1,2,\cdots,m$$

- 假定输入、输出路数相同。步骤：
  - 选择一个频率点 $\mathrm{j}\omega_0$ ，求出 INA $\hat{g}_{ik}(\mathrm{j}\omega_0)$
  - 对各个 $q$，构造

$$a_{il,q} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq q}}^{m} \left[\alpha_{ik}\alpha_{lk} + \beta_{ik}\beta_{lk}\right],\ \ \ i,l = 1,2,\cdots,m$$

  - 求 $\boldsymbol{A}_q$ 矩阵的特征向量，最小特征值的向量 $\boldsymbol{k}_q$
  - 由各个 $q$ 对应的最小特征向量构造补偿矩阵

# 多点伪对角化

- 上述算法的 $\mathrm{j}\omega_0$ 可以扩展到一系列频率
  - 频率点 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$
  - 对第 $r$ 频率点加权 $\psi_r$，构造

$$A_{il,q} = \sum_{r=1}^{N} \psi_r \left[ \sum_{k=1 \text{ and } k \neq q}^{m} (\alpha_{ik,r}\alpha_{lk,r} + \beta_{ik,r}\beta_{lk,r}) \right]$$

- 基本思想：在某几个频率点实现对角化
- 编写MATLAB函数生成补偿矩阵
  - 调用格式 $\boldsymbol{K}_\mathrm{p}=\mathtt{psuediag}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{R})$

# 伪对角化算法的实现

- 调用格式 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}} = \mathtt{psuediag}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{R})$

```
function Kp=psuediag(G1,R)
A=real(G1); B=imag(G1); [n,m]=size(G1); N=n/m; Kp=[];
if nargin==1, R=ones(N,1); end
for q=1:m, L=[1:q-1, q+1:m];
   for i=1:m, for l=1:m, a=0;
      for r=1:N, k=(r-1)*m;
         a=a+R(r)*sum(A(k+i,L).*A(k+l,L)+B(k+i,L).*B(k+l,L));
      end,
      Ap(i,l)=a;
   end, end
   [x,d]=eig(Ap); [xm,ii]=min(diag(d)); Kp=[Kp; x(:, ii)'];
end
```

# 例7-15 多变量问题伪对角化

- 蒸汽锅炉温度控制模型

$$
\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} 1/(1+4s) & 0.7/(1+5s) & 0.3/(1+5s) & 0.2/(1+5s) \\ 0.6/(1+5s) & 1/(1+4s) & 0.4/(1+5s) & 0.35/(1+5s) \\ 0.35/(1+5s) & 0.4/(1+5s) & 1/(1+4s) & 0.6/(1+5s) \\ 0.2/(1+5s) & 0.3/(1+5s) & 0.7/(1+5s) & 1/(1+4s) \end{bmatrix}
$$

- 原系统

```
>> s=tf('s'); w=logspace(-1,0);
   G=[1/(1+4*s), 0.7/(1+5*s), 0.3/(1+5*s), 0.2/(1+5*s);
      0.6/(1+5*s), 1/(1+4*s), 0.4/(1+5*s), 0.35/(1+5*s);
      0.35/(1+5*s), 0.4/(1+5*s), 1/(1+4*s), 0.6/(1+5*s);
      0.2/(1+5*s),  0.3/(1+5*s), 0.7/(1+5*s), 1/(1+4*s)];
    H=mfrd(G,w); gershgorin(H)
```

# 伪对角化

- 选定预校正矩阵 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{G}^{-1}(0)$

```
>> K=inv(mfrd(G,0)); W=mfrd(G*K,w); gershgorin(W)
```

- 选频率点

```
>> v=0.9; iH=mfrd(inv(G),v); Kp=inv(pseudiag(iH)),
   V=mfrd(G*Kp,w); gershgorin(V)
```

- 选一组频率点

```
>> v=logspace(-2,log10(0.4)); iH=mfrd(inv(G),v);
   Kp=inv(pseudiag(iH)), Q=mfrd(G*Kp,w);
   gershgorin(Q)
```

# 例7-16 多变量延迟系统

- 系统模型

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{0.1134\mathrm{e}^{-0.72s}}{1.78s^2+4.48s+1} & \dfrac{0.924}{2.07s+1}\\ \dfrac{0.3378\mathrm{e}^{-0.3s}}{0.361s^2+1.09s+1} & \dfrac{-0.318\mathrm{e}^{-1.29s}}{2.93s+1}\end{bmatrix}$$

- 系统不是对角占优系统
- 引入补偿器 $K=G^{-1}(0)$

```
>> G=[tf(0.1134,[1.78 4.48 1]), tf([0.924],[2.07,1]);
      tf(0.3378,[0.361,1.09,1]), tf(-0.318,[2.93 1])];
   G1=G; G1.ioDelay=[0.72 0; 0.3 1.29];
   w=logspace(0,1); Kp1=inv(mfrd(G,0)); Kp2=inv([1 0; 0.5 1]);
   H3=mfrd(G1*Kp1*Kp2,w); gershgorin(H3)
```

# 其他补偿矩阵

- 引入补偿矩阵

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.3s+1)/(0.05s+1)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}^{-1}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (0.05s+1)/(0.3s+1)\end{bmatrix}$$

- INA绘制

```
>> s=tf('s'); Kd=[1 0; 0 (0.3*s+1)/(0.05*s+1)];
gershgorin(mfrd(G1*Kp1*Kp2*Kd,w))
```

- 闭环系统的阶跃响应

```
>> step(feedback(ss(G1)*Kp1*Kp2*Kd,eye(2)),15)
```

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD