国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第十一章 分数阶控制基础

分数阶微积分计算

Computations in Fractional Calculus

主讲：薛定宇教授

分数阶微积分的数值计算

- 原函数或其采样点已知时
  - 用 Grunwald–Letnikov 定义直接计算
  - Grunwald–Letnikov 定义下高精度数值求解
  - Caputo 定义的高精度数值解
- 原函数未知时
  - 通过高阶整数阶滤波器去模拟分数阶微积分行为
  - Oustaloup 滤波器逼近 Grunwald–Letnikov 微积分
  - Caputo 微积分的滤波器逼近

用Grünwald-Letnikov定义求解分数阶微分

- 数学描述

$$
{}_a\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh)
$$

$$
\approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} w_j^{(\alpha)} f(t-jh)
$$

- 其中

$$
w_0^{(\alpha)} = 1, w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, j = 1, 2, \cdots
$$

分数阶微分数值计算

- 数学描述 $${}_a\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t) \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} w_j^{(\alpha)} f(t-jh)$$
  $$w_0^{(\alpha)} = 1, w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, j = 1, 2, \cdots$$
- 构造一个MATLAB函数 $o(h)$

```
function dy=glfdiff(y,t,gam)
h=t(2)-t(1); dy(1)=0; y=y(:); t=t(:); w=1;
for j=2:length(t), w(j)=w(j-1)*(1-(gam+1)/(j-1)); end
for i=2:length(t), dy(i)=w(1:i)*[y(i:-1:1)]/h^gam; end
```

- 函数调用格式 $\boldsymbol{y}_1 = \texttt{glfdiff}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \gamma)$

高精度分数阶微积分数值计算

- 高精度Grunwald–Letnikov微积分的数值计算
  - 算法精度 $o(h^p)$
  - MATLAB函数 $[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{t}] = \texttt{glfdiff9}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \gamma, p)$
- Caputo微积分的高精度数值计算

$$\boldsymbol{y}_1 = \texttt{caputo9}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}, \alpha, p)$$

- 代码下载——FOTF工具箱
  - http://cn.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/60874-fotf-toolbox

例11-2 常数的微积分

- 阶跃函数的导数和积分是什么？
- 整数阶的积分与微分
- 对不同的阶次

```
>> t=0:0.01:1.5;
gam=[-1 -0.5 0.3 0.5 0.7];
y=ones(size(t)); dy=[];
for a=gam, dy=[dy; glfdiff(y,t,a)]; end
plot(t,dy)
```

Caputo微积分定义的数值计算的精度评价

- 计算指数函数exp(-*t*) 的0.6阶Caputo导数（ *h*=0.01 ）
  - 解析解 $y_0(t) = {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\alpha} \mathrm{e}^{-t} = \lambda^q t^{\gamma} \mathscr{E}_{1,\gamma+1}(\lambda t) = -t^{0.4} \mathscr{E}_{1,1.4}(-t)$
  - Mittag-Leffler函数

$$\boldsymbol{y} = \mathtt{ml\_func}([\alpha, \beta], \boldsymbol{z})$$

$$\mathscr{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

  - MATLAB直接求解

```
>> t0=0.5:0.5:5; q=1; gam=q-0.6;
   y0=-t0.^0.4.*ml_func([1,1.4],-t0,0,eps);
   t=0:0.01:5; y=exp(-t); ii=[51:50:501]; T=t0';
   for p=1:6, y1=caputo9(y,t,0.6,p); T=[T [y1(ii)-y0']]; end
```

数值微分计算的精度演示

➢ 选择步长 h=0.01

time	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$
0.5	-0.0018	1.19×10^{-5}	-8.89×10^{-8}	7.07×10^{-10}	-5.85×10^{-12}	4×10^{-14}
1	-0.00172	1.15×10^{-5}	-8.59×10^{-8}	6.85×10^{-10}	-5.69×10^{-12}	4×10^{-14}
1.5	-0.00151	1.01×10^{-5}	-7.52×10^{-8}	6.00×10^{-10}	-4.99×10^{-12}	4×10^{-14}
2	-0.00129	8.61×10^{-6}	-6.45×10^{-8}	5.15×10^{-10}	-4.28×10^{-12}	5×10^{-14}
2.5	-0.0011	7.39×10^{-6}	-5.53×10^{-8}	4.41×10^{-10}	-3.7×10^{-12}	1×10^{-14}
3	-0.00096	6.40×10^{-6}	-4.78×10^{-8}	3.82×10^{-10}	-3.25×10^{-12}	2×10^{-14}
3.5	-0.00084	5.61×10^{-6}	-4.20×10^{-8}	3.35×10^{-10}	-2.96×10^{-12}	1.4×10^{-13}
4	-0.00075	4.99×10^{-6}	-3.73×10^{-8}	2.98×10^{-10}	-2.92×10^{-12}	1×10^{-14}
4.5	-0.00068	4.50×10^{-6}	-3.37×10^{-8}	2.68×10^{-10}	-2.72×10^{-12}	4.7×10^{-13}
5	-0.00062	4.11×10^{-6}	-3.07×10^{-8}	2.45×10^{-10}	-3.41×10^{-12}	5.3×10^{-13}

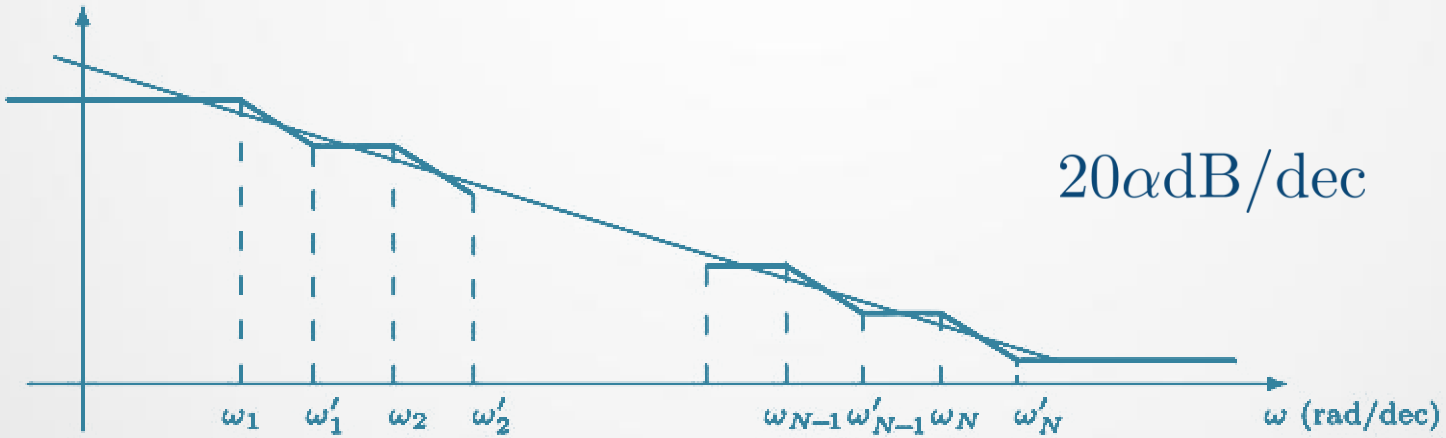
大步长的计算

- 大步长 h=0.1

time	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$	$p=9$
0.5	4.53×10^{-6}	-1.98×10^{-7}	-3.07×10^{-9}	-8.17×10^{-11}	-2.97×10^{-12}	-1.3×10^{-13}
1	5.98×10^{-6}	-4.73×10^{-7}	3.74×10^{-8}	-2.91×10^{-9}	2.48×10^{-10}	-2.03×10^{-11}
1.5	5.51×10^{-6}	-4.47×10^{-7}	3.73×10^{-8}	-3.12×10^{-9}	2.48×10^{-10}	-2.10×10^{-11}
2	4.77×10^{-6}	-3.90×10^{-7}	3.28×10^{-8}	-2.85×10^{-9}	2.53×10^{-10}	-1.63×10^{-11}
2.5	4.08×10^{-6}	-3.34×10^{-7}	2.81×10^{-8}	-2.45×10^{-9}	2.50×10^{-10}	-4.51×10^{-11}
3	3.51×10^{-6}	-2.87×10^{-7}	2.41×10^{-8}	-2.06×10^{-9}	1.52×10^{-10}	-6.34×10^{-12}
3.5	3.05×10^{-6}	-2.48×10^{-7}	2.08×10^{-8}	-1.76×10^{-9}	4.49×10^{-11}	2.35×10^{-10}
4	2.69×10^{-6}	-2.18×10^{-7}	1.82×10^{-8}	-1.55×10^{-9}	2.27×10^{-10}	-6.05×10^{-10}
4.5	2.40×10^{-6}	-1.95×10^{-7}	1.62×10^{-8}	-1.39×10^{-9}	4.94×10^{-10}	-1.91×10^{-9}
5	2.17×10^{-6}	-1.76×10^{-7}	1.46×10^{-8}	-1.26×10^{-9}	-2.17×10^{-10}	1.14×10^{-8}

事先未知函数的分数阶导数

- 可以考虑采用高阶整数阶滤波器逼近分数阶算子
- 分数阶微分环节的频域响应（Bode图）
- 可以考虑引入整数阶滤波器去逼近
  - 渐近线逼近，实际逼近效果会更好



Oustaloup滤波算法

- 如果函数 $f(t)$ 的表达式不是事先已知
- 连续滤波器传递函数模型：Oustaloup算法
  - 感兴趣区间 $(\omega_{\rm b}, \omega_{\rm h})$

$$G_{\rm f}(s) = K \prod_{k=1}^{N} \frac{s+\omega_k'}{s+\omega_k}$$

$$\omega_k' = \omega_{\rm b}\omega_{\rm u}^{(2k-1-\gamma)/N},\ \omega_k = \omega_{\rm b}\omega_{\rm u}^{(2k-1+\gamma)/N},\ K = \omega_{\rm h}^{\gamma},$$

$$\omega_{\rm u} = \sqrt{\omega_{\rm h}/\omega_{\rm b}}$$

Oustaloup 滤波器设计

- 数学表示 $$G_{\mathrm{f}}(s)=K\prod_{k=1}^{N}\frac{s+\omega_k'}{s+\omega_k}\qquad \omega_{\mathrm{u}}=\sqrt{\omega_{\mathrm{h}}/\omega_{\mathrm{b}}}$$

$$\omega_k'=\omega_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{u}}^{(2k-1-\gamma)/N},\ \omega_k=\omega_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{u}}^{(2k-1+\gamma)/N},\ K=\omega_{\mathrm{h}}^{\gamma},$$

- 构造MATLAB函数，设计连续滤波器

```
function G=ousta_fod(gam,N,wb,wh)
k=1:N; wu=sqrt(wh/wb);
wkp=wb*wu.^((2*k-1-gam)/N); wk=wb*wu.^((2*k-1+gam)/N);
G=zpk(-wkp,-wk,wh^gam); G=tf(G);
```

- 函数调用格式 $G=\mathtt{ousta\_fod}(\gamma,N,\omega_{\mathrm{b}},\omega_{\mathrm{h}})$

例11-4 由滤波器计算微分

- 函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(3t+1)$
- 感兴趣频率区间 $\omega_\mathrm{b}=0.01, \omega_\mathrm{h}=1000\ \mathrm{rad/sec}$
- 分数阶阶次 0.5，5阶滤波器
- MATLAB求解语句：

```
>> G=ousta_fod(0.5,5,0.01,1000), bode(G)
```

- 绘制分数阶微分曲线：

```
>> t=0:0.001:pi; y=exp(-t).*sin(3*t+1);
   y1=lsim(G,y,t); y2=glfdiff(y,t,0.5); plot(t,y1,t,y2)
```

非零初值Caputo微积分的Oustaloup滤波器逼近

- 标准Oustaloup滤波器可以用于RL微积分逼近
- 直接方法构造Caputo微分器较麻烦，不宜采用
- 非零初值信号的Caputo微积分逼近可以根据两个定理
  - 定理1 RL积分器

$${}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\gamma}y(t)={}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{-(\lceil\gamma\rceil-\gamma)}\left[y^{(\lceil\gamma\rceil)}(t)\right]\qquad {}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{2.3}y(t)={}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{-0.7}\left[y'''(t)\right]$$

  - 定理2 RL微分器

$${}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{\lceil\gamma\rceil-\gamma}\left[{}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\gamma}y(t)\right]=y^{(\lceil\gamma\rceil)}(t)\qquad {}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{0.7}\left[{}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{2.3}y(t)\right]=y'''(t)$$

分数阶微积分计算小结

- 如果信号的采样点已知
  - Riemann-Liouville glfdiff, glfdiff9
  - Caputo微积分 caputo9
- 如果信号未知
  - Oustaloup滤波器
  - Caputo微积分的Oustaloup滤波器实现

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD