单变量函数的数值积分计算

数值积分问题

- 用数值的方法求解积分
  - 已知数据点求积分
  - 已知函数求积分
- 主要内容
  - 由给定数据进行梯形求积
  - 单变量数值积分问题求解
  - 广义数值积分问题求解
  - 积分函数的计算
  - 二重、三重与多重积分数值求解

由给定数据进行梯形求积

- 梯形近似方法的基本思想

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\Delta f_i$$

- MATLAB的调用格式

```
sum((2*y(1:end-1,:)+diff(y)).*diff(x))/2
```

- 或　$S = \mathtt{trapz}(x, y)$

例3-59 定步长求积分

- 用定步长方法求解积分 $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\cos 15x\mathrm{d}x$
- 并比较不同步距下的结果
- 首先绘图

```
>> x=[0:0.01:3*pi/2, 3*pi/2];
   y=cos(15*x); plot(x,y)
```

- 在求解区域内被积函数有很强的振荡

不同步距的积分结果

➢对不同的步距比较近似结果

```
>> syms x, A=int(cos(15*x),0,3*pi/2)
   h0=[0.1,0.01,0.001,0.0001,...
       0.00001, 0.000001]; v=[];
   for h=h0,
      x=[0:h:3*pi/2,3*pi/2]; y=cos(15*x);
      I=trapz(x,y); v=[v; h,I,1/15-I];
   end
```

h	I	error	h	I	error
0.1	0.053892	0.012775	0.01	0.066542	0.00012497
0.001	0.066665	1.25×10^{-6}	0.0001	0.066667	1.25×10^{-8}
10^{-5}	0.066667	1.25×10^{-10}	10^{-6}	0.066667	1.2496×10^{-12}

0.25秒

数值积分求解函数

- ➢调用格式
  - ➢ 新版本数值积分

$$I = \mathtt{integral}(f, a, b, \text{property pairs})$$

  - ➢ 早期版本
    - ✓求定积分 $[y, k] = \mathtt{quad}(\mathit{fun}, a, b)$

$$[y, k] = \mathtt{quad}(\mathit{fun}, a, b, \epsilon)$$

    - ✓其他数值定积分函数

quadl(), quadgk(), quadv()

例3-60 被积函数描述

- 计算积分

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1.5}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

- 方法1，一般函数方法（点运算）

```
function y=c3ffun(x)
y=2/sqrt(pi)*exp(-x.^2);
```

- 方法2，inline函数方法（不建议使用）

```
>> f=inline('2/sqrt(pi)*exp(-x.^2)','x');
```

- 方法3，匿名函数(MATLAB 7.0)

```
>> f=@(x)2/sqrt(pi)*exp(-x.^2);
```

数值求解

- MATLAB求解语句

```
>> f=@(x)2/sqrt(pi)*exp(-x.^2);
   y=integral(f,0,1.5)
```

- 解析解：运用符号工具箱

```
>> syms x,
   y0=vpa(int(2/sqrt(pi)*exp(-x^2),0,1.5),60)
```

- 默认选项下数值解函数 integral() 即可保证高精度的数值解

例3-61 分段函数积分

➢给定如下分段函数

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{80}{4-\sin(16\pi x)}, & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

➢计算积分值 $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$

➢定积分示意图

```
>> x=[0:0.01:2, 2+eps:0.01:4,4];
   y=exp(x.^2).*(x<=2)+80./(4-sin(16*pi*x)).*(x>2);
   y(end)=0; x=[eps, x]; y=[0,y]; fill(x,y,’g’)
```

求解与验证

- MATLAB求解语句

```
>> f=@(x)exp(x.^2).*(x<=2)+80./...
        (4-sin(16*pi*x)).*(x>2);
   I=integral(f,0,4)
```

- 提高精度（检验）

```
>> I2=integral(f,0,4,’RelTol’,1e-20)
```

- 解析解

```
>> f=piecewise(’x<=2’,’exp(x^2)’,’x>2’,...
        ’80/(4-sin(16*pi*x))’);
   syms x; I=vpa(int(f,x,0,4))
```

例3-62 与梯形法比较

- 重新计算积分 $$\int_0^{3\pi/2} \cos(15x)\mathrm{d}x$$
- MATLAB求解语句

```
>> f=@(x)cos(15*x); tic,
   S=integral(f,0,3*pi/2,'RelTol',1e-20),
   toc
```

- 结论：和梯形法相比，速度精度都明显提高
- 理论值：1/15

例3-64 大范围积分

- 积分问题 $\displaystyle\int_0^{100}\cos(15x)\mathrm{d}x$
- 早期版本的几个积分函数不实用
- 数值解

```
>> f=@(x)cos(15*x);
   I1=integral(f,0,100,'RelTol',1e-20)
```

- 解析解

```
>> syms x; I=int(cos(15*x),x,0,100), vpa(I)
```

广义数值积分问题求解

- Integral() 函数可以直接用于广义积分运算
- 函数调用格式与前面介绍的完全一致

$$I = \mathtt{integral}(fun, a, b)$$

- 早期版本，采用 Gauss-Kronrod 算法

$$[y, k] = \mathtt{quadgk}(fun, a, b, \epsilon)$$

例3-66 广义积分的数值计算

- 数值计算 $$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
- 数值解与解析解
  - 解析解不可求，可以引出特殊函数erf()
  - 数值解可以直接得出数值

```
>> f=@(x)exp(-x.^2);
   I=integral(f,0,inf,'RelTol',1e-20)
   syms x;
   I1=int(exp(-x^2),0,inf), vpa(I1)
```

例3-67 含参数函数积分

- 积分函数，绘制 $I(\alpha)$ 曲线

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(\alpha^2 x)\mathrm{d}x$$

- 新版本支持向量参数 a

```
>> a=0:0.1:4;
   f=@(x)exp(-a*x.^2).*sin(a.^2*x);
   I=integral(f,0,inf,'RelTol',1e-20,'ArrayValued',true);
   plot(a,I)
```

- 早期版本需要对 α 循环

积分函数的数值求解

- 如何求积分函数 $F(x) = \int_a^x f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$F_{k+1} = F_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

- MATLAB函数 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_1] = \texttt{intfunc}(f, a, b, n)$

```
function [x,f1]=intfunc(f,a,b,n)
if nargin<=3, n=100; end;
x=linspace(a,b,n); f1=0; f0=0;
for i=2:n,
    f2=f0+integral(f,x(i-1),x(i)); f1=[f1, f2]; f0=f2;
end
```

例3-68 分段函数的积分函数

- 绘制分段函数的积分函数 $I(\tau)=\int_0^\tau f(x)\,\mathrm{d}x$

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ \dfrac{80}{4-\sin(16\pi x)}, & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$$

- 积分函数求解

```
>> f=@(x)exp(x.^2).*(x<=2)+80./...
            (4-sin(16*pi*x)).*(x>2);
   [x1,f1]=intfunc(f,0,4,100);
   plot(x1,f1,x1(end),f1(end),'o'), f1(end)
```