

区间极限与 多元函数极限

区间函数的极限运算

➤ 例3-7：极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$

➤ 早期MATLAB不能求解

➤ 新版本



```
>> syms x n real; f=x^n;  
L1=limit(f,x,inf), L2=limit(f,n,inf)
```

➤ 支持分段函数

MuPAD的底层limit函数调用

- 底层limit函数可以求解区间极限问题

```
L = feval(symengine, 'limit', f, ...  
          'x=infinity', 'Intervals')
```

- 例3-8 $a, b > 0$ 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} a \sin 8x^2 + b \cos(2x - 2)$



```
>> syms a b positive, syms x;  
f=a*sin(8*x^2)+b*cos(-2*x+2);  
L=feval(symengine, 'limit', f, ...  
        'x=infinity', 'Intervals')
```

分段函数的解析描述

➤编写如下代码

```
function f=piecewise(varargin), str=[];  
try  
    for i=1:2:length(varargin),  
        str=[str, '[' ,varargin{i}, ', ',varargin{i+1}, '], '];  
    end  
catch,  
    error('Input arguments should be given in pairs. '),  
end  
f=feval(symengine,'piecewise',str(1:end-1));
```

➤调用格式

$$f = \text{piecewise}(\text{var1}, \text{var2}, \dots)$$

例3-9 分段函数绘图

➤ 分段函数

$$y = \begin{cases} 1.1 \operatorname{sign}(x), & |x| > 1.1 \\ x, & |x| \leq 1.1 \end{cases}$$

➤ MATLAB符号描述



```
>> f=piecewise('abs(x)>1.1',...  
               '1.1*sign(x)', 'abs(x)<=1.1', 'x');  
syms x; x0=-3:0.01:3;  
f1=subs(f,x,x0); plot(x0,f1)
```



$-1.1 \leq x \leq 1.1$ $'x \geq -1.1 \text{ and } x \leq 1.1'$

多变量函数的极限

➤ 函数 $f(x,y)$ 的累极限

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right], \quad L_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right]$$

➤ 累极限的求解

$$L_1 = \text{limit}(\text{limit}(f, y, y_0), x, x_0)$$

$$L_2 = \text{limit}(\text{limit}(f, x, x_0), y, y_0)$$

➤ 累极限的求解是有次序的

例3-10 二元函数的累极限

➤试求出二元函数极限值

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{y}} e^{-1/(y^2+x^2)} \frac{\sin^2 x}{x^2} \left(1 + \frac{1}{y^2} \right)^{x+a^2 y^2} \right]$$

➤MATLAB代码



```
>> syms x a; syms y positive;  
f=exp(-1/(y^2+x^2))*sin(x)^2/x^2...  
    *(1+1/y^2)^(x+a^2*y^2);  
L=limit(limit(f,x,1/sqrt(y)),y,inf)
```

多元函数的重极限

➤ 数学表达式
$$L = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

➤ 不易求解

- 理论上说，沿所有方向均得出相同极限才可
- 不可能用累极限方法求解
- 累极限存在但不相等，没有重极限
- 有时累极限存在且相等，但无重极限

例3-11 重极限的尝试

➤ 重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$


➤ 求解

➤ 试图按4个不同的方向和速度求



```
>> syms x y; f=(x*y/(x^2+y^2))^(x^2);  
L1=limit(limit(f,x,inf),y,inf),  
L2=limit(limit(f,y,inf),x,inf)  
L3=limit(limit(f,x,y^2),y,inf),  
L4=limit(limit(f,y,x^2),x,inf)
```

例3-12 判断重极限是否存在

- 重极限问题 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- 证明极限不存在比求重极限容易得多
 - 沿 $y=rx$ 方向趋近
 - MATLAB求解
 - 

```
>> syms r x y; f=x*y/(x^2+y^2);  
L=limit(subs(f,y,r*x),x,0)
```

