

级数求和与 序列求积计算

级数求和与序列求积

➤ 级数求和计算

➤ 已知通项的有穷或无穷级数的和

➤ 数学表示

$$S = \sum_{k=k_0}^{k_n} f_k$$

➤ MATLAB语句

$$S = \text{symsum}(f_k, k, k_0, k_n)$$

例3-38 由古老的故事引出的级数求和问题

➤ 计算 $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{62} + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i$

➤ 数值计算方法

 `>> format long; sum(2.^[0:63])`

➤ 使用 `symsum()`

 `>> syms k; symsum(2^k,0,63)`

➤ 更多项的扩展

 `>> sum(sym(2).^[0:200])`

例3-39 级数求和

➤ 求解无穷级数的和

$$S = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

➤ 使用函数 `symsum()`



```
>> syms n;
```

```
s=symsum(1/((3*n-2)*(3*n+1)),n,1,inf)
```

➤ 使用数值方法



```
>> m=1:100000000;
```

```
s1=sum(1./((3*m-2).*(3*m+1))); format long; s1
```

大数吃小数的现象

➤	$\frac{1}{1 \times 4}$	0.2500000000000000
➤	$\frac{1}{4 \times 7}$	0.035714285714286x
➤	$\frac{1}{7 \times 11}$	0.012987012987013x
➤	$\frac{1}{11 \times 15}$	0.006060606060606xx

$$\Sigma = 0.333333322222158$$

例3-40 级数函数的求和

- 试求解含有变量 x 的无穷级数

$$J = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}}$$

- 符号运算方法

- 早期版本不能给出级数的收敛区域



```
>> syms n x;  
s1=symsum(2/((2*n+1)*(2*x+1)^(2*n+1)),n,0,inf);  
simplify(s1)
```

例3-41 综合问题

➤试求解级数与极限综合问题

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right]$$

➤MATLAB求解



```
>> syms m n;
```

```
limit(symsum(1/m,m,1,n)-log(n),n,inf)
```

➤注意：求解该问题不能先求解无穷级数的和，然后再减去 $\ln n$ ，这样做前后均为无穷大

例3-42 级数的极限

➤综合问题

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n^2} \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right]$$

➤通项提取 $\left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \sin \frac{k\pi}{n^2}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1$

➤求解



```
>> syms n k;
```

```
S=simplify(limit(symsum((1+k/n^2)*sin(k*pi/n^2),...  
k,1,n-1),n,inf))
```


序列求积问题

➤ 序列求积运算

$$P = \prod_{n=a}^b f(n)$$

➤ MATLAB语句

➤ 新符号运算工具箱

$$P = \text{symprod}(f_n, n, a, b)$$

➤ 早期版本

$$P = \text{maple}('product', fun, 'n=a..b')$$

例3-43 序列的积

➤ 试计算序列的乘积

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3} \right)$$

➤ MATLAB求解语句（有限、无限项）



```
>> syms k n;
```

```
P1=symprod(1+1/k^3,k,1,n); P1=simplify(P1)
```

```
P2=symprod(1+1/k^3,k,1,inf);
```

```
P2=simplify(P2)
```

例3-44 求序列的积

➤ 综合问题

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} - \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10} + \dots$$

➤ 通项

$$(-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

➤ 求解

```
>> syms k n,
```



```
S=1+symsum((-1)^n*symprod((2*k-1)/(2*k),...  
k,1,n),n,1,inf)
```

例3-45 序列函数求积

➤ 求解问题

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}$$

➤ 直接求解



```
>> syms n x;
```

```
P=symprod((1+x/n)*exp(-x/n),n,1,inf)
```

➤ 分段函数解读

