国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第四章 线性系统的数学模型

系统模型的转换

Conversions of Linear Models

主讲：薛定宇教授

系统模型的相互转换

- 前面介绍的各种模型之间的相互等效变换
- 主要内容
  - 连续模型和离散模型的相互转换
  - 系统传递函数的获取
  - 控制系统的状态方程实现
  - 状态方程的最小实现
  - 传递函数与符号表达式的相互转换

连续模型和离散模型的相互转换

- 连续状态方程的解析解

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 采样周期 T
- 选择 $t_0=kT,\ t=(k+1)T$

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}[(k+1)T-\tau]}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

数学推导与MATLAB命令

- 离散化

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}\boldsymbol{x}(kT) + \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\mathrm{d}\tau \ \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(kT)$$

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(kT)$$

- 离散化等效关系 $\boldsymbol{F} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T}, \quad \boldsymbol{G} = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\mathrm{d}\tau \ \boldsymbol{B}$
- 还可以采用Tustin变换（双线性变换） $s = \dfrac{2(z-1)}{T(z+1)}$
- MATLAB函数直接求解 G_1=c2d(G,T)

例4-10 状态方程的离散化

- 双输入模型，T=0.1

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -12 & -17.2 & -16.8 & -11.9 \\ 6 & 8.6 & 8.4 & 6 \\ 6 & 8.7 & 8.4 & 6 \\ -5.9 & -8.6 & -8.3 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1.5 & 0.2 \\ 1 & 0.3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- 输入模型、变换

```
>> A=[-12,-17.2,-16.8,-11.9; 6,8.6,8.4,6;
      6,8.7,8.4,6; -5.9,-8.6,-8.3,-6];
   B=[1.5,0.2; 1,0.3; 2,1; 0,0.5];
   C=[2,0.5,0,0.8; 0.3,0.3,0.2,1];
   G=ss(A,B,C,0); T=0.1; Gd=c2d(G,T)
```

例4-11 延迟传递函数的离散化

- 时间延迟系统的离散化 $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)^3}\mathrm{e}^{-2s}$
  - MATLAB求解

```
>> s=tf('s'); G=1/(s+2)^3; G.ioDelay=2;
```

  - 零阶保持器变换

```
>> G1=c2d(G,0.1)
```

  - 变换结果 T=0.1

$$G_{\mathrm{ZOH}}(z)=\frac{0.0001436z^2+0.0004946z+0.0001064}{z^3-2.456z^2+2.011z-0.5488}z^{-20}$$

其他离散化方法

- Tustin变换 `>> G2=c2d(G,0.1,'tustin')`
- 数学表示

$$G_{\mathrm{Tustin}}(z)=\frac{9.391\times10^{-5}z^3+0.0002817z^2+0.0002817z+9.391\times10^{-5}}{z^3-2.455z^2+2.008z-0.5477}z^{-20}$$

- 其他转换方法
  - FOH 一阶保持器
  - matched 单变量系统零极点不变
  - imp 脉冲响应不变准则

离散模型连续化

- 对前面的变换求逆 —— 数学公式
  - 状态方程的变换

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{T}\ln\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}$$

  - Tustin反变换

$$z=(1+sT/2)/(1-sT/2)$$

- MATLAB求解 (无需T)　　G_1=d2c(G)

例4-12 系统的连续化

- 对前面的连续状态方程模型离散化，
  - 对结果再连续化

```
>> A=[-12,-17.2,-16.8,-11.9; 6,8.6,8.4,6;...
      6,8.7,8.4,6; -5.9,-8.6,-8.3,-6];
   B=[1.5,0.2; 1,0.3; 2,1; 0,0.5];
   C=[2,0.5,0,0.8; 0.3,0.3,0.2,1];
   D=zeros(2,2); G=ss(A,B,C,D); Gd=c2d(G,T);
   G1=d2c(Gd)
```

- 可以基本上还原连续模型

系统传递函数的获取

- 已知状态方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

- 两端Laplace变换

$$\begin{cases} s\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \\ \boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s) \end{cases}$$

- 则 $\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$

系统传递函数的变换

- 因此可以得出传递函数

$$G(s) = Y(s)U^{-1}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

  - 难点 $(sI - A)^{-1}$
  - 基于Leverrie–Fadeev算法能得出更好结果
- 由零极点模型，直接展开分子分母
- 用MATLAB统一求解 $G_1 = \mathtt{tf}(G)$

例4-13 多变量系统的变换

- 多变量模型，求传递函数矩阵

```
>> A=[-12,-17.2,-16.8,-11.9; 6,8.6,8.4,6;
        6,8.7,8.4,6; -5.9,-8.6,-8.3,-6];
   B=[1.5,0.2; 1,0.3; 2,1; 0,0.5];
   C=[2,0.5,0,0.8; 0.3,0.3,0.2,1];
   D=zeros(2,2); G=ss(A,B,C,D); G1=tf(G)
```

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{3.5s^3-144.1s^2-20.69s-0.8372}{s^4+s^3+0.35s^2+0.05s+0.0024} & \dfrac{0.95s^3-64.13s^2-9.161s-0.374}{s^4+s^3+0.35s^2+0.05s+0.0024} \\ \dfrac{1.15s^3-36.32s^2-6.225s-0.1339}{s^4+s^3+0.35s^2+0.05s+0.0024} & \dfrac{0.85s^3-15.71s^2-2.619s-0.04559}{s^4+s^3+0.35s^2+0.05s+0.0024} \end{bmatrix}$$

传递函数与符号表达式的转换

- 传递函数到符号表达式

```
function P=tf2sym(G)
P=poly2sym(G.num{1},'s')/poly2sym(G.den{1},'s');
```

- 表达式到传递函数

```
function G=sym2tf(P)
[n,d]=numden(P); G=tf(sym2poly(n),sym2poly(d));
```

模型转换小结

- 本章涉及的线性模型统称为LTI模型
- 不同的模型是可以相互转换，如
  - 连续化与离散化 c2d, d2c
  - 转换成 tf, zpk，则调用相应函数即可

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD