国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第二章 MATLAB语言程序设计基础

矩阵的代数运算

Algebraic Computation of Matrices

主讲：薛定宇教授

矩阵的基本数学运算

- 矩阵的代数运算
- 矩阵的逻辑运算
- 矩阵的比较运算
- 解析结果的化简与变换
- 基本数论运算

矩阵的代数运算

- 矩阵转置
- 加减法运算
- 矩阵乘法
- 矩阵的除法
- 矩阵翻转
- 矩阵乘方运算
- 点运算

矩阵转置

- 矩阵表示
  - 矩阵 $\boldsymbol{A}$，n 行 m 列，被称作 $n \times m$ 矩阵
- Hermite转置　　$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}'$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}, c_{ji} = a_{ij}^{*}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$$

- 一般转置　　$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.'$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, b_{ji} = a_{ij}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$$

加减法运算

- 数学表示

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$$

- 用C语言编程难于实现，同 ***A*B***
- MATLAB语法

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$$

  - 注意：任一个变量可以为标量
  - 如果矩阵维数不匹配，系统会报错

矩阵乘法

- 数学表示：$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m$$

- MATLAB表示：

  $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$

  - 注意：系统自动检测矩阵维数是否匹配
  - 可直接用于标量、复数等

矩阵的除法

- 矩阵左除：
  - 求解线性方程组：$AX = B$
  - MATLAB解法： $X = A\backslash B$
  - 最小二乘解；若*A*为非奇异方阵，则 $X = A^{-1}B$
  - 使得误差最小 $\min_{X} ||AX - B||_2$
- 矩阵右除
  - 求解线性方程组 $XA = B$
  - MATLAB解法 $X = B/A$
  - 等效的运算 B/A=$(A'\backslash B')'$

矩阵翻转

- 左右翻转

$$b_{ij} = a_{i,n+1-j}, \quad \boldsymbol{B}\texttt{=fliplr(}\boldsymbol{A}\texttt{)}$$

- 上下翻转

$$c_{ij} = a_{m+1-i,j}, \quad \boldsymbol{B}\texttt{=flipud(}\boldsymbol{A}\texttt{)}$$

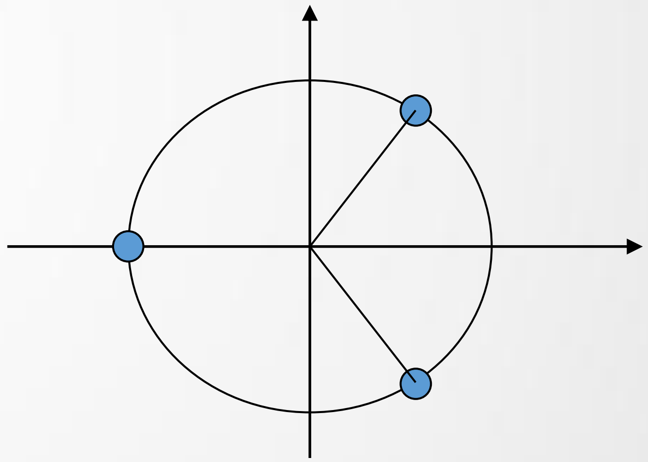
- 旋转 90º

$$d_{ij} = a_{j,n+1-i}, \quad \boldsymbol{D}\texttt{=rot90(}\boldsymbol{A}\texttt{)}$$

- 如何旋转180º？ $\boldsymbol{D}\texttt{=rot90(}\boldsymbol{A}\texttt{,}k\texttt{)}$

矩阵乘方

- 求矩阵 **A** 的 *x* 次幂 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}^x$
  - 数学描述
  - MATLAB命令 $\boldsymbol{F}$=$\boldsymbol{A}$^x
    - *A*必须为方阵
    - *x*为整数
    - *x*为非整数
- $\sqrt[k]{-1}$ 开方的多解：旋转
  - 得出一个解，乘以*k*-1次标量 $\gamma = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}/k}$



例2-9 矩阵的三次方根

- 求矩阵 A 的全部三次方根，并检验结果

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

- MATLAB代码

```
>> A=[1,2,3; 4,5,6; 7,8,0];
   C=A^(1/3), e=norm(A-C^3)
```

- 另两个根

```
>> j1=exp(sqrt(-1)*2*pi/3);
   A1=C*j1, A2=C*j1^2,
   norm(A-A1^3), norm(A-A2^3)
```

点运算

- 矩阵对应元素的直接运算 $\boldsymbol{C}$=$\boldsymbol{A}$.*$\boldsymbol{B}$, $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$
  - 例如： $\boldsymbol{B}$=$\boldsymbol{A}$.^$\boldsymbol{A}$, $b_{ij}=a_{ij}^{a_{ij}}$
  - 另一个例子：

$$\begin{bmatrix} 1^1 & 2^2 & 3^3 \\ 4^4 & 5^5 & 6^6 \\ 7^7 & 8^8 & 0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 27 \\ 256 & 3125 & 46656 \\ 823543 & 16777216 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1,2,3; 4 5,6; 7,8 0]; B=A.^A
```

  - 应用举例：绘图 $y=f(x)=x^2,\quad y_i=x_i^2$ `y=x.^2`

矩阵代数运算小结

- 不同形式的代数运算
  - 两种不同形式的转置——直接转置与Hermit转置
  - 加减乘除（左除右除）、乘方开方
  - 多根开方的计算与检验
- 点运算

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD