国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第十一章：分数阶控制基础

Chapter 11 Fundamentals in Fractional-order Control

Professor Dingyu Xue, xuedingyu@mail.neu.edu.cn
School of Information Science and Engineering,
Northeastern University, Shenyang, CHINA

分数阶微积分学概述

- 分数阶微积分是传统微积分学的拓展，在很多科学与工程领域都有应用范例
- 本章主要内容
  - 分数阶微积分的定义
  - 分数阶微积分计算
  - 分数阶传递函数模型
  - 线性分数阶系统建模与分析
  - 分数阶PID控制器
  - 分数阶非线性系统的仿真分析

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第十一章 分数阶控制基础

分数阶微积分概述

An Introduction to Fractional Calculus

主讲：薛定宇教授

分数阶微积分学概述

- 第3章的整数阶微积分问题 $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$
- 1695年法国数学家 L'Hôpital 问过微积分学创造者之一 Leibniz 的问题，n =1/2?
- 分数阶微积分理论已经有300年的历史了
  - 早期主要侧重于理论研究
  - 近年来在很多领域都已经开始应用
    - 自动控制领域出现了分数阶控制理论等新的分支
    - 分数阶信号处理

为什么我们需要分数阶微积分学?

- 例: 正弦函数的导数是什么?高阶导数是什么?

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\sin t=\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)$$

- 分数阶导数提供的信息

```
>> n0=0:0.1:1.5; t=0:0.2:2*pi; Z=[];
   for n=n0, Z=[Z; sin(t+n*pi/2)]; end
   surf(t,n0,Z)
```

- 分数阶微积分可能揭示出整数阶微积分视角下看不到的东西

分数阶微积分的定义

- 四种常用的定义、相互关联
  - 分数阶Cauchy积分公式
  - Grünwald-Letnikov分数阶微积分定义
  - Riemann-Liouville分数阶微积分公式
  - Caputo分数阶微分定义

分数阶Cauchy积分公式

- 数学描述

$$\mathscr{D}^\gamma f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\mathrm{C}} \frac{f(\tau)}{(\tau - t)^{\gamma+1}} \mathrm{d}\tau$$

- 其中，C为包围 $f(t)$ 单值与解析开区域的光滑曲线
- 不易计算，不考虑

Grünwald–Letnikov分数阶微积分定义

- 数学描述

$$ {}_a\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) $$

- 其中，$\binom{\alpha}{j}$ 为二项式系数 $w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$

$$ w_0^{(\alpha)} = 1,\ w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, j = 1, 2, \cdots $$

Riemann–Liouville分数阶微积分公式

- 积分的数学描述

$$ {}_a\mathscr{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\mathrm{d}\tau $$

- 其中，$0 < \alpha < 1$，且 a 为初始时间
- 分数阶微分定义的数学描述

$$ {}_a\mathscr{D}_t^{\beta} f(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left[{}_a\mathscr{D}_t^{-(n-\beta)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} \mathrm{d}\tau \right] $$

Caputo分数阶微分定义

$$ {}_a\mathscr{D}_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} \mathrm{d}\tau \right] $$

- 微分的数学描述：

$$ {}_0\mathscr{D}_t^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \mathrm{d}\tau $$

- 其中，$\alpha = m + \gamma$，m 为整数，$0 < \gamma \le 1$
- 当 $\gamma < 0$ 时， Caputo分数阶积分的数学描述
  - 与 Riemann–Liouville 积分定义完全一致

$$ {}_0\mathscr{D}_t^{\gamma} y(t) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1+\gamma}} \mathrm{d}\tau $$

不同分数阶微积分定义的关系与性质

- Grünwald–Letnikov, Riemann–Liouville等效
- Caputo 定义和 Riemann–Liouville 定义
  - $0 < \alpha < 1$

$$
\begin{aligned}
{}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\alpha} y(t) &= {}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{\alpha}\left(y(t) - y(t_0)\right) \\
&= {}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{\alpha} y(t) - \frac{y(t_0)(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}
\end{aligned}
$$

  - 更一般地

$$
{}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\alpha} y(t) = {}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(t_0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-t_0)^{k-\alpha}
$$

分数阶微积分的性质

- 解析函数 $f(t)$，${}_0\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t)$ 对 t 和 α 都是解析的
- α 为整数时，分数阶微分与整数阶微分的值完全一致，且 ${}_0\mathscr{D}_t^{0} f(t) = f(t)$
- 分数阶微积分算子为线性的，对常数 a、b

$$ {}_0\mathscr{D}_t^{\alpha}\left[af(t)+bg(t)\right] = a\,{}_0\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t) + b\,{}_0\mathscr{D}_t^{\alpha} g(t) $$

- 分数阶微积分算子满足交换律

$$ {}_0\mathscr{D}_t^{\alpha}\left[{}_0\mathscr{D}_t^{\beta} f(t)\right] = {}_0\mathscr{D}_t^{\beta}\left[{}_0\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t)\right] = {}_0\mathscr{D}_t^{\alpha+\beta} f(t) $$

函数分数阶导数的Laplace变换

- 函数的分数阶积分表达式的 Laplace 变换

$$\mathscr{L}\left[\mathscr{D}_t^{-\gamma} f(t)\right] = s^{-\gamma}\mathscr{L}[f(t)]$$

- Riemann-Liouville 微分的 Laplace 变换为

$$\mathscr{L}\left[{}_0^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{\alpha} f(t)\right] = s^{\alpha}\mathscr{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^{n-1} s^k \left[{}_0\mathscr{D}_t^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}$$

- Caputo 微分的Laplace变换

$$\mathscr{L}\left[{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\gamma} f(t)\right] = s^{\gamma}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\gamma-k-1} f^{(k)}(0)$$

分数阶微积分定义小结

- 引入分数阶的视角可能看到整数阶微积分框架下看不到的东西
- 分数阶微积分的几种定义
  - 主要探讨两种定义 Riemann-Liouville、 Caputo
  - Caputo定义的初值问题更接近实际

薛定宇教授主讲

东北大学

NORTHEASTERN UNIVERSITY 1923

控制系统仿真与CAD