国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第四章 线性系统的数学模型

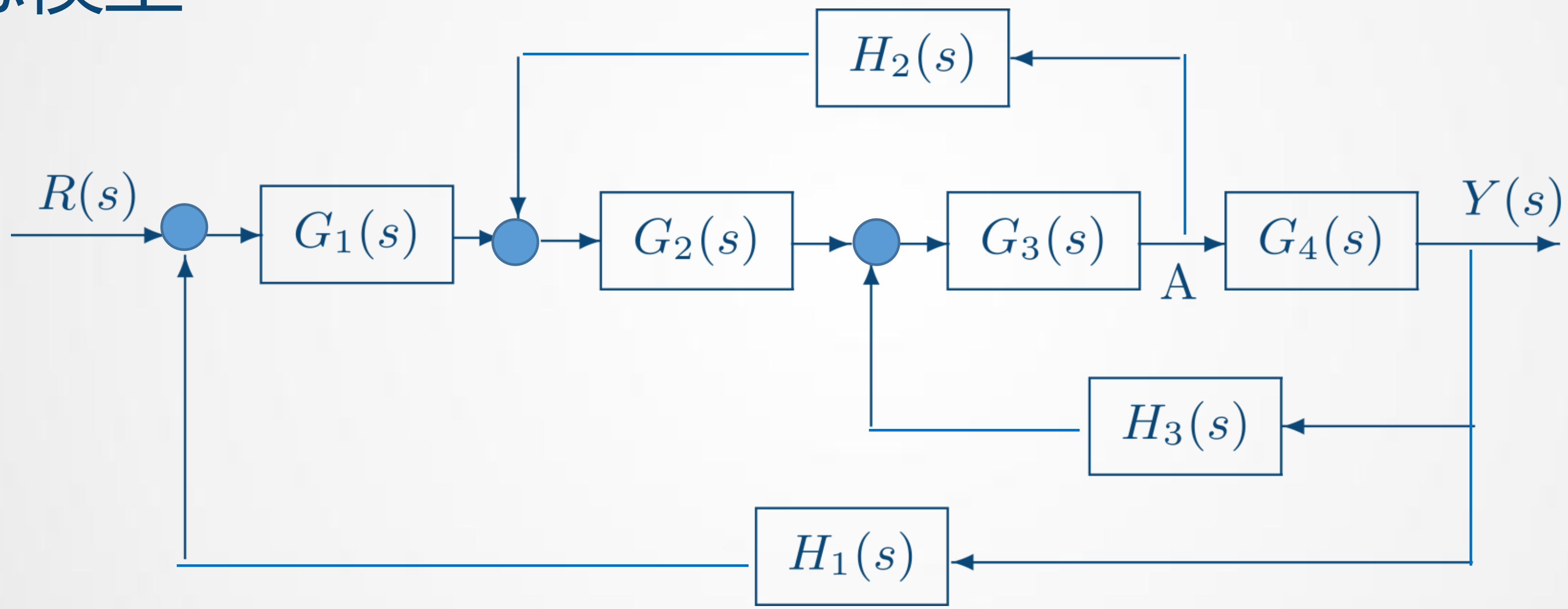
方框图的代数化简

Algebraic Simplification of Block Diagrams

主讲：薛定宇教授

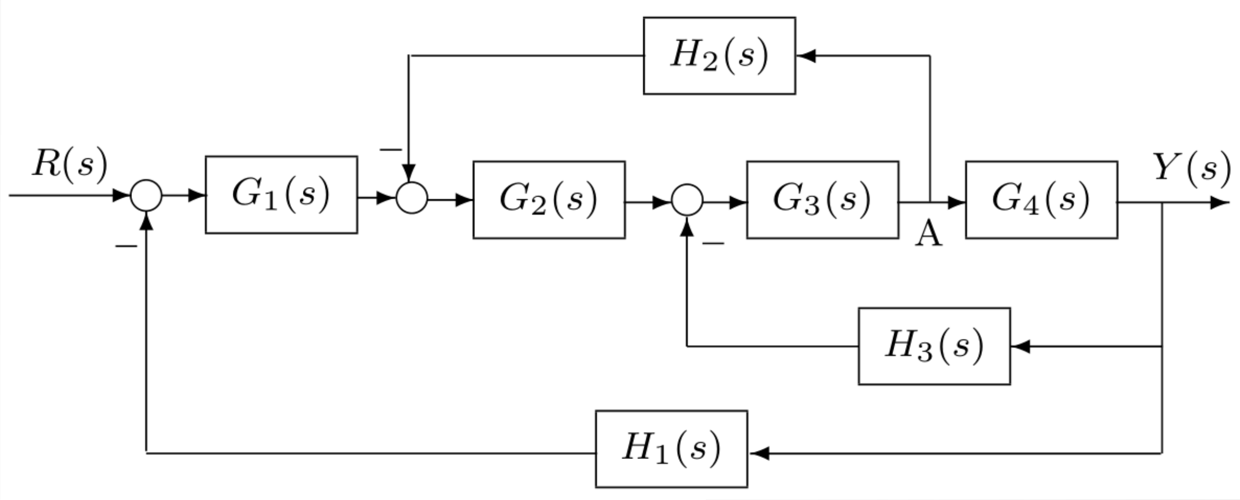
节点移动时的等效变换

- 考虑模型

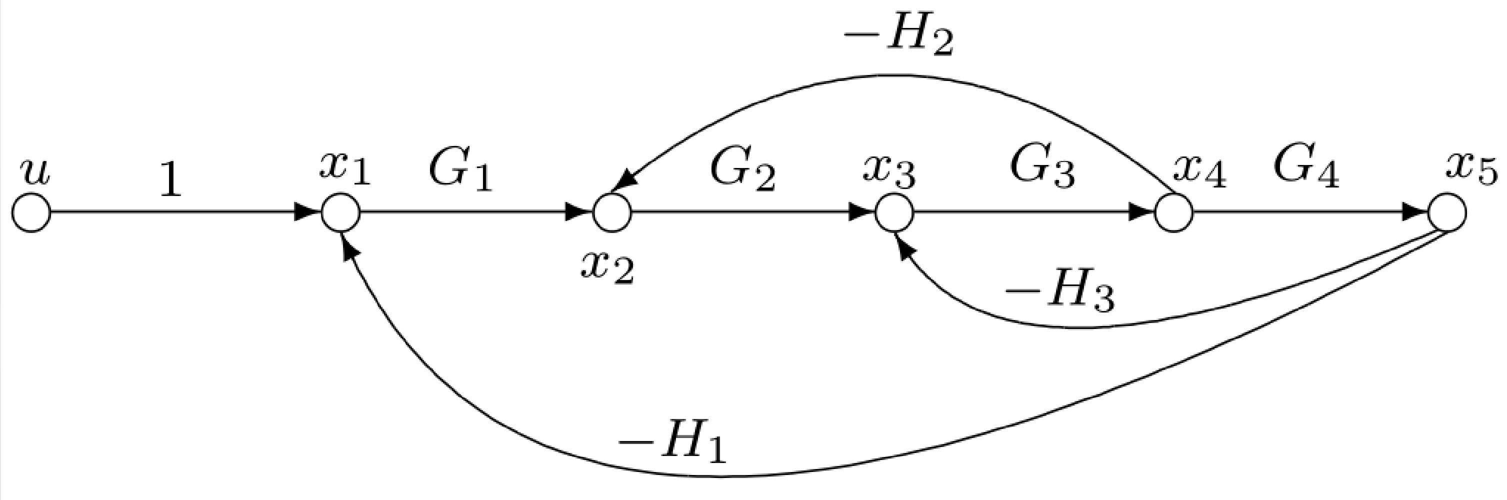


- 难点：需要手工移动节点，容易出错，需要更简单的方法

例4-23 框图的信号流图表示

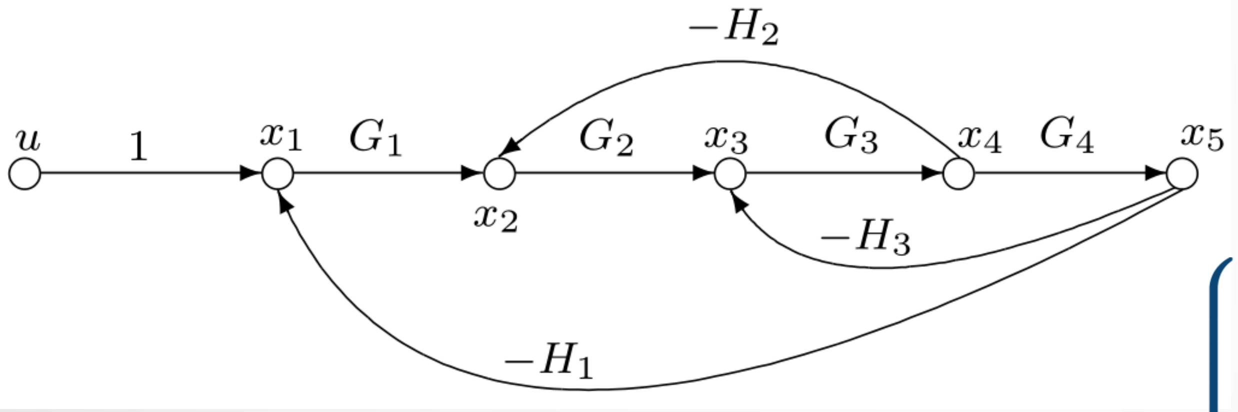


- 信号流图
  - 节点、通路、传递函数



写出节点方程

- 以流入节点的信号为准写出方程



$$x_1 = 1u - H_1 x_5$$

$$x_2 = G_1 x_1 - H_2 x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = u - H_1 x_5 \\ x_2 = G_1 x_1 - H_2 x_4 \\ x_3 = G_2 x_2 - H_3 x_5 \\ x_4 = G_3 x_3 \\ x_5 = G_4 x_4 \end{cases}$$

由节点方程写出矩阵形式

- 直接写出

$$\begin{cases} x_1 = u - H_1 x_5 \\ x_2 = G_1 x_1 - H_2 x_4 \\ x_3 = G_2 x_2 - H_3 x_5 \\ x_4 = G_3 x_3 \\ x_5 = G_4 x_4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 \\ G_1 & 0 & 0 & -H_2 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & -H_3 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由节点方程推导出传递函数矩阵

- 节点方程
  - 期望的传递函数 $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{U}$
  - 精确写法 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{-1}$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{U} \quad \rightarrow \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{-1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{P}$$

  - 利用MATLAB提供的符号运算可以直接求解，无需预处理

例4-24 框图的直接化简

- 节点方程的矩阵形式

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QX} + \boldsymbol{PU}$$

- 其中

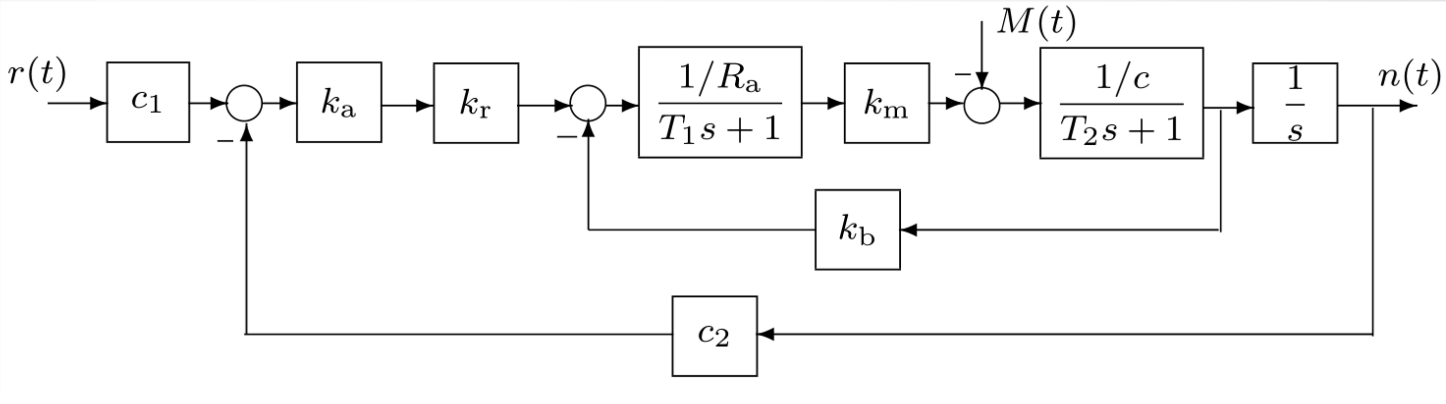
$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 \\ G_1 & 0 & 0 & -H_2 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & -H_3 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

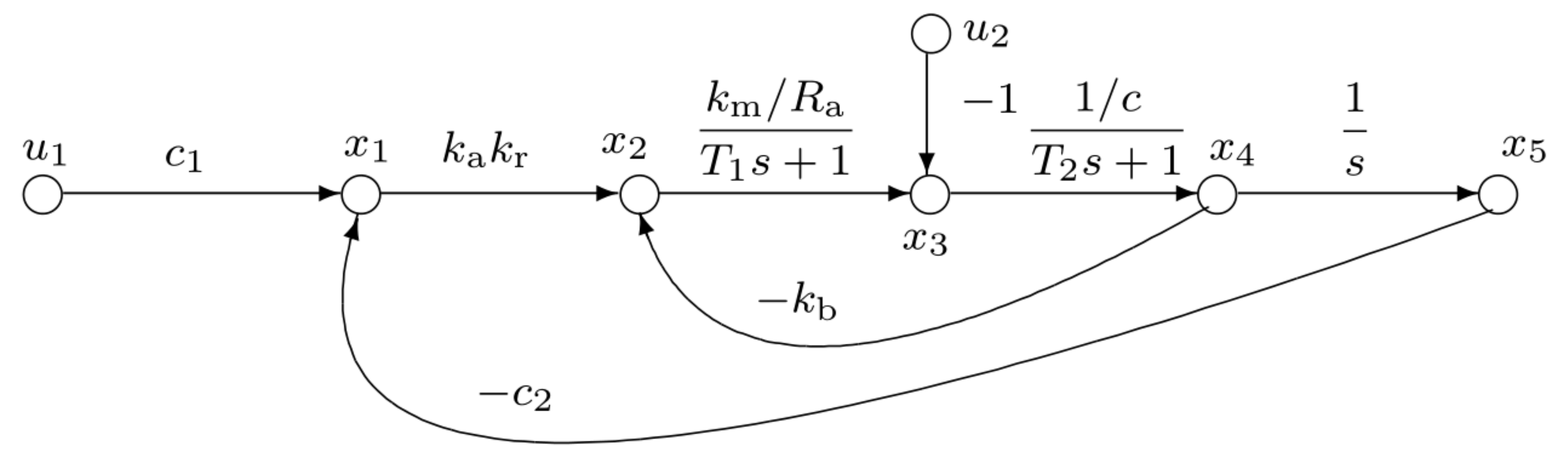
- MATLAB求解

```
>> syms G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3
   Q=[0 0 0 0 -H1; G1 0 0 -H2 0; 0 G2 0 0 -H3;
      0 0 G3 0 0; 0 0 0 G4 0];
   P=[1 0 0 0 0]'; G=inv(eye(5)-Q)*P
```

例4-25 重新求解电力拖动系统模型问题

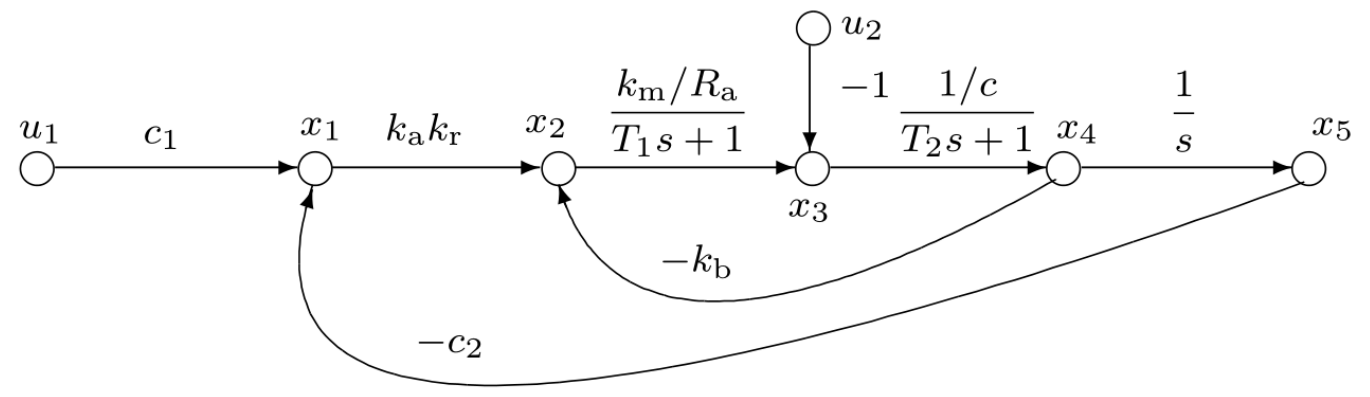
- ➤ 方框图信号流图
  - ➤双输入信号
  - ➤无需预处理





传递函数计算

- 信号流图



- 节点方程

$$\begin{cases} x_1 = c_1u_1 - c_2x_5 \\ x_2 = k_\mathrm{a}k_\mathrm{r}x_1 - k_\mathrm{b}x_4 \\ x_3 = \dfrac{k_\mathrm{m}/R_\mathrm{a}}{T_1s+1}x_2 - u_2 \\ x_4 = \dfrac{1/c}{T_2s+1}x_3 \\ x_5 = \dfrac{1}{s}x_4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\ k_\mathrm{a}k_\mathrm{r} & 0 & 0 & -k_\mathrm{b} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_\mathrm{m}/R_\mathrm{a}}{T_1s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1/c}{T_2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB求解

- 相关方程

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^{-1} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\ k_\mathrm{a}k_\mathrm{r} & 0 & 0 & -k_\mathrm{b} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_\mathrm{m}/R_\mathrm{a}}{T_1 s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1/c}{T_2 s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- MATLAB直接求解

```
>> syms Ka Kr c1 c2 c Ra T1 T2 Km Kb s
   Q=[0 0 0 0 -c2; Ka*Kr 0 0 -Kb 0; 0 Km/Ra/(T1*s+1) 0 0 0
      0 0 1/c/(T2*s+1) 0 0; 0 0 0 1/s 0];
   P=[c1 0; 0 0; 0 -1; 0 0; 0 0]; W=inv(eye(5)-Q)*P; W(5,:)
```

方框图代数化简小结

- 无需框图结构的手工处理
- 代数化简的步骤
  - 需要手工将框图表示成信号流图
  - 由信号流图可以写出节点方程
  - 由节点方程进行代数运算，可以得出化简模型
- 代数化简的优点
  - 手工处理比前面的方法更易于检验
  - 可以一次性得出所有节点的传递函数矩阵

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD