国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

# 第十一章 分数阶控制基础

## 分数阶传递函数模型与分析(下)

Modeling and Analysis of Fractional-order Transfer Functions (II)

主讲：薛定宇教授

# 分数阶传递函数模型

- 数学形式

$$G(s)=\frac{b_1 s^{\gamma_1}+b_2 s^{\gamma_2}+\cdots+b_m s^{\gamma_m}}{a_1 s^{\eta_1}+a_2 s^{\eta_2}+\cdots+a_{n-1} s^{\eta_{n-1}}+a_n s^{\eta_n}}\mathrm{e}^{-Ts}$$

- 多变量系统

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(s) & \cdots & g_{qp}(s) \end{bmatrix}$$

- 需要一个分数阶传递函数的“类”

# 面向对象的程序设计举例——MATLAB下类的设计

- 需要建一个文件夹 @fotf
  - 设计域（成员变量）——num, nn, den, nd, ioDelay
  - 与其相关的所有函数全部置于此文件夹内
  - 必要的文件
    - 类的创建——fotf.m
    - 类的显示——display.m
    - 其他重载函数，尽量与MATLAB控制系统工具箱的函数保持同名，尽量保持同样（相似）的调用格式，使得熟悉整数阶系统的使用者可以不费气力地直接使用分数阶系统工具箱
    - 注意别置入其他文件夹，因为可能会影响其他类的使用

# 例：类创建文件的内容

## ➢ 程序结构

```
classdef fotf
   properties
      num, nn, den, nd, ioDelay
   end
   methods
     function G=fotf(a,na,b,nb,T)
     if isa(a,'fotf'), G=a;
     elseif isa(a,'foss'), G=foss2fotf(a);
     elseif nargin==1 & (isa(a,'tf')|isa(a,'ss')|isa(a,'double')),
        a=tf(a); [n1,m1]=size(a); G=[]; D=a.ioDelay;
        for i=1:n1, g=[]; for j=1:m1,
           [n,d]=tfdata(tf(a(i,j)),'v'); nn=length(n)-1:-1:0;
           nd=length(d)-1:-1:0; g=[g fotf(d,nd,n,nn,D(i,j))];
        end, G=[G; g]; end
```

## ➢ 代码(续)

```
elseif nargin==1 & a=='s', G=fotf(1,0,1,1,0);
else, ii=find(abs(a)<eps); a(ii)=[]; na(ii)=[];
   ii=find(abs(b)<eps); b(ii)=[]; nb(ii)=[];
   if length(b)==0, b=0; nb=0; end
   if nargin==4, T=0; end
   G.num=b; G.den=a; G.nn=nb; G.nd=na; G.ioDelay=T;
end, end, end, end
```

## ➢ 函数调用方法

- ➢分数阶传递函数输入 $G = \texttt{fotf}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_{\rm a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}_{\rm b}, T)$
- ➢s算子输入 $s = \texttt{fotf('s')}$
- ➢模型的转换 $G = \texttt{fotf}(G_1)$

# 例11-5 分数阶传递函数的输入

- 分数阶传递函数模型

$$G(s)=\frac{0.8s^{1.2}+2}{1.1s^{1.8}+1.9s^{0.5}+0.4}\mathrm{e}^{-0.5s}$$

- 模型输入

```
>> G=fotf([1.1,1.9,0.4],[1.8,0.5,0],...
          [0.8,2],[1.2,0],0.5)
```

# 例11-6 分数阶传递函数矩阵的输入

- 数学模型

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1.5s^{1.2}+0.7}\mathrm{e}^{-0.5s} & \dfrac{2}{1.2s^{1.1}+1}\mathrm{e}^{-0.2s} \\ \dfrac{3}{0.7s^{1.3}+1.5} & \dfrac{2}{1.3s^{1.1}+0.6}\mathrm{e}^{-0.2s} \end{bmatrix}$$

- 输入语句

```
>> g1=fotf([1.5 0.7],[1.2 0],1,0,0.5);
   g2=fotf([1.2 1],[1.1 0],2,0,0.2);
   g3=fotf([0.7 1.5],[1.3 0],3,0);
   g4=fotf([1.3 0.6],[1.1 0],2,0,0.2);
   G=[g1,g2; g3,g4]
```

# 例11-7 重载函数编写举例

- 串联连接——置于@fotf

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

  - MIMO算法（矩阵乘法）

```
function G=mtimes(G1,G2)
G1=fotf(G1); G2=fotf(G2); [n1,m1]=size(G1); [n2,m2]=size(G2);
if m1==n2, G=fotf(zeros(n1,m2));
   for i=1:n1, for j=1:m2,
      for k=1:m1, G(i,j)=G(i,j)+sisofotftimes(G1(i,k),G2(k,j));
   end, end, end
elseif n1*m1==1, G=fotf(zeros(n2,m2));
   for i=1:n2, for j=1:m2, G(i,j)=G1*G2(i,j); end, end
elseif n2*m2==1, G=fotf(zeros(n1,m1));
   for i=1:n1, for j=1:m1, G(i,j)=G2*G1(i,j); end, end
else,
   error('The two matrices are incompatible for multiplication')
end
```

# 例11-8 多变量系统的闭环模型

- 开环模型

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1.5s^{1.2}+0.7} & \dfrac{2}{1.2s^{1.1}+1}\\ \dfrac{3}{0.7s^{1.3}+1.5} & \dfrac{2}{1.3s^{1.1}+0.6}\end{bmatrix}$$

- 闭环模型输入

```
>> g1=fotf([1.5 0.7],[1.2 0],1,0);
   g2=fotf([1.2 1],[1.1 0],2,0);
   g3=fotf([0.7 1.5],[1.3 0],3,0);
   g4=fotf([1.3 0.6],[1.1 0],2,0);
   G=[g1,g2; g3,g4]; H=fotf(eye(2)); G1=feedback(G,H)
```

# 分数阶线性系统的分析

- 如果已知系统的模型（FOTF 或 FOSS 对象）G
  - 性质分析
    - isstable(G), norm(G), norm(G,inf)
  - 时域分析
    - step(G,t)，impulse(G,t)，lsim(G,u,t)
  - 频域分析
    - bode(G,w)，nyquist(G,w)， michols(G,w)，margin
    - 多变量频域响应分析：gershgorin(G) ，mfrd(G,w)，sigma(G,w)
  - 根轨迹分析 rlocus(G)

# 分数阶系统的稳定性判定

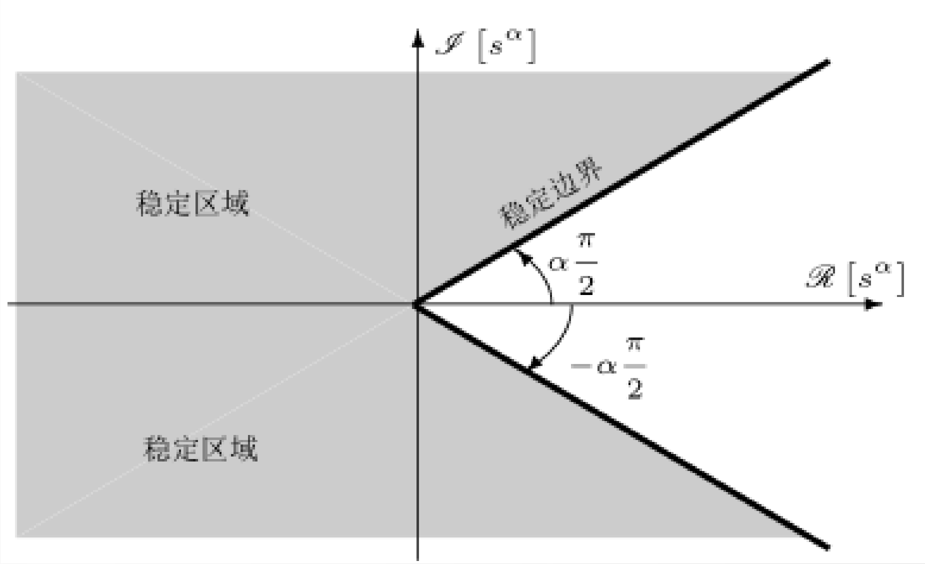
- 成比例阶系统的基阶为 $\alpha$。记 $\lambda = s^{\alpha}$，则原分数阶传递函数 $G(s)$ 可以转换成关于 $\lambda$ 的整数阶传递函数

$$G(\lambda) = \frac{b_1\lambda^m + b_2\lambda^{m-1} + \cdots + b_m\lambda + b_{m+1}}{a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\lambda + a_{n+1}}$$

- 系统稳定的判据

$$|\arg(p_i)| > \alpha\frac{\pi}{2}$$

  - 稳定边界对 $\lambda$ 而言是斜线;
  - 对 $s$ 而言仍然是虚轴



# 例11-9 分数阶系统的分析

- 系统模型 $G(s)=\dfrac{-2s^{0.63}-4}{2s^{3.501}+3.8s^{2.42}+2.6s^{1.798}+2.5s^{1.31}+1.5}$
- 系统的分析方法
  - 稳定性分析

```
>> a=[2,3.8,2.6,2.5,1.5]; na=[3.501,2.42,1.798,1.31,0];
   b=[-2,-4]; nb=[0.63,0]; G=fotf(a,na,b,nb);
   [key,alpha,a1,p]=isstable(G), p1=p.^(1/alpha)
```

  - 范数计算

```
>> n1=norm(G), n2=norm(G,inf)
```

# 分数阶系统分析 (续)

- 频域响应分析

```
>> w=logspace(-2,2); bode(G,w);
```

```
>> w=logspace(-2,4,400); nyquist(G,w); grid
   [Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G)
```

- 时域响应

```
>> t=0:0.01:30; step(G,t); y=impulse(G,t); line(t,y);
```

- 近似根轨迹分析
  - 不可能绘制精确根轨迹(3501阶系统)，只能绘制近似根轨迹

```
>> b=[-2 -4]; nb=[0.6 0]; a=[2 3.8 2.6 2.5 1.5];
   na=[3.5 2.4 1.8 1.3 0]; G1=fotf(a,na,b,nb); rlocus(G1)
```

# 多变量系统的频域分析

- 多变量系统设计的难处
  - 不同输入输出对之间的耦合
  - 应该考虑解耦算法，或将其补偿为对角占优的系统，再设计控制器，后面将介绍
- 对角占优　　gershgorin($\boldsymbol{H}$)
  - Gershgorin定理
  - 对角占优判定：绘制Nyquist图加Gershgorin带，如果Gershgorin带不包围坐标原点，则系统为对角占优系统
  - 如果对角占优，则可以考虑单回路控制器设计

# 例11-10 多变量系统的对角占优分析

- 多变量系统

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1.35s^{1.2}+2.3s^{0.9}+1} & \dfrac{2}{4.13s^{0.7}+1} \\ \dfrac{1}{0.52s^{1.5}+2.03s^{0.7}+1} & -\dfrac{1}{3.8s^{0.8}+1} \end{bmatrix}$$

- 补偿模型

$$\boldsymbol{K}_{\rm p}=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{K}_{\rm d}(s)=\begin{bmatrix} 1/(2.5s+1) & 0 \\ 0 & 1/(3.5s+1) \end{bmatrix}$$

- 对角占优分析

```
>> s=fotf('s'); g1=1/(1.35*s^1.2+2.3*s^0.9+1);
   g2=2/(4.13*s^0.7+1); g3=1/(0.52*s^1.5+2.03*s^0.7+1);
   g4=-1/(3.8*s^0.8+1); G0=[g1,g2; g3,g4];
   w=logspace(-1,0); H=mfrd(G0,w); gershgorin(H)
```

```
>> Kp=[1/3 2/3; 1/3 -1/3]; s=tf('s');
   Kd=[1/(2.5*s+1), 0; 0, 1/(3.5*s+1)];
   K1=G0*fotf(Kd)*fotf(Kp); H2=mfrd(K1,w); gershgorin(H2)
```

# 分数阶系统分析小结

- 仿照整数阶控制系统工具箱
  - 类的设计——名字、域名
  - 重载函数的设计——尽量与整数阶系统一致
- 分数阶传递函数类的使用
  - 一批重载函数直接可用—— *, +, feedback， isstable, bode ,Nyquist, nichols, rlocus step, impule, gershgorin

薛定宇教授主讲

东北大学

NORTHEASTERN UNIVERSITY 1923

控制系统仿真与CAD