国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

微分方程求解（下）

Ordinary Differential Equation Solutions (II)

主讲：薛定宇教授

例3-15 Apollo方程数值解

- Apollo 轨迹

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

- 参数 $\mu = 1/82.45,\ \mu^* = 1 - \mu,$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2},\ r_2 = \sqrt{(x-\mu^*)^2 + y^2}$$

- 初值 $x(0) = 1.2,\ \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = -1.04935751$

微分方程数值解的验证

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\mu^*(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-\mu^*)}{r_2^3}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\mu^* y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}$$

- 引入状态变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}$
- 变换后结果

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_4 + x_1 - \mu^*(x_1+\mu)/r_1^3 - \mu(x_1-\mu^*)/r_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2x_2 + x_3 - \mu^* x_3/r_1^3 - \mu x_3/r_2^3 \end{cases}$$

- 参数 $\mu = 1/82.45, \mu^* = 1 - \mu$

$$r_1 = \sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_3^2},\ r_2 = \sqrt{(x_1-\mu^*)^2 + x_3^2}$$

- 初值

$$\boldsymbol{x}(0) = [1.2, 0, 0, -1.04935751]^{\mathrm{T}}$$

数值求解方法

- 描述微分方程（不能用匿名函数）

```
function dx=apolloeq(t,x)
mu=1/82.45; mu1=1-mu; r1=sqrt((x(1)+mu)^2+x(3)^2);
r2=sqrt((x(1)-mu1)^2+x(3)^2);
dx=[x(2); 2*x(4)+x(1)-mu1*(x(1)+mu)/r1^3-mu*(x(1)-mu1)/r2^3;
    x(4); -2*x(2)+x(3)-mu1*x(3)/r1^3-mu*x(3)/r2^3];
```

- 求解

```
>> x0=[1.2; 0; 0; -1.04935751];
   [t,y]=ode45(@apolloeq,[0,20],x0);
   plot(y(:,1),y(:,3))
```

- 问题：结果正确与否？

数值解的检验方法

- 解的检验

```
>> options=odeset; options.RelTol=1e-7;
[t,y]=ode45(@apolloeq,[0,20],x0,options);
plot(y(:,1),y(:,3))
```

- 不能过分依赖MATLAB直接生成的结果
  - 选择不同的控制变量
    - RelTol, AbsTol
  - 选择不同的求解算法
    - ode45, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, ode113
  - 必须检验，否则结果没有可信度

微分方程的解析解

- MATLAB 函数 dsolve()

$$Y = \texttt{dsolve}(\texttt{eqn}_1, \texttt{eqn}_2, \cdots)$$

$$Y = \texttt{dsolve}(\texttt{eqn}_1, \texttt{eqn}_2, \cdots, x)$$

- 微分方程与初始条件的描述
  - 微分方程可以由符号表达式和字符串描述
  - 微分方程尽量用符号表达式描述
  - 对初值问题字符串更方便，如果自变量不是 t 需指定

例3-16 微分方程的解析解

- 给定高阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^4 y(t)}{\mathrm{d}t^4}+11\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3}+41\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+61\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+30y(t)=\mathrm{e}^{-6t}\cos 5t$$

- MATLAB直接求解

```
>> syms t y;
   Y=dsolve('D4y+11*D3y+41*D2y+61*Dy+30*y=exp(-6*t)*cos(5*t)');
   pretty(simplify(Y))
```

```
>> syms t y(t);
   Y=dsolve(diff(y,4)+11*diff(y,3)+41*diff(y,2)+61*diff(y)+...
         30*y==exp(-6*t)*cos(5*t));
   pretty(simplify(Y))
```

例3-17 已知初始条件的方程求解

- 如果已知初始条件

$$y(0)=1,\dot{y}(0)=1,\ \ddot{y}(0)=0,\ y^{(3)}(0)=0$$

- 可以由下面语句直接求解

```
>> Y=dsolve(’D4y+11*D3y+41*D2y+61*Dy+30*y=cos(5*t)*exp(-6*t)’,...
      ’y(0)=1’,’Dy(0)=1’,’D2y(0)=0’,’D3y(0)=0’);
```

```
>> syms t y(t)
   y1=diff(y); y2=diff(y,2); y3=diff(y,3);
   Y=dsolve(diff(y,4)+11*y3+41*y2+61*y1+...
      30*y==cos(5*t)*exp(-6*t),...
      y(0)==1,y1(0)==1,y2(0)==0,y3(0)==0)
```

微分方程求解小结

- 一阶显式微分方程数值解法
  - 相关的函数：ode45()、ode23()、ode15s()等
- 其他微分方程如何转换
  - 状态变量的选择、转换结果不唯一性
- 微分方程的解析解 dsolve()
- 微分方程的其他解法
  - 第6章将介绍基于框图的求解方法
  - 用Simulink把微分方程画出来，用仿真方法求解
  - 这样的求解范围更广，比如延迟微分方程

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD