国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第十一章 分数阶控制基础

分数阶非线性系统仿真(下)

Simulation of Fractional-order Nonlinear Systems (II)

主讲：薛定宇教授

分数阶微分方程的求解

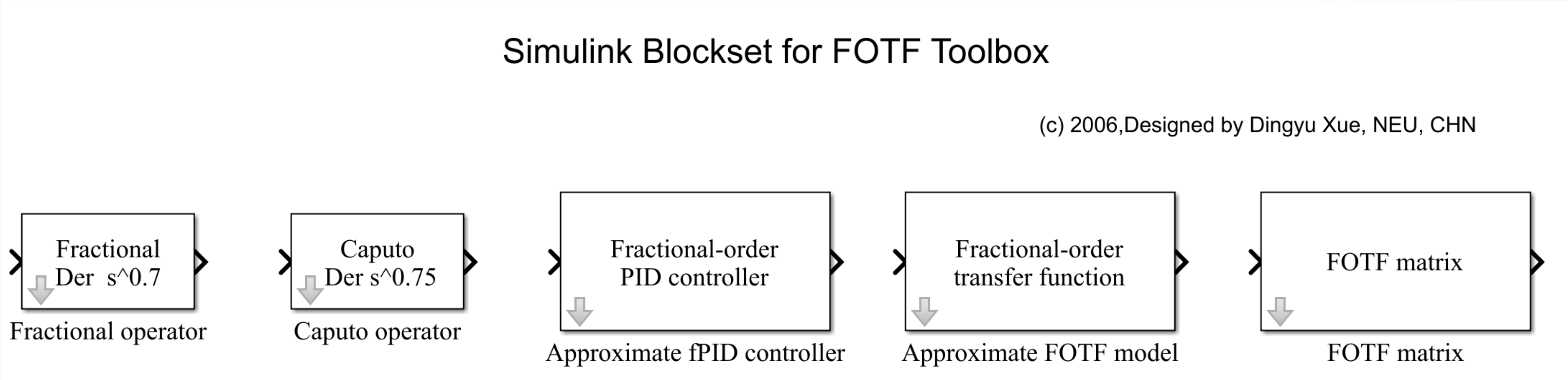
- 基于框图的分数阶微分方程数值解
  - 为什么需要基于框图的求解方法？
  - FOTF的分数阶微积分模块库
  - 通过例子演示框图解法

如何求解？如何评价？

- 复杂系统不宜用类似整数阶系统Runge-Kutta方法求解
  - 求解需要将整个微分方程组变成标准形式
  - 有时是不可行的，即使可行难度也极大
- 基于框图的解法应该是一个合理的选择
  - 很多方法只能求解零初值问题，非零初值如何求解？
- 如何评价？—— 基准测试问题
  - Xue Dingyu and Bai Lu. Benchmark problems for Caputo fractional-order ordinary differential equations. Fractional Calculus & Applied Analysis, 20(5), 2017

Simulink FOTF模块集

- 命令 fotflib 打开模块集



- 不建议使用的模块
  - Caputo operator —— 应该使用性质加Oustaloup filter
  - FOTF Matrix —— Approximate FOTF Model 更稳定

基准测试问题3 非线性非零初值的分数阶微分方程

- （基准问题3）非线性非零初值的分数阶微分方程

$$ {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.455} y(t) = -t^{0.1}\frac{\mathscr{E}_{1,1.545}(-t)}{\mathscr{E}_{1,1.445}(-t)}\,\mathrm{e}^t y(t)\,{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.555} y(t) + \mathrm{e}^{-2t} - \left[y'(t)\right]^2 $$

- 初始条件为 $y(0)=1,\ y'(0)=-1$
- 时间区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$
- 解析解 $y(t)=\mathrm{e}^{-t}$
- 说明：该方程来源是Diethelm教授的著作，原书方程有误，解析解不满足微分方程

非线性分数阶微分方程求解

- 第3基准测试问题

$$ {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.455}y(t) = -t^{0.1}\frac{\mathscr{E}_{1,1.545}(-t)}{\mathscr{E}_{1,1.445}(-t)}\mathrm{e}^t y(t)\,{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.555}y(t) + \mathrm{e}^{-2t} - \left[y'(t)\right]^2 $$

$$ y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ y(t)=\mathrm{e}^{-t} $$

- 两个积分器串联即可
  - 定义关键信号 $y(t), y'(t), y''(t)$
  - 构造分数阶微分信号
  - 闭环仿真求解

Simulink建模

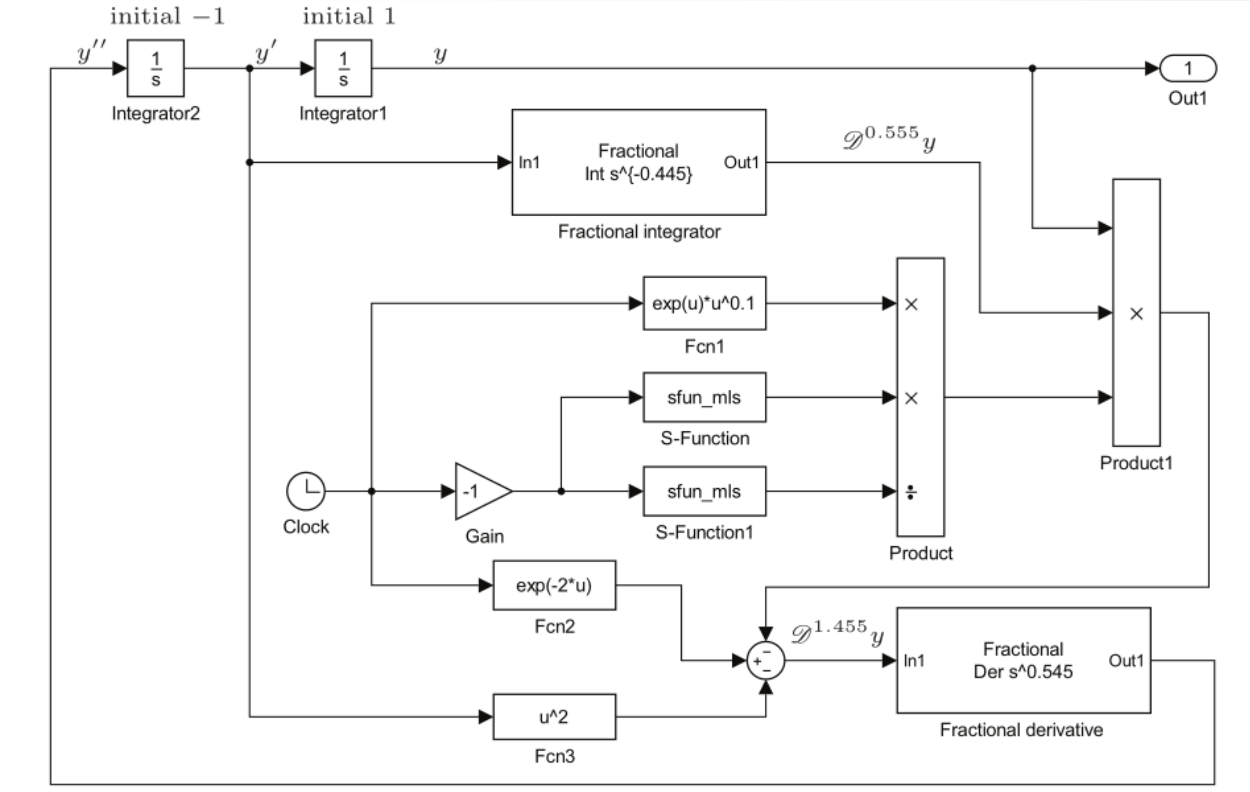
Simulink模型 $${}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.455}y(t) = -t^{0.1}\frac{\mathscr{E}_{1,1.545}(-t)}{\mathscr{E}_{1,1.445}(-t)}\,\mathrm{e}^t y(t)\,{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.555}y(t) + \mathrm{e}^{-2t} - \left[{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1}y(t)\right]^2$$

$${}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\gamma}y(t) = {}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{-(\lceil\gamma\rceil-\gamma)}\left[y^{(\lceil\gamma\rceil)}(t)\right]$$

$${}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.555}y(t) = {}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{-0.445}\left[y'(t)\right]$$

$${}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{\lceil\gamma\rceil-\gamma}\left[{}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{\gamma}y(t)\right] = y^{(\lceil\gamma\rceil)}(t)$$

$${}_{t_0}^{\mathrm{RL}}\mathscr{D}_t^{0.545}\left[{}_{t_0}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.455}y(t)\right] = y''(t)$$



传统微分方程求解算法与Simulink仿真模型求解比较

- 传统方法速度极慢，有时可能需要几小时求解
  - 最好的解 6.8855×10^{-9}, 时间159s
  - Simulink模型求解

(w_b, w_h)	$(10^{-2}, 10^2)$	$(10^{-3}, 10^3)$	$(10^{-4}, 10^4)$	$(10^{-5}, 10^5)$
$p=5$	5.20×10^{-3}	5.59×10^{-4}	3.58×10^{-5}	9.10×10^{-5}
$p=6$	5.20×10^{-3}	5.66×10^{-4}	4.71×10^{-5}	2.86×10^{-5}
$p=7$	5.20×10^{-3}	5.69×10^{-4}	5.59×10^{-5}	1.07×10^{-5}
$p=8$	5.30×10^{-3}	5.72×10^{-4}	5.76×10^{-5}	5.40×10^{-6}
$p=9$	5.30×10^{-3}	5.73×10^{-4}	5.76×10^{-5}	5.53×10^{-6}
$p=10$	5.30×10^{-3}	5.74×10^{-4}	5.76×10^{-5}	6.23×10^{-6}
maximum time	0.156161 s	0.318534 s	2.142945 s	19.480147 s

基准测试问题4 隐式分数阶微分方程

- （基准问题4）隐式分数阶微分方程

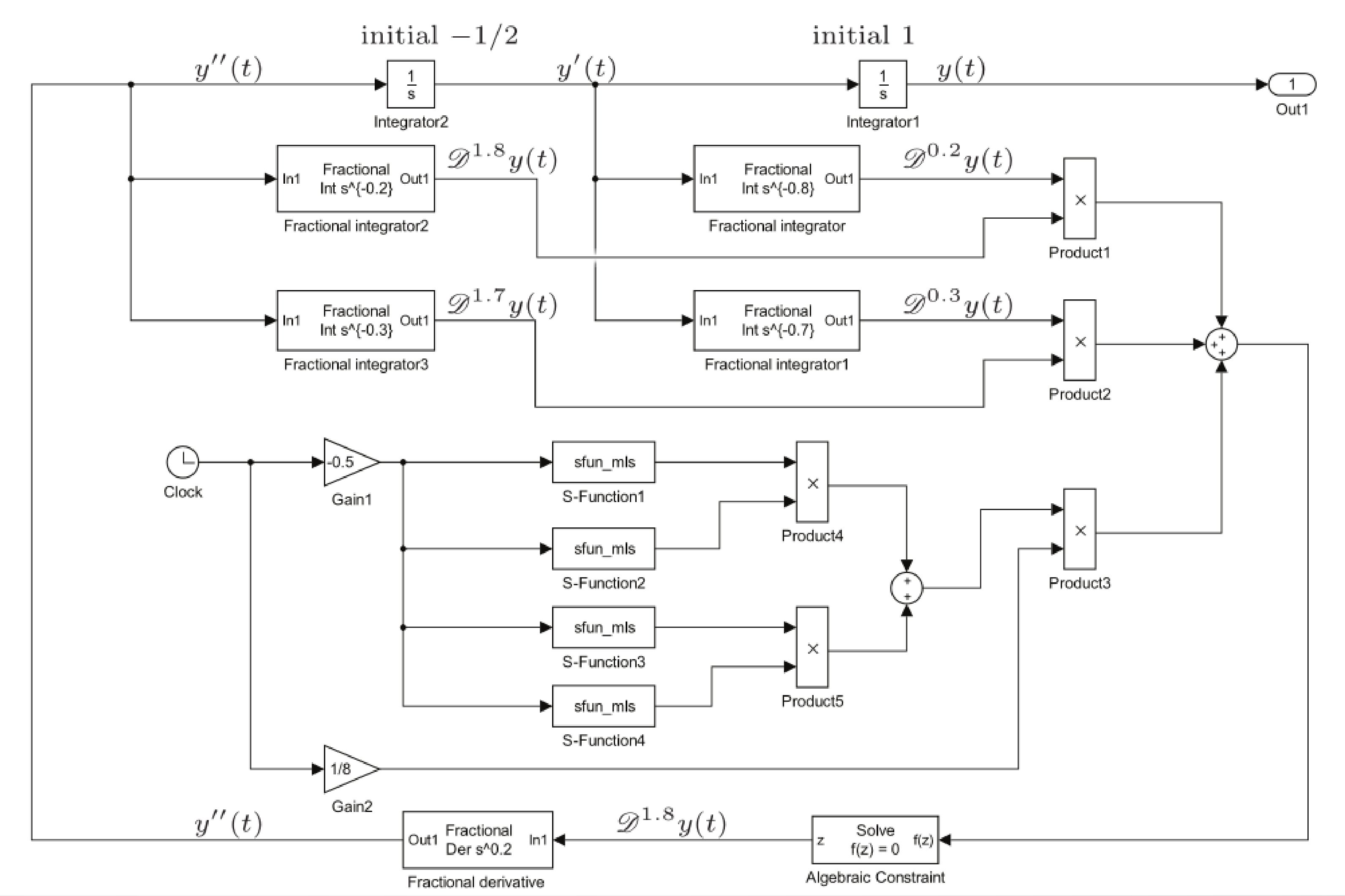
$$
{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.2}y(t)\ {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.8}y(t) + {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.3}y(t)\ {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.7}y(t)
$$

$$
= -\frac{1}{8}\ t\ \mathscr{E}_{1,1.8}(-t/2)\ \mathscr{E}_{1,1.2}(-t/2) - \frac{1}{8}\ t\ \mathscr{E}_{1,1.7}(-t/2)\ \mathscr{E}_{1,1.3}(-t/2)
$$

- 初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-1/2$
- 时间区间 $0 \leqslant t \leqslant 10$，解析解 $y(t)=\mathrm{e}^{-t/2}$
- 隐式微分方程文献上没有通用的求解方法

Simulink仿真模型

- Simulink模型
  - 精度 4.11×10^{-5}
  - 耗时 214s



误差分析

➢ 不同滤波器参数的仿真结果

(w_b, w_h)	$(10^{-2}, 10^{2})$	$(10^{-3}, 10^{3})$	$(10^{-4}, 10^{4})$	$(10^{-5}, 10^{5})$
$p = 5$	1.40×10^{-2}	2.30×10^{-3}	7.98×10^{-4}	2.70×10^{-3}
$p = 6$	1.40×10^{-2}	2.30×10^{-3}	4.07×10^{-4}	8.35×10^{-4}
$p = 7$	1.40×10^{-2}	2.30×10^{-3}	3.16×10^{-4}	2.84×10^{-4}
$p = 8$	1.40×10^{-2}	2.30×10^{-3}	2.93×10^{-4}	1.14×10^{-4}
$p = 9$	1.40×10^{-2}	2.30×10^{-3}	2.88×10^{-4}	5.91×10^{-5}
$p = 10$	1.40×10^{-2}	2.30×10^{-3}	2.87×10^{-4}	4.11×10^{-5}
maximum time	0.512608 s	2.597576 s	27.741354 s	214.335601 s

➢没有其他方法能求解隐式分数阶微分方程

➢速度慢，因为每步仿真需要由 Solve求解代数方程

分数阶系统的基于Simulink的仿真方法

- 定义关键信号与初值
  - 利用整数阶积分器链,并给初值赋值
  - 利用前面的两个定理定义所需的分数阶导数信号
  - 所有初值问题均在整数阶积分器中设置, 所以不必再考虑初值
- 构造Simulink仿真模型, 系统的仿真分析
- 仿真结果的验证
  - 一般问题的解析解未知, 所以不能用benchmark验证方法
  - 选择不同的滤波器参数, 如果不同参数下结果一致, 则可以接受
- 理论上可以求解任意复杂的分数阶微分方程

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD