

多重数值积分运算

三重定积分的数值求解

➤ 长方体区域的三重定积分标准型

$$I = \int_{x_m}^{x_M} \int_{y_m(x)}^{y_M(x)} \int_{z_m(x,y)}^{z_M(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

➤ 函数调用格式

$$I = \text{integral3}(f, x_m, x_M, y_m, y_M, z_m, z_M, \text{pars})$$

➤ 早期版本

$$I = \text{triplequad}(f, x_m, x_M, \dots \\ y_m, y_M, z_m, z_M, \epsilon, @quad1)$$

例3-73 三重积分计算

- 用数值方法求三重定积分问题

$$\int_0^2 \int_0^\pi \int_0^\pi 4xz e^{-x^2 y - z^2} dz dy dx$$

- 长方体区域

- MATLAB求解语句



```
>> f=@(x,y,z)4*x.*z.*exp(-x.*x.*y-z.*z);  
I=integral3(f,0,2,0,pi,0,pi,...  
            'RelTol',1e-20)
```

多重积分数值求解

- NIT工具箱（数值积分工具箱）还可以解决多重超长方体边界的定积分问题

$$I = \int_{x_{1m}}^{x_{1M}} \int_{x_{2m}}^{x_{2M}} \cdots \int_{x_{pm}}^{x_{pM}} f(x_1, x_2, \cdots, x_p) dx_p \cdots dx_2 dx_1$$

- 调用格式

$$I = \text{quadndg}(\text{fun}, [x_{1m}, x_{2m}, \cdots, x_{pm}], \cdots \\ [x_{1M}, x_{2M}, \cdots, x_{pM}], \epsilon)$$

例3-74 重新计算三重积分

- 前面的长方体区域三重积分问题

$$\int_0^2 \int_0^\pi \int_0^\pi 4xz e^{-x^2 y - z^2} dz dy dx$$

- 变量替换 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

- 被积函数 $f(\boldsymbol{x}) = 4x_1 x_3 e^{-x_1^2 x_2 - x_3^2}$

- 重新求解（更快）



```
>> f=@(x)4*x(1)*x(3)*exp(-x(1)^2*x(2)-x(3)^2);  
tic, I=quadndg(f,[0 0 0],[2,pi,pi]), toc
```

例3-75 五重积分的数值计算

➤ 5重定积分问题

$$I = \int_0^5 \int_0^4 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \sqrt[3]{v} \sqrt{w} x^2 y^3 z \, dz dy dx dw dv$$

➤ 变量替换 $x_1 = v, x_2 = w, x_3 = x, x_4 = y, x_5 = z$

➤ 被积函数 $f(x) = \sqrt[3]{x_1} \sqrt{x_2} x_3^2 x_4^3 x_5$

➤ MATLAB求解析解



```
>> f=@(x)(x(1))^(1/3)*sqrt(x(2))*x(3)^2*x(4)^3*x(5);  
I=quadndg(f,[0 0 0 0 0],[5,4,1,2,3])
```

五重积分解析解

➤ 本例存在解析解



```
>> syms x y z w v;  
F=v^(1/3)*sqrt(w)*x^2*y^3*z;  
I=int(int(int(int(int(F,z,0,3),...  
y,0,2),x,0,1),w,0,4),v,0,5)
```

➤ 注意：该工具箱单重积分函数 `quadg()` 的调用格式和 `quad()` 一致，其效率也高于 `quadl()`，故在进行数值求积分时建议使用此工具箱

例3-76 解析不可积的五重积分计算

➤ 解析不可积多重积分

$$I = \int_0^5 \int_0^4 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 \left(e^{-\sqrt[3]{v}} \sin \sqrt{w} + e^{-x^2 y^3 z} \right) dz dy dx dw dv$$

➤ 变量替换 $x_1 = v, x_2 = w, x_3 = x, x_4 = y, x_5 = z$

➤ 被积函数 $f(\boldsymbol{x}) = e^{-\sqrt[3]{x_1}} \sin \sqrt{x_2} + e^{-x_3^2 x_4^3 x_5}$

➤ MATLAB求解



```
>> f=@(x)exp(-(x(1))^(1/3))*sin(sqrt(x(2)))...  
      +exp(-x(3)^2*x(4)^3*x(5));
```

```
tic, I=quadndg(f,[0 0 0 0 0],[5,4,1,2,3]), toc
```


