国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

微分方程求解（上）

Ordinary Differential Equation Solutions (I)

主讲：薛定宇教授

微分方程的求解

- 连续控制系统数学模型的理论基础是微分方程，研究微分方程对其仿真分析有意义
- 只有少数微分方程（线性定常或极少量非线性方程）有解析解，其他的微分方程得借助数值方法求解
- 本节主要介绍
  - 一阶显式微分方程组的数值解
  - 如何将一般微分方程化为可解形式、解的验证
  - 常微分方程的解析解法

一阶常微分方程组的数值解法

- 一阶显式微分方程的标准型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}_0, \quad \dot{x}_i = f_i(t, \boldsymbol{x}), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

- 微分方程数值解算法
  - Runge–Kutta法、Adams法、Gear法等
  - 传统定步长方法适合于讲解不适合应用
  - 变步长方法、MATLAB直接可调用函数

$[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}]$=ode45(Fun,tspan,$\boldsymbol{x}_0$,options,pars)

微分方程求解的步骤

- 将微分方程变换成标准型 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}_0$
- 用MATLAB描述微分方程
  - M-函数
    入口：function dx=funmane(t,x)
  - 匿名函数
    >> f=@(t,x)[...]
- 求解 $[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}]$=ode45(Fun,tspan,$\boldsymbol{x}_0$,options,pars)
- 验证：odeset()函数

例3-13 非线性微分方程求解

- 非线性微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + [x(t) - c]z(t), \end{cases}$$

- 变换 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = b + [x_1(t) - c]x_3(t) \end{cases} \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -x_2(t) - x_3(t) \\ x_1(t) + ax_2(t) \\ b + [x_1(t) - c]x_3(t) \end{bmatrix}$$

- MATLAB描述

```
function dx=rossler(t,x)
dx=[-x(2)-x(3); x(1)+0.2*x(2); 0.2+(x(1)-5.7)*x(3)];
```

```
>> f=@(t,x)[-x(2)-x(3); x(1)+0.2*x(2); 0.2+(x(1)-5.7)*x(3)];
```

微分方程数值求解

- 解方程

```
>> x0=[0; 0; 0];
   [t,y]=ode45(@rossler,[0,100],x0); plot(t,y)
```

```
>> plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3)), grid
```

- 带附加变量问题求解

```
>> a=0.2; b=0.2; c=5.7;
   f=@(t,x)[-x(2)-x(3); x(1)+a*x(2); b+(x(1)-c)*x(3)];
   [t,y]=ode45(f,[0,100],x0);
```

微分方程的变换

- 目的：将需要求解的方程变成 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}_0$
- 例：高阶微分方程变换

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots, y^{(n-1)})$$

- 选择状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \cdots, x_n = y^{(n-1)}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1 \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

- 状态变量不唯一，变换结果不唯一
- 调用 ode45() 直接求解

高阶微分方程变换

- 例：高阶微分方程组变换

$$\begin{cases} f(t,x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)},y,\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \\ g(t,x,\dot{x},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)},y,\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \end{cases}$$

- 选择状态变量 $x_1=x, x_2=\dot{x},\cdots,x_m=x^{(m-1)},$

$$x_{m+1}=y, x_{m+2}=\dot{y},\cdots,x_{m+n}=y^{(n-1)}$$

- 由下面方程解出 $\dot{x}_m, \dot{x}_{m+n}$，仿照前面得出标准型

$$\begin{cases} f(t,x_1,x_2,\cdots,x_m,\dot{x}_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n},\dot{x}_{m+n})=0 \\ g(t,x_1,x_2,\cdots,x_m,\dot{x}_m,x_{m+1},\cdots,x_{m+n},\dot{x}_{m+n})=0 \end{cases}$$

例3-14 高阶微分方程组求解

- Van der Pol 方程

$$\ddot{y}(t)+[y^2(t)-1]\dot{y}(t)+y(t)=0,\ y(0)=-0.2,\ \dot{y}(0)=-0.7$$

- 选择状态变量 $x_1=y, x_2=\dot{y}$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-[x_1^2(t)-1]x_2(t)-x_1(t)\end{cases} \qquad \dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ -[x_1^2(t)-1]x_2(t)-x_1(t)\end{bmatrix}$$

```
>> f=@(t,x)[x(2); -(x(1)^2-1)*x(2)-x(1)];
>> x0=[-0.2; -0.7]; tf=20;
   [t,x]=ode45(f,[0,tf],x0); plot(t,x)
>> plot(x(:,1),x(:,2))
```

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD