

积分计算

积分问题的解析解

- 在微积分课程中介绍了函数的积分，真正的求解需要掌握各种各样的方法，如分部积分法、分离变量法等，这里将介绍利用计算机无需任何其他技巧的积分方法
 - 不定积分的求解
 - 定积分与无穷积分计算
 - 多重积分问题的MATLAB求解

不定积分的求解

➤不定积分

$$\int f(x)dx, \quad \int \cdots \int f(x)dx^n$$

➤MATLAB函数

➤ 积分 $F = \text{int}(fun, x)$

➤ 多重积分，嵌套调用；更多重应该用循环


$$F = \text{int}(\cdots \text{int}(fun, x))$$

➤ 积分得出的是原函数，结果再加 C


例3-23 先求导再积分还原

➤函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 3}$

➤求其一阶导数，再积分

```
 >> syms x; y=sin(x)/(x^2+4*x+3);  
y1=diff(y); y0=int(y1)
```

➤求其四阶导数，再积分，检验结果

```
 >> y4=diff(y,4);  
y0=int(int(int(int(y4))));  
simplify(y0)
```

例3-26 积分公式证明

➤ 试证明

$$\int x^3 \cos^2 ax dx = \frac{x^4}{8} + \left(\frac{x^3}{4a} - \frac{3x}{8a^3} \right) \sin 2ax \\ + \left(\frac{3x^2}{8a^2} - \frac{3}{16a^4} \right) \cos 2ax + C$$

➤ 对等号左侧进行化简



```
>> syms a x;
```

```
f=simplify(int(x^3*cos(a*x)^2,x))
```

两个表达式比较

➤ 输入右侧，比较并化简



```
>> f1=x^4/8+(x^3/(4*a)-3*x/(8*...  
      a^3))*sin(2*a*x)+(3*x^2/...  
      (8*a^2)-3/(16*a^4))*cos(2*a*x);  
      simplify(f-f1)
```

➤ 如果想证明两个表达式等效，最简单的方法是求二者之差，再化简这个差


➤ 二者之差为常数，可以归并如 C

例3-27 不可积函数的不定积分计算

➤考虑如下两个不可积问题的积分问题求解

$$f(x) = e^{-x^2/2}, g(x) = x \sin(ax^4)e^{x^2/2}$$

➤MATLAB求解

 >> syms x; I=int(exp(-x^2/2))

➤结果 $I = \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2\pi}}$

➤特殊函数 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

含参数的不可积函数

➤求解 $\int g(x)dx$, 其中 $g(x) = x \sin(ax^4)e^{x^2/2}$

➤MATLAB命令



```
>> syms a x;
```

```
int(x*sin(a*x^4)*exp(x^2/2))
```

➤无法获得显示的解

Warning:Explicit integral could not be found

➤并不是所有的积分都能被计算出，因为原始函数不一定存在

定积分与无穷积分计算

➤ 定积分与无穷积分

$$\int_a^b f(x)dx \quad \int_a^{\infty} f(x)dx$$

➤ 语句格式 $I=\text{int}(fun,x,a,b)$

$$I=\text{int}(fun,x,a,\text{inf})$$

➤ 有时需要Newton-Leibniz公式 —— 原函数 $F(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

例3-28 定积分求解

- 函数 $f(x) = e^{-x^2/2}$
- 求 $a=0, b=1.5$ 或 ∞ 时的定积分值
- MATLAB求解
 - 有解析解的显示解析解
 - 否则得出高精度数值解



```
>> syms x; I1=int(exp(-x^2/2),x,0,1.5)  
    vpa(I1,70),  
    I2=int(exp(-x^2/2),x,0,inf)
```

例3-30 反常积分的计算

➤ 数学问题

$$\int_1^{2e} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$$

➤ MATLAB直接求解



```
>> syms x; f=1/x/sqrt(1-log(x)^2);  
I=int(f,x,1,2*exp(sym(1)))
```

多重积分问题的MATLAB求解

➤ 多重积分

$$I = \int_{x_m}^{x_M} \int_{y_m(x)}^{y_M(x)} \int_{z_m(x,y)}^{z_M(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

➤ 利用 `int()` 函数可以直接求解

➤ 注意：某些问题需要根据实际情况先选择积分顺序，可积的部分作为内积分，然后再处理外积分。否则会得不出解析解

例3-32 三元函数积分

➤ 已知下面的三元函数

$$F(x, y, z) = -4ze^{-x^2y-z^2} \left[\cos x^2y - 10yx^2 \cos x^2y + 4x^4y^2 \sin x^2y + 4x^4y^2 \cos x^2y - \sin x^2y \right]$$

➤ 试求出 $\int \cdots \int F(x, y, z) dx^2 dy dz$



```
>> syms x y z;  
f0=-4*z*exp(-x^2*y-z^2)*(cos(x^2*y)-10*cos(x^2*y)*y*x^2...  
    +4*sin(x^2*y)*x^4*y^2+4*cos(x^2*y)*x^4*y^2-sin(x^2*y));  
f1=int(f0,z); f1=int(f1,y); f1=int(f1,x); f1=simplify(int(f1,x))
```

例3-33 多重积分

- 求解积分问题 $\int_0^2 \int_0^\pi \int_0^\pi 4xz e^{-x^2 y - z^2} dz dy dx$
- MATLAB求解



```
>> syms x y z  
int(int(int(4*x*z*exp(-x^2*y-...  
z^2),z,0,pi),y,0,pi),x,0,2)
```

- 注意：eulergamma为Euler常数 γ

$$\text{Ei}(n, z) = \int_1^\infty e^{-zt} t^{-n} dt$$

