国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

线性代数计算

Linear Algebra Computation

主讲：薛定宇教授

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章:科学运算问题的MATLAB求解

Chapter 3 Scientific Computing with MATLAB

Professor Dingyu Xue, xuedingyu@mail.neu.edu.cn
School of Information Science and Engineering,
Northeastern University, Shenyang, CHINA

第三章 科学运算问题的MATLAB求解

- 几乎所有应用数学分支都有MATLAB工具箱
  - 解析解与数值解，用一个命令即可以解决问题
  - 需要将数学问题用规定的形式输入给计算机
  - 可以搜索问题的MATLAB求解或自编函数
- 本章主要介绍和这门课程相关的问题
  - 线性代数问题的MATLAB求解
  - 代数方程求解、微分方程求解
  - 最优化问题的求解
  - Laplace 变换与 z 变换问题的求解

进一步学习这方面内容建议阅读

- MOOC 课程：薛定宇主讲：《现代科学运算——MATLAB语言与应用》，中国MOOC课程
- 薛定宇《高等应用数学问题的MATLAB求解》（第四版），清华大学出版社，2018。
- Xue Dingyu and YangQuan Chen. Scientific Computing with MATLAB，第二版，CRC Press，2015

线性代数问题的求解

- 线性代数在控制中是很重要的数学工具
  - 稳定性可以通过矩阵特征值求解
  - 系统可控性、可观测性可以求矩阵的秩
  - 线性相似变换需要求解矩阵的逆和乘法
  - 状态方程解析解需要矩阵的指数函数等
- 本节主要内容
  - 矩阵的基本分析
  - 矩阵的分解
  - 矩阵指数和指数函数

例3-1 Hilbert矩阵的行列式

- Hilbert 矩阵 $h_{i,j} = 1/(i + j - 1)$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}
$$

- 求行列式
  - 精确值

```
>> H=hilb(10); d1=det(H), H=sym(H); d2=det(H)
```

$$
d_2 = \frac{1}{46206893947914691316295628839036278726983680000000000}
$$

矩阵性质分析

- 矩阵的迹：对角元素的和 t=`trace(A)`
- 矩阵的秩 `rank(A)`, `rank(A,ε)`
  - 矩阵列向量中线性无关的最大列（行）数
  - 矩阵的线性无关列、行数相等，矩阵的秩
- 矩阵的范数
  - 矩阵的测度，用一个数表示矩阵大小

$$||\boldsymbol{A}||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,\ ||\boldsymbol{A}||_2 = \sqrt{s_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})},\ ||\boldsymbol{A}||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

`norm(A,key)`

特征值与多项式

- 矩阵的特征多项式、特征方程与特征根
  - 特征多项式

$$C(s)=\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^n+c_1s^{n-1}+\cdots+c_{n-1}s+c_n$$

  - MATLAB求解　$\boldsymbol{p}$=`poly(`$\boldsymbol{A}$`)`，　$\boldsymbol{p}$=`charpoly(sym(`$\boldsymbol{A}$`))`
  - 特征根求解　$\boldsymbol{r}$=`roots(`$\boldsymbol{p}$`)`, $\boldsymbol{r}$=`eig(`$\boldsymbol{A}$`)`, `[`$\boldsymbol{V}$`,`$\boldsymbol{D}$`]=eig(`$\boldsymbol{A}$`)`
  - 多项式求值　$\boldsymbol{C}$=`polyval(`$\boldsymbol{a}$`,`$\boldsymbol{x}$`)`
  - 多项式矩阵求值　$\boldsymbol{B}$=`polyvalm(`$\boldsymbol{a}$`,`$\boldsymbol{A}$`)`

$$\boldsymbol{B}=a_1\boldsymbol{A}^n+a_2\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}+a_{n+1}\boldsymbol{I}$$

矩阵的逆与广义逆

- 矩阵的逆 $AC = CA = I$
  - 方阵、非奇异
  - MATLAB求解 C=inv(A)
- 矩阵的Moore-Penrose广义逆（伪逆） $\min_{M} ||AM - I||$
  - 几个条件 $AMA = A,\ MAM = M$

    AM and MA symmetrical
  - 唯一，记作 $M = A^{+}$
  - MATLAB求解 M=pinv(A)

矩阵的分解

- 矩阵的相似变换
  - 非奇异方阵 $\boldsymbol{T}$， $\widehat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$
- 矩阵的三角分解：LU、Cholesky分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$
  - 矩阵分解：[$\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{U}$]=lu($\boldsymbol{A}$)， $\boldsymbol{D}$=chol($\boldsymbol{A}$)
    - lu(), chol() 函数处理对称矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

正交矩阵与奇异值

- 正交基与正交分解：
  - 正交矩阵定义：$\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^*$
  - 正交基分解：　$\boldsymbol{Q}$=`orth(`$\boldsymbol{A}$`)`
- 矩阵的奇异值分解
  - 定义：　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$
  - 条件数：　$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})=\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$
  - MATLAB 函数：`[`$\boldsymbol{L}$`,`$\boldsymbol{A}_1$`,`$\boldsymbol{M}$`]=svd(`$\boldsymbol{A}$`)`，　`conv(`$\boldsymbol{A}$`)`

例3-2 已知矩阵的基本分析

- Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$
  - 符号矩阵
- 行列式求解

```
>> syms a b c; A=[1,1,1; a,b,c; a^2,b^2,c^2];
   det(A); simplify(factor(ans))
```

- 逆矩阵

```
>> B=inv(A); simplify(B*A-eye(3))
```

- 特征多项式

```
>> p=charpoly(A)
```

例3-3 矩阵指数与指数函数

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-11 & -5 & 5\\ 12 & 5 & -6\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

- 矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$
  - 数学定义

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\boldsymbol{A}^i=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\cdots+\frac{1}{m!}\boldsymbol{A}^m+\cdots$$

  - MATLAB 求解（解析与数值解） expm($\boldsymbol{A}$)
- 指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 同样可以用expm()函数直接求取

```
>> A=[-11,-5,5; 12,5,-6; 0,1,0]; expm(A)
A=sym(A); expm(A), syms t; expm(A*t)
```

例3-4 任意矩阵函数的计算

- 演示：自编 funmsym() 求矩阵的任意函数 $\psi(\boldsymbol{A}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\cos(\boldsymbol{A}t)}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- MATLAB直接求解

```
>> A=[-7,2,0,-1; 1,-4,2,1; 2,-1,-6,-1; -1,-1,0,-4];
   syms x t; A1=funmsym(sym(A),exp(x*cos(x*t)),x)
```

$$\psi_{1,1}(\boldsymbol{A}) = 2/9\mathrm{e}^{-3\cos 3t} + (2t\sin 6t + 6t^2\cos 6t)\mathrm{e}^{-6\cos 6t} + (\cos 6t - 6t\sin 6t)^2\mathrm{e}^{-6\cos 6t} - 5/3(\cos 6t - 6t\sin 6t)\mathrm{e}^{-6\cos 6t} + 7/9\mathrm{e}^{-6\cos 6t}$$

线性代数问题求解小结

- 线性代数很多问题可以用MATLAB语句直接求解，和数学表示差不多一样直观
- 很多方法可以同时得出解析解和数值解
  - 涉及的函数：det()、trace()、norm()、rank()、poly()、polyval()、polyvalm()、inv()、pinv()、svd()、lu()、chol()、cond()、expm()
  - 函数的两种调用方法，det(A)、det(sym(A))
- 线性代数方程的求解将在3-2节介绍

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD