

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

线性方程求解

Linear Equation Solutions



主讲：薛定宇教授



代数方程的MATLAB求解

- 在控制中有各种问题涉及到方程求解
 - 线性代数方程如Lyapunov方程
 - 非线性方程如Riccati方程等，如果变形能否求解
- 本节主要内容
 - 线性代数方程的数值解与解析解
 - 特殊非线性方程的解析解
 - 一般非线性方程的数值解
 - 非线性矩阵方程的求解



线性代数方程的解析解与数值解

- 本节主要内容
 - 线性方程的求解
 - Lyapunov 方程求解
 - Sylvester 方程求解
 - Riccati 方程求解
- 前三个问题将介绍解析解与数值解，后一个属于非线性矩阵方程只能介绍数值解，并在下小节进一步探讨数值解



线性代数方程的求解

- 线性代数方程的标准型 $A X = B$
 - 解的判定矩阵： $C = [A, B]$
- 求解方法分三种情况考虑
 - 唯一解： A 为非奇异方阵， $X = \text{inv}(A) * B$
 - 有无穷多解 $\text{rank}(A) = \text{rank}(C) < n$
 - 基础解系 $\hat{x} = \text{null}(A)$
 - 特解 $x_2 = \text{pinv}(A) * B$
 - 无解：矛盾方程的最小二乘解
- 基本行变换求解：`rref` 函数



例3-4 线性方程求解

➤ 线性方程
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

➤ A 奇异，与 C 秩相等有无穷解



```
>> A=[1 2 3 4; 2 2 1 1; 2 4 6 8; 4 4 2 2];  
B=[1;3;2;6]; C=[A B]; [rank(A), rank(C)]
```



```
>> syms a1 a2; Z=null(sym(A)); x0=sym(pinv(A))*B;  
x=a1*Z(:,1)+a2*Z(:,2)+x0, A*x-B
```

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -7/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 125/131 \\ 96/131 \\ -10/131 \\ -39/131 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_2 + 125/131 \\ -5a_1/2 - 7a_2/2 + 96/131 \\ a_1 - 10/131 \\ a_2 - 39/131 \end{bmatrix}$$



基本行变换的求解方法

➤ 基本行变换方法求解



```
>> C=sym([A, B]); D=rref(C)
```

➤ 得出的结果

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➤ 导出数学解为

➤ x_3, x_4 可以自由选取

➤ 另两个解为 $x_1 = 2x_3 + 3x_4 + 2, x_2 = -5x_3/2 - 7x_4/2 - 1/2$



线性方程 $AXB = C$

- 标准方程 $AXB = C$
- 可以利用Kronecker将其变换成 $AX = B$ 型方程的根

$$(B^T \otimes A) x = c$$

- Kronecker 乘积 $C = A \otimes B$

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}$$

- MATLAB计算 $C = \text{kron}(A, B)$



Lyapunov方程求解

➤ 连续 Lyapunov 方程

➤ Lyapunov 方程的数学形式

$$AX + XA^T = -C$$

➤ MATLAB 数值解 $X = \text{lyap}(A, C)$

➤ 离散 Lyapunov 方程

➤ 数学形式 $AXA^T - X + Q = 0$

➤ MATLAB 求解 $X = \text{dlyap}(A, Q)$



Sylvester方程求解

➤ Sylvester方程是Lyapunov方程的推广

➤ 数学形式： $AX + XB = -C$

➤ MATLAB求解： $X = \text{lyap}(A, B, C)$

➤ Sylvester方程的解析求解 $(I_m \otimes A + B^T \otimes I_n)x = c$

➤ 算法：

```
function X=lyapsym(A,B,C)
if nargin==2, C=B; B=A'; end
[nr,nc]=size(C); A0=kron(eye(nc),A)+kron(B.',eye(nr));
try, x0=-inv(A0)*C(:); X=reshape(x0,nr,nc);
catch, error('singular matrix found. '), end
```



各种 Sylvester 类方程的求解方法

➤ 方程解析解求解语句

➤ Lyapunov 方程 $AX + XA^T = -C$

➤ 离散 Lyapunov 方程 $AXA^T - X + Q = 0$

➤ Sylvester 方程 $AX + XB = -C$

➤ 直接求解

$$X = \text{lyapsym}(\text{sym}(A), C)$$

$$X = \text{lyapsym}(\text{sym}(A), -\text{inv}(A'), Q * \text{inv}(A'))$$

$$X = \text{lyapsym}(\text{sym}(A), B, C)$$



例3-5 Sylvester方程的求解

➤ Sylvester方程

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{X} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

➤ MATLAB求解



```
>> A=[8,1,6; 3,5,7; 4,9,2]; B=[16,4,1; 9,3,1; 4,2,1];  
C=-[1,2,3; 4,5,6; 7,8,0]; X=lyap(A,B,C),  
norm(A*X+X*B+C)
```



```
>> x=lyapsym(sym(A),B,C), norm(A*x+x*B+C)
```



Riccati 方程与数值求解

➤ 数学形式

$$A^T X + X A - X B X + C = 0$$

➤ 二次型方程，非线性

➤ MATLAB求解

$$X = \text{are}(A, B, C)$$

➤ 遗留的问题

$$A X + X D - X B X + C = 0$$



例3-6 Riccati方程的数值解

➤ Riccati方程 $A^T X + X A - X B X + C = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - X \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

➤ 识别 A, B, C 矩阵，直接求解并检验



```
>> A=[-2,1,-3; -1,0,-2; 0,-1,-2];  
    B=[2,2,-2; -1 5 -2; -1 1 2];  
    C=[5 -4 4; 1 0 4; 1 -1 5]; X=are(A,B,C);  
    norm(A'*X+X*A-X*B*X+C)
```



线性代数方程求解小结

- 仿照线性代数介绍 $AX=B$ 方程求解
 - 三种情况：`inv()`、`null()`、`pinv()`、`rank()`、`rref()`
- Lyapunov与Sylvester 方程
 - 涉及的函数：`lyap()`、`Sylvester`
 - 基于Kronecker乘积的解析求解 `lyapsym()`
- Riccati方程的数值求解
 - 直接求解 `are`
 - 遗留的问题：多解方程如何求解？变形怎么办？

