

# 单变量函数求导

# 函数导数的解析解

- 本节先给出函数导数的数学表达式，然后介绍各种导数的MATLAB求解
  - 函数的导数和高阶导数
  - 多元函数的偏导数
  - 多元函数的Jacobian矩阵
  - Hessian偏导数矩阵
  - 隐函数的偏导数
  - 参数方程的导数

# 函数的导数和高阶导数


- 函数求导的三个步骤  $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ 
  - 申明符号变量
  - 输入函数的MATLAB表示——符号表达式
  - 调用 `diff()` 函数直接求导
- 函数语法  $\frac{df(x)}{dx}$   $y = \text{diff}(fun, x)$ 
  - 或  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$   $y = \text{diff}(fun, x, n)$
  - 自变量为唯一符号变量，可以省去  $x$

## 例3-13 一阶导数及其曲线

➤ 给定函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 3}$


➤ 试求出  $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$

➤ 一阶导数的MATLAB求解



```
>> syms x; f=sin(x)/(x^2+4*x+3);  
f1=diff(f)
```

➤ 绘制原函数和其一阶导数




```
>> ezplot(f,[0,5]),  
hold on; ezplot(f1,[0,5])
```

# 4阶与高阶导数

## ➤ 4阶导数

 `>> f4=diff(f,x,4)`

## ➤ 化简

 `>> collect(simplify(f4),sin(x)),  
collect(simplify(f4),cos(x))`

## ➤ 函数 `diff()` 的高效率

 `>> tic, diff(f,x,50); toc`

## 例3-14 复合泛函求导

➤ 已知函数  $F(t) = t^2 \sin t f(t)$


➤ 推导其3阶导函数公式

➤ 难点：如何定义  $f(t)$ —— `syms f(t)`

➤ MATLAB求解

```
 >> syms t f(t);  
G=simplify(diff(t^2*sin(t)*f,t,3))
```

➤ 当  $f(t) = e^{-t}$  时求3阶导数

```
 >> simplify(subs(G,f,exp(-t))),  
simplify(diff(t^2*sin(t)*exp(-t),3)-ans)
```

## 例3-15 矩阵函数求导

### ➤ 矩阵的求导

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4 \sin 5x & e^{-4x^2} \\ 3x^2 + 4x + 1 & \sqrt{4x^2 + 2} \end{bmatrix}$$

### ➤ 直接求解

#### ➤ 对每个矩阵元素直接求导



```
>> syms x;  
H=[4*sin(5*x), exp(-4*x^2);  
   3*x^2+4*x+1, sqrt(4*x^2+2)]  
H1=diff(H,x,3)
```

# 参数方程的导数

➤ 参数方程  $y = f(t), x = g(t)$

➤ 由递推公式求  $\frac{d^n y}{dx^n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{f'(t)}{g'(t)} \right) \frac{1}{g'(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \frac{1}{g'(t)}$$

⋮

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) \frac{1}{g'(t)}$$



# 参数方程求导的递归实现

## ➤ 参数方程求导

```
function result=paradiff(y,x,t,n)
if mod(n,1)~=0,
    error('n should positive integer, please correct')
else,
    if n==1,
        result=diff(y,t)/diff(x,t);
    else,
        result=diff(paradiff(y,x,t,n-1),t)/diff(x,t);
    end, end
```

## ➤ 函数的调用格式 ( $n$ 为具体正整数值)

$$y_1 = \text{paradiff}(y, x, t, n)$$

## 例3-16 参数方程求导

➤ 已知参数方程  $y = \frac{\sin t}{(t+1)^3}, x = \frac{\cos t}{(t+1)^3}$

➤ 求  $\frac{d^3 y}{dx^3}$

➤ MATLAB求解命令



```
>> syms t; y=sin(t)/(t+1)^3;  
x=cos(t)/(t+1)^3;  
f=paradiﬀ(y,x,t,3); [n,d]=numden(f);  
F=simplify(n)/simplify(d)
```

