

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

非线性方程求解

Nonlinear Equation Solutions



主讲：薛定宇教授



一般非线性方程的求解

➤ 非线性方程的解析解法 $F(x) = 0$

➤ 举例：鸡兔同笼问题

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + 4y = 36 \end{cases}$$

➤ 求解

➤ 代数方法

➤ 直接方法



```
>> syms x y;  
[x,y]=solve(x+y==14,2*x+4*y==36)
```



例3-7 复杂多项式方程求解

➤ 二元方程
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} + 2\frac{1}{y} + \frac{5}{2y^2} + 3\frac{1}{x^3} = 0 \\ \frac{y}{2} + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x^4} + 5y^4 = 0 \end{cases}$$

➤ 求解



```
>> syms x y
```

```
[x,y]=vpasolve(x^2/2+x+3/2+2/y+5/(2*y^2)+3/x^3==0,...  
y/2+3/(2*x)+1/x^4+5*y^4==0); size(x)
```

➤ 解的检验



```
>> norm([x.^2/2+x+3/2+2./y+5./(2*y.^2)+3./x.^3,...  
y/2+3./(2*x)+1./x.^4+5*y.^4])
```



非线性方程的图解法

- fimplicit 或 ezplot 函数绘制隐函数曲线
- 可以由其联立方程交点读出
 - 直观，可以求出感兴趣区域内全部实根
 - 局部放大，但精度不高
 - 最多适合于求解两个变量的方程



例3-8 非线性方程图解法举例

➤ 已知非线性方程组

$$\begin{cases} x^2 e^{-xy^2/2} + e^{-x/2} \sin(xy) = 0 \\ y^2 \cos(y + x^2) + x^2 e^{x+y} = 0 \end{cases}$$

➤ 感兴趣区间 $-2\pi \leq x, y \leq 2\pi$

➤ MATLAB直接求解



```
>> syms x y, xx=[-2*pi,2*pi];  
fimplicit(x^2*exp(-x*y^2/2)+exp(-x/2)*sin(x*y),xx)  
hold on; fimplicit(y^2*cos(y+x^2)+x^2*exp(x+y),xx)
```



一般非线性方程的数值解法

- fsolve() 求解方程的步骤：
 - 将代数方程写成标准型 $Y = F(x) = 0$
 - 用MATLAB描述方程
 - 编写M-函数：
入口： `function y=funname(x)`
 - 匿名函数: `>> y=@(x)[.....]`
 - 调用 fsolve() 函数直接求解，选择初值
 $[x, f_1, flag] = \text{fsolve}(\text{fun}, x_0, \text{options})$



例3-9 求解实例

➤ 非线性方程组

$$\begin{cases} x^2 e^{-xy^2/2} + e^{-x/2} \sin(xy) = 0 \\ y^2 \cos(y + x^2) + x^2 e^{x+y} = 0 \end{cases}$$

➤ 变量替换 $x_1 = x, x_2 = y, \mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

➤ 变换成标准型 $F(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 e^{-x_1 x_2^2/2} + e^{-x_1/2} \sin(x_1 x_2) \\ x_2^2 \cos(x_2 + x_1^2) + x_1^2 e^{x_1 + x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$



方程数值求解步骤

➤ 方程标准型 $y = f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 e^{-x_1 x_2^2/2} + e^{-x_1/2} \sin(x_1 x_2) \\ x_2^2 \cos(x_2 + x_1^2) + x_1^2 e^{x_1 + x_2} \end{bmatrix} = 0$

➤ 方程描述



```
>> f=@(x) [x(1)^2*exp(-x(1)*x(2)^2/2)+...  
            exp(-x(1)/2)*sin(x(1)*x(2));  
            x(2)^2*cos(x(2)+x(1)^2)+x(1)^2*exp(x(1)+x(2))];
```



```
>> x0=rand(2,1); x=fsolve(f,x0), f(x)
```



```
>> x0=[2.7795; -3.3911]; ff=optimset;  
ff.TolX=1e-20; ff.TolFun=1e-20; x=fsolve(f,x0,ff), f(x)
```




非线性矩阵方程的求解

➤ 一次得到多个根的函数

`more_sols(f, X0, A, ε, tlim)`

➤ 变量说明

➤ 代数方程的MATLAB表示 f

➤ 已知的解集 X_0 , 三维数组

➤ 无穷循环 , 可以用Ctrl+C在任何时候中断



例3-10 Riccati方程求解

➤ Riccati 方程其他根的求解

$$A^T X + X A - X B X + C = 0$$

➤ 函数 are() 只求出一个根，方程到底有多少根？

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$



```
>> A=[-2,1,-3; -1,0,-2; 0,-1,-2];  
B=[2,2,-2; -1 5 -2; -1 1 2];  
C=[5 -4 4; 1 0 4; 1 -1 5]; f=@(X)A'*X+X*A-X*B*X+C;  
more_sols(f,zeros(3,3,0))
```



例3-11 Riccati 变形方程

$$AX + XD - XBX^T + C = 0$$

➤ 变形Riccati 方程

$$AX + XD - XBX^T + C = 0$$

➤ 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 9 & 7 & 9 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

➤ 求全部根



```
>> A=[2,1,9; 9,7,9; 6,5,3]; B=[0,3,6; 8,2,0; 8,2,8];  
C=[7,0,3; 5,6,4; 1,4,4]; D=[3,9,5; 1,2,9; 3,3,0];  
f=@(X)A*X+X*D-X*B*X.'+C; more_sols(f,zeros(3,3,0))
```



例3-12 一般非线性方程求解

➤ 图解法求出多个根，fsolve()一次只一个

$$y = f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 e^{-x_1 x_2^2/2} + e^{-x_1/2} \sin(x_1 x_2) \\ x_2^2 \cos(x_2 + x_1^2) + x_1^2 e^{x_1 + x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$



```
>> f=@(x)[x(1)^2*exp(-x(1)*x(2)^2/2)+exp(-x(1)/2)*sin(x(1)*x(2));  
        x(2)^2*cos(x(2)+x(1)^2)+x(1)^2*exp(x(1)+x(2))];  
more_sols(f,[0; 0],12)
```



```
>> syms x y, xx=[-2*pi,2*pi];  
fimplicit(x^2*exp(-x*y^2/2)+exp(-x/2)*sin(x*y),xx)  
hold on; fimplicit(y^2*cos(y+x^2)+x^2*exp(x+y),xx)  
x=X(1,1,:); x=x(:); y=X(2,1,:); y=y(:); plot(x,y,'o')
```



代数方程求解小结

- 仿照线性代数介绍 $AX=B$ 方程求解
 - 三种情况：`inv()`、`null()`、`pinv()`、`rank()`、`rref()`
- Lyapunov、Sylvester 与 Ricatti 方程
 - 涉及的函数：`lyap()`、`are()`、重载的`lyap()`
- 一般非线性方程求解
 - 解析解法：`solve()`
 - 图解法：`ezplot()`、`hold`
 - 数值解法：`fsolve()`、`optimset()`设置参数（精度）
- 矩阵方程与多解方程：`more_sols()`

