国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第五章 线性系统的计算机辅助分析

状态空间解析解

Analytical Solutions of State Space Equations

主讲：薛定宇教授

系统的时域响应

- 线性系统时域响应的解析解
  - 状态方程的解析解
    - 状态增广方法
    - 直接积分方法
  - 传递函数模型的解析解
    - Laplace 变换与 z 变换，延迟问题
- 时域响应的数值解
  - 阶跃响应、脉冲响应、任意输入、非零初值问题

直接积分方法

- 状态方程的解析解

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

- 将公式变代码的直接积分语句

$$\boldsymbol{y}\texttt{=}\boldsymbol{C}\texttt{*(expm(}\boldsymbol{A}\texttt{*(}t-t_0\texttt{))*}\boldsymbol{x}_0\texttt{+}\ldots$$

$$\texttt{expm(}\boldsymbol{A}\texttt{*t)*int(expm(}-\boldsymbol{A}\texttt{*}\tau\texttt{)*}\boldsymbol{B}\texttt{*subs(}u\texttt{,}t\texttt{,}\tau\texttt{),}\tau\texttt{,}t_0\texttt{,}t\texttt{))}$$

- 得到结果后有必要用simplify()函数化简结果
- 若只需状态变量，则不用乘C

例5-10 状态方程的解析解

- 系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -19 & -16 & -16 & -19 \\ 21 & 16 & 17 & 19 \\ 20 & 17 & 16 & 20 \\ -20 & -16 & -16 & -19 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [2, 1, 0, 0]\ \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- 状态变量初值 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0) = [0, 1, 1, 2]$
- 输入信号 $u(t) = 2 + 2\mathrm{e}^{-3t} \sin 2t$

方程的直接求解

- 系统模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -19 & -16 & -16 & -19 \\ 21 & 16 & 17 & 19 \\ 20 & 17 & 16 & 20 \\ -20 & -16 & -16 & -19 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [2, 1, 0, 0]\ \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0) = [0, 1, 1, 2],\ u(t) = 2 + 2\mathrm{e}^{-3t} \sin 2t$$

- MATLAB语句

```
>> syms t tau; u=2+2*exp(-3*t)*sin(2*t);
   A=[-19,-16,-16,-19; 21,16,17,19; 20,17,16,20; -20,-16,-16,-19];
   B=[1; 0; 1; 2]; C=[2 1 0 0]; D=0;  x0=[0; 1; 1; 2];
   y=C*(expm(A*t)*x0+expm(A*t)*int(expm(- ...
     A*tau)*B*subs(u,t,tau),tau,0,t)), y=simplify(y)
```

基于状态增广的解析解方法

- 状态方程模型 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$
- 解析解 $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$
- 求解难点

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 想法：如果能用某种方法消去积分项最好

状态增广方法

- 如果输入信号为阶跃信号
- 可以引入增广的状态 $x_{n+1}(t) = u(t)$

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \hdashline \dot{x}_{n+1}(t)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \hdashline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}(t)\\ \hdashline x_{n+1}(t)\end{array}\right], \widetilde{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(0)\\ 1\end{bmatrix}$$

- 得出“自治系统”模型 $\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{x}}(0)$
- 阶跃响应的解析解 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}t}\widetilde{\boldsymbol{x}}(0)$

一般输入信号的系统增广

➢ 一般输入信号模型

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i t^i + \mathrm{e}^{d_1 t}\left[d_2 \cos(d_4 t) + d_3 \sin(d_4 t)\right]$$

➢ 引入增广状态变量

$$x_{n+1} = \mathrm{e}^{d_1 t}\cos(d_4 t)$$

$$x_{n+2} = \mathrm{e}^{d_1 t}\sin(d_4 t)$$

$$x_{n+3} = u_1(t), \cdots, x_{n+m+3} = u_1^{(m-1)}(t)$$

➢ 增广状态方程模型 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{e}^{\tilde{\boldsymbol{A}}t}\tilde{\boldsymbol{x}}(0)$

增广状态方程的一般形式

- 增广状态方程模型 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}(0)$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{c:cc:cccc} \boldsymbol{A} & d_2\boldsymbol{B} & d_3\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \begin{matrix} d_1 \\ d_4 \end{matrix} & \begin{matrix} -d_4 \\ d_1 \end{matrix} & & & \boldsymbol{0} & \\ \hdashline & & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{0} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right],\ \widetilde{\boldsymbol{x}}(t)=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x}(t) \\ \hdashline x_{n+1}(t) \\ x_{n+2}(t) \\ \hdashline x_{n+3}(t) \\ x_{n+4}(t) \\ \vdots \\ x_{n+m+3}(t) \end{array}\right],\ \widetilde{\boldsymbol{x}}(0)=\left[\begin{array}{c} \boldsymbol{x}(0) \\ \hdashline 1 \\ 0 \\ \hdashline c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m m! \end{array}\right]$$

- 解析解 $\widetilde{\boldsymbol{x}}(t)=\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}t}\widetilde{\boldsymbol{x}}(0)$

- MATLAB函数 $[G_a, \widetilde{\boldsymbol{x}}_0]=\texttt{ss\_augment}(G, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \widetilde{\boldsymbol{x}}_0)$

$\boldsymbol{c}=[c_0, c_1, \cdots, c_m]$, and $\boldsymbol{d}=[d_1, d_2, d_3, d_4]$

例5-11 状态方程的解析解

连续系统模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -19 & -16 & -16 & -19 \\ 21 & 16 & 17 & 19 \\ 20 & 17 & 16 & 20 \\ -20 & -16 & -16 & -19 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [2, 1, 0, 0]\ \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0) = [0, 1, 1, 2],\ u(t) = 2 + 2\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$$

➢ 由MATLAB求解析解

```
>> cc=[2]; dd=[-3,0,2,2]; x0=[0; 1; 1; 2];
   A=[-19,-16,-16,-19; 21,16,17,19; 20,17,16,20; -20,-16,-16,-19];
   B=[1; 0; 1; 2]; C=[2 1 0 0]; D=0; G=ss(A,B,C,D);
   [Ga,xx0]=ss_augment(G,cc,dd,x0); Ga.a, xx0'
```

状态方程的解析解小结

- 状态方程的解析解是线性系统解析解的一种形式，这里只有连续系统的解
  - 第一种方法是利用 int 与 expm 等函数直接求解
  - 第二种方法是利用增广状态的方法求解
    - 相应的MATLAB函数 s_augment，expm
- 可以求解非零初值的系统模型在某些输入信号下时域响应的解析解

薛定宇教授主讲

东北大学

NORTHEASTERN UNIVERSITY 1923

控制系统仿真与CAD