双重数值积分运算

双重积分问题的数值解

- 数学标准型 $I=\int_{x_m}^{x_M}\int_{y_m(x)}^{y_M(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
  - 注意积分顺序，先 y 后 x
  - MATLAB函数调用格式

    I=integral2(f ,x_m ,x_M ,y_m ,y_M ,par pairs)

  - ym 与 yM 还可以为函数句柄

例3-68 双重积分

- 试求出双重定积分

$$J=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sin(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

  - 积分区域为矩形区域，对应好边界即可
- MATLAB求解语句

```
>> f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y);
   J=integral2(f,-2,2,-1,1,'RelTol',1e-20)
```

积分曲面的绘制

- 仿照积分曲线绘制的函数，可以编写出

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{F}]=\texttt{intfunc2}(f,x_{\mathrm{m}},x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{m}},y_{\mathrm{M}},n,m)$$

```
function [yv,xv,F]=intfunc2(f,xm,xM,varargin)
[ym,yM,n,m]=default_vals({xm,xM,50,50},varargin{:});
xv=linspace(xm,xM,n); yv=linspace(ym,yM,m);
d=yv(2)-yv(1); [x y]=meshgrid(xv,yv); F=zeros(n,m);
for i=2:n, for j=2:m,
   F(i,j)=integral2(f,xv(1),xv(i),...
               yv(1),yv(j),'RelTol',1e-20);
end, end
```

例3-69 二元函数的积分曲面

- 绘制积分函数曲面

$$J=\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sin(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- MATLAB求解
  - 最后一个语句求的是定积分值

```
>> f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y);
   [x,y,z]=intfunc2(f,-2,2,-1,1);
   surf(x,y,z), I=z(end,end)
```

例3-70 双重积分计算

➢试求出双重定积分

$$J=\int_{-1/2}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2/2}}^{\sqrt{1-x^2/2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sin(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

➢先 y 后 x，与标准型一致，可以直接求解

```
>> fh=@(x)sqrt(1-x.^2/2);
   fl=@(x)-sqrt(1-x.^2/2);
   f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y);
   y=integral2(f,-1/2,1,fl,fh)
```

先 x 后 y 的数值积分计算

- 与标准型积分顺序相反的二元积分

$$I=\int_{y_{\mathrm{m}}}^{y_{\mathrm{M}}}\int_{x_{\mathrm{m}}(y)}^{x_{\mathrm{M}}(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 被积函数描述时替换次序，令 $\hat{x}=y,\ \hat{y}=x$
- 则

$$I=\int_{\hat{x}_{\mathrm{m}}}^{\hat{x}_{\mathrm{M}}}\int_{\hat{y}_{\mathrm{m}}(\hat{x})}^{\hat{y}_{\mathrm{M}}(\hat{x})} f(\hat{y},\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{y}\mathrm{d}\hat{x}$$

- 被积函数 f=@(y,x)

例3-71 解析不可积

- 先 x 后 y 的积分

$$J=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\sinh(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 解析不可求解，只能求数值解
- 交换 x,y 次序

```
>> tic, f=@(y,x)exp(-x.^2/2).*sinh(x.^2+y);
   fh=@(y)sqrt(1-y.^2); fl=@(y)-sqrt(1-y.^2);
   I=integral2(f,-1,1,fl,fh,'RelTol',1e-20), toc
```

例3-72 非矩形积分区域的积分曲面

- 数学模型 $$J=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sin(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
- 绘制积分曲面
  - 先计算矩形区域，再删去区域外的函数值（NaN）

```
>> f=@(x,y)exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y);
   fh=@(x)sqrt(1-x.^2/2); fl=@(x)-sqrt(1-x.^2/2);
   [x,y,z]=intfunc2(f,-1/2,1,-1.2,1.2);
   for i=1:length(x),
     x0=x(i); xx=sort([fl(x0),fh(x0)]);
     ii=find(y>xx(2) | y<xx(1)); z(ii,i)=NaN;
   end, surf(x,y,z),
```