国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

Laplace与z变换

Solutions of Laplace and z Transforms

主讲：薛定宇教授

Laplace 变换与 z 变换

- Laplace变换与z变换是连续控制系统理论与离散系统理论的基础
  - 这样的变换可以将微分方程和差分方程变换成代数方程的形式，可以建立起传递函数模型
- 本节主要内容
  - Laplace 变换和反变换的计算机求解
  - z 变换与反变换的求解

Laplace 变换的MATLAB求解

- 数学基础：t 域到 s 域的变换

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = F(s)$$

- 反变换：σ 大于所有 $F(s)$ 极点的实部

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

- MATLAB求解步骤
  - 申明符号变量
  - 对函数调用laplace()或ilapace()函数

Laplace变换的性质

- 线性性质

$$\mathscr{L}[af(t) \pm bg(t)] = a\mathscr{L}[f(t)] \pm b\mathscr{L}[g(t)]$$

- 平移性质——时间延迟处理
  - 时域平移性质:

$$\mathscr{L}[f(t-a)] = \mathrm{e}^{-as}F(s)$$

  - s-域平移性质:

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

微积分性质

➢ 一般微分性质

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}\frac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t} - \cdots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}f(0^+)}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

➢零初值 $$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = s^n F(s)$$

➢ 积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau^n\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

例3-19 Laplace变换

- 给定原函数 $f(t) = 1 - (1 + at)\mathrm{e}^{-at}$
- 求函数的Laplace变换

```
>> syms a t, f=1-(1+a*t)*exp(-a*t);
   laplace(f)
```

- 结果的数学形式

$$F = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2}$$

例3-20 Laplace反变换

- 已知Laplace函数

$$G(s)=\frac{s+3}{s^4+2s^3+11s^2+18s+18},R(s)=\frac{1}{s}$$

- 时求取其Laplace反变换

```
>> syms s, G=(s+3)/s/(s^4+2*s^3+11*s^2+18*s+18);
   y=ilaplace(G)
```

- 阶跃响应的曲线绘制

```
>> fplot(y,[0,10])
```

例3-21 Laplace反变换

- 已知原函数为

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3a^2}{s^3+a^3}\right], \quad a>0$$

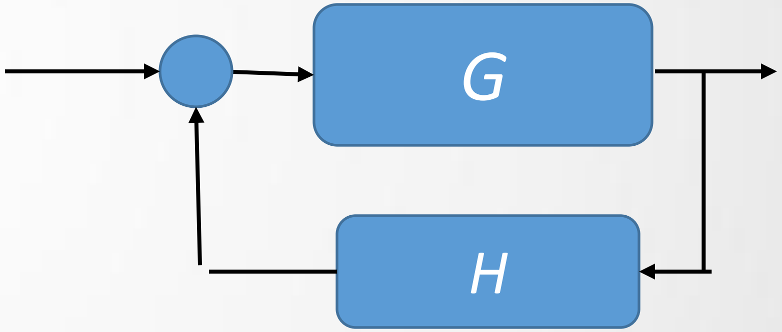
- 试求其Laplace反变换

```
>> syms s t; syms a positive; F=3*a^2/(s^3+a^3);
   f=simplify(ilaplace(F))
```

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3a^2}{s^3+a^3}\right]=\mathrm{e}^{-at}+\mathrm{e}^{at/2}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)$$

数值Laplace变换与反变换

- Laplace变换与反变换需要积分运算
  - 有时没有解析解，需要数值解
- 编写的求解函数 INVLAP_new



$[t,y]=\mathrm{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N)$

$[t,y]=\mathrm{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H)$

$[t,y]=\mathrm{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H,U)$

$[t,y]=\mathrm{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H,f)$

$[t,y]=\mathrm{INVLAP\_new}(G,t_0,t_n,N,H,\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{u})$

例3-22 无理系统的闭环阶跃响应

- 无理系统的开环传递函数，单位负反馈

$$G(s)=\left[\frac{\sinh(0.1\sqrt{s})}{0.1\sqrt{s}}\right]^2\frac{1}{\sqrt{s}\sinh(\sqrt{s})}$$

- 阶跃响应计算
  - 没有解析解，必须求数值解

```
>> G='(sinh(0.1*sqrt(s))/0.1/sqrt(s))^2/sqrt(s)/sinh(sqrt(s))';
   [t,y]=INVLAP_new(G,0,10,1000,1,'1/s'); plot(t,y)
```

z 变换与反变换

- 数学基础

$$\mathscr{Z}[f(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = F(z)$$

- 反变换

$$f(k) = \mathscr{Z}^{-1}[f(k)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint F(z) z^{k-1} \mathrm{d}z$$

- MATLAB求解
  - 函数 ztrans 与 iztrans 直接调用

例3-23 z反变换直接计算

- 求函数 $q/(z^{-1}-p)^m$ 的 z 反变换
  - 不能直接使用 m
  - 可以设置几个 m 样本进行变换，总结规律

```
>> syms p q z;
   for m=1:5, disp(simplify(iztrans(q/(1/z-p)^m))), end
```

  - 一般变换公式

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{q}{(z^{-1}-p)^m}\right\}=\frac{(-1)^m q}{(m-1)!\,p^{n+m}}(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)$$

例3-24 给定函数的z反变换

- 离散传递函数

$$H(z)=\frac{z(5z-2)}{(z-1)(z-1/2)^3(z-1/3)}$$

- z反变换

```
>> syms z; H=z*(5*z-2)/((z-1)*(z-1/2)^3*(z-1/3));
   h=iztrans(H)
```

- 手工化简 nchoosek(n-1,2)　$(n\text{-}1)(n\text{-}2)/2$

```
>> syms n; subs(h,nchoosek(n-1,2),(n-1)*(n-2)/2)
```

Laplace 和 z 变换的小结

- 变换的目的
  - 从一个域变换成了一个域
  - 在控制中的应用——是连续、离散传递函数的基础
- 变换的步骤
  - 用 syms 申明符号变量
  - 调用 laplace()、ilaplace()、ztrans()、iztrans()
  - 化简：simplify()
- 数值Laplace变换 INVLAP_new

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD