国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第四章 线性系统的数学模型

状态方程模型

State Space Models of Linear Systems

主讲：薛定宇教授

例4-8 状态方程举例

- 例4-1的RLC电路模型

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u(t)\ \rightarrow\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}i(t)-\frac{1}{L}u_c(t)+\frac{1}{L}u(t)$$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}\ \rightarrow\ \frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C}i(i)$$

- 选择 $x_1(t)=i(t),\ x_2(t)=u_c(t)$

$$x_1'(t)=-Rx_1(t)/L-x_2(t)/L+u(t)/L$$

$$x_2'(t)=x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-R/L & -1/L\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/L\\0\end{bmatrix}u(t)$$

线性系统的状态方程模型

- 非线性状态方程模型

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_p), & i = 1, \cdots, n \\ y_i = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_p), & i = 1, \cdots, q \end{cases}$$

- 状态方程的重要元素
  - 状态变量 x_i ，阶次 n ，输入和输出
  - 非线性函数： $f_i(\cdot), g_i(\cdot)$
  - 一般非线性系统的状态方程描述
- 状态方程模型是微分方程的一种表现形式

线性状态方程

- 一般线性状态方程模型
  - 数学形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

  - 时变状态方程
- 线性时不变模型 (linear time invariant, LTI)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

常规状态方程的局限性

- 一些特殊线性模型不存在状态方程
  - 如果物理不可实现
  - 严格正则系统的逆系统
- 需要引入下面的方程，称为描述符系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

  - 对物理可实现系统而言，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵
  - 这种模型是MATLAB下的标准状态方程模型

线性时不变模型的MATLAB描述

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

- MATLAB 输入方法

  G=ss($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$);

  G=ss($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$);

  - 系数矩阵 ***A*** 矩阵是方程，为 $n\times n$ 矩阵
  - ***B*** 为 $n\times p$ 矩阵，***C*** 为 $q\times n$ 矩阵，***D*** 为 $q\times p$ 矩阵
  - 可以直接处理多变量模型
  - 给出(***A***,***B***,***C***,***D***)矩阵即可
- 注意维数的兼容性

例4-9 状态方程的输入

状态方程模型
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -12 & -17.2 & -16.8 & -11.9 \\ 6 & 8.6 & 8.4 & 6 \\ 6 & 8.7 & 8.4 & 6 \\ -5.9 & -8.6 & -8.3 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1.5 & 0.2 \\ 1 & 0.3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- MATLAB 模型输入

```
>> A=[-12,-17.2,-16.8,-11.9; 6,8.6,8.4,6;
      6,8.7,8.4,6; -5.9,-8.6,-8.3,-6];
   B=[1.5,0.2; 1,0.3; 2,1; 0,0.5];
   C=[2,0.5,0,0.8; 0.3,0.3,0.2,1];
   D=zeros(2,2); G=ss(A,B,C,D)
```

```
>> G=ss(A,B,C,0)
```

带时间延迟的状态方程

- 数学模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\boldsymbol{\tau}_{\rm i}) \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t-\boldsymbol{\tau}_{\rm i}), \quad \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{z}(t-\boldsymbol{\tau}_{\rm o}) \end{cases}$$

- MATLAB输入语句

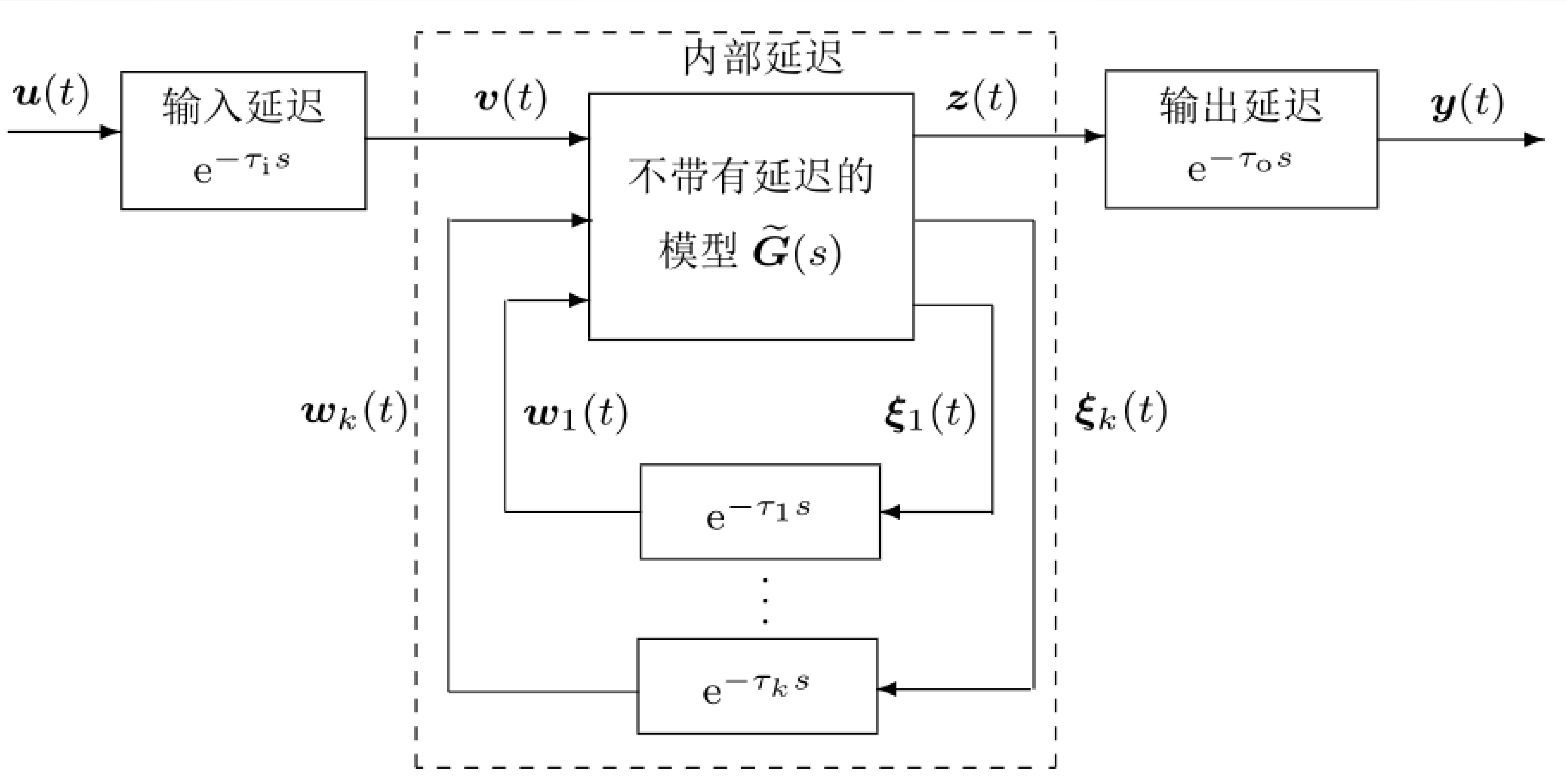
G=ss($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$,'InputDelay',$\boldsymbol{\tau}_{\rm i}$,'OutputDelay',$\boldsymbol{\tau}_{\rm o}$)

G=ss($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{E}$,'InputDelay',$\boldsymbol{\tau}_{\rm i}$,'OutputDelay',$\boldsymbol{\tau}_{\rm o}$)

- 其他延迟属性：ioDelay

带有内部延迟的状态方程

- 框图描述，更一般的状态方程模型



数学模型与输入方法

➢ 数学描述
$$\begin{cases} \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{w}(t-\boldsymbol{\tau}) \\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{w}(t-\boldsymbol{\tau}) \\ \boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{D}_{22}\boldsymbol{w}(t-\boldsymbol{\tau}) \end{cases}$$

➢其中
$$\boldsymbol{w}_j(t)=\boldsymbol{\xi}_j(t-\tau_j),\ j=1,2,\cdots,k$$
$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{u}(t-\tau_{\rm i}),\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{z}(t-\tau_{\rm o})$$

内部延迟
$$\boldsymbol{\tau}=[\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k]$$

➢MATLAB输入方法

$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\boldsymbol{D}_{11},\boldsymbol{D}_{12},\boldsymbol{D}_{21},\boldsymbol{D}_{22},\boldsymbol{E},\boldsymbol{\tau}]=$ `getdelaymodel(`G`,'mat')`

➢$\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$ 为内部信号，提取模型

线性系统的零极点模型

- 零极点模型是因式型传递函数模型

$$G(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

  - 零点 *zi* 、极点 *pi* 和增益 ***K***

- 零极点模型的MATLAB表示

$\boldsymbol{z}$=[z_1; z_2; $\cdots$; z_m]; s=zpk('s');

$\boldsymbol{p}$=[p_1; p_2; $\cdots$; p_n]; G=...

G=zpk($\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{p}$, K);

例4-10 零极点模型的输入

- 已知零极点模型

$$G(s)=\frac{6(s+5)(s+2+j2)(s+2-j2)}{(s+4)(s+3)(s+2)(s+1)}$$

- MATLAB输入方法

```
>> P=[-1;-2;-3;-4];
   Z=[-5; -2+2i; -2-2i]; G=zpk(Z,P,6)
```

- 另一种输入方法（新版本不能使用）

```
>> s=zpk('s');
   G=6*(s+5)*(s+2+2i)*(s+2-2i)/((s+1)*(s+2)*(s+3)*(s+4))
```

状态方程与零极点输入小结

- 线性系统的模型表示方法
  - 传递函数模型 tf
  - 状态方程模型的输入 ss
  - 零极点模型 zpk
- 常规模型可能遇到困难，需要描述符系统
- 带有内部延迟的状态方程模型

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD