

极限问题的解析解

第3章

微积分问题的 计算机求解

第3章 微积分问题的计算机求解

- 高等数学课程——全新的认识角度
 - 极限问题的解析解
 - 函数导数的解析解
 - 积分问题的解析解
 - 函数的级数展开与级数求和问题求解
 - 曲线积分与曲面积分的计算
- 数值微分问题、数值积分问题

极限问题的解析解

- 给出极限的概念，侧重如何求解
- 高等数学课程需要解题技巧，使用工具则不用，规范的函数调用即可
- 本节主要内容
 - 单变量函数的极限
 - 区间函数的极限运算
 - 多变量函数的极限

单变量函数的极限

➤ 极限的定义 $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

➤ MATLAB函数

$$L = \text{limit}(\text{fun}, x, x_0)$$

➤ 左右极限 $L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ $L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

➤ MATLAB函数

$$L = \text{limit}(\text{fun}, x, x_0, \text{'left' or 'right'})$$

例3-1 谁都记得住的极限

- 简单极限问题 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- 三个步骤：
 - 申明符号变量 → 描述函数 → 直接求解
 - 没有中间过程；无需技巧、记忆，直接求解
- MATLAB直接求解



```
>> syms x; f=sin(x)/x; limit(f,x,0)
```

例3-2 复杂一点的极限求解

➤试求解极限问题 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \sin \frac{b}{x}$

➤MATLAB代码



```
>> syms x a b;  
f=x*(1+a/x)^x*sin(b/x);  
L=limit(f,x,inf)
```

➤复杂问题的求解与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 一样难度

例3.3 单边极限求解

➤ 试求解单边极限问题

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{1 - \cos \sqrt{x} - \sin x}$$


➤ MATLAB代码



```
>> syms x;  
    limit((exp(x^3)-1)/(1-cos(sqrt(...  
        (x-sin(x))))),x,0,'right')
```


极限及拓展知识

➤ MATLAB绘图语句




```
>> x=-0.1:0.001:0.1;  
y=(exp(x.^3)-1)./(1-cos(sqrt(x-sin(x))));  
plot(x,y,'-',[0],[12],'o')
```

➤ 拓展：复数的余弦——Euler公式

$$\cos j\alpha = (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$$

➤ 求出极限



```
>> syms x;  
limit((exp(x^3)-1)/(1-cos(sqrt(x-sin(x))))),x,0)
```

例3-4 正切函数的单边极限

➤ 函数 $\tan t$

➤ 求关于 $\pi/2$ 点处的左右极限

➤ MATLAB代码



```
>> syms t; f=tan(t);  
    L1=limit(f,t,pi/2,'left'),  
    L2=limit(f,t,pi/2,'right')
```

➤ 间断点

例3-5 序列的极限

➤ 给定的序列

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$$

➤ 序列极限与函数极限同样求解

➤ 申明符号变量、描述函数、调用limit()




```
>> syms n;  
f=n^(2/3)*sin(factorial(n))/(n+1);  
F=limit(f,n,inf)
```

例3-6 序列函数的极限

- 既为函数又为序列

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \left(\frac{1}{n(x^2 + 1) + x} \right) \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right)$$

- 同样求解

```
 >> syms x n;  
f=n*atan(1/(n*(x^2+1)+x))*tan(pi/4+x/2/n)^n;  
limit(f,n,inf)
```

- 对使用者而言没有区别

