

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

# 第五章 线性系统的计算机辅助分析

## 多变量系统频域分析 (上)

Frequency Domain Analysis of Multivariable Systems (I)



主讲：薛定宇教授



# 多变量系统的频域分析

- 常规单变量系统的频域分析方法不能直接使用
- 多变量频域分析——现代频域法
  - 英国学派 ( British School ) 的贡献
- 多变量频域设计工具箱
  - MFD工具箱简介
  - 多变量系统的模型的标准输入方法



# 多变量系统的现代频域法

## ➤ 逆Nyquist阵列方法

➤ Howard Harry Rosenbrock (1920-2010), FRS

## ➤ 特征轨迹法

➤ Sir Alistair George James MacFarlane (1931-), FRS

## ➤ 其他设计方法

➤ David Quinn Mayne (1930-), FRS

➤ David H Owens, FREng





Howard Harry Rosenbrock (1920-2010)



Sir Alistair George James MacFarlane (1931-)



# MFD 工具箱

- 英国剑桥大学的Boyel与Maciejowski教授开发基于MATLAB 的工具箱
- 多变量系统的描述
  - 可以用传递函数描述，但需要已知公分母
  - 可以求出系统的传递函数矩阵模型

$$[N, d] = \text{mvss2tf}(A, B, C, D)$$

- 后面还将介绍更容易使用的接口函数
- 提供了大量的多变量系统频域分析与设计函数



## 例5-37 多变量系统模型

### ➤ 多变量模型

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+5)} & \frac{1}{5s+1} \\ \frac{s+1}{s^2+10s+100} & \frac{2}{2s+1} \end{bmatrix}$$

### ➤ 传递函数矩阵变换



```
>> s=tf('s');  
G=[(s+4)/((s+1)*(s+5)), 1/(5*s+1);  
    (s+1)/(s^2+10*s+100), 2/(2*s+1)]; G1=ss(G);  
[N,d]=mvss2tf(G1.a,G1.b,G1.c,G1.d)
```





# 传递函数矩阵的MFD表示方法

## ➤ 得出公分母

$$d(s) = s^6 + 16.7s^5 + 176.3s^4 + 767.1s^3 + 971.5s^2 + 415s + 50$$

## ➤ 分子矩阵 $N(s)$

$$\begin{bmatrix} s^5 + 14.7s^4 + 149.9s^3 + 499.4s^2 + 294s + 40 & 0.2s^5 + 3.3s^4 + 34.6s^3 + 146.5s^2 + 165s + 50 \\ s^5 + 7.7s^4 + 16s^3 + 13.4s^2 + 4.6s + 0.5 & s^5 + 16.2s^4 + 168.2s^3 + 683s^2 + 630s + 100 \end{bmatrix}$$

## ➤ 用这样的方法可以得出传递函数矩阵模型

## ➤ 可以得出 MFD 能使用的模型



# Gershgorin 圆盘定理

➤ Semyon Aranovich Gershgorin (1901 - 1933)

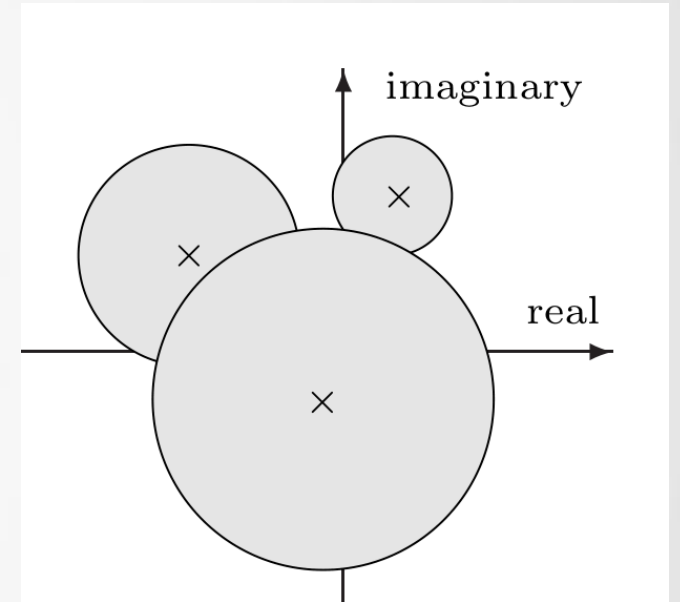
➤ 复数矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

➤ 矩阵特征值满足

$$|\lambda - c_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |c_{kj}|, \quad |\lambda - c_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |c_{jk}|$$

➤ 对角占优矩阵







# MATLAB求解

- MFD 工具箱的频域响应数据

$$H = \text{mv2fr}(N, d, w)$$

$$H = \text{mv2fr}(A, B, C, D, w)$$

- 对每一个频率而言  $G(j\omega)$  也是复数矩阵
- 我编写的Nyquist 图+Gershgorin带绘制函数

$$\text{gershgorin}(H)$$

$$\text{gershgorin}(H, n_{ij})$$

- 早期版本 inagersh



# MATLAB 函数编写

```
function gershgorin(H,key)
if nargin==1, key=0; end
t=[0:.1:2*pi,2*pi]'; [nr,nc]=size(H); nw=nr/nc; ii=1:nc;
for i=1:nc, circles{i}=[]; end
for k=1:nw
    G=H((k-1)*nc+1:k*nc,:);
    if nargin==2 & key==1, G=inv(G); end, H1(:, :,k)=G;
    for j=1:nc, ij=find(ii~=j);
        v=min([sum(abs(G(ij,j))),sum(abs(G(j,ij)))]);
        x0=real(G(j,j)); y0=imag(G(j,j));
        r=sum(abs(v));
        circles{j}=[circles{j} x0+r*cos(t)+sqrt(-1)*(y0+r*sin(t))];
    end, end
```



# MATLAB函数编写

## ➤ 函数清单续

```
hold off; nyquist(tf(zeros(nc)), 'w'); hold on;
h=get(gcf, 'child'); h0=h(end:-1:2);
for i=ii, for j=ii,
    axes(h0((j-1)*nc+i)); NN=H1(i,j,:); NN=NN(:);
    if i==j, cc=circles{i}(:); x1=min(real(cc)); x2=max(real(cc));
        y1=min(imag(cc)); y2=max(imag(cc)); plot(NN),
        plot(circles{i}), plot(0,0, '+'), axis([x1,x2,y1,y2])
    else, plot(NN), end
end, end
```



## 例5-38 多变量模型

### ➤ 多变量模型

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.806s + 0.264}{s^2 + 1.15s + 0.202} & \frac{-15s - 1.42}{s^3 + 12.8s^2 + 13.6s + 2.36} \\ \frac{1.95s^2 + 2.12s + 0.49}{s^3 + 9.15s^2 + 9.39s + 1.62} & \frac{7.15s^2 + 25.8s + 9.35}{s^4 + 20.8s^3 + 116.4s^2 + 111.6s + 18.8} \end{bmatrix}$$

### ➤ MATLAB 求解



```
>> g11=tf([0.806 0.264],[1 1.15 0.202]);  
g12=tf([-15 -1.42],[1 12.8 13.6 2.36]);  
g21=tf([1.95 2.12 0.49],[1 9.15 9.39 1.62]);  
g22=tf([7.15 25.8 9.35],[1 20.8 116.4 111.6 18.8]);
```



```
>> G=[g11, g12; g21, g22]; w=logspace(-2,1.5);  
G=ss(G); H=mv2fr(G.a,G.b,G.c,G.d,w); gershgorin(H);
```






## 例5-39 补偿后系统的频域响应

### ➤ 前置补偿矩阵

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.3610 & 0.4500 \\ -1.1300 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

### ➤ MATLAB 求解

```
 >> Kp=[0.3610,0.4500; -1.1300,1.0000]; G=ss(G*Kp);  
H=mv2fr(G.a,G.b,G.c,G.d,w); gershgorin(H);
```

### ➤ 对角占优性质明显

