

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第三章 科学运算问题MATLAB求解

最优化问题求解

Solutions of Optimization Problems



主讲：薛定宇教授



最优化问题的求解

- 最优化思想在科学研究中很重要
 - 不满足得到的普通解，追求最好的解
 - 有目的定义“最好”的指标
 - 用数值方法求解最优控制问题
 - 学会最优化的思想和解决途径，将使研究水平和认知水平提升一个档次
- 本节主要内容
 - 无约束最优化问题的求解
 - 有约束最优化的求解、最优曲线拟合



无约束最优化问题求解

➤ 数学描述 $\min_x f(\boldsymbol{x})$

➤ 物理意义

➤ 目标函数、决策变量

➤ MATLAB 求解

$[\boldsymbol{x}, f_{\text{opt}}, \text{key}, c] = \text{fminsearch}(\text{Fun}, \boldsymbol{x}_0, \text{options})$

➤ 求解步骤

➤ 写标准型

➤ 描述目标函数：M-函数或匿名函数

➤ 直接求解（边界约束求解 `fminsearchbnd()`）



有约束最优化问题的求解

➤ 有约束最优化问题的数学描述

$$\begin{array}{ll} \min & f(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x} \text{ s.t.} & \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}_{\text{eq}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_{\text{eq}} \\ \boldsymbol{x}_{\text{m}} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}_{\text{M}} \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C}_{\text{eq}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \end{array} \right. \end{array}$$

➤ MATLAB求解

$$[\boldsymbol{x}, f_{\text{opt}}, \text{key}, \text{c}] = \text{fmincon}(\text{Fun}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_{\text{eq}}, \boldsymbol{B}_{\text{eq}}, \boldsymbol{x}_{\text{m}}, \boldsymbol{x}_{\text{M}}, \text{CFun}, \text{OPT})$$



例3-17 非线性最优化求解举例

➤ 数学问题

$$\begin{aligned} & \min && e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1) \\ & \mathbf{x} \text{ s.t.} && \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1x_2 + x_1 + x_2 \geq 1.5 \\ x_1x_2 \geq -10 \\ -10 \leq x_1, x_2 \leq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

➤ 目标函数与约束条件

```
function y=c3exmobj(x)
y=exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
function [c,ce]=c3exmcon(x), ce=[];
c=[x(1)+x(2); x(1)*x(2)-x(1)-x(2)+1.5; -10-x(1)*x(2)];
```

➤ 求解



```
>> A=[]; B=[]; Aeq=[]; Beq=[]; xm=[-10; -10]; xM=[10; 10]; x0=[5;5];
x=fmincon(@c3exmobj,x0,A,B,Aeq,Beq,xm,xM,@c3exmcon)
```



有时需要反复求解

➤ 求解函数的警告信息

➤ 考虑循环语句求解



```
>> i=1; x=x0;  
    while (1)  
        [x,a,b]=fmincon(@c3exmobj,x,A,B,Aeq,Beq,xm,xM,@c3exmcon);  
        if b>0, break; end, i=i+1;  
    end
```

➤ 其他最优化求解程序

- 线性规划 `linprog()`、二次型规划 `quadprog()` 等
- 其他规划问题：整数规划、混合整数规划等



全局最优解的尝试

- 没有任何算法可以确保得出最优化全局最优解
 - 可以使用进化类算法求解，如遗传算法等
- 仿照多解方程编写搜索函数
 - 无约束最优化问题

$$[x, f_{\min}] = \text{fminunc_global}(\text{fun}, a, b, n, N)$$

- 有约束最优化问题

$$[x, f_{\min}] = \text{fmincon_global}(\text{fun}, a, b, n, N, \\ A, B, A_{\text{eq}}, B_{\text{eq}}, x_{\text{m}}, x_{\text{M}}, \text{CFun}, \text{OPT})$$



最优曲线拟合

➤ 数学问题

➤ 已知数据： $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, N$

➤ 已知函数的原型 $\hat{y}(x) = f(\mathbf{a}, x)$

➤ 目标函数

$$J = \min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^N [y_i - \hat{y}(x_i)]^2 = \min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^N [y_i - f(\mathbf{a}, x_i)]^2$$


➤ 求待定系数向量 \mathbf{a}

$$[\mathbf{a}, J_m] = \text{lsqcurvefit}(\text{Fun}, \mathbf{a}_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_M, \text{options})$$




例3-18 由数据拟合模型

➤ 下面语句可以生成数据

```
 >> x=[0:0.01:0.1, 0.2:0.1:1,1.5:0.5:10];  
      y=0.56*exp(-0.2*x).*sin(0.8*x+0.4).*cos(-0.65*x);  
      plot(x,y,'o',x,y)
```

➤ 原型函数 $y(x) = a_1 e^{-a_2 x} \sin(a_3 x + a_4) \cos(a_5 x)$

```
 >> F=@(a,x)a(1)*exp(-a(2)*x).*sin(a(3)*x+a(4)).*cos(a(5)*x);  
      a=lsqcurvefit(F,[1;1;1;1;1],x,y)  
      a0=[0.56;0.2;0.8;0.4;-0.65]; norm(a-a0)  
      x0=0:0.01:10; y0=F(a0,x0); y1=F(a,x0);
```

```
 >> plot(x0,y0,x0,y1,x,y,'o')
```



多项式拟合

- 已知数据 $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, N$
- 选择多项式阶次 n
- MATLAB 求解 $a = \text{polyfit}(x, y, n)$
- 多项式拟合



```
>> p=polyfit(x,y,6), y2=polyval(p,x0);  
    p=polyfit(x,y,8); y3=polyval(p,x0);  
    plot(x0,y0,x,y,'o',x0,y2,x0,y3)
```



最优化求解小结

- 最优化问题求解时可以描述目标函数
 - M-函数、匿名函数
 - 约束条件返回等式和不等式，不能用匿名函数
- 最优化问题求解函数
 - 无约束最优化：fminsearch、fminunc
 - 有约束最优化：fmincon、fminsearchbnd
 - 全局最优解尝试：fminunc_global, fmincon_global
- 数据拟合：lsqcurvefit()、polyfit()

