国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第四章 线性系统的数学模型

次优模型降阶

Suboptimal Model Reduction Methods

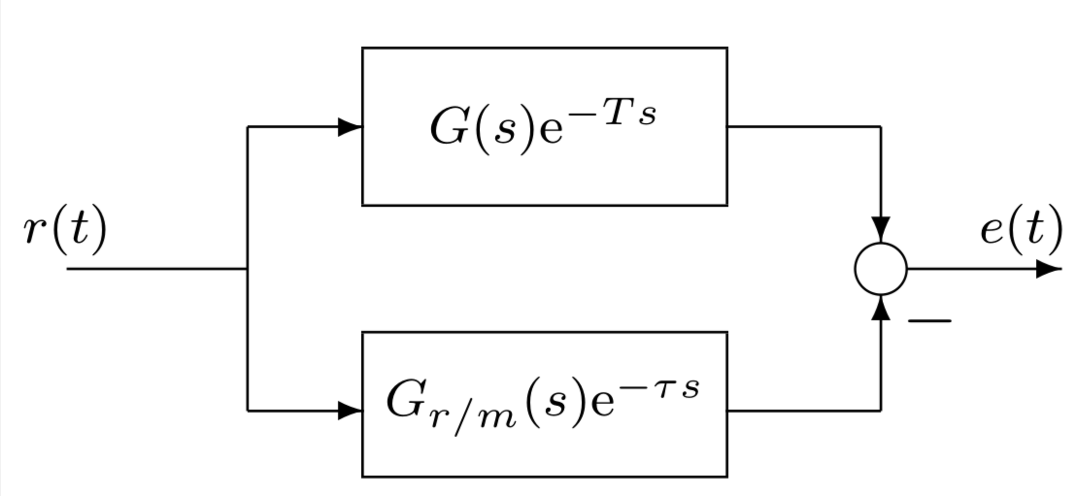
主讲：薛定宇教授

次最优模型降阶

- 为什么需要最优降阶
  - 刚才介绍的各种方法效果不令人满意
  - 有没有更好的方法？
  - 原始模型有时间延迟怎么办？
- 如何表示延迟？
- 如何将模型降阶问题转换成数值最优化问题？
- 什么是次最优降阶，如何实现？

什么是最好的降阶模型？

- 客观的最优降阶指标提出



- 误差最小指标
- 性能指标定义

$$\sigma_h^2 = \int_0^\infty h^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty w^2(t)e^2(t)\mathrm{d}t$$

时间延迟模型的 **Padé**近似

- 纯延迟的Padé近似方法

$$P_{k,\tau}(s)=\frac{1-\tau s/2+p_2(\tau s)^2-p_3(\tau s)^3+\cdots+(-1)^{n+1}p_n(\tau s)^k}{1+\tau s/2+p_2(\tau s)^2+p_3(\tau s)^3+\cdots+p_n(\tau s)^k}$$

- Padé近似函数 $[\boldsymbol{n},\boldsymbol{d}]=\mathtt{pade}(\tau,k)$

  $G_1=\mathtt{pade}(G,k)$

- 多变量系统的Padé近似

  $G_1=\mathtt{pade}(\boldsymbol{G},n_{\mathrm{i}},n_{\mathrm{o}},k)$

不同分子分母的Padé近似

- 算法：逼近 $\mathrm{e}^{-\tau s} = 1 - \dfrac{1}{1!}\tau s + \dfrac{1}{2!}\tau^2 s^2 - \dfrac{1}{3!}\tau^3 s^3 + \cdots$
- 编写 MATLAB 函数

```
function [n,d]=paderm(tau,r,k)
c(1)=1; for i=2:r+k+1, c(i)=-c(i-1)*tau/(i-1); end
Gr=pade_app(c,r,k); n=Gr.num{1}(k-r+1:end);
d=Gr.den{1};
```

- 其中 *r*/*k* 任意选择
- 可以选择 0/*k* ，以避免非最小相位模型

例4-29 纯延迟模型的近似

纯延迟模型 $G(s)=\mathrm{e}^{-s}$

- MATLAB求解

```
>> tau=1; [n1,d1]=pade(tau,3); G1=tf(n1,d1)
   [n2,d2]=paderm(tau,1,3); G2=tf(n2,d2)
```

- 拟合结果

$$G_1(s)=\frac{-s^3+12s^2-60s+120}{s^3+12s^2+60s+120}$$

$$G_2(s)=\frac{-6s+24}{s^3+6s^2+18s+24}$$

例4-30 已知带有延迟的线性模型

带有延迟的线性模型 $G(s)=\dfrac{3s+1}{(s+1)^3}\mathrm{e}^{-2s}$

- 可以得出近似模型

```
>> G=tf([3 1],[1 3 3 1]);
   [n,d]=paderm(2,1,3); Gr=G*tf(n,d);
   G.ioDelay=2; Gr1=pade(G,2)
   step(G,Gr,'--',Gr1,':')
```

```
>> bode(G,Gr,'--',Gr1,':')
```

次最优模型降阶

- 已知原始模型

$$G(s)\mathrm{e}^{-Ts}=\frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\mathrm{e}^{-Ts}$$

- 期待降阶模型

$$G_{r/k}(s)\mathrm{e}^{-\tau s}=\frac{\beta_1 s^r+\cdots+\beta_r s+\beta_{r+1}}{s^k+\alpha_1 s^{k-1}+\cdots+\alpha_{k-1}s+\alpha_k}\mathrm{e}^{-\tau s}$$

- 降阶误差

$$E(s)=\left[G(s)\mathrm{e}^{-Ts}-G_{r/m}(s)\mathrm{e}^{-\tau s}\right]R(s)$$

次最优降阶的**MATLAB**实现

- 决策变量

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{r+1}, \tau)$$

- 目标函数的计算

$$J = \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\int_0^\infty w^2(t)\widehat{e}^2(t, \boldsymbol{\theta}) \mathrm{d}t \right]$$

- MATLAB实现见教材，核心为fminsearch函数
  - 调用格式 G_r=`opt_app(`G,r,m,`key`,G_0`)`

例4-31 复杂模型的最优降阶

- 前面介绍的模型

$$G(s)=\frac{1+8.8818s+29.9339s^2+67.087s^3+80.3787s^4+68.6131s^5}{1+7.6194s+21.7611s^2+28.4472s^3+16.5609s^4+3.5338s^5+0.0462s^6}$$

- 次最优降阶

```
>> num=[68.6131,80.3787,67.087,29.9339,8.8818,1];
   den=[0.0462,3.5338,16.5609,28.4472,21.7611,7.6194,1];
   G=tf(num,den); Gr=zpk(opt_app(G,2,3,0))
   step(G,Gr,'--')
```

```
>> bode(G,Gr,'--')
```

例4-32 高阶全极点模型

- 高阶模型

$$G(s)=\frac{432}{(5s+1)(2s+1)(0.7s+1)(s+1)(0.4s+1)}$$

- 最优降阶

```
>> s=tf('s');
   G=432/(5*s+1)/(2+s+1)/(0.7*s+1)/(s+1)/(0.4*s+1);
   Gr=zpk(opt_app(G,0,2,1))
   step(G,Gr,'--')
```

例4-33 非最小相位系统

- 系统模型

$$G(s)=\frac{10s^3-60s^2+110s+60}{s^4+17s^2+82s^2+130s+100}$$

- 模型降阶

```
>> G=tf([10 -60 110 60],[1 17 82 130 100]);
   Gr=opt_app(G,1,2,1); Gr1=opt_app(G,1,2,0);
   step(G,Gr,'--',Gr1,':')
```

次最优模型降阶小结

- 引入客观最优性能指标，将降阶问题转换成数值最优化问题
- 利用MATLAB提供的最优化工具直接求解
- 由于延迟项存在，引入Pade近似，所以最优降阶更精确地定义为次最优
- MATLAB函数 opt_app

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD