常用概率分布

第9章 概率论与数理统计问题的计算机求解

- 概率分布与伪随机数生成
- 统计量分析
- 数理统计分析方法及计算机实现
- 统计假设检验
- 方差分析与主成分分析

概率与概率密度函数

- 什么是概率？
  - 随机事件发生的可能性
- 如果随机变量 ξ 落入任意(a,b)区间的概率

$$F(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

- 则 $p(x)$ 称为概率密度函数，满足

$$p(x) \geqslant 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$$

概率分布函数

- 由概率密度可以定义出概率分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t$$

- 物理含义
  - 概率分布函数 $F(x)$ - 随机变量ξ满足$\xi \le x$发生的概率
- 分布函数性质
  - 函数 $F(x)$ 单调非减函数

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1,\ F(-\infty)=0,\ \ F(\infty)=1$$

常见分布的概率密度函数与分布函数

- Poisson分布
- 正态分布
- F分布
- T分布
- χ^2分布
- Gamma分布
- Rayleigh分布

相关MATLAB函数

- 后缀：pdf，cdf，inv，rnd，stat，fit
  - 例如，betapdf(), gamcdf(), raylrnd()
  - pdf('beta',…), cdf('gam',…), random('rayl',…)
  - inv->icdf, rnd->random, fit->fittest

关键词	分布名称	有关参数	关键词	分布名称	有关参数	关键词	分布名称	有关参数
beta	Beta 分布	a, b	**bino**	二项分布	n, p	**chi2**	χ^2 分布	k
ev	极值分布	μ, σ	**exp**	指数分布	λ	**f**	F 分布	p, q
gam	Gamma 分布	a, λ	**geo**	几何分布	p	**hyge**	超几何分布	m, p, n
logn	对数正态分布	μ, σ	**mvn**	多变量正态分布	$\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$	**nbin**	负二项分布	ν_1, ν_2, δ
ncf	非零 F 分布	k, δ	**nct**	非零 T 分布	k, δ	**ncx2**	非零 χ^2 分布	k, δ
norm	正态分布	μ, σ	**poiss**	Poisson 分布	λ	**rayl**	Rayleigh 分布	b
t	T 分布	k	**unif**	均匀分布	a, b	**wbl**	Weibull 分布	a, b

Poisson分布

- Poisson分布的概率密度为：

$$p(x)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda x},\ x=0,1,2,3,\cdots$$

- 其中，λ 为正整数
- Poisson分布的概率密度函数：

$$\boldsymbol{y}=\texttt{poisspdf}(\boldsymbol{x},\lambda),\quad \boldsymbol{y}=\texttt{pdf}(\texttt{'poiss'},\boldsymbol{x},\lambda)$$

$$\boldsymbol{F}=\texttt{poisscdf}(\boldsymbol{x},\lambda),\quad \boldsymbol{F}=\texttt{cdf}(\texttt{'poiss'},\boldsymbol{x},\lambda)$$

$$\boldsymbol{x}=\texttt{poissinv}(\boldsymbol{F},\lambda),\quad \boldsymbol{x}=\texttt{icdf}(\texttt{'poiss'},\boldsymbol{F},\lambda)$$

例9-1 Poisson分布

- Poisson分布的概率密度函数与分布函数曲线
  - Poisson分布的参数 λ=1,2,5,10
- MATLAB求解语句：

```
>> x=[0:15]'; y1=[]; y2=[];lam1=[1,2,5,10];
   for i=1:length(lam1)
      y1=[y1,poisspdf(x,lam1(i))];
      y2=[y2,poisscdf(x,lam1(i))];
   end, stem(x,y1), line(x,y1)
```

```
>> stem(x,y2), line(x,y2)
```

- 也可以使用通用函数 pdf()、cdf()、icdf()

正态分布

- 正态分布的概率密度函数为：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- 其中，μ 和 σ^2 分别为正态分布的均值和方差
- 正态分布的概率密度函数调用格式：

$\boldsymbol{y}=\texttt{normpdf}(\boldsymbol{x},\mu,\sigma)$ $\boldsymbol{y}=\texttt{pdf}(\texttt{'norm'},\boldsymbol{x},\mu,\sigma)$

$\boldsymbol{F}=\texttt{normcdf}(\boldsymbol{x},\mu,\sigma)$ $\boldsymbol{F}=\texttt{cdf}(\texttt{'norm'},\boldsymbol{x},\mu,\sigma)$

$\boldsymbol{x}=\texttt{norminv}(\boldsymbol{F},\mu,\sigma)$ $\boldsymbol{x}=\texttt{icdf}(\texttt{'norm'},\boldsymbol{F},\mu,\sigma)$

例9-2 正态分布

- 正态分布的概率密度函数与分布函数曲线
  - (μ,σ^2) 参数选择为$(-1,1)$, $(0,0.1)$, $(0,1)$, $(0,10)$, $(1,1)$

```
>> x=[-5:.02:5]'; y1=[]; y2=[];
   mu1=[-1,0,0,0,1];
   sig=sqrt([1,0.1,1,10,1]);
   for i=1:length(mu1)
      y1=[y1,normpdf(x,mu1(i),sig(i))];
      y2=[y2,normcdf(x,mu1(i),sig(i))];
   end, plot(x,y1)
>> plot(x,y2)
```

Rayleigh分布

- Rayleigh分布的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{b^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2b^2}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

- 该函数是 b 的函数

$$\boldsymbol{y} = \texttt{raylpdf}(\boldsymbol{x},k) \qquad \boldsymbol{y} = \texttt{pdf}(\texttt{'rayl'},\boldsymbol{x},k)$$

$$\boldsymbol{F} = \texttt{raylcdf}(\boldsymbol{x},k) \qquad \boldsymbol{F} = \texttt{cdf}(\texttt{'rayl'},\boldsymbol{x},k)$$

$$\boldsymbol{x} = \texttt{raylinv}(\boldsymbol{F},k) \qquad \boldsymbol{x} = \texttt{icdf}(\texttt{'rayl'},\boldsymbol{F},k)$$

例9-7 Rayleigh分布

- Rayleigh 分布的概率密度函数与分布函数曲线
  - 参数b=0.5,1,3,5
- MATLAB求解语句：

```
>> x=[-eps:-0.02:-0.05,0:0.02:5];y2=[];
   x=sort(x');  b1=[.5,1,3,5]; y1=[];
   for i=1:length(b1)
      y1=[y1,raylpdf(x,b1(i))];
      y2=[y2,raylcdf(x,b1(i))];
   end, plot(x,y1)
>> plot(x,y2)
```

随机数与伪随机数生成

- 伪随机数 —— 数学方式生成的，rand(), randn()
- 生成不同种类分布的随机数的函数调用格式
  - 生成 $n \times m$ 的 Gamma 分布的伪随机数矩阵

    $\boldsymbol{A}=\texttt{gamrnd}(a,\lambda,n,m)$

    $\boldsymbol{A}=\texttt{random('gam'},a,\lambda,n,m)$
  - 生成 χ^2 分布的伪随机数

    $\boldsymbol{A}=\texttt{chi2rnd}(k,n,m)$

    $\boldsymbol{A}=\texttt{random('t'},k,n,m)$