国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

# 第十一章 分数阶控制基础

## 分数阶非线性系统仿真（上）

Simulation of Fractional-order Nonlinear Systems (I)

主讲：薛定宇教授

# 分数阶微分方程的求解

- 基于命令的求解方法
  - 零初值分数阶线性微分方程的闭式解法
  - 非零初值Caputo线性微分方程的数值求解
  - 非零初值Caputo线性微分方程的高精度求解
  - 非线性微分方程的高精度求解方法
- 基于框图的分数阶微分方程数值解

# 零初值分数阶线性微分方程的标准型

- 分数阶线性微分方程标准型

$$a_n\mathscr{D}_t^{\beta_n}y(t)+a_{n-1}\mathscr{D}_t^{\beta_{n-1}}y(t)+\cdots$$
$$+a_1\mathscr{D}_t^{\beta_1}y(t)+a_0\mathscr{D}_t^{\beta_0}y(t)=\hat{u}(t)$$

- 如果右侧不是 $u(t)$，可以通过下式计算

$$\hat{u}(t)=b_1\mathscr{D}_t^{\gamma_1}u(t)+b_2\mathscr{D}_t^{\gamma_2}u(t)+\cdots+b_m\mathscr{D}_t^{\gamma_m}u(t)$$

- 假设 $\beta_n>\beta_{n-1}>\cdots>\beta_1>\beta_0>0$
- 如果有负阶次，应该事先变换 $z(t)=\mathscr{D}_t^{\beta_0}y(t)$

# 线性微分方程的闭式解

➢ 由 Grünwald–Letnikov 定义

$$ {}_a\mathscr{D}_t^{\beta_i} y(t) \approx \frac{1}{h^{\beta_i}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} w_j^{(\beta_i)} y_{t-jh} = \frac{1}{h^{\beta_i}} \left[ y_t + \sum_{j=1}^{[(t-a)/h]} w_j^{(\beta_i)} y_{t-jh} \right] $$

$$ w_0^{(\beta_i)} = 1, \quad w_j^{(\beta_i)} = \left( 1 - \frac{\beta_i + 1}{j} \right) w_{j-1}^{(\beta_i)}, \ j = 1, 2, \cdots $$

➢ 微分方程的闭式数值解为

$$ y_t = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{h^{\beta_i}}} \left[ \hat{u}_t - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{h^{\beta_i}} \sum_{j=1}^{[(t-a)/h]} w_j^{(\beta_i)} y_{t-jh} \right] $$

# 分数阶微分方程求解函数

- 直接求解 $\boldsymbol{y}=\texttt{fode\_sol}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}_{\rm a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}_{\rm b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$

```
function y=fode_sol(a,na,b,nb,u,t)
h=t(2)-t(1); D=sum(a./[h.^na]);
nT=length(t); vec=[na nb]; W=[];
D1=b(:)./h.^nb(:); nA=length(a);
y1=zeros(nT,1); W=ones(nT,length(vec));
for j=2:nT, W(j,:)=W(j-1,:).*(1-(vec+1)/(j-1)); end
for i=2:nT,
   A=[y1(i-1:-1:1)]'*W(2:i,1:nA);
   y1(i)=(u(i)-sum(A.*a./[h.^na]))/D;
end
for i=2:nT, y(i)=(W(1:i,nA+1:end)*D1)'*[y1(i:-1:1)]; end
```

# 例11-17 分数阶微分方程的数值解

- 求解零初值分数阶线性微分方程

$$\mathscr{D}_t^{3.5}y(t)+8\mathscr{D}_t^{3.1}y(t)+26\mathscr{D}_t^{2.3}y(t)+73\mathscr{D}_t^{1.2}y(t)+90\mathscr{D}_t^{0.5}y(t)=90\sin t^2$$

- 选择计算步长 $h = 0.002$
- 求解，选择不同的 $h$ 检验

```
>> a=[1,8,26,73,90]; n=[3.5,3.1,2.3,1.2,0.5];
   t=0:0.002:10; u=90*sin(t.^2);
   y=fode_sol(a,n,1,0,u,t); subplot(211),
   plot(t,y); subplot(212), plot(t,u)
```

# 分数阶微分方程的高精度求解

- Riemann–Liouville 方程的高精度求解

  $$\boldsymbol{y}=\texttt{fode\_sol9}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}_{\rm a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}_{\rm b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t},p)$$

- Caputo方程的高精度求解

  $$\boldsymbol{y}=\texttt{fode\_caputo9}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}_{\rm a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{n}_{\rm b},\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{t},p)$$

- 非线性Caputo方程的高精度求解
  - 预估解 $[\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}]=\texttt{nlfep}(\texttt{fun},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{y}_0,t_{\rm n},h,p,\epsilon)$
  - 校正解 $\boldsymbol{y}=\texttt{nlfec}(\texttt{fun},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_{\rm p},\boldsymbol{t},p,\epsilon)$

# 例11-18 Caputo分数阶线性微分方程

- 已知线性微分方程

$$y'''(t)+\frac{1}{16}{}_0^{\rm C}\mathscr{D}_t^{2.5}y(t)+\frac{4}{5}y''(t)+\frac{3}{2}y'(t)+\frac{1}{25}{}_0^{\rm C}\mathscr{D}_t^{0.5}y(t)+\frac{6}{5}y(t)=\frac{172}{125}\cos\frac{4t}{5}$$

- 初值 $y(0)=1,\ y'(0)=4/5,\ y''(0)=-16/25,\ 0\leqslant t\leqslant 30$
- 解析解 $y(t)=\sqrt{2}\sin(4t/5+\pi/4)$
- MATLAB数值求解

```
>> a=[1 1/16 4/5 3/2 1/25 6/5]; na=[3 2.5 2 1 0.5 0];
   b=1; nb=0; t=[0:0.05:30]; u=172/125*cos(4*t/5);
   y0=[1 4/5 -16/25]; y1=fode_caputo9(a,na,b,nb,y0,u,t,4);
   y=sqrt(2)*sin(4*t/5+pi/4); max(abs(y-y1)), plot(t,y,t,y1)
```

# 例11-19 非线性微分方程的高精度求解

- Caputo定义下的微分方程

$$ {}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{1.455}y(t) = -t^{0.1}\frac{\mathscr{E}_{1,1.545}(-t)}{\mathscr{E}_{1,1.445}(-t)}\mathrm{e}^t y(t)\,{}_0^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_t^{0.555}y(t) + \mathrm{e}^{-2t} - \left[y'(t)\right]^2 $$

- 初值 $y(0)=1,\ y'(0)=-1$ ，解析解 $y(t)=\mathrm{e}^{-t}$

```
>> f=@(t,y,Dy)-t.^0.1.*ml_func([1,1.545],-t).*exp(t)./...
      ml_func([1,1.445],-t).*y.*Dy(:,1)+exp(-2*t)-Dy(:,2).^2;
   alpha=[1.455,0.555,1]; y0=[1,-1]; tn=1; h=0.01; err=1e-8;
   [yp1,t]=nlfep(f,alpha,y0,tn,h,1,err);
```

```
>> tic, [y2,t]=nlfec(f,alpha,y0,yp1,t,2,err); toc
   max(abs(y2-exp(-t)))
```

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD