国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第五章 线性系统的计算机辅助分析

传递函数模型解析解（上）

Analytical Solutions of Transfer Function Models (I)

主讲：薛定宇教授

传递函数模型的解析解

- 零初值问题的求解
  - 求出输出信号的 Laplace 或 z 变换
  - 对结果进行反变换求解析解
  - 延迟的处理
- 非零初值的处理方法
  - 还原成微分方程再重新求解
- 二阶系统分析与性能指标

基于Laplace变换的方法求解

- 连续系统的解析解法

$$G(s)=\frac{b_1s^m+b_2s^{m-1}+\cdots+b_ms+b_{m+1}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

- 输入信号的 Laplace 变换 $U(s)$
- 输出信号的 Laplace 变换 $Y(s) = G(s)\ U(s)$
- 调用MATLAB的 laplace() 和 ilaplace() 函数可以直接求出系统的解析解

例5-12 阶跃响应解析解

- 系统传递函数模型 $G(s)=\dfrac{s^3+7s^2+3s+4}{s^4+7s^3+17s^2+17s+6}$
  - 输入信号为阶跃信号 $R(s)=1/s$
  - 输出信号直接求解——不能使用LTI模型

```
>> syms s;
   G=(s^3+7*s^2+3*s+4)/(s^4+7*s^3+17*s^2+17*s+6);
   Y=G/s; y=ilaplace(Y)
```

  - 另一组语句

```
>> syms s; U=laplace(sym(1));
   G=(s^3+7*s^2+3*s+4)/(s^4+7*s^3+17*s^2+17*s+6);
   Y=G*U; y=ilaplace(Y)
```

离散系统的解析解方法

- 已知离散传递函数 $G(z)$
  - 输入信号的 z 变换为 $U(z)$，ztrans() 函数
  - 计算出输出信号 $Y(z) = G(z)U(z)$
  - z 反变换求解解析解，iztrans() 函数
  - 有时可能需要手工化简

例5-13 离散系统阶跃响应

- 离散系统模型

$$G(z)=\frac{(z-1/3)}{(z-1/2)(z-1/4)(z+1/5)}$$

- 阶跃响应解析解
  - 阶跃输入信号的 z 变换为 $z/(z-1)$
  - 解析求解

```
>> syms z; G=(z-1/3)/(z-1/2)/(z-1/4)/(z+1/5);
   R=z/(z-1); y=iztrans(G*R)
```

例5-14 有重根系统的解析解

- 受控对象模型 $G(z)=\dfrac{5z-2}{(z-1/2)^3(z-1/3)}$
- 直接求解

```
>> syms z; G=(5*z-2)/(z-1/2)^3/(z-1/3);
   R=z/(z-1); y=iztrans(G*R)
```

- 手工化简
  - nchoosek(n-1,2)是什么？ $\mathrm{C}_{n-1}^{2}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

```
>> syms n
   y=simplify(subs(y,nchoosek(n-1,2),(n-1)*(n-2)/2))
```

例5-15 连续延迟系统

- 传递函数

$$G(s)=\frac{s^3+7s^2+3s+4}{s^4+7s^3+17s^2+17s+6}\mathrm{e}^{-2s}$$

- 时域响应求解思路 $G(s)\mathrm{e}^{-Ls}$
  - 先求出 $G(s)$ 在给定输入下的解析解 Y
  - 用 $t-L$ 替换得出的 t， `subs(Y,t,t-L)`
  - Heaviside函数的使用

求解方法

- 直接求解方法

```
>> syms s t; G=(s^3+7*s^2+3*s+4)/(s^4+7*s^3+17*s^2+17*s+6);
   Y=G/s; y=ilaplace(Y); y=subs(y,t,t-2)
```

- 解的验证

```
>> fplot(y,[0,20])
```

- 解的修正

$$y=\begin{cases}0, & t\leqslant 2\\ 2/3-9\mathrm{e}^{-2(t-2)}+31\mathrm{e}^{-3(t-2)}/12-\mathrm{e}^{-(t-2)}\left(14(t-2)-23\right)/4, & t>2\end{cases}$$

$$y(t)=\left(2/3-9\mathrm{e}^{-2(t-2)}+31\mathrm{e}^{-3(t-2)}/12-\mathrm{e}^{-(t-2)}\left(14(t-2)-23\right)/4\right)\times 1(t-2)$$

- Heaviside函数

```
>> fplot(y*heaviside(t-2),[0,20])
```

非零初值问题的求解

- 非零初值问题的数学形式
  - 传递函数模型

$$G(s)=\frac{b_1s^m+b_2s^{m-1}+\cdots+b_ms+b_{m+1}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

  - 初始条件 $y(0),y'(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$

- 直接还原成微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^ny(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_ny(t)$$
$$=b_1\frac{\mathrm{d}^mu(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_2\frac{\mathrm{d}^{m-1}u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_m\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+b_{m+1}u(t)$$

例5-16 非零初值问题求解

- 传递函数模型 $G(s)=\dfrac{s^3+7s^2+3s+4}{s^4+7s^3+17s^2+17s+6}$
  - 非零初值 $y(0)=1, y'(0)=0.5, y''(0)=y'''(0)=0$
  - 输入信号 $u(t)$=sin t
- 变换回微分方程模型

$$y^{(4)}+10y'''+35y''+50y'+24y=u'''+7u''+24u'+24u$$

```
>> syms t; u=sin(t);
uu=diff(u,3)+7*diff(u,2)+24*diff(u)+24*u;
y=dsolve([’D4y+10*D3y+35*D2y+50*Dy+24*y=’,char(uu)],...
   ’y(0)=1’,’Dy(0)=0.5’,’D2y(0)=0’,’D3y(0)=0’)
```

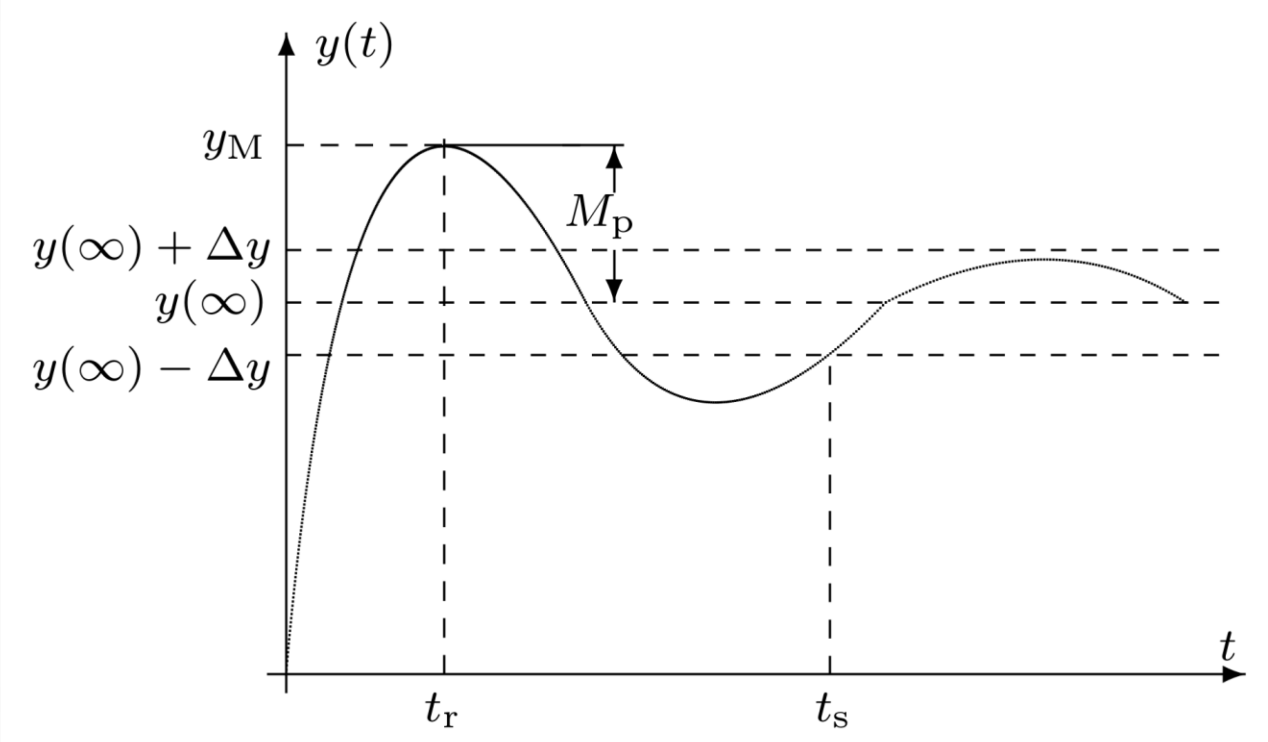
二阶系统的阶跃响应及阶跃响应指标

- 二阶系统模型 $G_{\mathrm{o}}(s) = \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s(s+2\zeta\omega_{\mathrm{n}})}$
- 闭环模型 $G(s) = \dfrac{\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2+2\zeta\omega_{\mathrm{n}}s+\omega_{\mathrm{n}}^2}$
- 若 $\omega_n = 1$

```
>> t=[0:0.4:10]'; zet=[0:0.2:1,2,3]; yy=[]; wn=1; s=tf('s');
   for z=zet,
      G=wn^2/(s^2+2*z*wn*s+wn^2); y=step(G,t); yy=[yy y];
   end
   ribbon(t,yy, 0.2)
```

阶跃响应指标

- 超调量
- 稳态值
- 上升时间
- 调节时间



- 好的伺服控制系统，应该具有稳态误差小或没有稳态误差、超调量小或没有超调量、上升时间短、调节时间短等性能

线性系统的解析解方法小结

- 传递函数模型
  - 连续系统可以通过 laplace 和 ilaplace函数求解
  - 离散系统可以通过 ztrans 和 iztrans 函数求解
  - 手工化简 nchoosek
- 延迟函数的求解 subs 函数、heaviside 函数
- 二阶系统的解析解方法：几个指标

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD