Taylor级数展开

单变量函数的Taylor幂级数展开

- 数学表示
  - 在 $x=0$ 点附近的Taylor幂级数

$$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_kx^{k-1}+o(x^k)$$

  - 其中

$$a_i=\frac{1}{i!}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}f(x),\quad i=1,2,3,\cdots.$$

- MATLAB格式 $F=\texttt{taylor(}fun\texttt{,}x\texttt{,'Order',}k\texttt{)}$
- 早期版本 $F=\texttt{taylor(}fun\texttt{,}x\texttt{,}k\texttt{)}$

关于 x=a 的 Taylor展开

- 关于 $x=a$ 点的 Taylor 展开

$$f(x)=b_1+b_2(x-a)+b_3(x-a)^2+\cdots$$
$$+b_k(x-a)^{k-1}+o[(x-a)^k]$$

- 其中 $$b_i=\frac{1}{i!}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}f(x),\quad i=1,2,3,\cdots$$
- MATLAB格式

$$F=\texttt{taylor(}fun\texttt{,}x\texttt{,}a\texttt{,'Order',}k\texttt{)}$$

- 早期版本 $F=\texttt{taylor(}fun\texttt{,}x\texttt{,}k\texttt{,}a\texttt{)}$

例3-35 函数的Taylor级数

- 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+4x+3}$
- 在 x=0, x=2 和 x=a 求其 Taylor 幂级数展开
  - 在 x=0 进行 Taylor 展开

    ```
    >> syms x; f=sin(x)/(x^2+4*x+3);
       y=taylor(f,x,'Order',9)
    ```

  - 在x=2进行Taylor展开

    ```
    >> F=taylor(f,x,2,'Order',9)
    ```

  - 在 $x = a$ 进行 Taylor 展开

    ```
    >> syms a; taylor(f,x,a,'Order',5)
    ```

近似效果

- 检查有限项的近似结果
  - 在区间[-1,1]内绘图

```
>> ezplot(f,[-1,1]), hold on;
   h=ezplot(y,[-1,1]);
   set(h,'Color','r'), hold off
```

  - 更小的区间[-0.6,0.6]

```
>> ezplot(f,[-0.6,0.6]), hold on;
   h=ezplot(y,[-0.6,0.6]);
   set(h,'Color','r'), hold off
```

例3-36 正弦函数的幂级数逼近

- 原函数 $y(t)=\sin(t)$
- MATLAB逼近

```
>> syms x; y=sin(x); ezplot(y), hold on
   for n=[6:2:16],
       p=taylor(y,x,'Order',n), ezplot(p),
   end
```

多变量函数的Taylor幂级数展开

- 多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
- Taylor幂级数展开

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right] f(\boldsymbol{x})\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} +$$

$$\frac{1}{2!}\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(\boldsymbol{x})\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} + \cdots +$$

$$\frac{1}{k!}\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(\boldsymbol{x})\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} + \cdots$$

$$F = \texttt{taylor}(f, [x_1, x_2, \cdots, x_n], [a_1, a_2, \cdots, a_n], \texttt{'Order'}, k)$$

例3-37 二元函数Taylor展开

- 函数 $z=f(x,y)=(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}$
- 在原点展开Taylor级数

```
>> syms x y; f=(x^2-2*x)*exp(-x^2-y^2-x*y);
F=taylor(f,[x,y],[0,0],'Order',8);
collect(F,x)
```

- 关于 $(1,a)$ 点展开

```
>> syms a;
F=taylor(f,[x,y],[1,a],'Order',3),
F1=simplify(F)
```