曲线积分与
曲面积分计算

曲线积分及MATLAB求解

- 没有直接的函数可以调用
- 可以根据积分的公式，直接用相应的MATLAB命令得出结果
- 本课程给出通用的求解函数
- 本节主要内容
  - 第一类曲线积分
  - 第二类曲线积分

第一类曲线积分

- 第一类曲线积分 $I_1 = \int_l f(x,y,z)\mathrm{d}s$
- 曲线 l 满足参数方程 $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

- 转换成定积分问题

$$I = \int_{t_\mathrm{m}}^{t_\mathrm{M}} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2}\,\mathrm{d}t$$

通用MATLAB求解函数编写

➢求解第一类曲线积分与第二类曲线积分

```
function I=path_integral(F,vars,t,a,b)
if length(F)==1,
   I=int(F*sqrt(sum(diff(vars,t).^2)),t,a,b);
else,
   F=F(:).'; vars=vars(:); I=int(F*diff(vars,t),t,a,b);
end
```

➢调用格式

I=path_integral(f,[x,y],t,t_m,t_M)

I=path_integral(f,[x,y,z],t,t_m,t_M)

例3-49 曲线积分求解

- 计算 $\displaystyle\int_l \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，$l$ 是如下定义的螺线

$$x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ z=at,\ \ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ \ a>0$$

- 公式 $I=\displaystyle\int_{t_{\mathrm{m}}}^{t_{\mathrm{M}}} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}\mathrm{d}t.$

- MATLAB求解语句

```
>> syms t; syms a positive; x=a*cos(t);
   y=a*sin(t); z=a*t; f=z^2/(x^2+y^2);
   I=path_integral(f,[x,y,z],t,0,2*pi)
```

第二类曲线积分

- 第二类曲线积分 $I_2 = \int_l \vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}}$
- 其中 $\vec{\boldsymbol{f}}(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$
- 并且

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t$$

- 上式化为

$$\int_a^b [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)] \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t$$

第二类曲线积分计算

➢前面MATLAB函数的直接调用

$$I=\mathtt{path\_integral([}P,Q\mathtt{],[}x,y\mathtt{]},t,a,b\mathtt{)}$$

$$I=\mathtt{path\_integral([}P,Q,R\mathtt{],[}x,y,z\mathtt{]},t,a,b\mathtt{)}$$

$$I=\mathtt{path\_integral(}\boldsymbol{F},\boldsymbol{v},t,a,b\mathtt{)}$$

例3-51 第二类曲线积分

- 曲线积分 $\displaystyle\int_l \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$
  - l 为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$
  - 正向圆周的参数函数描述

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

- 曲线积分的直接求解

```
>> syms t; syms a positive; x=a*cos(t); y=a*sin(t);
   F=[(x+y)/(x^2+y^2),-(x-y)/(x^2+y^2)];
   I=path_integral(F,[x,y],t,2*pi,0)
```

曲面积分与MATLAB语言求解

➢第一类曲面积分

$$I = \texttt{surf\_integral}(f, z, [x, y], [y_{\rm m}, y_{\rm M}], [x_{\rm m}, x_{\rm M}])$$

$$I = \texttt{surf\_integral}(f, [x, y, z], [u, v], [u_{\rm m}, u_{\rm M}], [v_{\rm m}, v_{\rm M}])$$

➢第二类曲面积分

$$I = \texttt{surf\_integral}([P, Q, R], z, [u, v], [u_{\rm m}, u_{\rm M}], [v_{\rm m}, v_{\rm M}])$$

$$I = \texttt{surf\_integral}([P, Q, R], [x, y, z], [u, v], [u_{\rm m}, u_{\rm M}], [v_{\rm m}, v_{\rm M}])$$

例3-54 曲面积分

- 曲面积分 $\iint (x^2y+zy^2)\mathrm{d}S$
  - 积分曲面

    $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v,\ 0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant 2\pi$
  - MATLAB求解

```
>> syms u v; syms a positive;
   x=u*cos(v); y=u*sin(v); z=v;
   f=x^2*y+z*y^2;
   I=surf_integral(f,[x,y,z],[u,v],[0,a],[0,2*pi])
```