国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

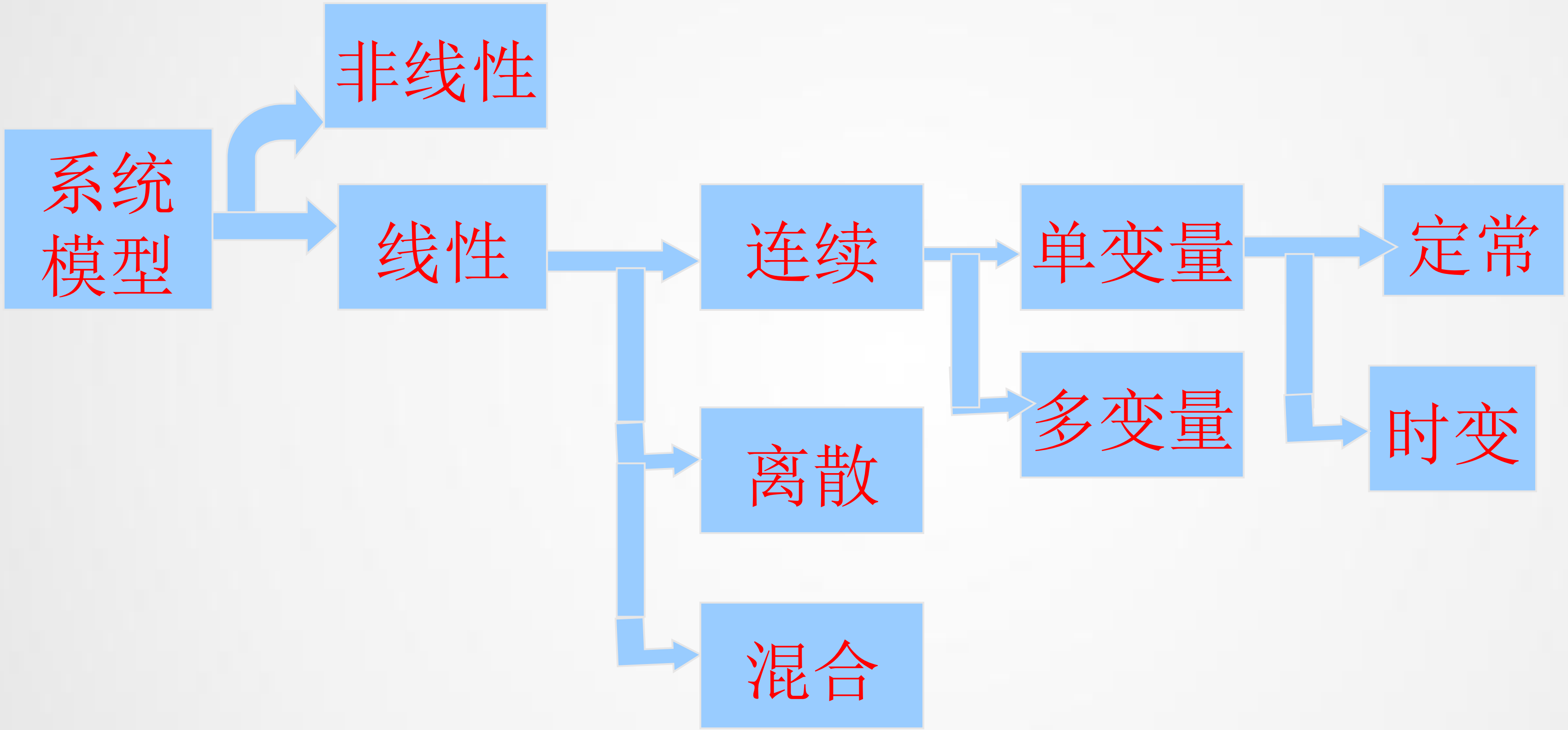
控制系统仿真与CAD

第四章：线性控制系统的数学模型

Chapter 4 Mathematical Models of Linear Control Systems

Professor Dingyu Xue, xuedingyu@mail.neu.edu.cn
School of Information Science and Engineering,
Northeastern University, Shenyang, CHINA

系统数学模型的分类



- 传递函数、状态方程、时间延迟、采样周期

本章主要内容

- 线性连续系统的数学模型与MATLAB表示
- 线性离散时间系统的数学模型
- 系统模型的相互转换
- 方框图描述系统的化简
- 线性系统的模型降阶
- 线性系统的模型辨识

连续线性系统的数学模型与MATLAB表示

- 介绍连续系统模型的输入
- 本节主要内容：
  - 线性系统的传递函数模型
  - 多变量系统的传递函数矩阵模型
  - 线性系统的状态方程模型
  - 线性系统的零极点模型

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第四章 线性系统的数学模型

线性系统的建模实例

An Example of Linear System Modeling

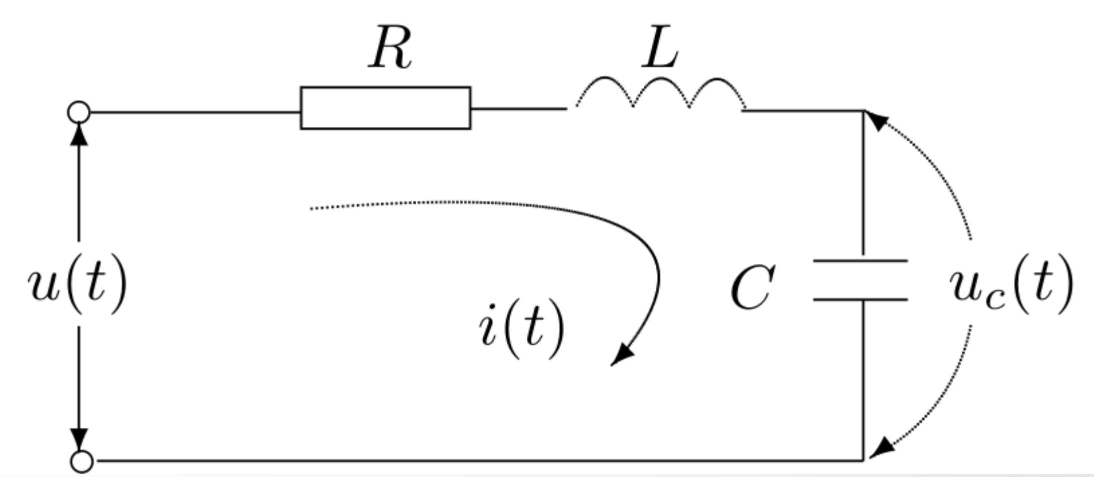
主讲：薛定宇教授

例4-1 电路的数学模型

- RLC电路的微分方程模型
  - Kirchhoff 定律

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = u(t)$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}$$



  - 变换成单一的微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = u(t)$$

线性连续系统数学模型及 MATLAB 表示

- 线性系统的常系数线性常微分方程模型

$$a_1\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_2\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_{n+1}y(t)$$
$$=b_1\frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_2\frac{\mathrm{d}^{m-1}u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_m\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+b_{m+1}u(t)$$

- n为阶次，a_i,b_i 为常数，$m\leqslant n$ 物理可实现
- 线性定常系统 LTI（linear time invariant）
  - 线性时不变模型、LTI模型

传递函数的理论基础
——Laplace变换

Pierre-Simon Laplace（1749–1827)

法国数学家 Laplace变换 t 域到 s域

- 定义 $\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=F(s)$
- Laplace变换的一条重要性质：

若 $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$

则 $\mathscr{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^n\mathscr{L}[y(t)]=s^nY(s)$

微分方程到传递函数转换举例

- RLC电路的微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u(t)$$

- 零初值假设 $u_c(0)=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$

- Laplace变换 $\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^n\mathscr{L}[y(t)]=s^nY(s)$

$$(LCs^2+RCs+1)U_c(s)=U(s)\ \rightarrow\ G(s)=\frac{U_c(s)}{U(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

传递函数表示

- 传递函数即放大倍数 $G(s)=Y(s)/U(s)$
- 传递函数的一般表示

$$a_1\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_2\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_{n+1}y(t)=b_1\frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_2\frac{\mathrm{d}^{m-1} u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_m\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+b_{m+1}u(t)$$

$$G(s)=\frac{b_1 s^m+b_2 s^{m-1}+\cdots+b_m s+b_{m+1}}{a_1 s^n+a_2 s^{n-1}+a_3 s^{n-2}+\cdots+a_n s+a_{n+1}}$$

- 阶次、正则、严格正则、相对阶次的概念
- MATLAB输入语句

num=[b_1, b_2, $\cdots$, b_m, b_{m+1}];
den=[a_1, a_2, $\cdots$, a_n, a_{n+1}]; G=tf(num,den);

本节小结

- 系统模型的分类方法
  - 自动控制原理与现代控制理论课程涉及的数学模型只是系统模型中很窄的几类模型
- 给出了连续系统建模的实例
  - 列出系统的微分方程模型
  - 由微分方程导入系统传递函数的概念——传递函数是系统的增益，是 s 的函数

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD