国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第五章 线性系统的计算机辅助分析

线性系统的性能分析(上)

Property Analysis of Linear Control Systems (I)

主讲：薛定宇教授

线性系统的性能分析

- 线性系统的相似变换
- 线性系统的可控性与可观测性
- Kalman规范分解
- 系统的四个子空间解释
- 系统的范数

线性系统的线性相似变换

- 系统的状态方程表示称为系统实现
- 不同状态选择下，状态方程不唯一
- 相似变换
  - 非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$
  - 状态变换 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$
  - 新状态方程模型 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}(t) \qquad \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$

相似变换及其MATLAB求解

- 状态变换公式

$$A_{\mathrm{t}} = T^{-1}AT, \quad B_{\mathrm{t}} = T^{-1}B, C_{\mathrm{t}} = CT, \quad D_{\mathrm{t}} = D$$

- MATLAB 直接求解方法

$$G_1 = \mathrm{ss2ss}(G, T)$$

- 也可以根据上面公式进行变换

例5-4 系统的相似变换

- 已知系统和转换矩阵

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 7 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases} \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

- MATLAB 求解

```
>> A=[0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -24 -50 -35 -10];
   G1=ss(A,[0;0;0;1],[24 24 7 1],0);
   T=fliplr(eye(4)); G2=ss2ss(G1,T)
```

线性系统的可控性分析

- 可控性定义
  - 假设系统由状态方程 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ 给出
  - 对任意的初始时刻 t_0，如果状态中任一状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 处，由有界的输入信号 $\boldsymbol{u}(t)$ 的驱动下，在有限时间 t_f 内能够到达任意预先指定的状态 $\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})$，则称此状态是可控的。
- 若系统所有状态都可控，则称该系统为完全可控系统
- 通俗地说：系统的可控性就是指系统内部的状态是不是可以由外部输出信号控制的性质

线性系统的可控性判定

- 理论判定：可控性判定矩阵
  - 构造判定矩阵 $T_c = \left[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right]$
- 若矩阵 T_c 为满秩矩阵，则系统完全可控
- 基于 MATLAB 的判定方法
  - 构造可控性判定矩阵 T_c=ctrb($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$)
  - 求秩、判定 rank(T_c)

例5-5 离散系统的可控性

- 离散状态方程模型

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T] = \begin{bmatrix} -2.2 & -0.7 & 1.5 & -1 \\ 0.2 & -6.3 & 6 & -1.5 \\ 0.6 & -0.9 & -2 & -0.5 \\ 1.4 & -0.1 & -1 & -3.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(kT) + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \\ 4 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(kT)$$

- MATLAB 求解

```
>> A=[-2.2,-0.7,1.5,-1; 0.2,-6.3,6,-1.5; ...
      0.6,-0.9,-2,-0.5; 1.4,-0.1,-1,-3.5];
   B=[6,9; 4,6; 4,4; 8,4]; Tc=ctrb(A,B), rank(Tc)
```

- 连续、离散系统同等处理

可控性阶梯分解

- 对于不完全可控的系统阶梯分解
- 阶梯标准型

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{A}}_{\bar{\mathrm{c}}} & \boldsymbol{0} \\ \widehat{\boldsymbol{A}}_{21} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{c}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widehat{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{c}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}} = [\widehat{\boldsymbol{C}}_{\bar{\mathrm{c}}}, \widehat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{c}}]$$

- MATLAB 函数调用

$$[\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{T}_{\mathrm{c}}] = \mathtt{ctrbf}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$$

- 若原系统状态方程完全可控，则不必分解

例5-6 阶梯标准型处理

- 不完全可控系统

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=\begin{bmatrix}-2.2 & -0.7 & 1.5 & -1\\ 0.2 & -6.3 & 6 & -1.5\\ 0.6 & -0.9 & -2 & -0.5\\ 1.4 & -0.1 & -1 & -3.5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(kT)+\begin{bmatrix}6 & 9\\ 4 & 6\\ 4 & 4\\ 8 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(kT)$$

- MATLAB求解

```
>> A=[-2.2,-0.7,1.5,-1; 0.2,-6.3,6,-1.5;...
      0.6,-0.9,-2,-0.5; 1.4,-0.1,-1,-3.5];
   B=[6,9; 4,6; 4,4; 8,4]; C=[1 2 3 4];
   [Ac,Bc,Cc,Tc]=ctrbf(A,B,C)
```

线性系统的可观测性分析

- 可观测性定义
  - 假设系统由状态方程 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ 给出
  - 对任意的初始时刻 t_0 ，若状态空间中任一状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 在任意有限时刻 t_f 的状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 可以由输出信号在这一时间区间内的值精确地确定出来，则称此状态是可观测的
- 若系统所有状态都可观测，则称系统为完全可观测系统
- 系统的可观测性就是指系统内部的状态是不是可以由系统输出信号重建起来的性质

可观测性判定

- 判定矩阵

$$T_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- 等同于 $(A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}})$ 系统的可控性判定
- 对偶系统：$(A,B,C) \Leftrightarrow (A^{\mathrm{T}},C^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}})$
- MATLAB 求解 T_{o}=`obsv(`A`,`C`)`, `rank(`T_{o}`)`

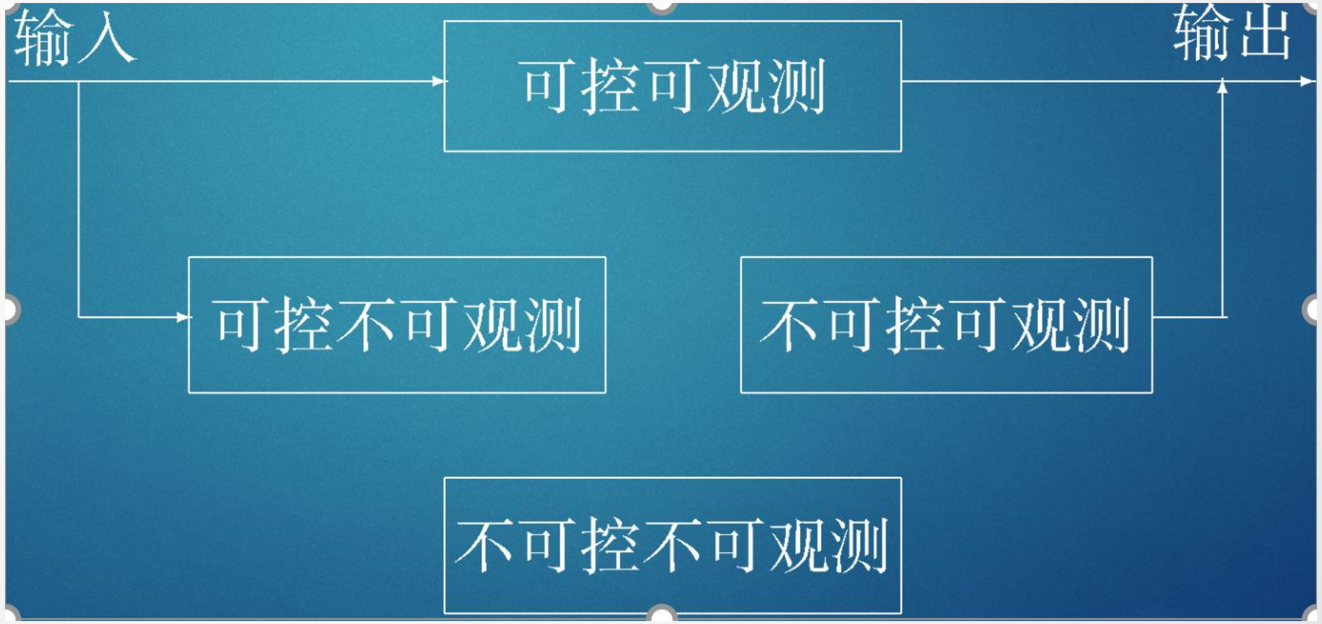
Kalman 规范分解

➢ Kalman 规范分解

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \widehat{\boldsymbol{A}}_{\bar{c},\bar{o}} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{1,2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{\bar{c},o} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \widehat{\boldsymbol{A}}_{3,1} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{3,2} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{c,\bar{o}} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{3,4} \\ \hdashline \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{4,2} & \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{c,o} \end{array}\right] \boldsymbol{z}(t) + \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{0} \\ \hdashline \widehat{\boldsymbol{B}}_{c,\bar{o}} \\ \hdashline \widehat{\boldsymbol{B}}_{c,o} \end{array}\right] \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{C}}_{\bar{c},o} & \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{C}}_{c,o} \end{array}\right] \boldsymbol{z}(t) \end{cases}$$

四个子空间

- 既不可控又不可观测子空间；可控但不可观测子空间
- 不可控但可观测子空间，可控且可观测子空间
- 示意图
  - 最小实现



连续系统的范数测度及求解

- 系统也有范数：范数即测度
  - $\mathcal{H}_2$ 范数

$$||\boldsymbol{G}(s)||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2\left[\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)\right]\mathrm{d}\omega}$$

  - $\mathcal{H}_\infty$ 范数

$$||\boldsymbol{G}(s)||_\infty = \sup_{\omega}\bar{\sigma}|\boldsymbol{G}(\mathrm{j}\omega)|$$

- $\mathcal{H}_\infty$ 范数是系统频域响应的峰值
- MATLAB直接计算

离散系统的范数

- 离散系统的范数定义
  - $\mathcal{H}_2$ 范数

$$||\boldsymbol{G}(z)||_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2 \left[\boldsymbol{G}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right] \mathrm{d}\omega}$$

  - $\mathcal{H}_\infty$ 范数 $||\boldsymbol{G}(z)||_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\left[\boldsymbol{G}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]$
- 范数的 MATLAB 求解

`norm(`$\boldsymbol{G}$`)` or `norm(`$\boldsymbol{G}$`,2)`

`norm(`$\boldsymbol{G}$`,inf)`

例5-9 离散系统范数计算

- 离散系统模型

$$x[(k+1)T]=\begin{bmatrix}-2.2 & -0.7 & 1.5 & -1\\ 0.2 & -6.3 & 6 & -1.5\\ 0.6 & -0.9 & -2 & -0.5\\ 1.4 & -0.1 & -1 & -3.5\end{bmatrix}x(kT)+\begin{bmatrix}6 & 9\\ 4 & 6\\ 4 & 4\\ 8 & 4\end{bmatrix}u(kT)$$

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}x(kT)$$

- 直接计算

```
>> A=[-2.2,-0.7,1.5,-1; 0.2,-6.3,6,-1.5; ...
      0.6,-0.9,-2,-0.5; 1.4,-0.1,-1,-3.5];
   B=[6,9; 4,6; 4,4; 8,4]; C=[1 2 3 4];
   G=ss(A,B,C,[0 0],'Ts',0.1); norm(G,2), norm(G,inf)
```

系统分析小结

- 系统的相似变换允许状态方程模型从一种形式变换成另一种形式 ss2ss
- 系统的可控性与可观测性定义与判定
  - 所用的函数 ctrb, obsv, rank
  - 阶梯形式 ctrbf
- 系统的 $\mathcal{H}_2$范数与 $\mathcal{H}_\infty$ 范数 norm

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD