国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材
国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

第四章 线性系统的数学模型

状态方程实现

State Space Realizations

主讲：薛定宇教授

系统的状态方程实现

- 从其他形式的LTI模型转换为状态方程
- 控制系统的状态方程实现
  - 一般系统的实现
  - 两个特例——内部延迟系统与描述符系统
- 状态方程模型的均衡实现
- 状态方程的最小实现

控制系统的状态方程实现

- 由传递函数到状态方程的转换
  - 不同状态变量选择，结果不唯一
  - 默认变换方式，采用MATLAB函数 $G_1=\mathrm{ss}(G)$
- 通用的*G* 模型
  - *G* 可以是传递函数、状态方程和零极点模型
  - 适用于有延迟的、离散的或多变量模型
  - 可以将延迟传递函数模型转成内部延迟
  - G可以是非正则系统，得出描述符状态方程模型

例4-14 多变量系统

- 连续多变量模型

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{0.1134\mathrm{e}^{-0.72s}}{1.78s^2+4.48s+1} & \dfrac{0.924}{2.07s+1}\\ \dfrac{0.3378\mathrm{e}^{-0.3s}}{0.361s^2+1.09s+1} & \dfrac{-0.318\mathrm{e}^{-1.29s}}{2.93s+1}\end{bmatrix}$$

- 状态方程获取

```
>> g11=tf(0.1134,[1.78 4.48 1],'ioDelay',0.72);
   g12=tf(0.924,[2.07 1]);
   g21=tf(0.3378,[0.361 1.09 1],'ioDelay',0.3);
   g22=tf(-0.318,[2.93 1],'ioDelay',1.29);
   G=[g11, g12; g21, g22]; G1=ss(G)
```

例4-15 非正则系统的实现

- 系统模型

$$G(s)=\frac{12s^3+24s^2+12s+20}{2s^4+4s^3+6s^2+2s+2}$$

- 逆系统模型的状态方程实现

$$G(s)=\frac{2s^4+4s^3+6s^2+2s+2}{12s^3+24s^2+12s+20}$$

```
>> num=[12 24 12 20]; den=[2 4 6 2 2];
G=1/tf(num,den), G1=ss(G)
```

均衡实现 （balanced realization）

- 由一般状态方程输入输出关系显著程度不明显，需要进一步变换
- 均衡实现是一种很有用的方式
- 用MATLAB直接求解 $[G_{\rm b},\boldsymbol{g},\boldsymbol{T}]=\texttt{balreal}(G)$
- 得出均衡实现的模型
- 得出排序的 Gram 矩阵

例4-17 均衡实现举例

- 原系统模型 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^{-6} \\ 10^{6} \end{bmatrix} u$

$$y = \begin{bmatrix} 10^{6} & 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 引入 $z_1 = 10^{6} x_1, \quad z_2 = 10^{-6}$
- 内部坐标变换

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \, y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

例4-18 状态方程的最小实现

观察传递函数模型

$$G(s)=\frac{5s^3+50s^2+155s+150}{s^4+11s^3+41s^2+61s+30}$$

- 未见有何特殊
- 求取零极点模型

```
>> G=tf([5 50 155 150],[1 11 41 61 30]);
zpk(G)
```

最小实现的计算

- 得出结果

$$G(s)=\frac{5(s+3)(s+2)(s+5)}{(s+5)(s+3)(s+2)(s+1)}$$

- 最小实现方法
  - 相同位置的零极点，可以对消
  - 问题：多变量系统、状态方程如何处理？
  - MATLAB解决方法

G_{m}=minreal(G)

G_{m}=minreal(G,ϵ)

```
>> G1=minreal(G)
```

例4-19 多变量模型的最小实现

- 多变量模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -1.5 & 2 & 4 & 9.5 \\ -6 & -2.5 & 2 & 5 & 12.5 \\ -5 & 0.25 & -0.5 & 3.5 & 9.75 \\ -1 & 0.5 & 0 & -1 & 1.5 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0.75 & -0.5 & -1.5 & -2.75 \\ 0 & -1.25 & 1.5 & 1.5 & 2.25 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- 不能直接看出是否最小实现

最小实现计算

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -1.5 & 2 & 4 & 9.5 \\ -6 & -2.5 & 2 & 5 & 12.5 \\ -5 & 0.25 & -0.5 & 3.5 & 9.75 \\ -1 & 0.5 & 0 & -1 & 1.5 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0.75 & -0.5 & -1.5 & -2.75 \\ 0 & -1.25 & 1.5 & 1.5 & 2.25 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- MATLAB求解

```
>> A=[-6,-1.5,2,4,9.5; -6,-2.5,2,5,12.5; -5,0.25,-0.5,3.5,9.75;
      -1, 0.5, 0, -1, 1.5;  -2, -1, 1, 2, 3];
   B=[6,4; 5,5; 3,4; 0,2; 3,1]; D=zeros(2);
   C=[2,0.75,-0.5,-1.5,-2.75; 0,-1.25,1.5,1.5,2.25];
   G=ss(A,B,C,D); G1=minreal(G)
```

- 数学表示

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -2.4125 & 1.1729 & -0.17022 \\ -0.73946 & 0.12333 & -0.37256 \\ -0.65067 & 1.6766 & -1.7108 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \begin{bmatrix} 6.4843 & 4.0942 \\ 5.1517 & 3.7888 \\ 3.227 & 5.5572 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 0.84235 & 0.073798 & 0.048876 \\ 0.25085 & 0.36129 & 0.46861 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$$

状态方程实现小结

- 直接转换函数
  - 多变量系统、连续离散系统的统一处理 tf
  - 特例——描述符系统、内部延迟系统
- 将LTI模型转换成状态方程是不唯一的
- 系统非均衡实现 balreal
- 系统的最小实现 minreal

薛定宇教授主讲

控制系统仿真与CAD