

国家精品课程/ 国家精品资源共享课程/ 国家级精品教材

国家级十一(二)五规划教材/ 教育部自动化专业教学指导委员会牵头规划系列教材

控制系统仿真与CAD

# 第九章 鲁棒控制设计方法

## $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 控制器设计方法

Design of  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Controller Design



主讲：薛定宇教授



# 本节主要内容

- 学习了基本概念之后，如何真正设计出鲁棒控制器？
  - 直接使用底层语句比较麻烦
  - 调用更高层的函数完成几个步骤
    - 模型增广
    - 直接设计
    - 观察控制效果



# 回路成型的一般描述

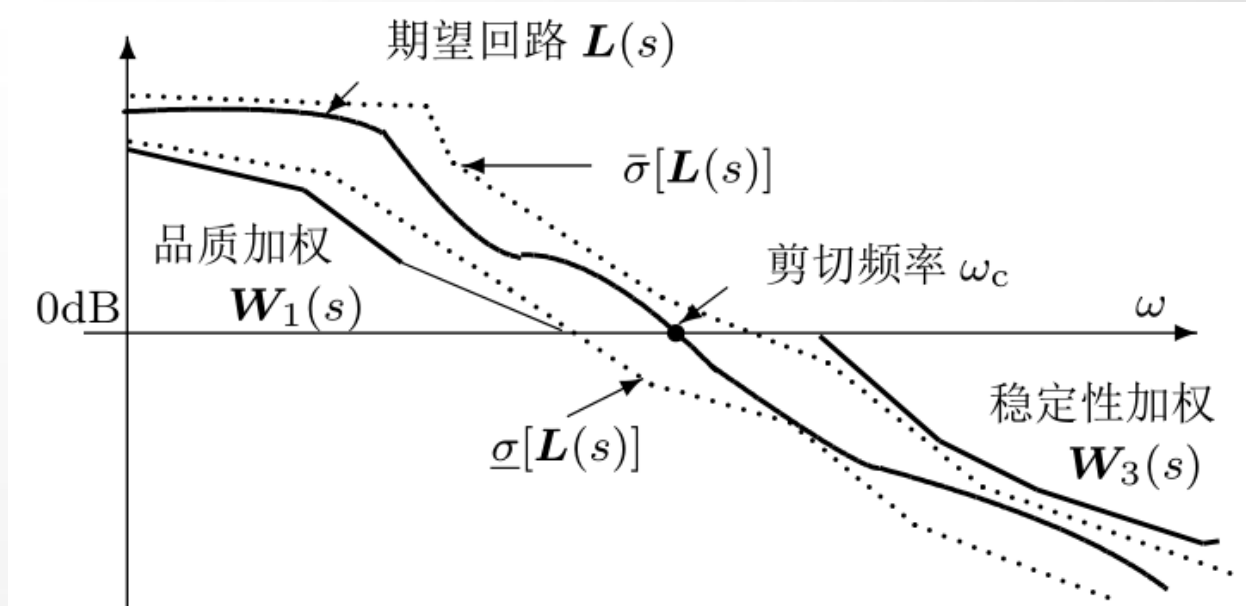
- 灵敏度函数  $S$  :  $S(s) = [I + L(s)]^{-1}$ ,  $L(s) = G(s)F(s)$
- 控制传递函数  $R$  :  $R(s) = F(s) [I + L(s)]^{-1}$
- 补灵敏度函数  $T$  :  $T(s) = I - S(s)$
- 控制器设计

$$F(s) = G(s)F(s) [I + L(s)]^{-1}$$

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq |W_1^{-1}(s)|$$

$$\bar{\sigma}[R(j\omega)] \leq |W_2^{-1}(s)|$$

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \leq |W_3^{-1}(s)|$$





# $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 鲁棒控制器设计方法

## ➤ $\mathcal{H}_\infty$ 控制器设计

➤ 选择小正数  $\gamma$ , 找到一个控制器  $F(s)$ , 使得  $\|T_{y_1 u_1}(s)\|_\infty < \gamma$

➤ 控制器状态方程

$$\dot{x}(t) = A_f x(t) - Z L u(t), \quad y(t) = K x(t)$$

$$A_f = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 K + Z L C_2$$

$$K = -B_2^T X, \quad L = -Y C_2^T, \quad Z = (I - \gamma^{-2} Y X)^{-1}$$

➤  $X, Y$  满足 Riccati 方程

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1 C_1^T = 0$$

$$A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1^T B_1 = 0$$



# 用MATLAB设计鲁棒控制器

➤ 已知增广的双端子受控对象模型  $G_{\text{tss}}$

➤ 各种控制器的设计

➤ 最优  $\mathcal{H}_\infty$  控制器

$$[G_c, G_{cl}, \gamma] = \text{hinfsyn}(G_{\text{tss}})$$

➤ 最优  $\mathcal{H}_2$  控制器

$$[G_c, G_{cl}] = \text{h2syn}(G_{\text{tss}})$$

➤ 早期版本的hinf函数可以设计一般鲁棒控制器，hinfopt设计最优控制器



## 例9-9 最优鲁棒控制器设计

### ➤ 受控对象模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5000 & -100/3 & 500 & 100/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 100/3 & -4 & -60 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 25/3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [0, 0, 1, 0] \boldsymbol{x}(t)$$

### ➤ 加权矩阵


$$W_1(s) = 100/(s+1), \quad W_2(s) = 10^{-5}, \quad W_3(s) = s/1000$$






# 最优鲁棒控制器设计

## ➤ 最优 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 设计控制器

```
 >> A=[0,1,0,0; -5000,-100/3,500,100/3; 0,-1,0,1; 0,100/3,-4,-60];  
      B=[0; 25/3; 0; -1]; C=[0,0,1,0]; G=ss(A,B,C,0);  
      s=tf('s'); W1=100/(s+1); W2=1e-5; W3=s/1000;  
      G1=augtf(G,W1,W2,W3); Gc1=zpk(h2syn(G1)),  
      [Gc2,a,g]=hinfsyn(G1); Gc2=zpk(Gc2), g
```

## ➤ 控制系统响应


```
 >> bode(G*Gc1,'-',G*Gc2,'--'),
```

```
 >> step(feedback(G*Gc1,1),'-',feedback(G*Gc2,1),'--')
```





# 控制器进一步分析


## ➤ 控制信号绘制

 `>> step(feedback(Gc1,G),'-',feedback(Gc2,G),'--')`

## ➤ 控制信号过大，原因是什么？

 `>> W2=0.01; W1=2000/(s+1);  
G1=augtf(G,W1,W2,W3); Gc1=zpk(h2syn(G1)),  
[Gc2,a,g]=hinfsyn(G1); Gc2=zpk(Gc2), g`

 `>> step(feedback(G*Gc1,1),'-',feedback(G*Gc2,1),'--')`

 `>> step(feedback(Gc1,G),'-',feedback(Gc2,G),'--')`





# 多变量系统的分析

- 多变量系统可以由前面介绍的方法直接设计
  - 选择加权函数
  - 建立增广状态方程模型
  - 直接设计
  - 仿真分析
- 还可以分析多变量系统的频域响应
  - 分析系统的



## 例9-10 多变量系统设计

### ➤ 多变量受控对象

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.806s + 0.264}{s^2 + 1.15s + 0.202} & \frac{-15s - 1.42}{s^3 + 12.8s^2 + 13.6s + 2.36} \\ \frac{1.95s^2 + 2.12s + 0.49}{s^3 + 9.15s^2 + 9.39s + 1.62} & \frac{7.15s^2 + 25.8s + 9.35}{s^4 + 20.8s^3 + 116.4s^2 + 111.6s + 18.8} \end{bmatrix}$$

### ➤ 加权函数选择

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{100}{s + 0.5} & 0 \\ 0 & \frac{100}{s + 1} \end{bmatrix}, \quad W_2 = 10^{-5} I, \quad W_3(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{100} & 0 \\ 0 & \frac{200}{s} \end{bmatrix}$$



# 控制器直接设计

## ➤ 模型输入与控制器设计



```
>> g11=tf([0.806 0.264],[1 1.15 0.202]); s=tf('s');  
g12=tf([-15 -1.42],[1 12.8 13.6 2.36]);  
g21=tf([1.95 2.12 0.49],[1 9.15 9.39 1.62]);  
g22=tf([7.15 25.8 9.35],[1 20.8 116.4 111.6 18.8]);  
G=[g11, g12; g21, g22]; w2=tf(1); W2=1e-5*[w2,0; 0,w2];
```



```
>> W1=[100/(s+0.5), 0; 0, 100/(s+1)]; W3=[s/1000, 0; 0 s/200];  
Tss=augtf(G,W1,W2,W3); [Gc,a,g]=hinfsyn(Tss); zpk(Gc(1,2));  
step(feedback(G*Gc,eye(2)),0.1)
```



```
>> sigma(G*Gc)
```



# 修改加权，重新设计

## ➤ 重新选择加权矩阵



```
>> W1=[100/(s+0.5) 0; 0 1000/(s+1)];  
Tss=augtf(G,W1,W2,W3); [Gc1,a,g]=hinfsyn(Tss);  
step(feedback(G*Gc1,eye(2)),0.1);
```



```
>> sigma(G*Gc1)
```



# $\mathcal{H}_\infty$ 鲁棒控制器设计应该注意

➤ 控制器阶次极高。可以考虑控制器降阶

➤ 如果受控对象有虚轴上极点

➤ 可以将其移离虚轴

➤ 双线性变换  $s = (\alpha p + \delta)/(\gamma p + \beta)$ ,  $p = s + \lambda$

$S_1 = \text{bilin}(G, \text{vers}, \text{method}, \text{aug})$

➤ 设计完成再移回来

$p = (-\beta s + \delta)/(\gamma s + \alpha)$



# 鲁棒控制器设计小结

- 采用函数调用的方法直接设计
  - 需要用户提供受控对象模型
  - 需要给出三个加权函数
  - 对受控对象与加权进行增广  $\text{augtf}$  ,  $\text{augw}$
  - 然后调用函数直接设计  $\text{h2syn}$ ,  $\text{hinfsyn}$
- 设计完成之后应该做适当的仿真
  - 看看是不是哪些信号与期望不一致，修改加权
  - 重新设计，直至得到满意的效果为止



