AiSD: lista 3, zadanie 1

Paweł Laskoś-Grabowski
nr indeksu 169827

24 marca 2006

1 Treść

Przeanalizuj następujący algorytm jednoczesnego znajdowania maksimum i minimum w zbiorze $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$:

```
procedure MaxMin (S:set)
    if (|S|==1) return (S[1],S[1]);
    if (|S|==2) return (max(S[1],S[2]),min(S[1],S[2]));
    podziel S na 2 równoliczne z dokładnością do 1 elementu części T, U;
    (max1,min1) = MaxMin(T);
    (max2,min2) = MaxMin(U);
    return (max(max1,max2),min(min1,min2));
```

- Dla jakich danych osiąga on dolną granicę na wymaganą dla tego problemu liczbę porównań? Podaj wzorem wszystkie takie wartości.
- Jak bardzo może różnić się liczba porównań wykonywanych przez algorytm od dolnej granicy?
- Popraw algorytm, by osiągał on tę granicę dla każdej wartości n.

2 Rozwiązanie

Oznaczmy

- $T(n)$ – liczbę porównań wykonanych przez algorytm dla zbioru mocy n,
- $S(n) = \left\lceil \frac{3}{2}n - 2 \right\rceil$ – ilość porównań wykonaną przez algorytm optymalny.

Zauważmy, że $T(n)$ spełnia zależności:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 2 & \text{dla } n \geqslant 2 \end{cases} \tag{1}$$

Lemat:

$$T(2^{m+1} + r) = \begin{cases} 3 \cdot 2^m + 2r - 2 & r \in [0, 2^m], \\ 4 \cdot 2^m + r - 2 & r \in (2^m, 2^{m+1}). \end{cases} \tag{2}$$

Dowód. Zastosujmy indukcję względem m. Dla $m = 0$ mamy następujące przypadki:

- Niech $r = 0$. Wtedy $T(2) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.
- Niech $r = 1$. Wtedy $T(3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 = 3$.

Krok indukcyjny: załóżmy, że dla $m-1$ zachodzi zależność (2). Rozważmy następujące przypadki:

- Niech $r \in [0, 2^m]$. Wtedy $r, \lceil r/2 \rceil, \lfloor r/2 \rfloor \in [0, 2^{m-1}]$. Z zależności rekurencyjnej (1) i założenia indukcyjnego zachodzi

$$\begin{aligned} T(2^{m+1} + r) &= T(2^m + \lceil r/2 \rceil) + T(2^m + \lfloor r/2 \rfloor) + 2 = \\ &= 3 \cdot 2^{m-1} + 2\lceil r/2 \rceil - 2 + 3 \cdot 2^{m-1} + 2\lfloor r/2 \rfloor - 2 + 2 = \\ &= 3 \cdot 2^m + 2r - 2. \end{aligned} \tag{3}$$

- Niech $r = 2^m + 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} T(2^{m+1} + 2^m + 1) &= T(2^m + 2^{m-1}) + T(2^m + 2^{m-1} + 1) + 2 = \\ &= 3 \cdot 2^{m-1} + 2 \cdot 2^{m-1} - 2 + 4 \cdot 2^{m-1} + 2^{m-1} + 1 - 2 = \\ &= 4 \cdot 2^m + 2^m + 1 - 2. \end{aligned} \tag{4}$$

- Niech $r \in (2^m + 1, 2^{m+1} - 1)$. Wtedy $r, \lceil r/2 \rceil, \lfloor r/2 \rfloor \in (2^{m-1}, 2^{m+1})$ oraz

$$\begin{aligned} T(2^{m+1} + r) &= T(2^m + \lceil r/2 \rceil) + T(2^m + \lfloor r/2 \rfloor) + 2 = \\ &= 4 \cdot 2^{m-1} + \lceil r/2 \rceil - 2 + 4 \cdot 2^{m-1} + \lfloor r/2 \rfloor - 2 + 2 = \\ &= 4 \cdot 2^m + r - 2. \end{aligned} \tag{5}$$

- Niech $r = 2^{m+1} - 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} T(2^{m+1} + T(2^{m+1} - 1) &= T(2^m + 2^m - 1) + T(2^m + 2^m) + 2 = \\ &= 4 \cdot 2^{m-1} + 2^m - 1 - 2 + 3 \cdot 2^m - 2 + 2 = \\ &= 4 \cdot 2^m + 2^{m+1} - 1 - 2. \end{aligned} \tag{6}$$

□

Porównajmy wyżej udowodniony wzór ze szczególnym zapisem wzoru na $S(n)$:

$$S(2^{m+1} + r) = 3 \cdot 2^m + \lceil \frac{3}{2} r \rceil - 2 \tag{7}$$

i rozważmy różnicę $D(n) = T(n) - S(n)$:

$$D(2^{m+1} + r) = \begin{cases} \lfloor \frac{1}{2} r \rfloor & r \in [0, 2^m], \\ 2^m - \lceil \frac{1}{2} r \rceil & r \in (2^m, 2^{m+1}). \end{cases} \tag{8}$$

Różnica jest najmniejsza (zerowa), gdy $r \in \{0, 1, 2^{m+1} - 1\}$. Gdy $r = 2^m$ różnica jest maksymalna i wynosi $2^{m-1} = \frac{n}{6}$.

Optymalizacja algorytmu polega na innym sposobie podziału zbioru S na podzbiory. Zmieniamy treść odpowiedniej linii pseudokodu na

if `(|S|=`2^m`) podziel S na 2 równoliczne części T, U;`
else `podziel S na 2 części T, U, tak by |T|=`$2^{\lfloor \log |S| \rfloor}$

Zależność rekurencyjna opisująca czas jego działania wygląda teraz następująco:

$$R(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1 \\ 1 & \text{dla } n = 2 \\ 2T(n/2) + 2 & \text{dla } n \geqslant 2, |n| = 2^m \\ T(2^m) + T(r) + 2 & \text{dla } n \geqslant 2, m = \lfloor \log n \rfloor, r = n - 2^m \end{cases} \tag{9}$$

Dowiedziemy, że zachodzi $R(2^m + r) = S(2^m + r)$.

Dowód. Zastosujmy indukcję względem m. Dla $m = 1$ mamy następujące przypadki:

- Niech $r = 0$.Wtedy $R(2) = 1$.
- Niech $r = 1$. Wtedy $R(3) = R(2) + 2 = 3$.

Krok indukcyjny: załóżmy, że dla liczb mniejszych niż m zachodzi dowodzona zależność.

- Niech $r = 0$. Wtedy

$$R(2^m) = 2R(2^{m-1}) + 2 = 2(3 \cdot 2^{m-2} - 2) + 2 = S(2^m). \tag{10}$$

- Niech $r \neq 0$. Wtedy (ponieważ prawdziwość $R(r) = S(r)$ wynika z założenia indukcyjnego, bo $r < 2^m$)

$$R(2^m + r) = R(2^m) + R(r) + 2 = 3 \cdot 2^{m-1} - 2 + \left\lceil \frac{3}{2} r \right\rceil - 2 + 2 = S(2^m + r). \tag{11}$$

$\square$