TD3 : PIEP

Problème 1 :

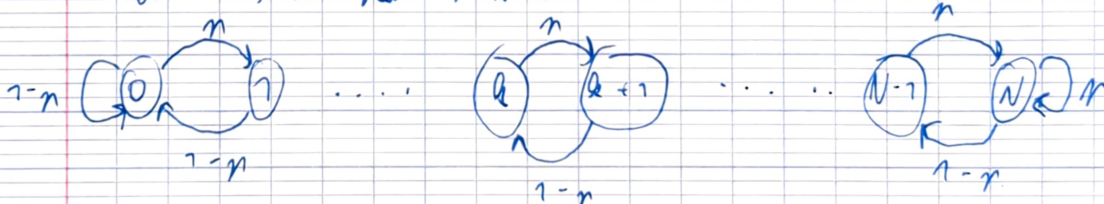
A) 1) On veut montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

$$P(Z_n = k \mid Z_{n-1} \dots, Z_0) = P(\min(\max(Z_{n-1}+Y_n, 0), N) = k \mid Z_{n-1}, \dots, Z_0)$$
$$= P(\min(\max(Z_{n-1}+Y_n, 0), N) = k \mid Z_{n-1})$$
$$= P(Z_n = k \mid Z_{n-1})$$

Il s'agit donc d'une chaîne de Markov
Sa matrice est de taille $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1-r & r & & & (0) \\ 1-r & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 0 & r \\ & & & 1-r & r \end{pmatrix}$$

Et on a l'automate suivant



2) Les états communiquent tous entre eux donc la chaîne est irréductible.
Comme la chaîne est finie alors il y a un état récurrent
Comme la chaîne est irréductible alors tous les états sont de même nature et donc récurrents
Comme la chaîne est finie alors les états sont récurrents positifs
Il y a un état qui boucle sur lui-même donc sa période est 1
C'est une chaîne irréductible donc tous les états ont la même période
Donc la chaîne est apériodique

3) $\mu(k-1)p = \mu(k)(1-p)$ donc $\mu(k) = \frac{p}{1-p}\mu(k-1) = \ldots = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \mu(0)$

Or $\sum_{k=0}^{N} \mu(k) = 1 = \mu(0) \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \rightarrow$ ⚠ disjonction de cas $p = \frac{1}{2}$, $p \neq \frac{1}{2}$

Si $p \neq \frac{1}{2}$ $\quad \alpha = \frac{p}{1-p}$ $\quad$ donc $\mu(0) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{N+1}}$

Si $p = \frac{1}{2}$ $\quad \mu(0) = \frac{1}{N+1}$

La chaîne admet une mesure de probabilité réversible

B) 4) On a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k) = 1$

Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k) = \mu(0) \sum \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$

Qui converge si et seulement si $\frac{p}{1-p} < 1 \iff p \in [0; \frac{1}{2}[$

Ainsi, pour tout p strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, on a une mesure réversible

La chaîne est donc récurrente positive (pas d'états transients ni récurrents nuls).

Calcul de $\mu(0)$: $\frac{1}{\mu(0)} = \frac{1}{1-\frac{p}{1-p}} \iff \frac{1-p}{1-2p} = \frac{1}{\mu(0)}$

Donc $\mu(0) = \boxed{\frac{1-2p}{1-p}}$ $\quad$ et $\mu(k) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)$

5) Lemme de Kac : La mesure est invariante et l'irréductible sur E, donc $m_{xx} = \frac{1}{\mu(x)}$

C) 6) $\pi_0 = 1$ et $\pi_N = 0$

7) $\pi_k = p(k, k-1)\, \pi_{k-1} + p(k, k+1)\, \pi_{k+1}$ (proba totales)

donc $\pi_k = \frac{1}{2}(\pi_{k-1} + \pi_{k+1})$

8) Si $\pi_k = \frac{N-k}{N}$ on a
$$\frac{N-k}{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{N-(k-1)}{N} + \frac{N-(k+1)}{N}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2N-2k}{N}\right)$$
$$= \frac{N-k}{N}$$
$$=$$

Donc $\lim_{N \to +\infty} \frac{N-k}{N} = 1$

D) 9)
$$\mathbb{P}(T^{0\to 0} < +\infty) = \mathbb{P}(T^{0\to 0} < +\infty \mid Y_0 = -1)\,\mathbb{P}(Y_0 = -1)$$
$$+ \mathbb{P}(T^{0\to 0} < +\infty \mid Y_0 = 1)\,\mathbb{P}(Y_0 = 1)$$
$$= \mathbb{P}(Y_0 = -1) + \mathbb{P}(T^{0\to 0} < +\infty)\,\mathbb{P}(Y_0 = 1)$$
$$= \frac{1}{2} + \lim_{N \to +\infty} \pi_1 \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \pi_1$$

10) D'après la remarque, $\mathbb{E}(T^{0\to 0}) = +\infty$
Donc l'état 0 est transitoire
Par irréductibilité, la chaîne est transiente