Vortragender:
Clemens Weber

# Übung 05
# Trigonometrie Teil 2

Vom 17.1.2024

Vorbereitung zur Aufnahme auf das Studienkolleg

# Organisation

**Januar 2024**

Kalenderpedia
Informationen zum Kalender

| KW | Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag | Freitag | Samstag | Sonntag |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 3 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 4 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 5 | 29 | 30 | 31 | 1 | 2 | 3 | 4 |



1.: Neujahrstag



- Wir bleiben im Online Format im neuen Jahr!
- Montag & Mittwoch
- Uhrzeit 16.00 – 17.30 Uhr
- Letzte Session am 31.1
- Übungen von nun an:
  - Gemeinsam Lösungen finden
- Muster Tests 1x die Woche:
  - Besprechung im Anschluss

Aufnahmeprüfung Deutsch und Mathematik **München**

Montag den 05.02.2024 um 9:00 Uhr

https://studienkolleg-münchen.de/bewerben/aufnahme-in-

Clemens Weber

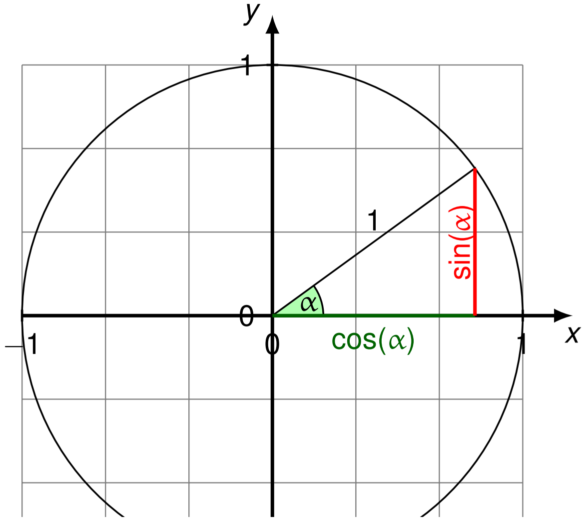
# Themen-Gebiete Gesamt

- Vereinfachung von Bruchtermen
- Polynomdivision
- Wurzelgleichungen - Ungleichungen
- Exponentialgleichungen & Logarithmusgleichungen
- Trigonometrischen Funktionen
- Erkennen von Funktionsgraphen
- Geometrie ; vor allem Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Kreisberechnungen, Flächen- und Volumenberechnungen

Clemens Weber

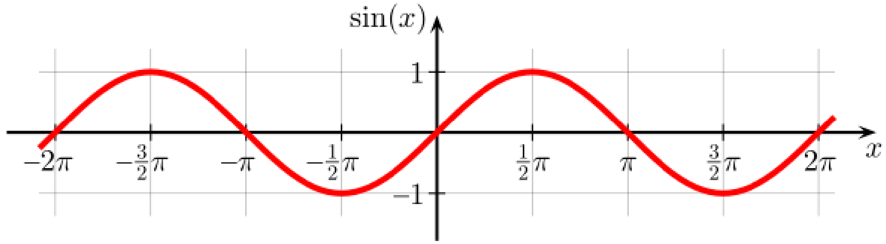
# Das Wichtigste auf einem Blick

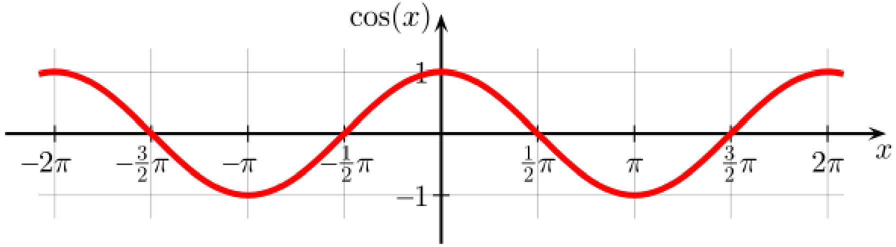
- Sin & Cos graphische Herleitung am Einheitskreis
- Funktionsverlauf von y=Sin(x) und y=Cos(x)
- Wertetabelle und Vorzeichen innerhalb einer **Periode 2$\pi$**
- Satz des Pythagoras: $Sin^2(\alpha) = 1 - Cos^2(\alpha)$




Wertetabelle :

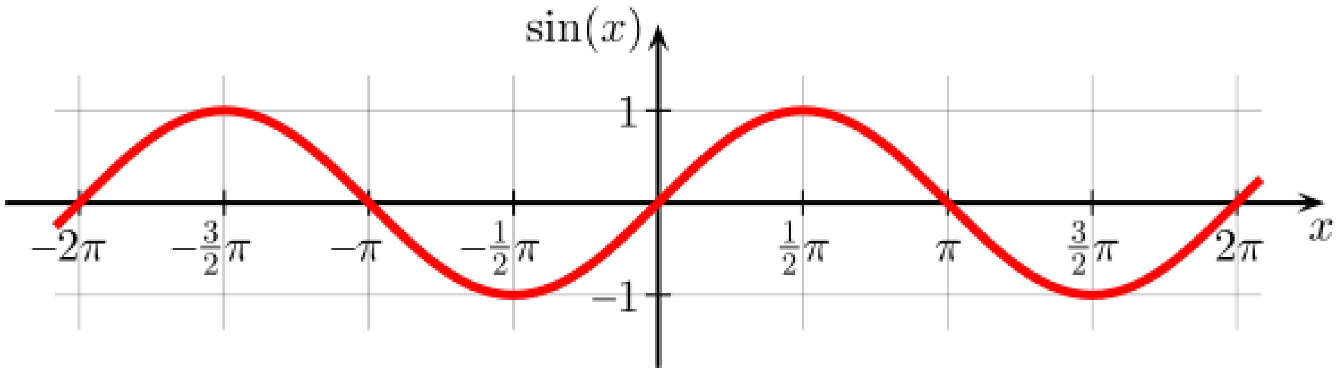
| Winkel in Grad | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Winkel in Bogenmaß | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
| sin $(\alpha)$ = y | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| cos $(\alpha)$ = y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |

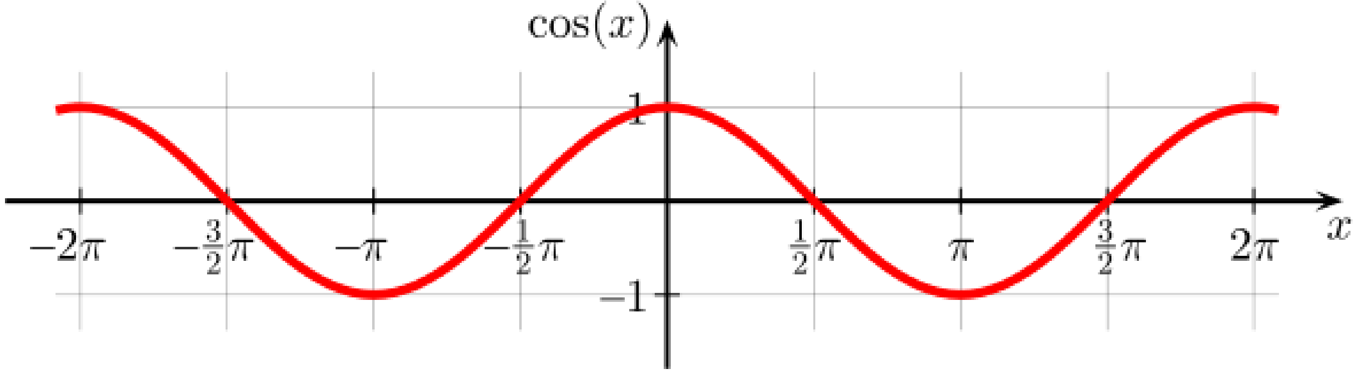


# Weitere Eigenschaften von Sin & Cos

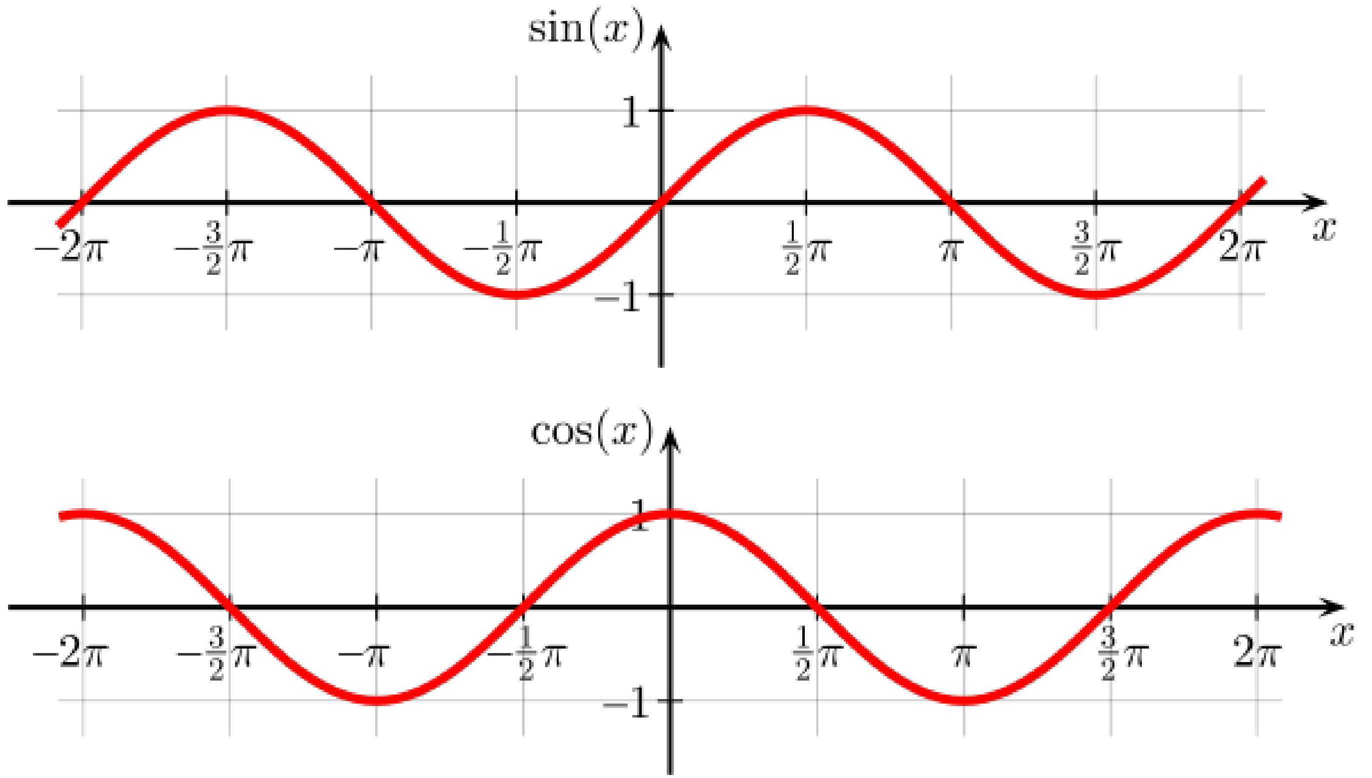
- Verschiebung um **90 Grad =** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
  - $\sin(x - \pi/2) = \cos(x)$
  - $\sin(x + \pi/2) = -\cos(x)$
  - $\cos(x - \pi/2) = -\sin(x)$
  - $\cos(x + \pi/2) = \sin(x)$
- Verschiebung um **2** $\boldsymbol{\pi}$
  - $sin(x + 2\,\pi) = \sin(x)$
  - $cos(x + 2\,\pi) = \cos(x)$
- Symmetrie:



# Weitere Eigenschaften von Sin & Cos

- Symmetrie:
  - $sin(x) = -\sin(-x)$
  - Sin ist Punktsymmetrisch zum Ursprung
  - $cos(x) = cos(-x)$
  - Cos ist Spiegelsymmetrisch zur y-Achse

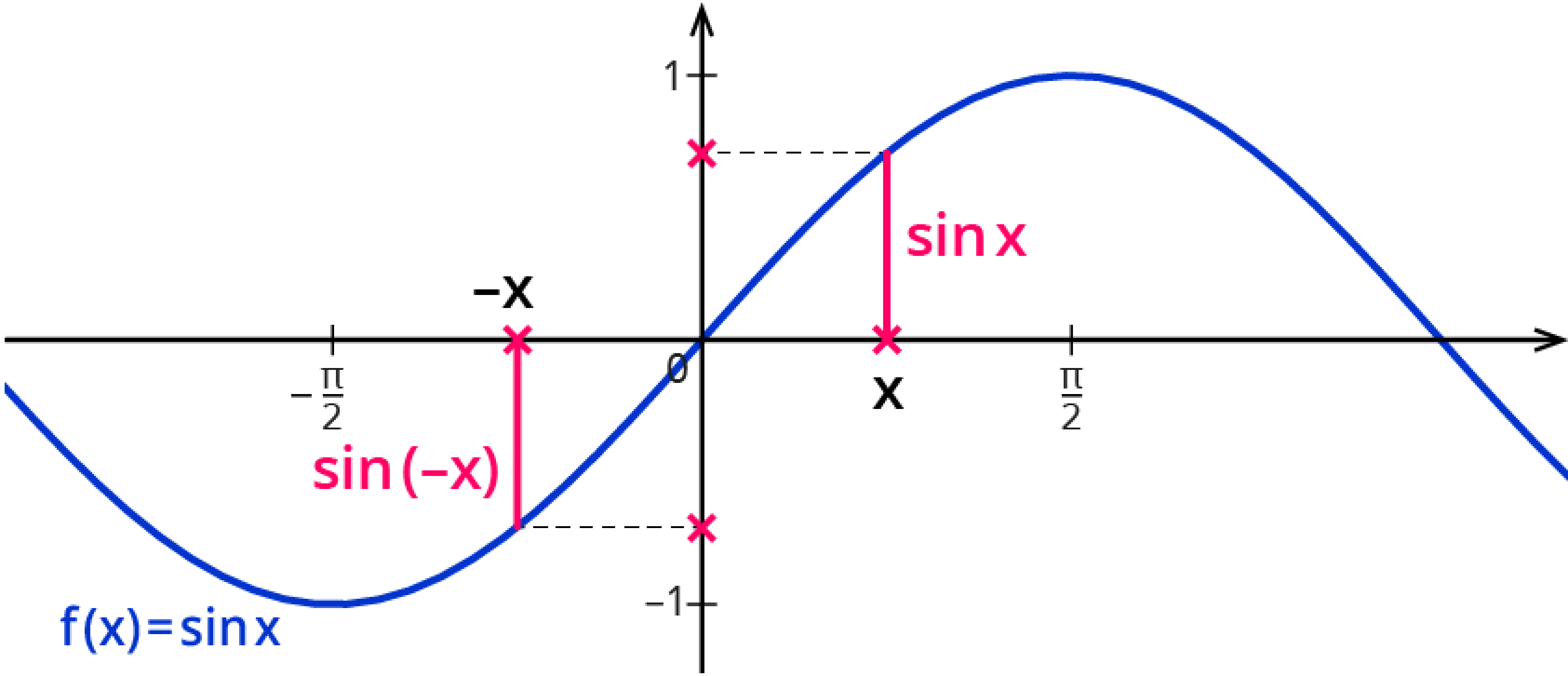


# y=sin(X) Punktsymmetrie

Der Sinus ist:

- Punktsymmetrisch

  $\sin(x) = -\sin(-x)$



# Tangens y=tan(x)

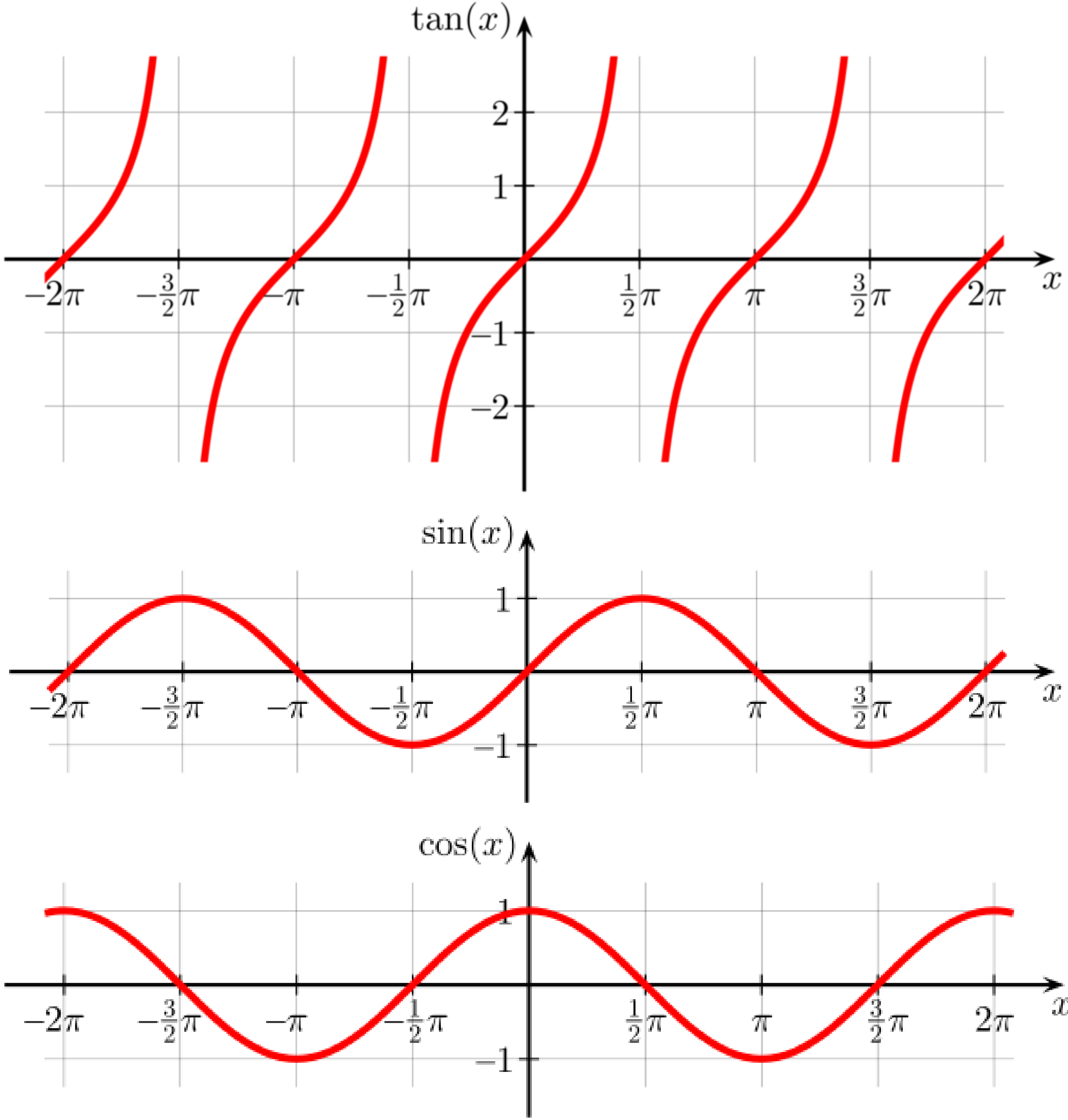
$$Tan(x) = \frac{Sin(x)}{Cos(x)}$$

Der Tangens ist der Quotient von Sin und Cos

Tangens ist $\pi$-**Periodisch**

$$\tan(x+\pi) = \tan(\mathrm{x})$$

Bei $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} \pm k}$, k∈ $\mathbb{Z}$, nicht definiert



# Tangens y=tan(x)

Der Tangens ist der Quotient von Sin und Cos

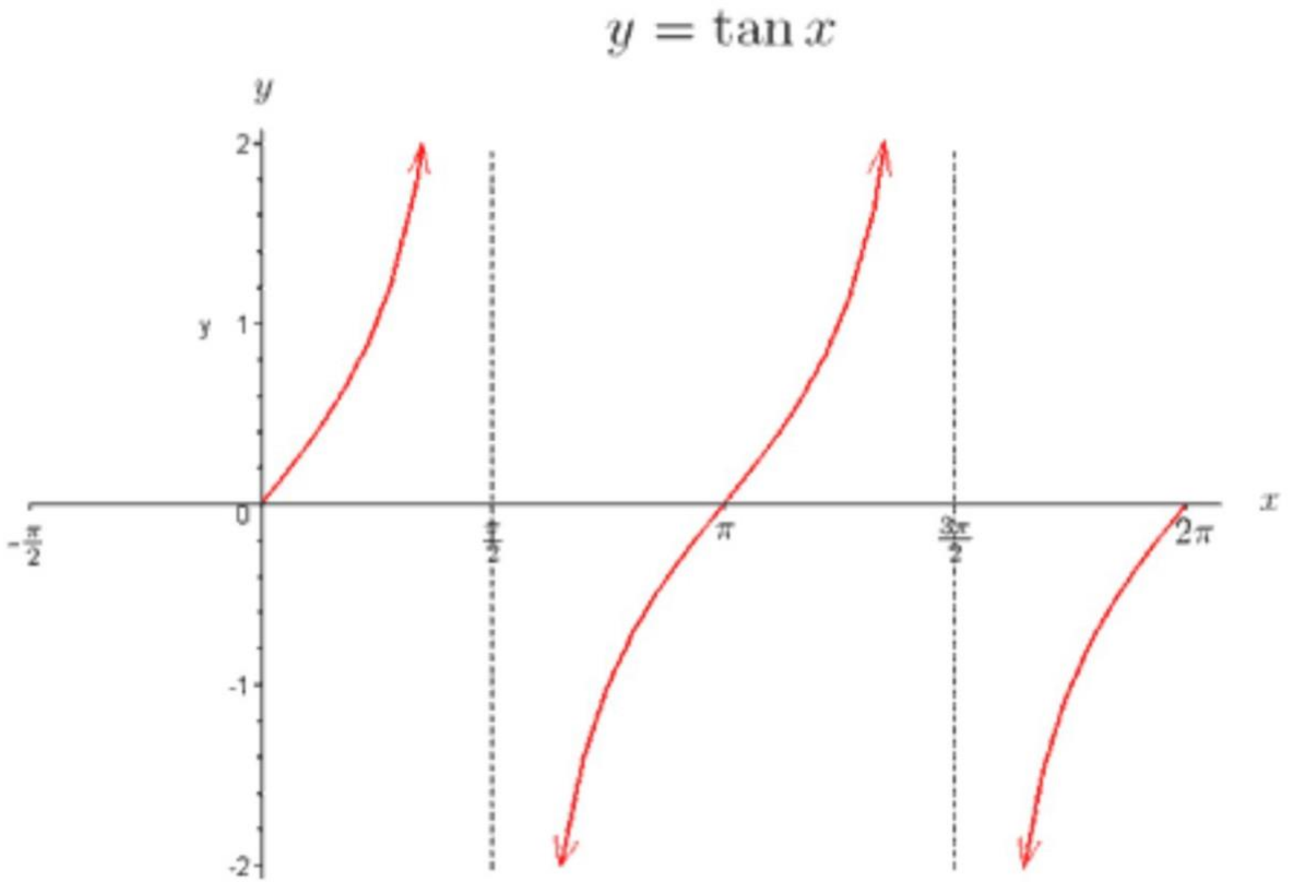
$$Tan(x) = \frac{Sin(x)}{Cos(x)}$$

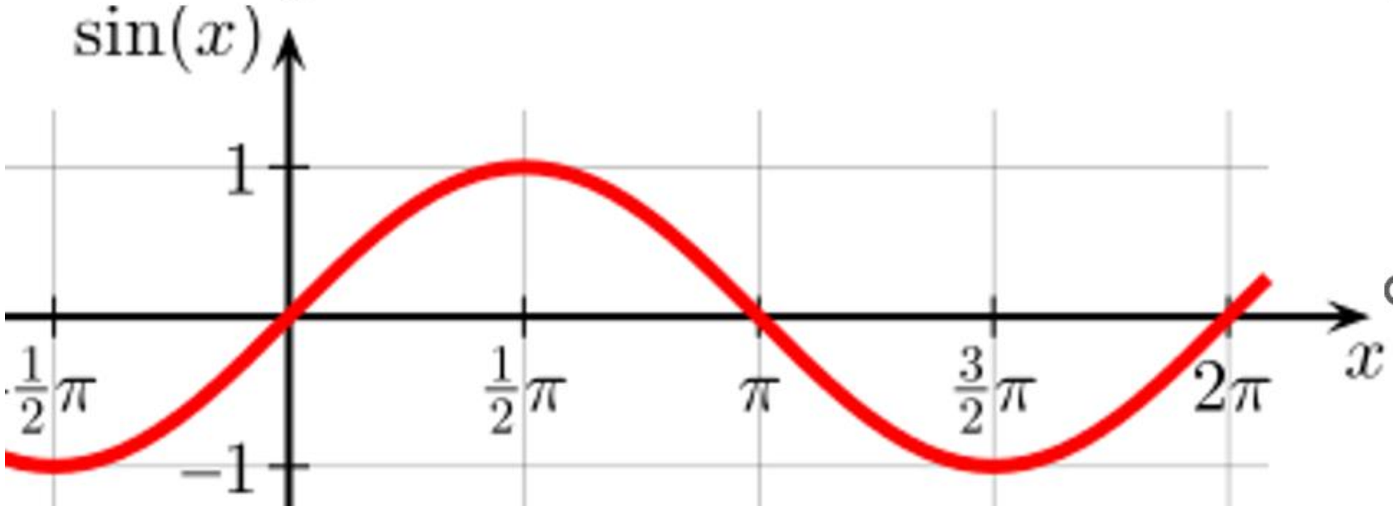
Tangens ist $\pi$-**Periodisch**

$$\tan(x+\pi) = \tan(\mathrm{x})$$

$$Tan(-x) \;=\; -Tan(x)$$

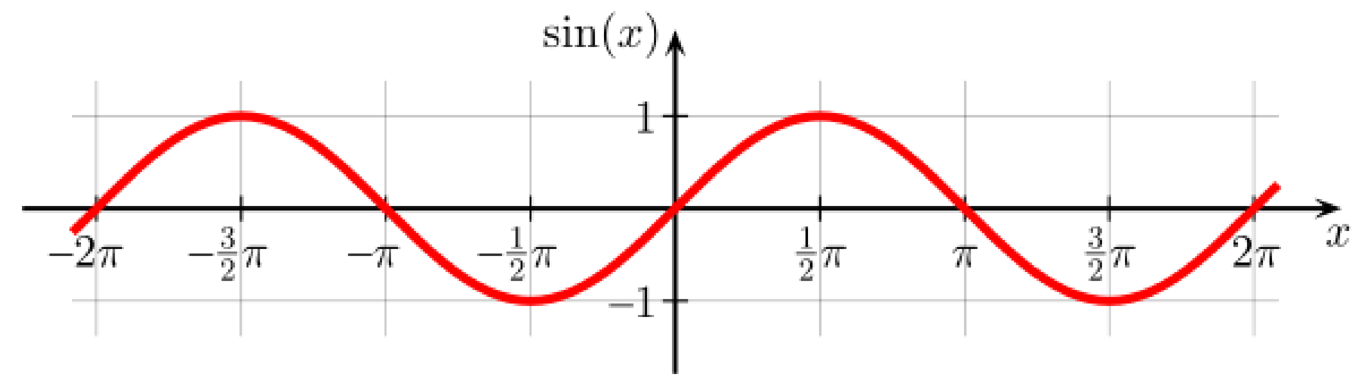
Bei $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \pm \boldsymbol{k}$, k∈ ℤ, nicht definiert



# Wertetabelle

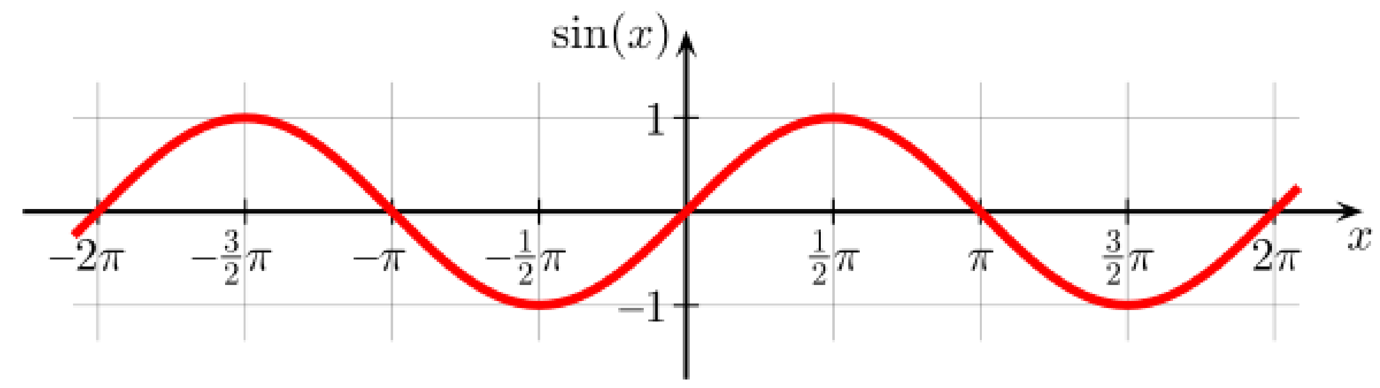
- Alle Lösungen im Test kommen in ... $,\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \pm \frac{\pi}{2} * k$ vor wobei $k \in \mathbb{Z}$




| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha°$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $tan(\alpha)$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ |

# Wertetabelle

- **Alle Lösungen im Test kommen innerhalb dies**
- **Wenn ich die Verte von Sin im Bereich von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ kenne, kann ich alle anderen relevanten Werte auch eintragen, kennen!**



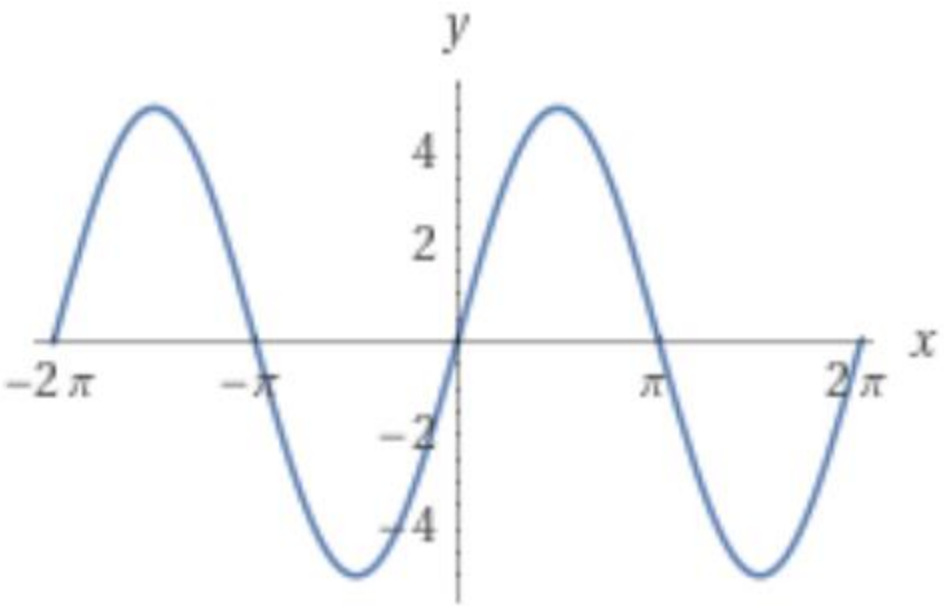

$tan(\alpha)$=

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| sin α | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| cos α | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| tg α | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| ctg α | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |

# Sinusfunktion allgemeine Form (Harmonische Funktion)

- $y = A * \sin(bx - c)$
- A ist die Amplitude, sie ändert die Höhe der Welle

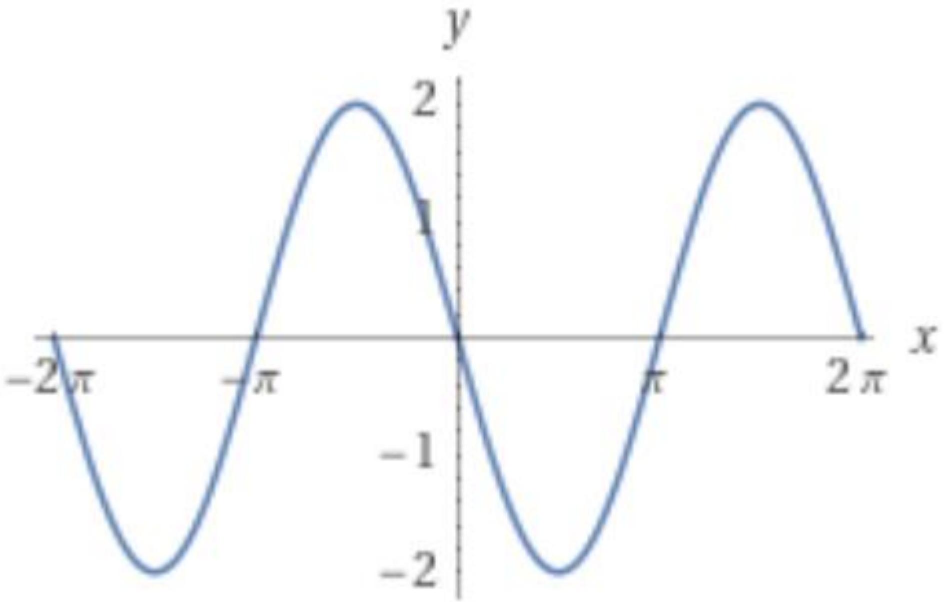
- Beispiel 1:
- $\mathrm{y} = 5 * \sin(x)$



# Sinusfunktion allgemeine Form (Harmonische Funktion)

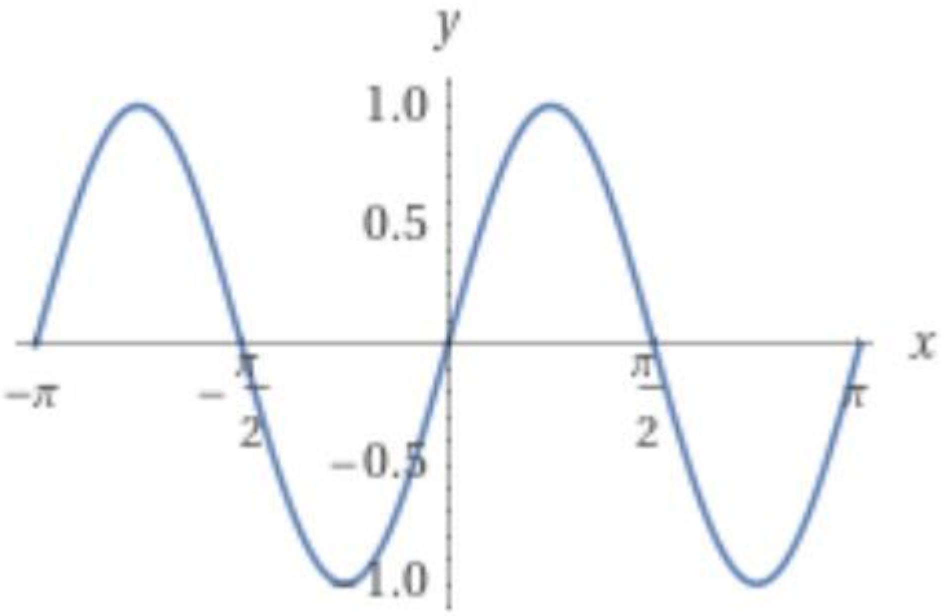
- $y = A * \sin(bx - c)$
- A ist die Amplitude, sie ändert die Höhe der Welle

- Beispiel 2:
- $y = -2 \ * \sin(x)$



# Sinusfunktion allgemeine Form (Harmonische Funktion)

- $y = A * \sin(bx - c)$
- b beeinflusst die Perioden Dauer oder b bestimmt wie viele Wellen innerhalb von $2\pi$ vorkommen
- (**Merke**: Es kommen b mal so viele Wellen in $2\pi$ vor!

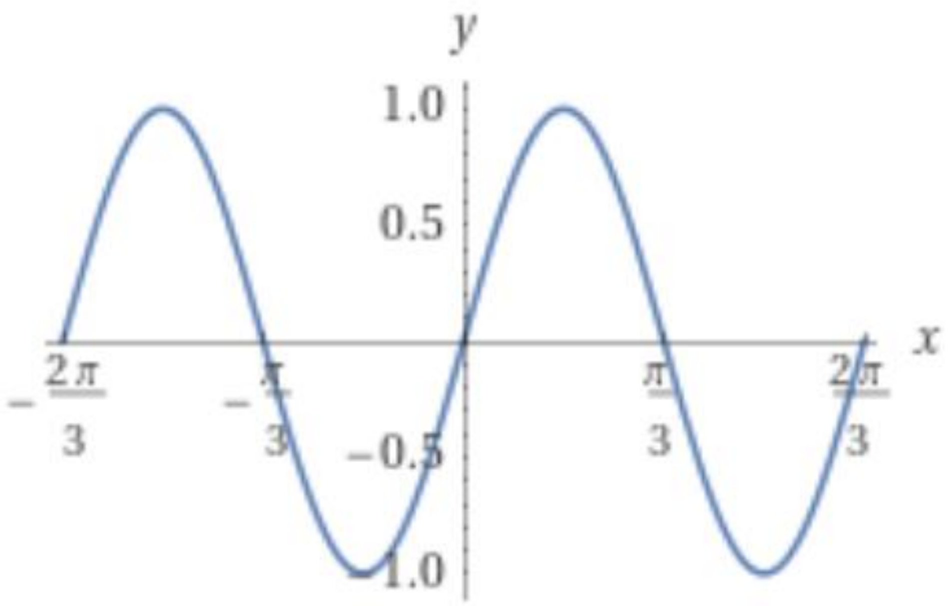



- Beispiel 1:
- $y = \sin(2x)$
- Eine Periode ist nun $\frac{2\pi}{2} = \pi$

# Sinusfunktion allgemeine Form (Harmonische Funktion)

- $y = A * \sin(bx - c)$
- b beeinflusst die Perioden Dauer oder b bestimmt wie viele Wellen innerhalb von $2\pi$ vorkommen
- (**Merke**: Es kommen b mal so viele Wellen in $2\pi$ vor!

- Beispiel 2:
- $\mathrm{y} = \sin(3x)$
- Eine Periode ist nun $\frac{2\pi}{3}$

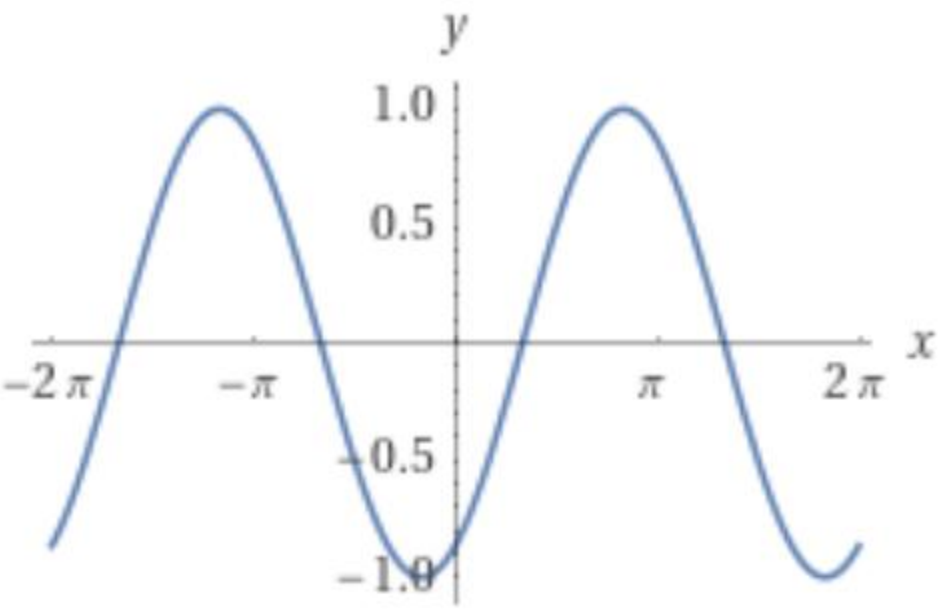


# Sinusfunktion allgemeine Form (Harmonische Funktion)

- $y = A * \sin(bx - c)$
- c ist eine Verschiebung des Nullpunktes!
- **Merke**: Was muss ich für x einsetzen damit

  **(bx-c)=0!** Dieses x ist mein **neuer Startpunkt** der gewohnten Funktion

- Beispiel:
- $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



# Sinusfunktion allgemeine Form (Harmonische Funktion)

- $y = A * \sin(bx - c)$+d
- **A** ist die Amplitude, sie ändert die Höhe der Welle

(**Merke** meine Welle ist A mal so groß)

- b beeinflusst die Perioden Dauer oder **b** bestimmt wie viele Wellen innerhalb von $2\pi$ vorkommen

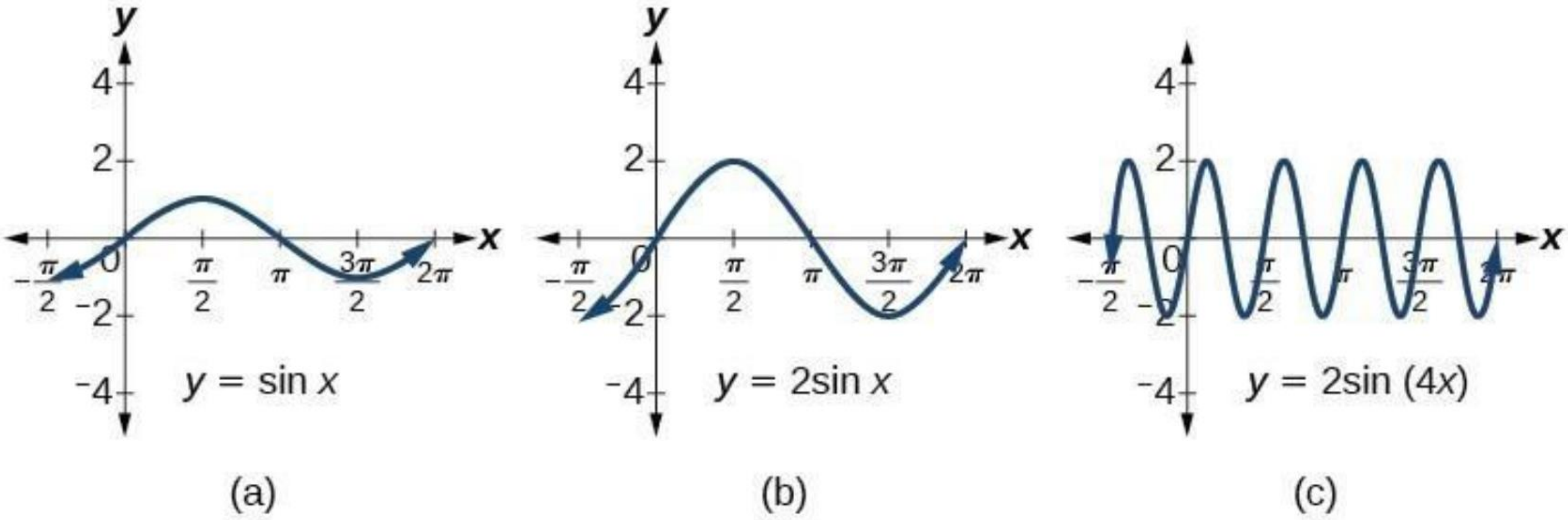
(**Merke**: Es kommen b mal so viele Wellen in $2\pi$ vor!

- **c** ist eine Verschiebung des Nullpunktes!

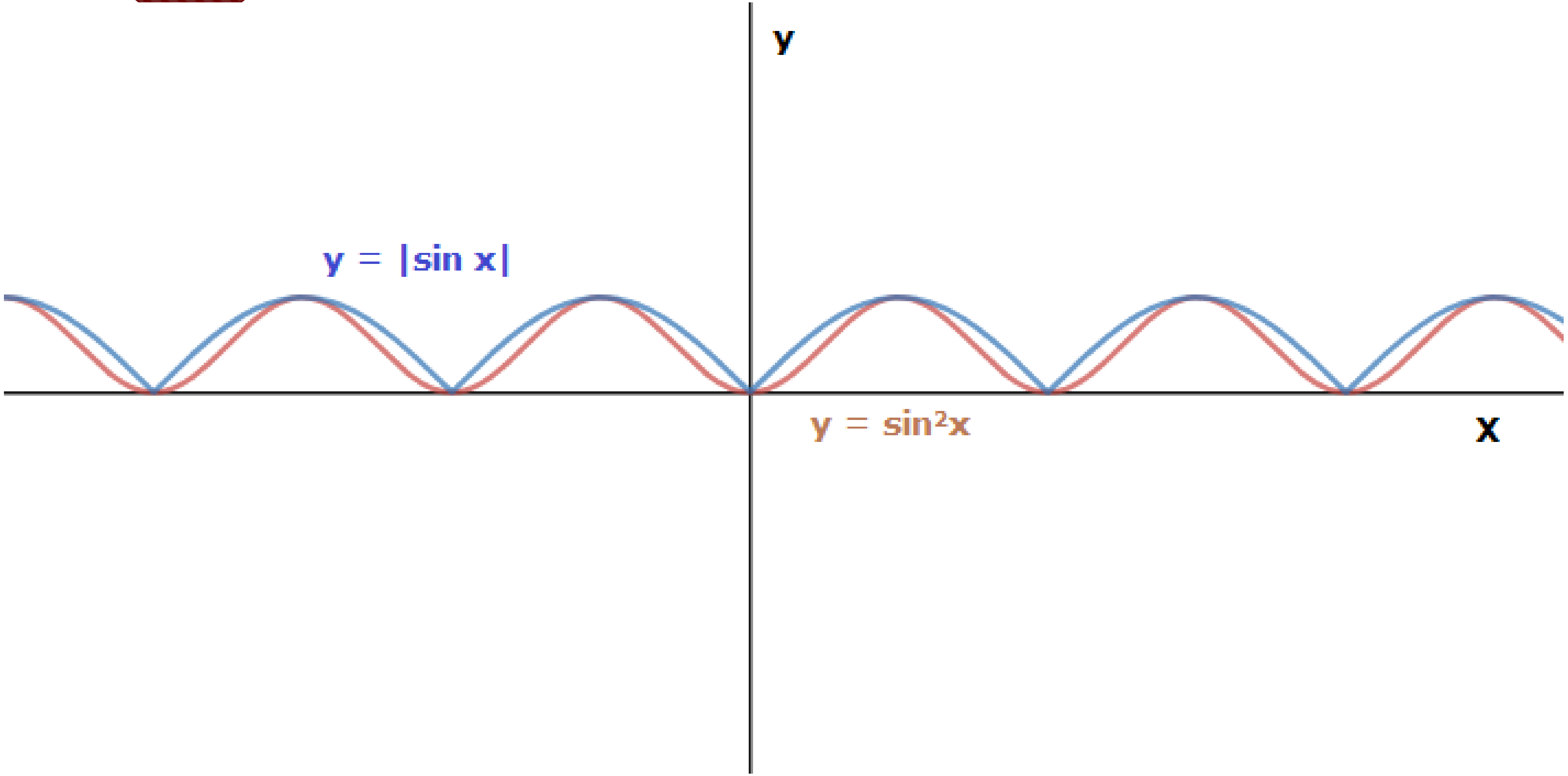
**Merke**: Was muss ich für x einsetzen damit **(bx-c)=0!** Dieses x ist mein **neuer Startpunkt** der gewohnten Funktion

- **d** ist eine konstante Verschiebung der Y-Achse **Merke:** Die x-Achse schneidet die y-Achse jetzt bei d

# Harmonische Funktionen Beispiele



# Betragsfunktion $|\sin(x)|$ & Das Quadrat $\sin^2(x)$



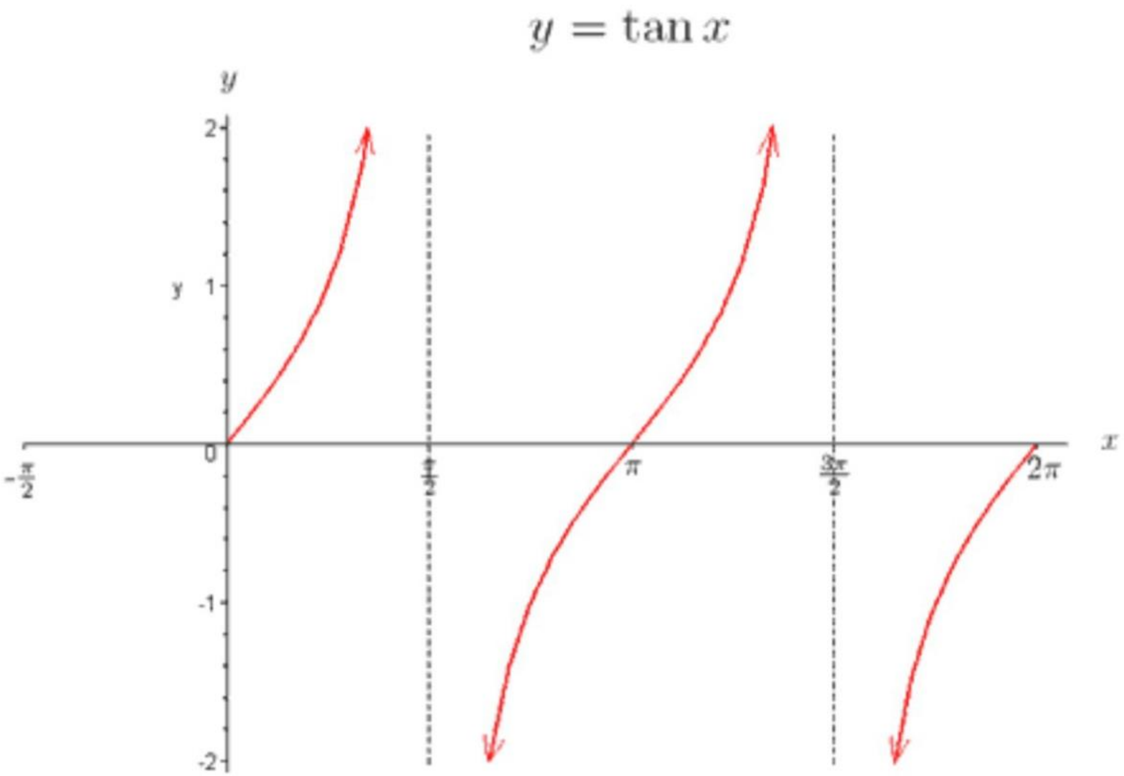
# Besprechung der Aufgaben

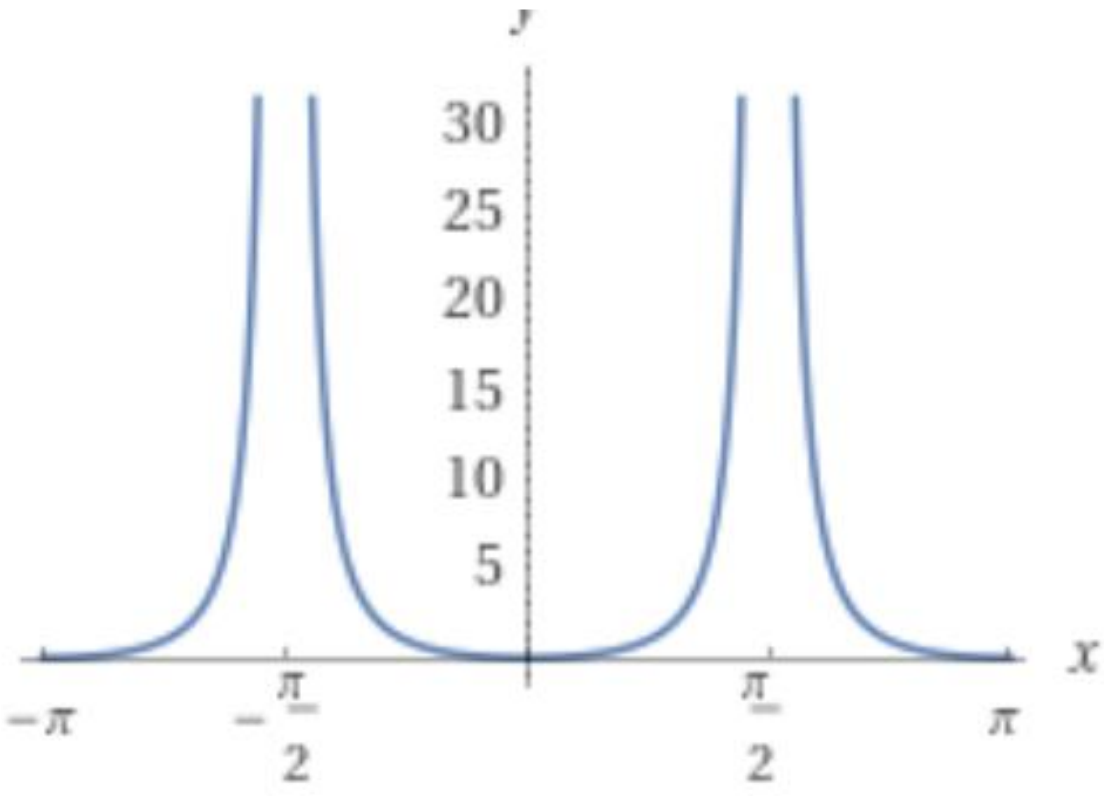
- Aus dem Übungsaufgaben_für_Mathematiktest_Sep_2016
- https://de.serlo.org/mathe/16245/trigonometrie

- Falls Sie sich einen Graphen nicht vorstellen können, oder wissen wollen, wie eine Funktion aussieht:
- https://www.wolframalpha.com/input?i=%7Ctan%28x%29%7C+

- Aufnahmetest Muster(verschiedene Bundesländer:
- https://studienkollegs-in.de/aufnahmetest/beispiele

# $Tan^2(x)$



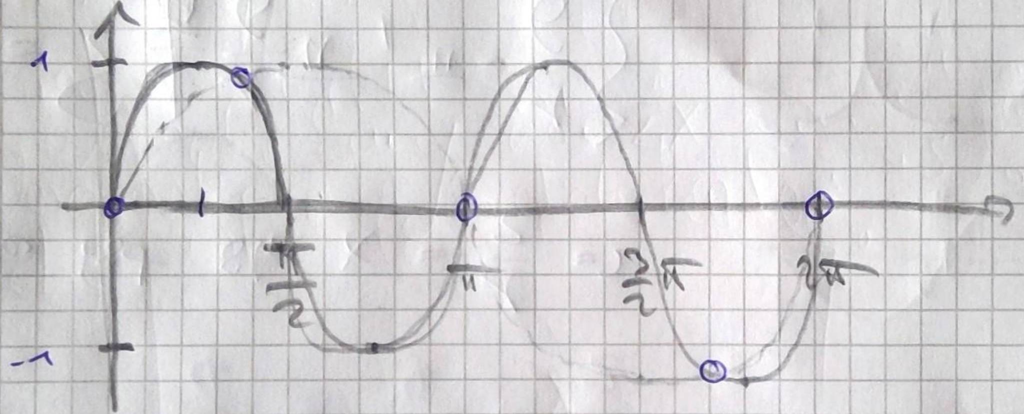
# Übung für euch!

a) $\sin x = \sin 2x$

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

# Übung für euch!

a) $\sin x = \sin(2x)$




bei $\sqrt{3}/2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}\pi$

$L = \left\{ \frac{1}{3}\pi,\ \pi,\ 2\pi - \frac{1}{3}\pi,\ 0 \text{ bzw } 2\pi \right\}$

# Übung für euch!

b) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

oder $\cos^2 x = \frac{1}{4} + \sin x$

$\cos^2 x$ hat $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ als Lösungen

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Wo ist $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\mathbb{L} = \left\{ \cancel{\frac{1}{6}}\ \frac{1}{6}\pi, \ \pi - \frac{1}{6} \right\}$