Vortragender:
Clemens Weber

Übung 06/07
Geometrie

Vom 22.1.2024 & 24.01.2024

Vorbereitung zur Aufnahme auf das Studienkolleg

Organisation

Januar 2024 Kalenderpedia Informationen zum Kalender

KW	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20	21
4	22	23	24	25	26	27	28
5	29	30	31	1	2	3	4

 1.: Neujahrstag

- Montag & Mittwoch
- Uhrzeit 16.00 – 17.30 Uhr
- Letzte Session am 31.1
- Übungen von nun an:
  - Gemeinsam Lösungen finden
- Muster Tests 1x die Woche:
  - Besprechung im Anschluss

Aufnahmeprüfung	
Deutsch und	Montag den
Mathematik	05.02.2024
München	um 9:00 Uhr

https://studienkolleg-münchen.de/bewerben/aufnahme-in-

Clemens Weber

Themen-Gebiete Gesamt

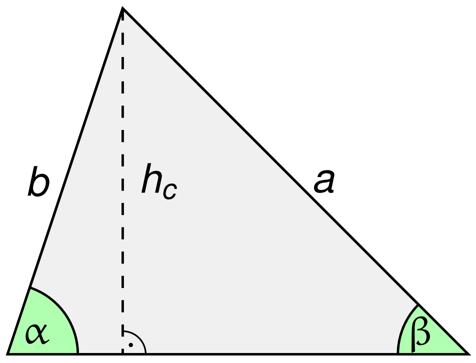
- Vereinfachung von Bruchtermen
- Polynomdivision
- Wurzelgleichungen - Ungleichungen
- Exponentialgleichungen & Logarithmusgleichungen
- Trigonometrischen Funktionen
- Erkennen von Funktionsgraphen
- Geometrie ; vor allem Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Kreisberechnungen, Flächen- und Volumenberechnungen

Wiederholung

- Rechtwinklige Dreiecke Winkel Seiten Beziehungen
- Satz des Pythagoras
- Werte von Cos & Sin (und Tan) für ausgewählte Winkel
- Allgemeine Dreiecke Winkel Seiten Beziehungen
  - Wenn ich **zwei Seiten und einen Winkel** (eines Dreiecks) kenne, kann ich die restlichen bestimmen!
  - Wenn ich **2 Winkel und Seite**(eines Dreiecks) kenne, kann ich die restlichen bestimmen!

Wiederholung

- Sinus-Satz :

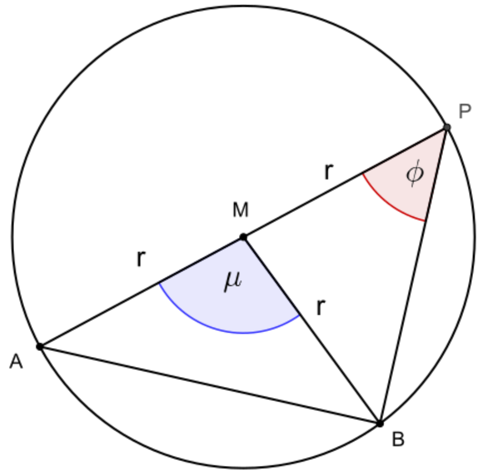


$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

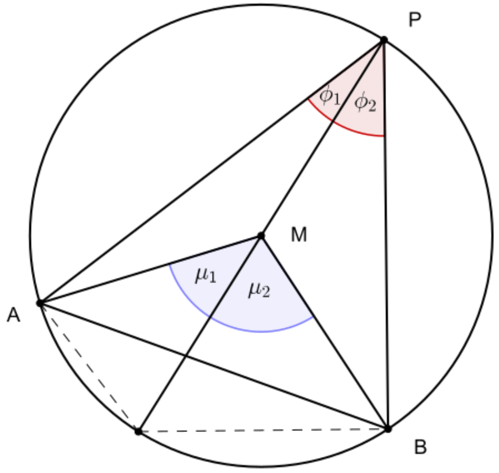
$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

- Satz des Thales
  - Mittelpunkts-Winkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
  - $\mu_1 = 2\varphi_1$
  - $\mu_2 = 2\varphi_2$



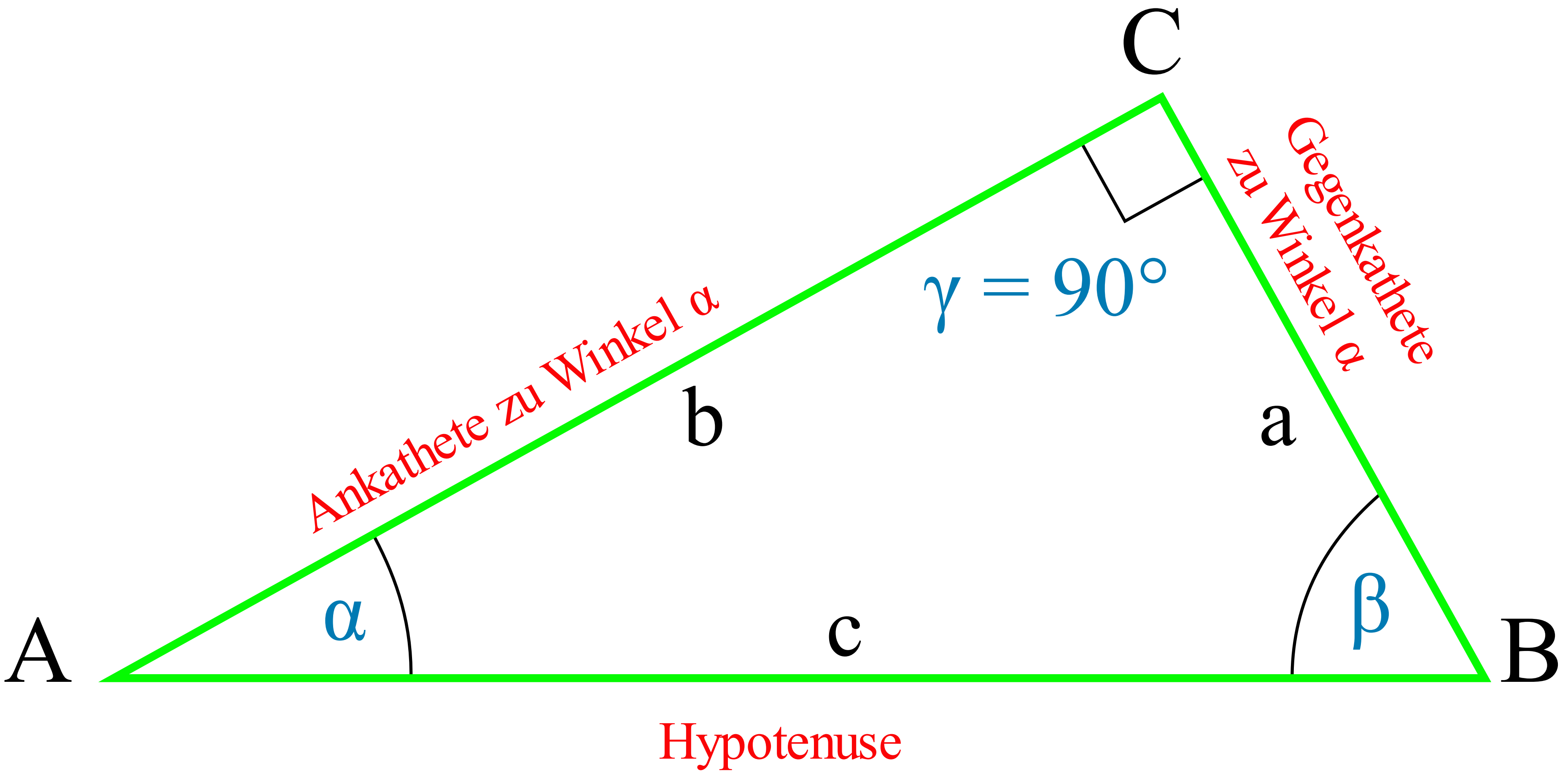
Spezialfall



Allgemeiner Fall

Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen



Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(alpha) = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Cosinus}\ (alpha) = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Tangens}\ (alpha) = \tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Summe aller Winkel: a+β + $\gamma = 180$ °

C

Gegenkathete zu Winkel α

$\gamma = 90°$

Ankathete zu Winkel α

b

a

A

α

c

β

B

Hypotenuse

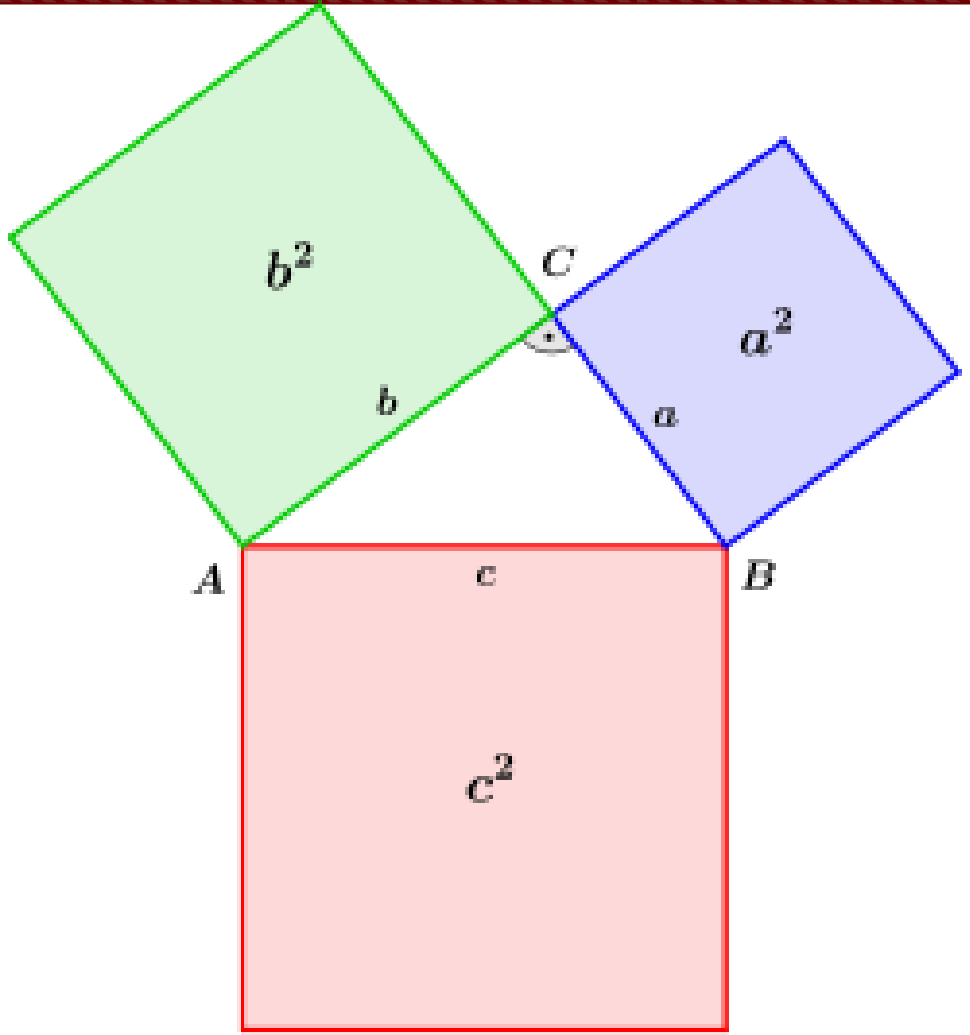
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit
Rechtem Winkel (90 Grad)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$



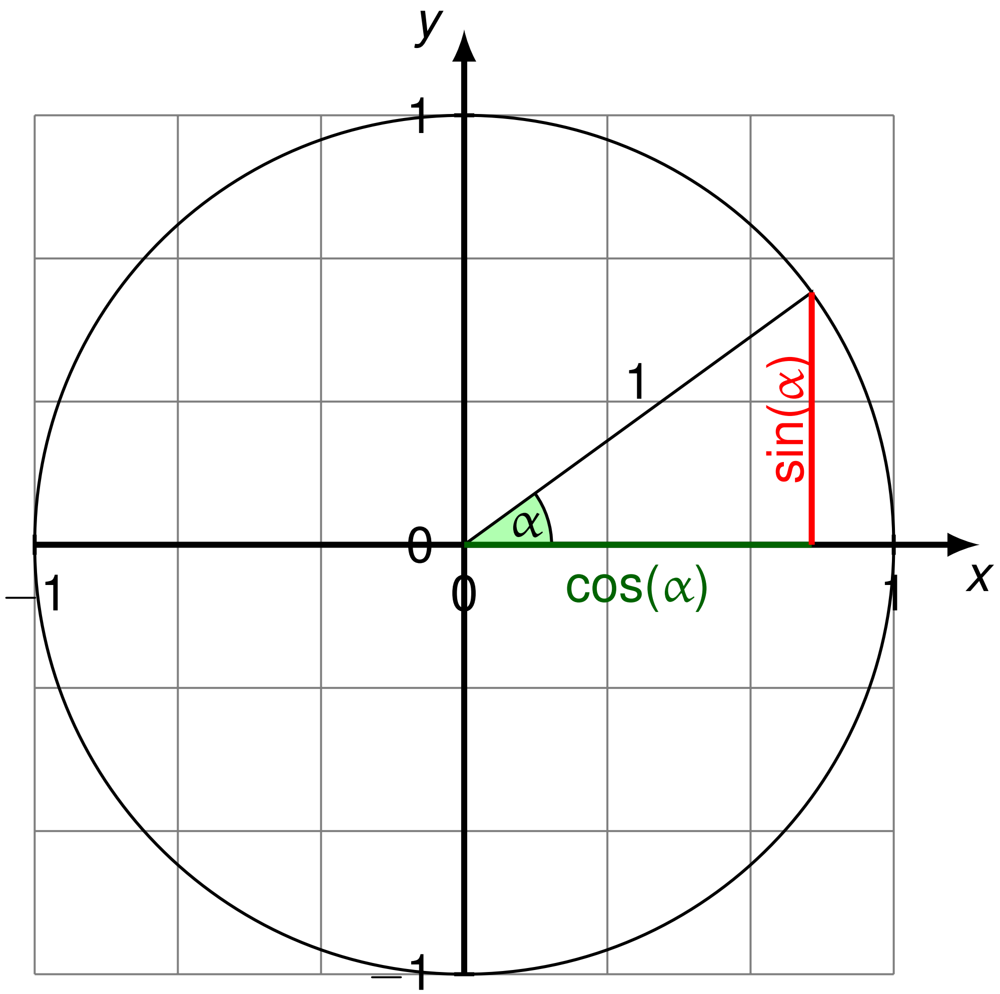
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) + Cos^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Annimation:

https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo

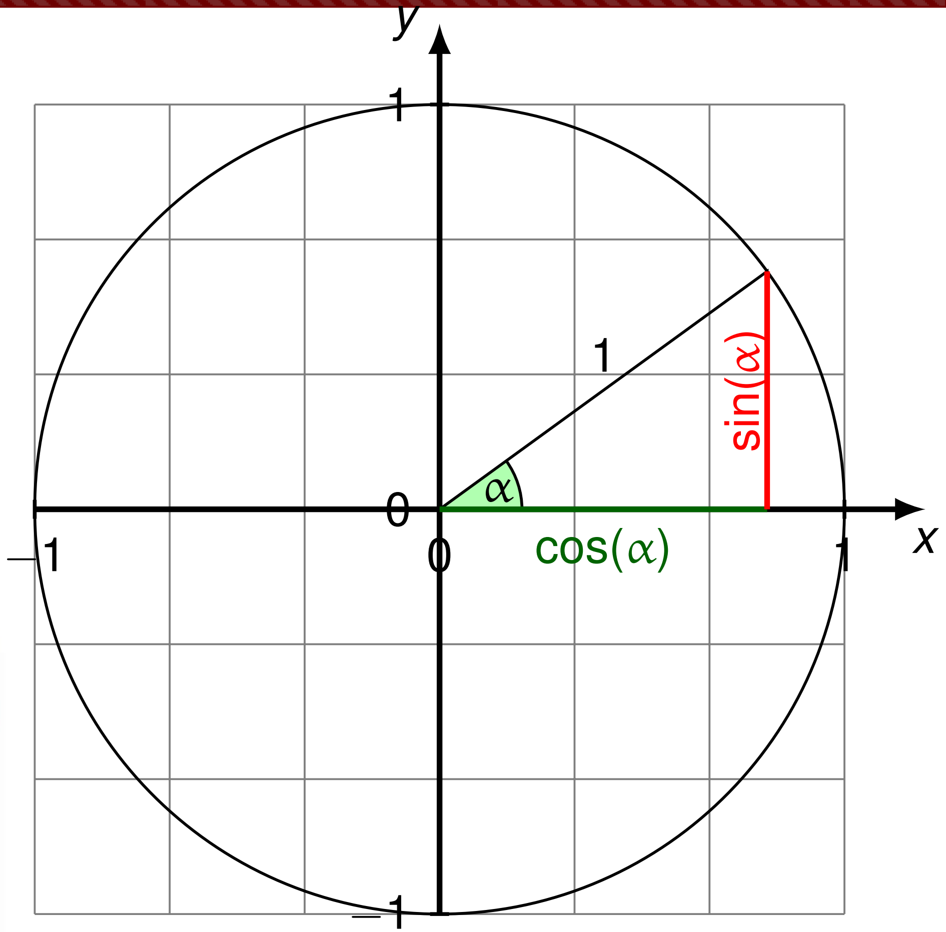


Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin(**a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(**a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

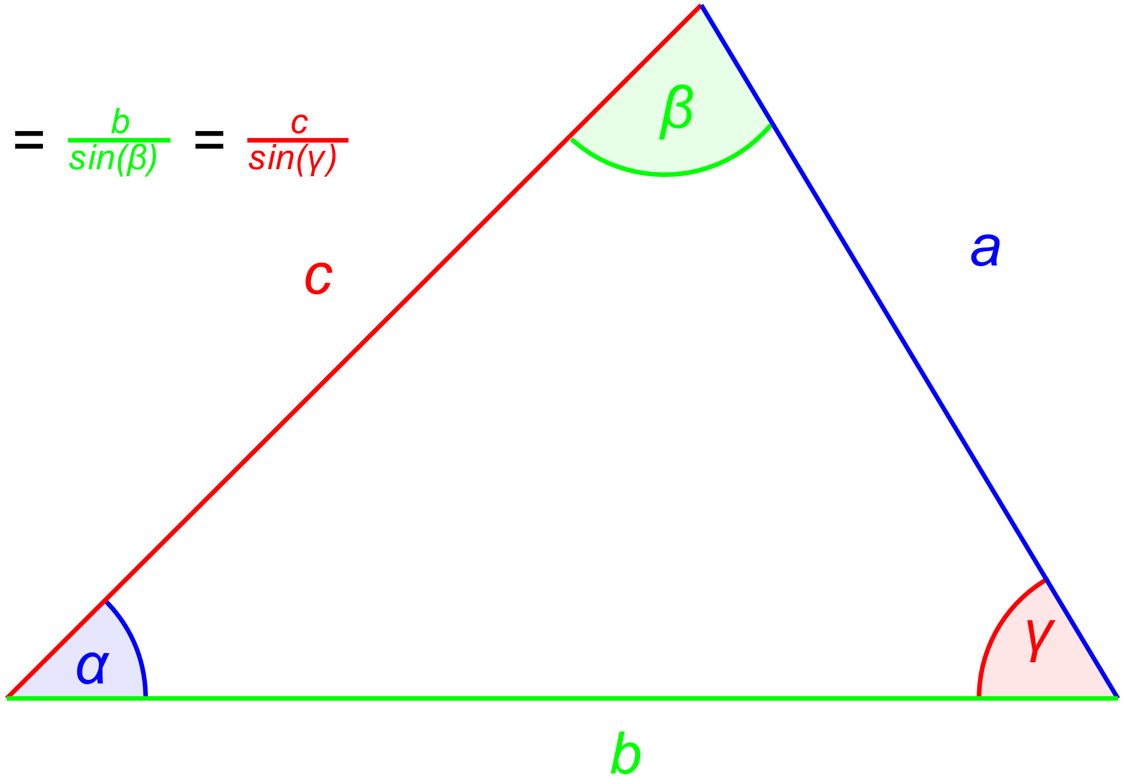


Clemens Weber

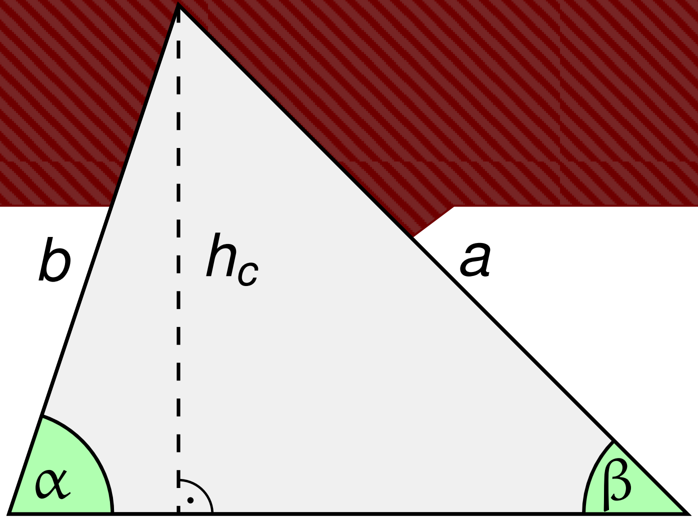
Sinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den gegenüberliegenden Seiten.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Sinus-Satz

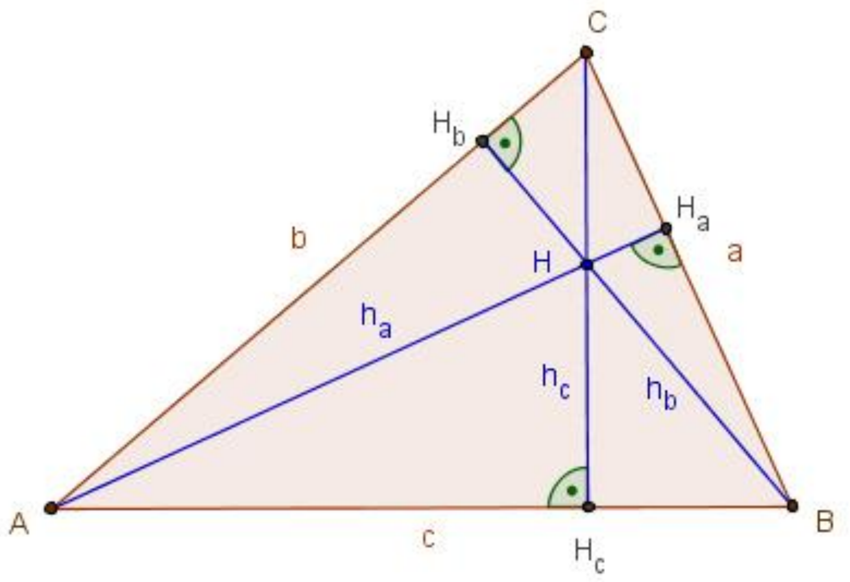


$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

- Gilt in **jedem** Dreieck



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

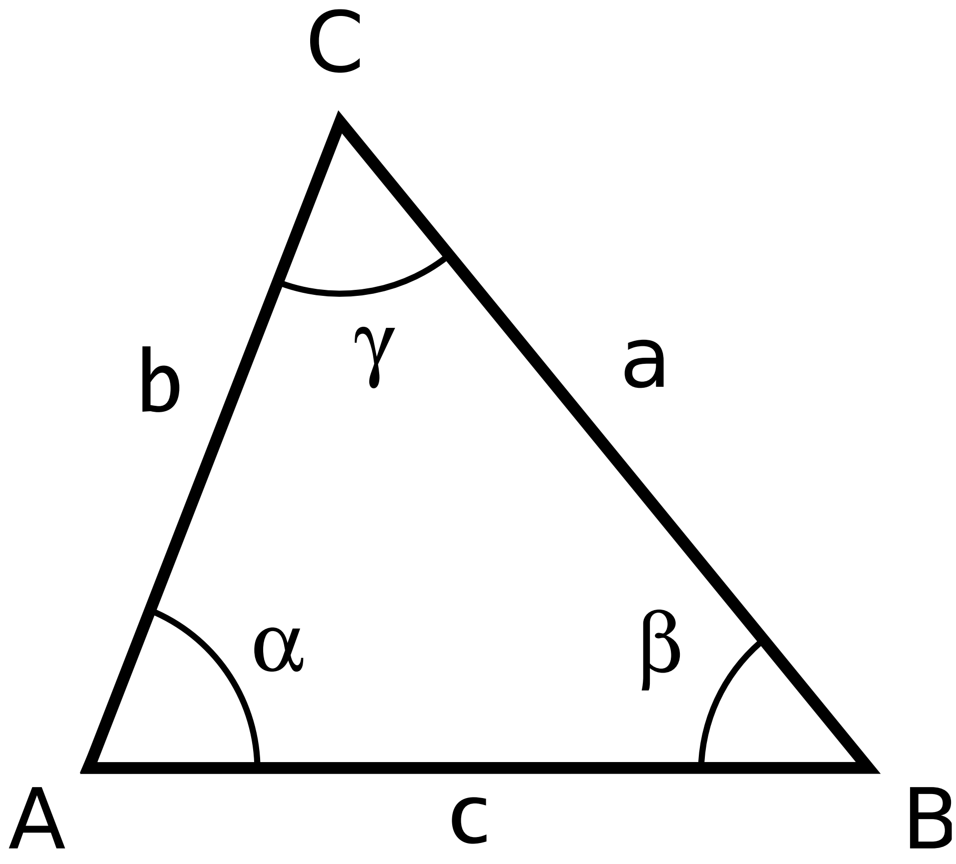
Sinus-Satz

- Gilt in **jedem** Dreieck

Cosinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den Seiten.

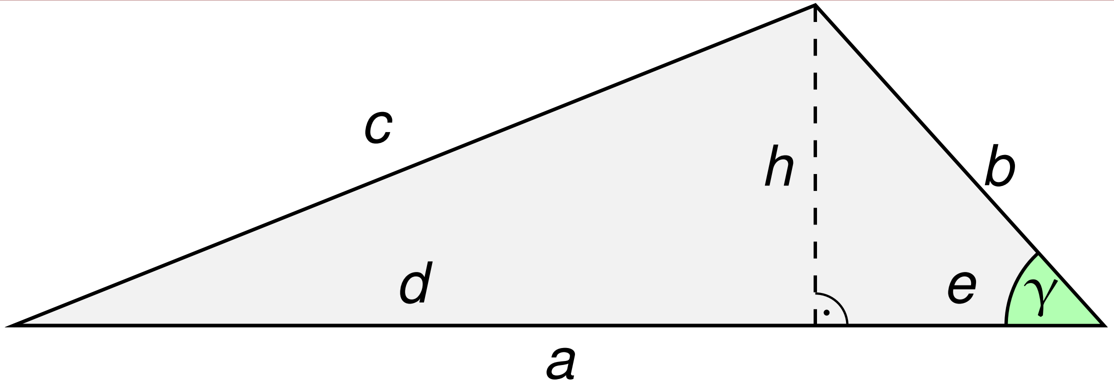
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



$h^2 = b^2 - e^2$ (Satz des Pythagoras für das rechte Teildreieck)

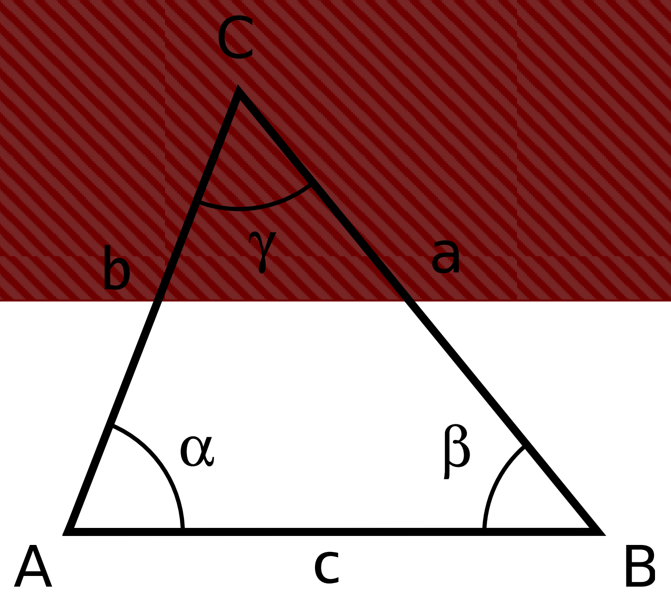
$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$ (binomische Formel)

Cosinus-Satz Herleitung Ansatz



Cosinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den Seiten.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

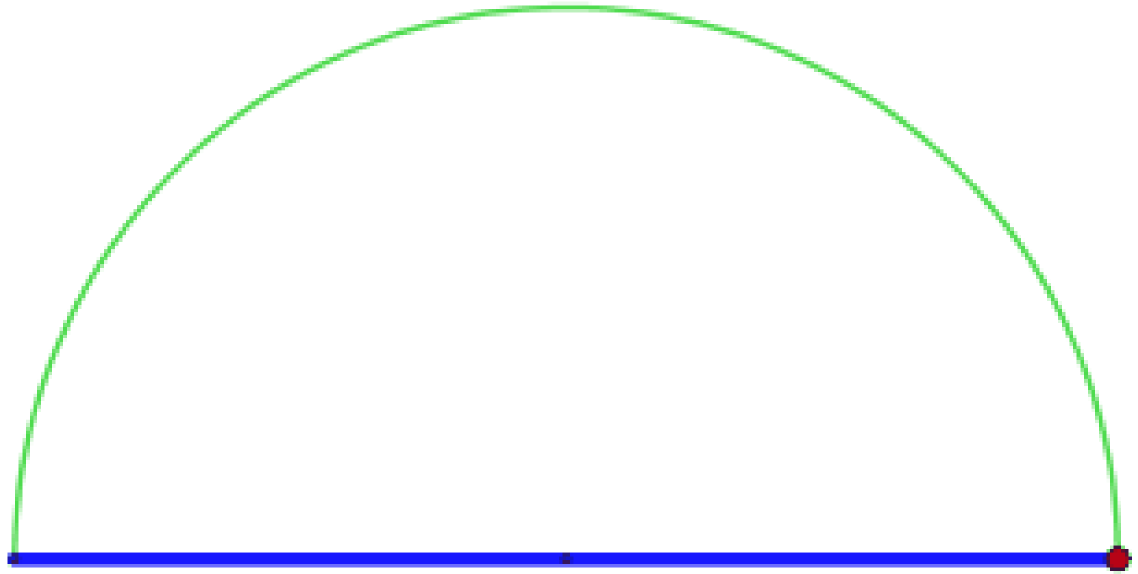
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

Clemens Weber

Satz des Thales

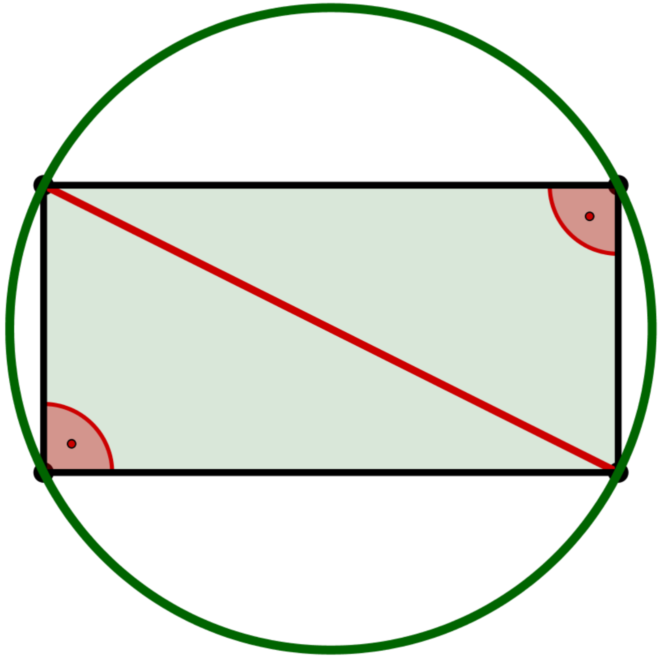
- Halb-Kreis = Thaleskreis
  - *Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig.*

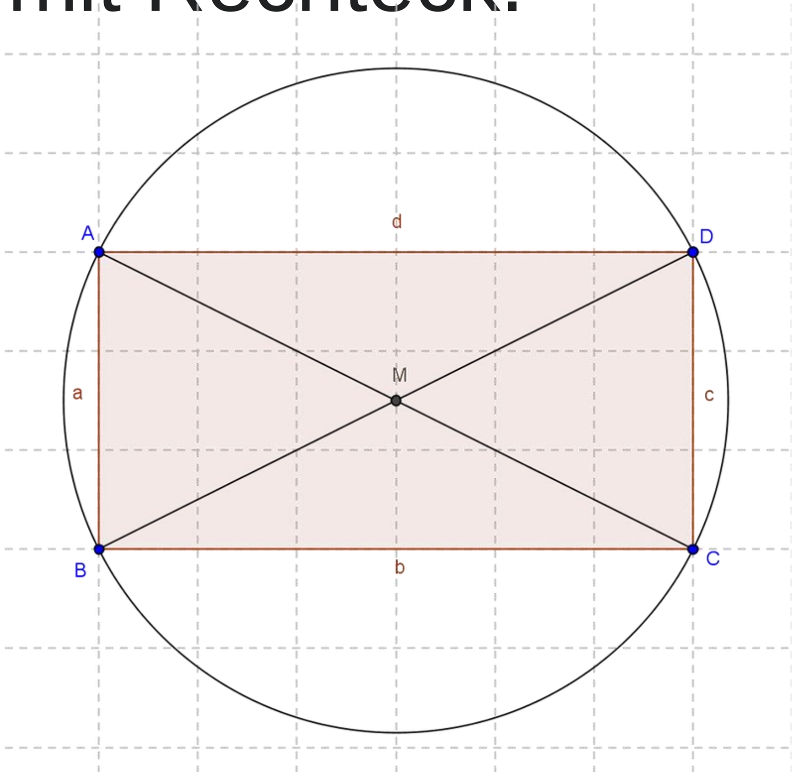


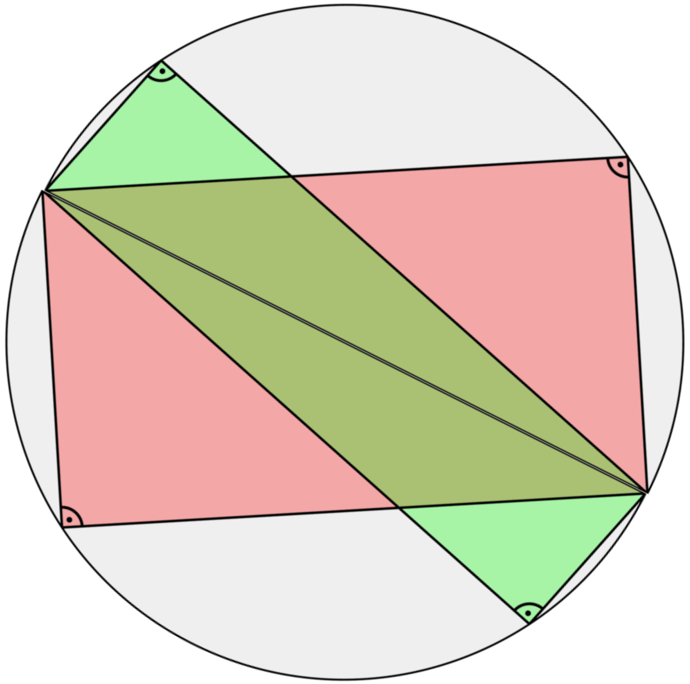
Clemens Weber

Satz des Thales

- *Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig.*
- Geometrischer Beweis mit Rechteck.



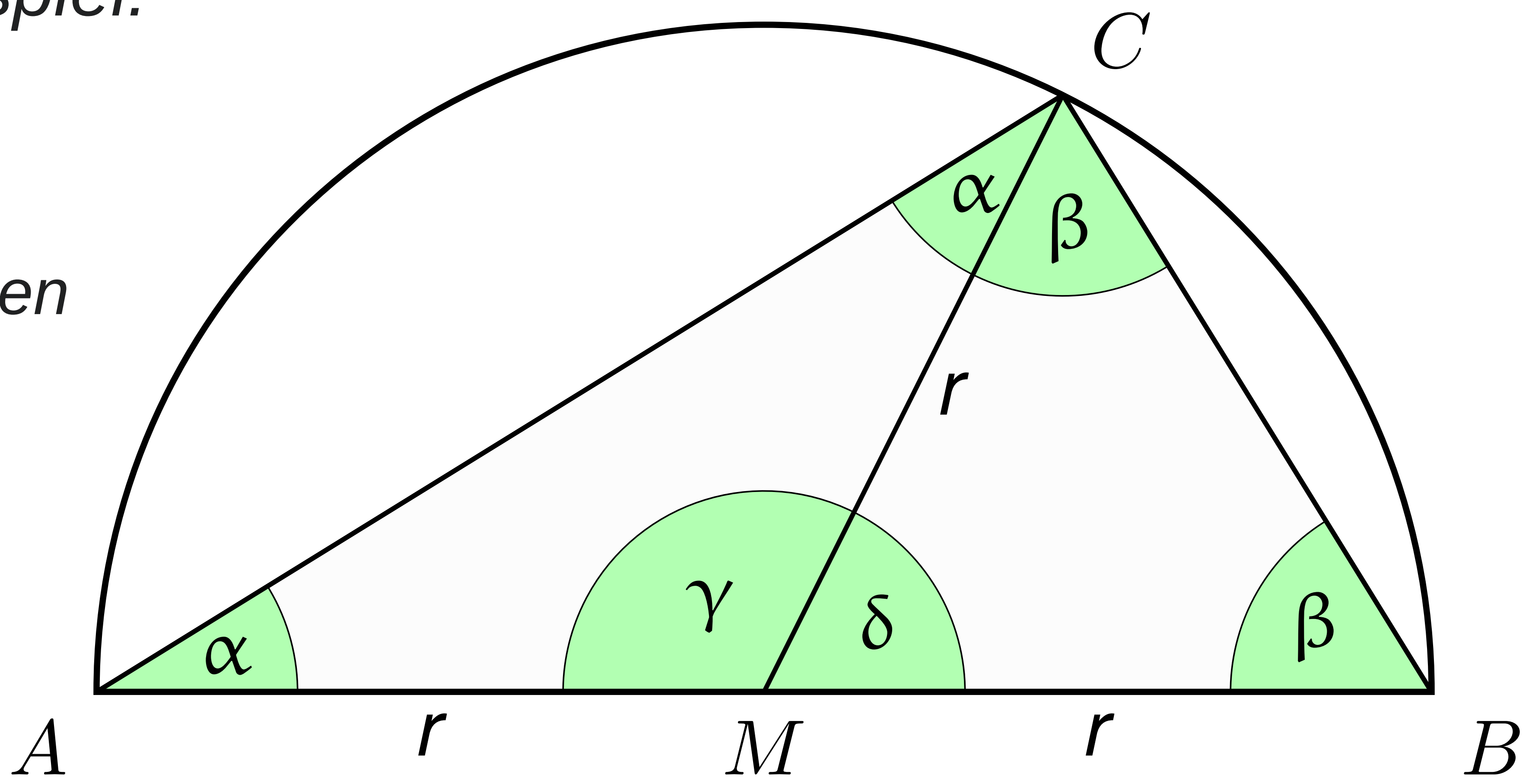




Clemens Weber

Satz des Thales

- *Anwendungs Beispiel:*
- $\alpha + \beta = 90°$
  - *Alpha gegeben*
  - *Gamma bestimmen*
  - *Viele weitere*

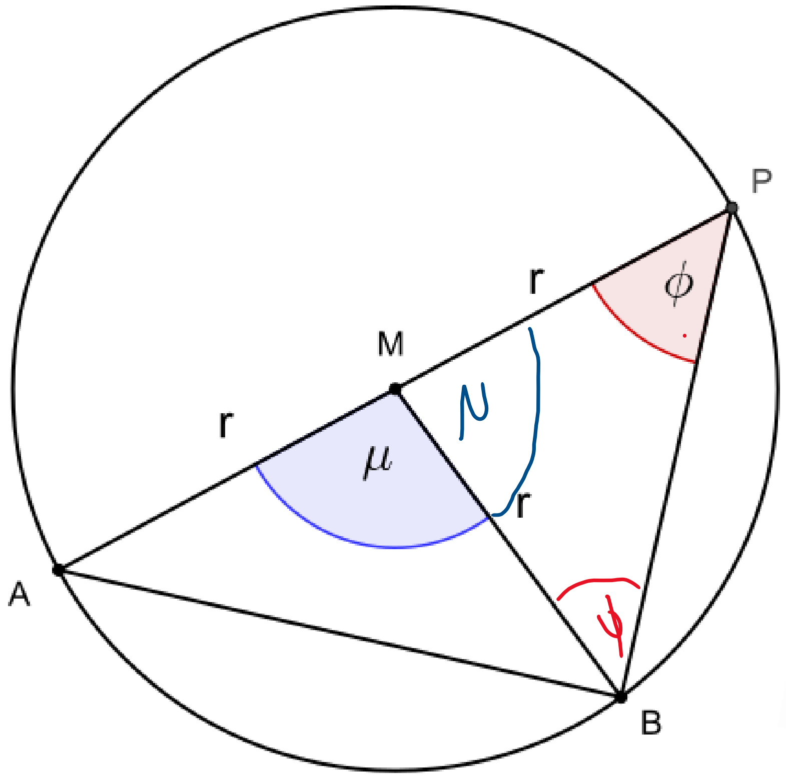


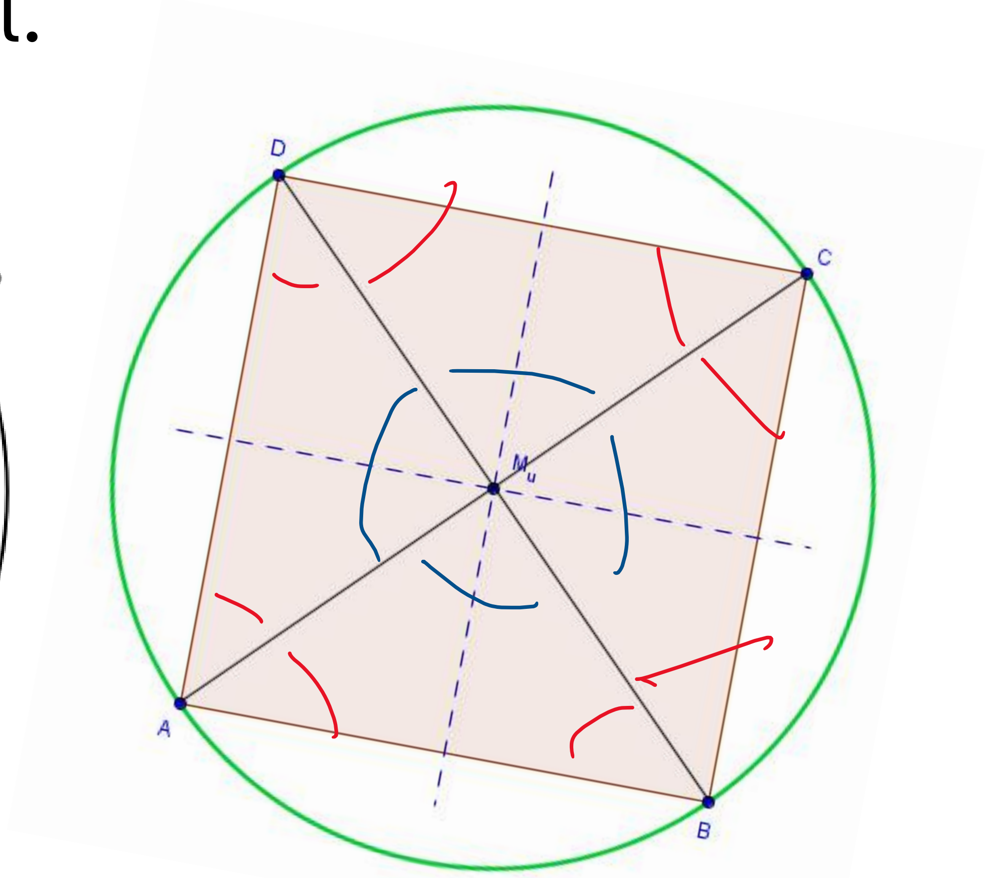
Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu = 2\varphi$

$2 \times \mu = 180^\circ$

$2\phi + \mu = 180^\circ$

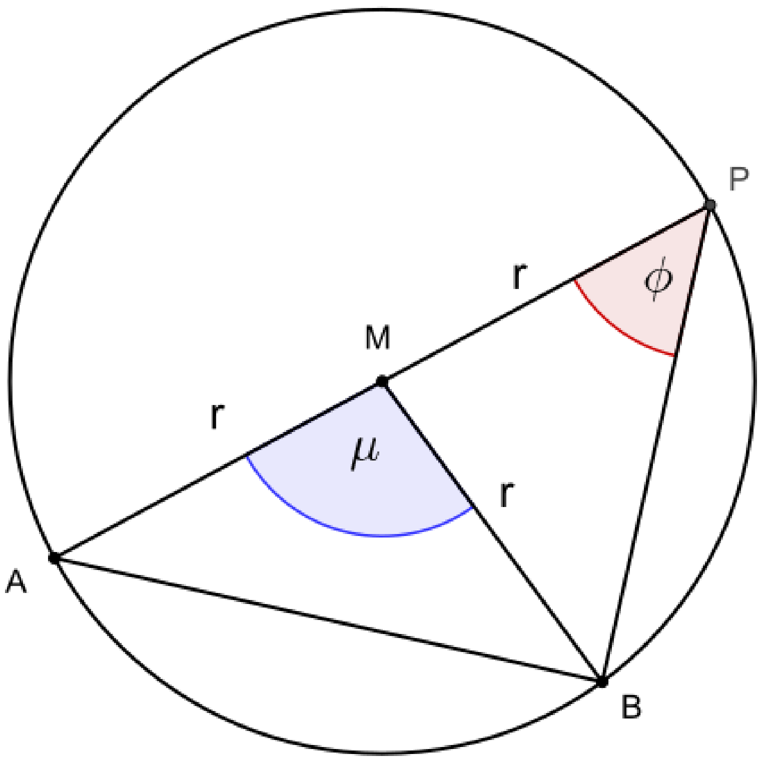


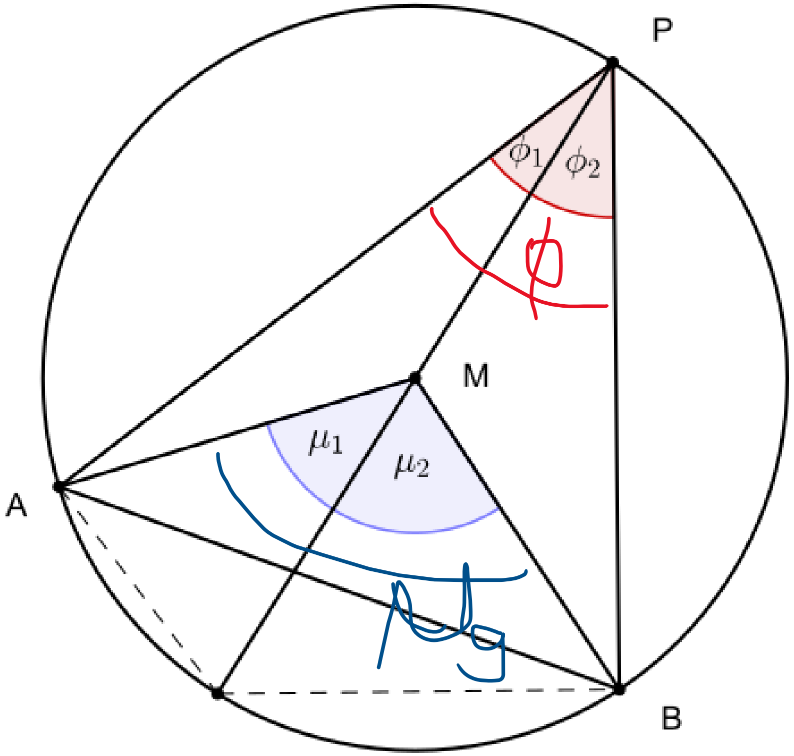


Clemens Weber

Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

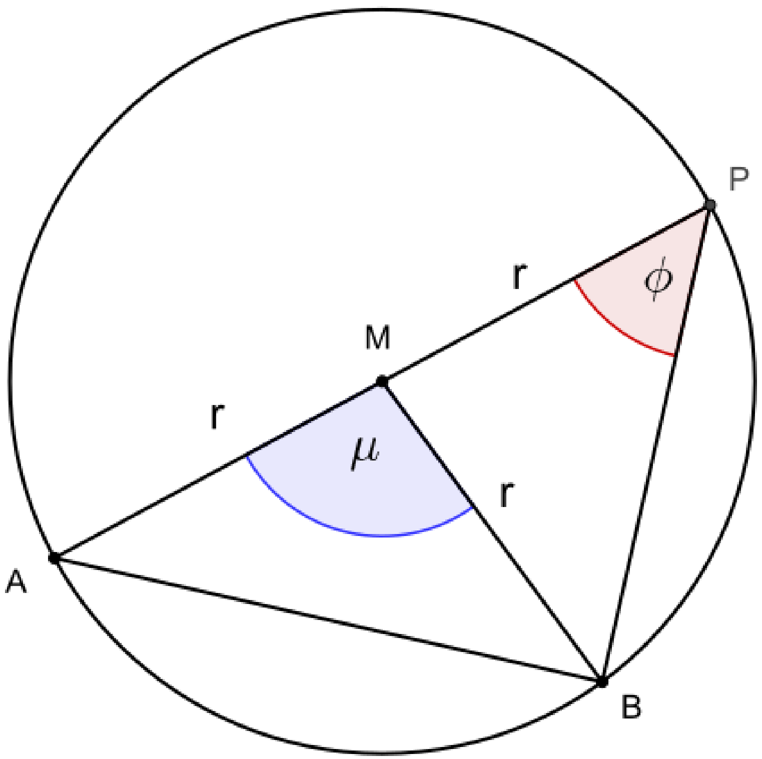


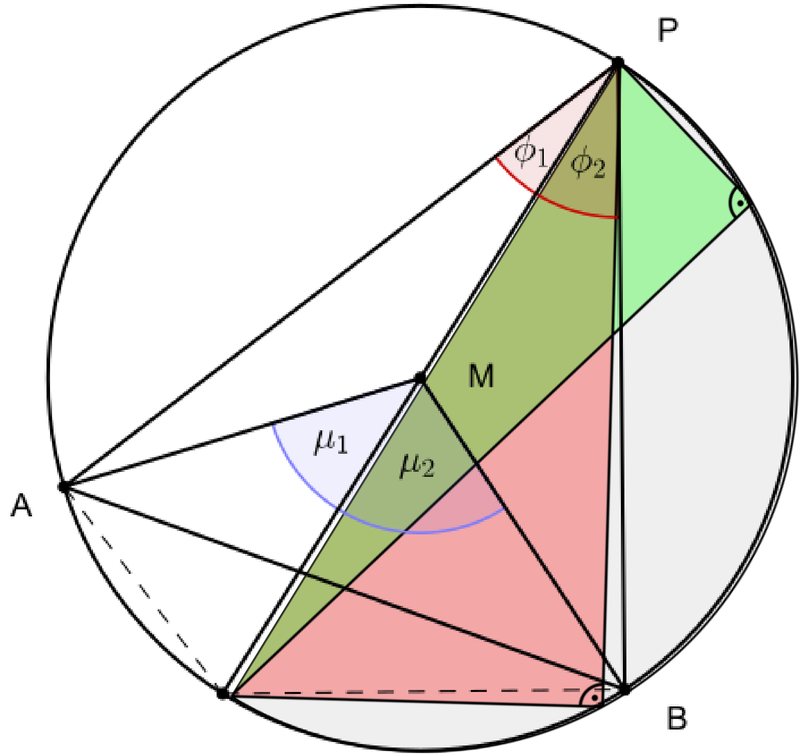


Clemens Weber

Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

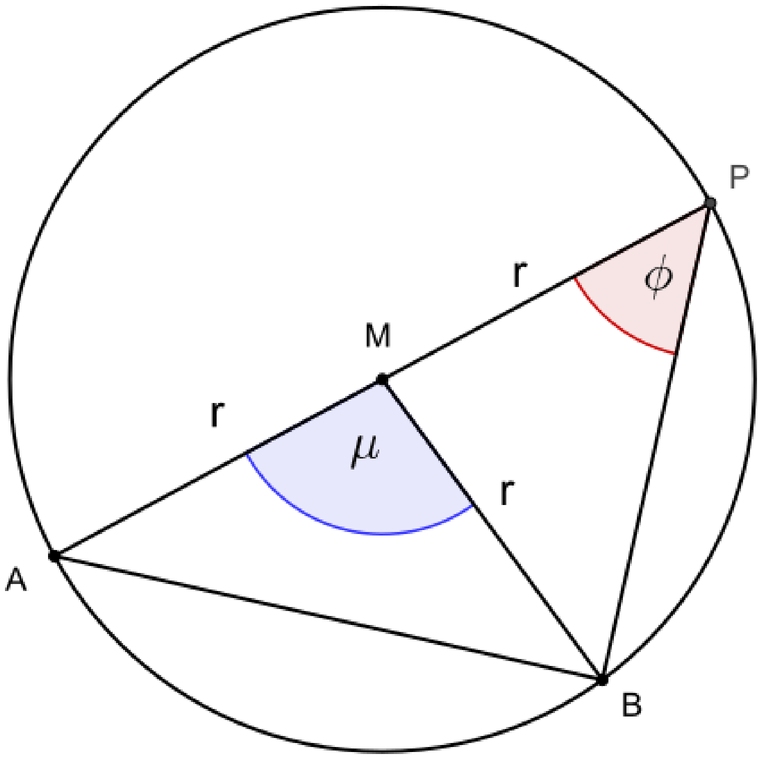


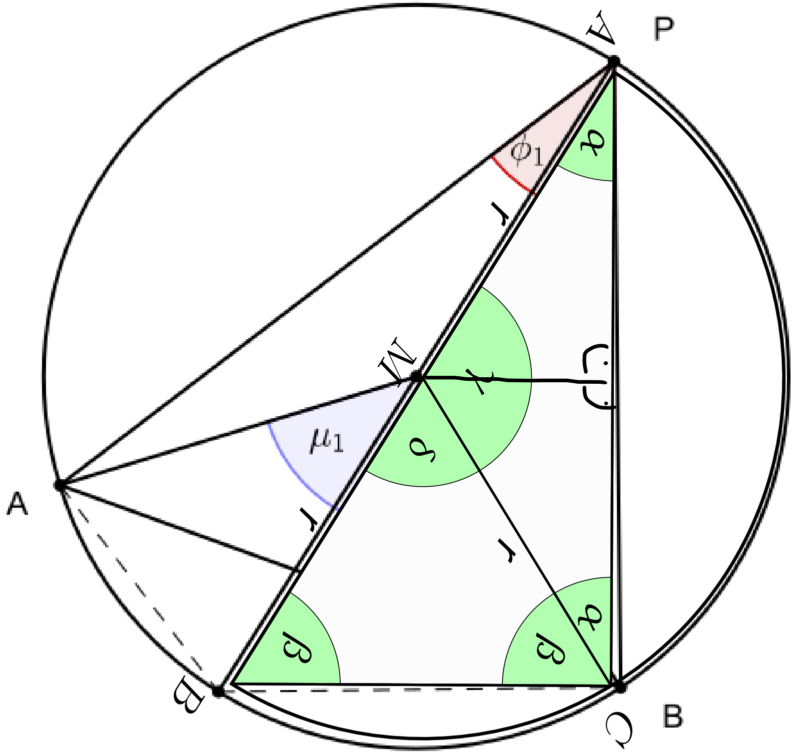


Clemens Weber

Kreiswinkel-Satz

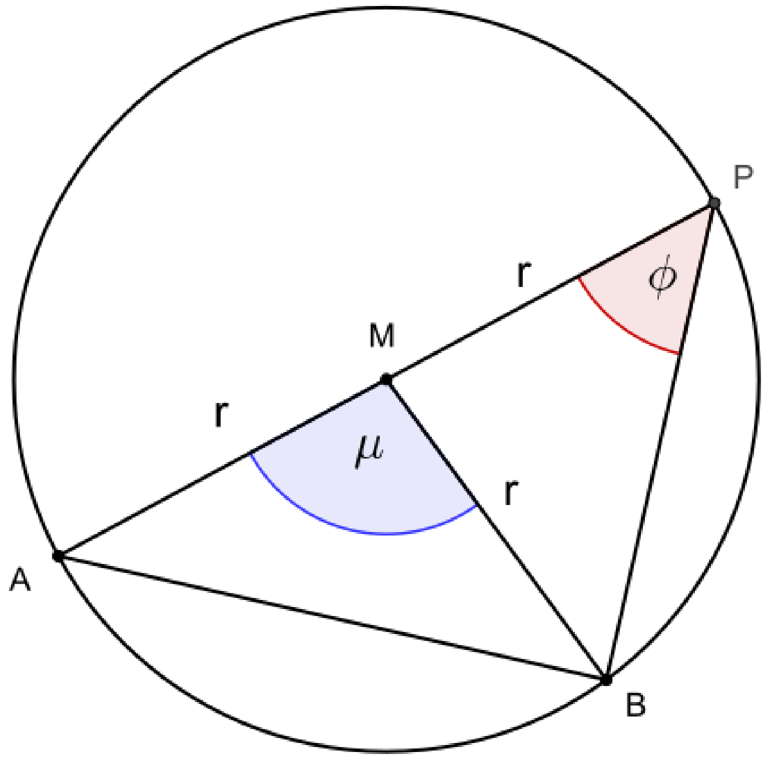
- $2\alpha + \gamma = 180°$
- $\gamma + \delta = 180°$
- $2\alpha = \delta$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

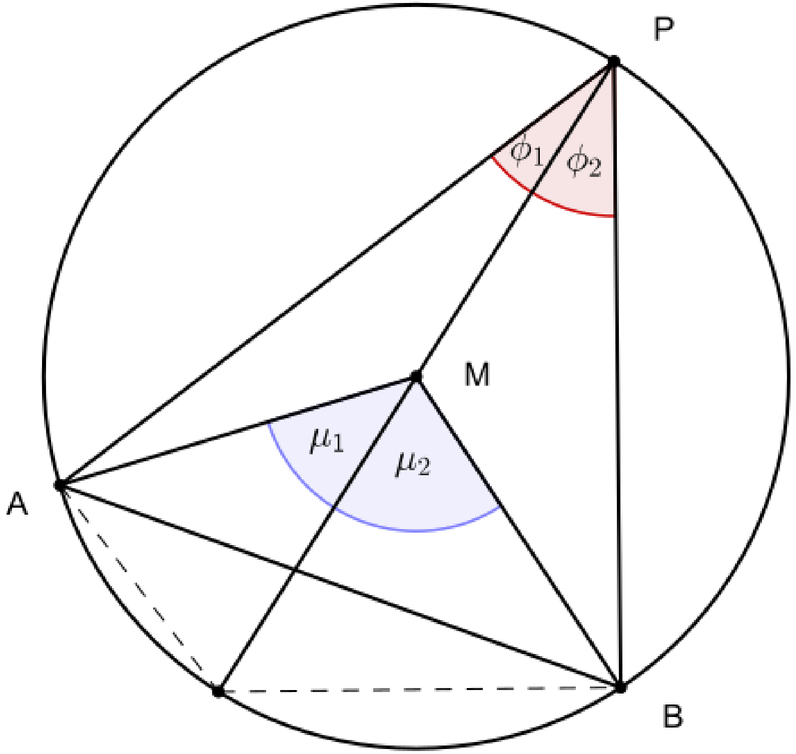




Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

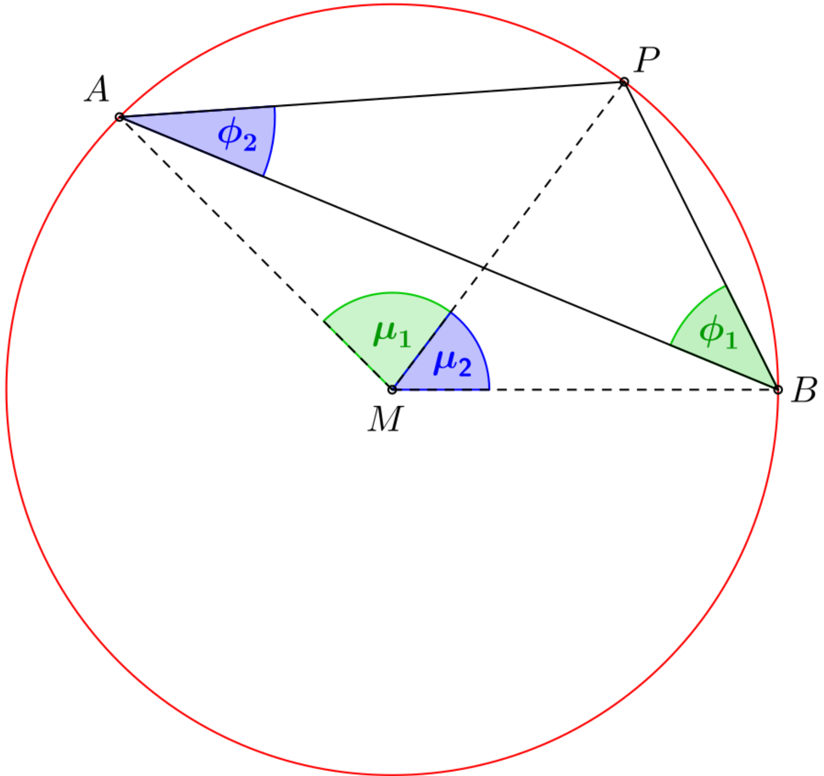




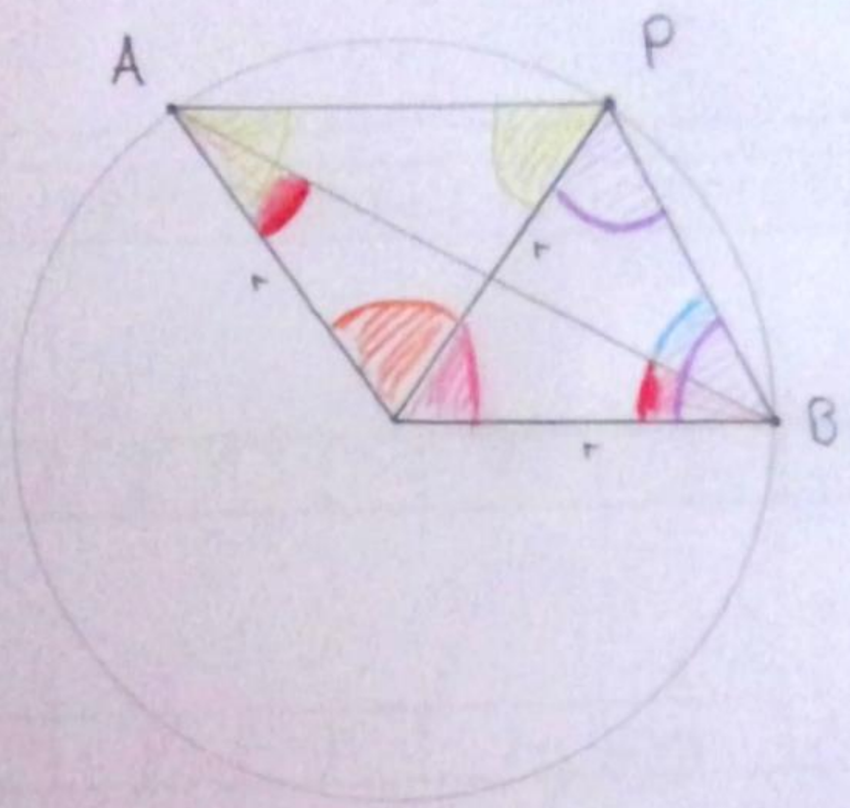
Clemens Weber

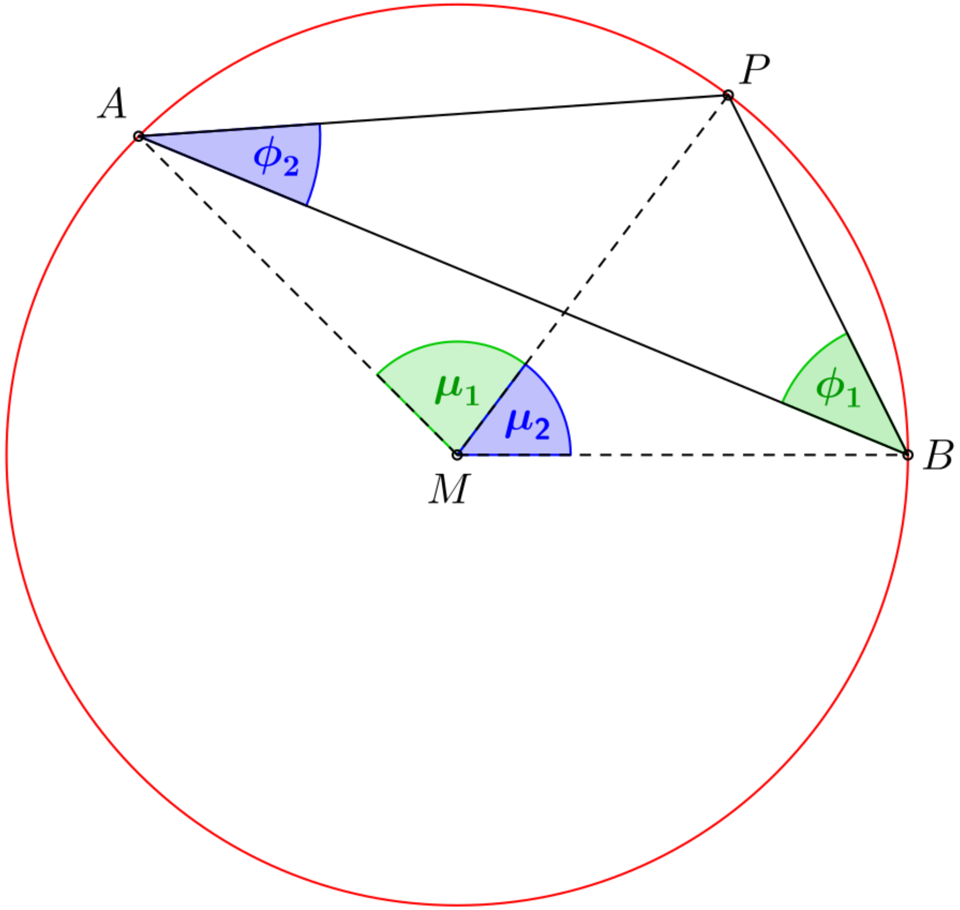
Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

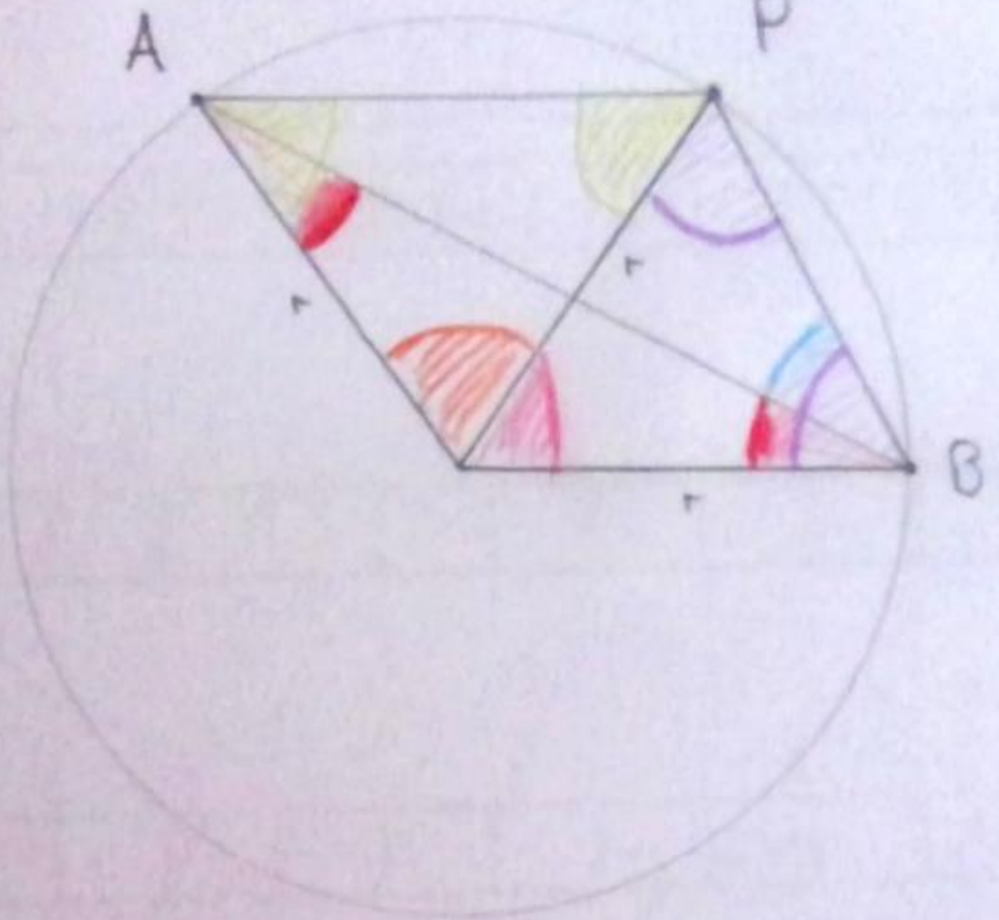


Kreiswinkel-Satz





Kreiswinkel-Satz



$$2\alpha + \mu_1 + \mu_2 = 180^\circ$$

$$2\cdot(\phi_i + \alpha) + \mu_i = 180^\circ$$

Bsp.:

$= \phi_1$

$= \mu_2$

$= \alpha$

Clemens Weber

Sehnen-Tangenten-Satz

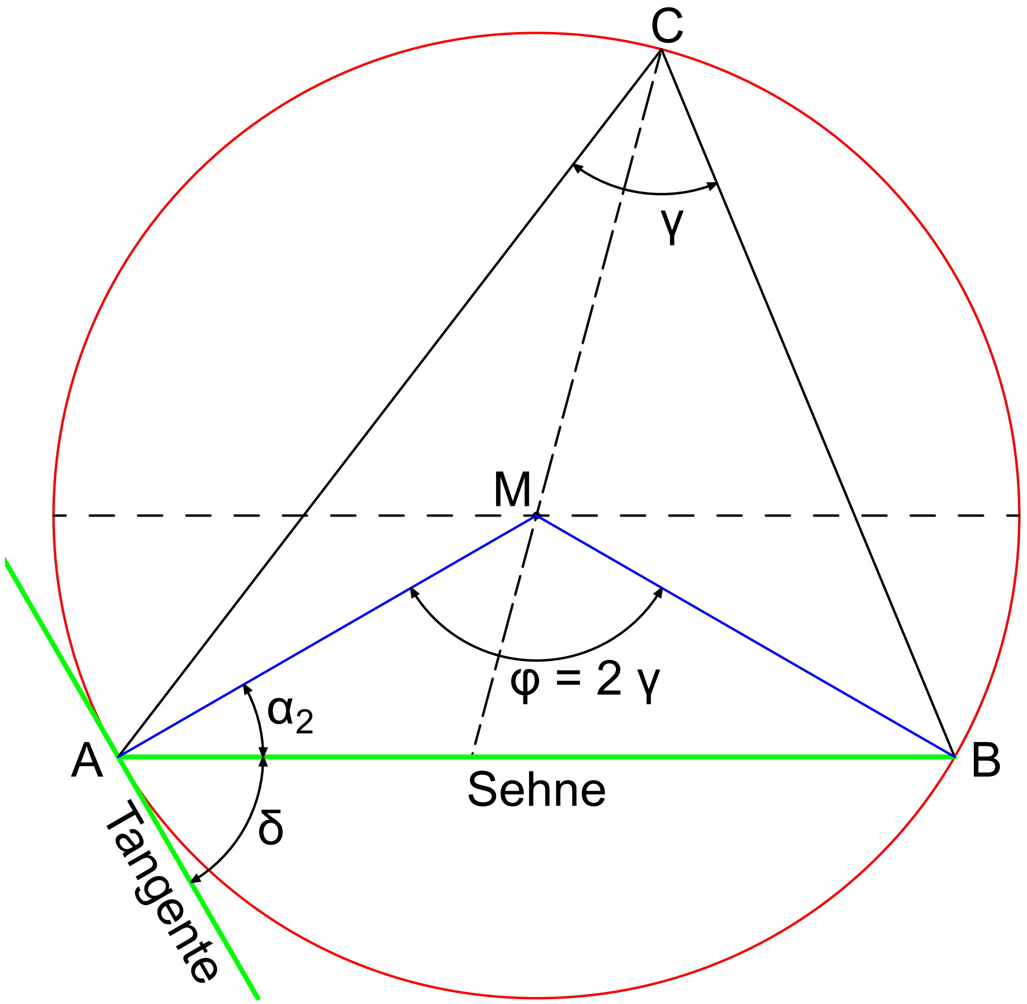
Sehnentangentenwinkelsatz:

Da $\triangle ABM$ gleichschenklig ist gilt:

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$$

Zusammen mit $\alpha_2 + \delta = 90^\circ$ folgt:

$$\delta = 90^\circ - \alpha_2 = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$$



Clemens Weber

Sehnen-Tangenten-Satz

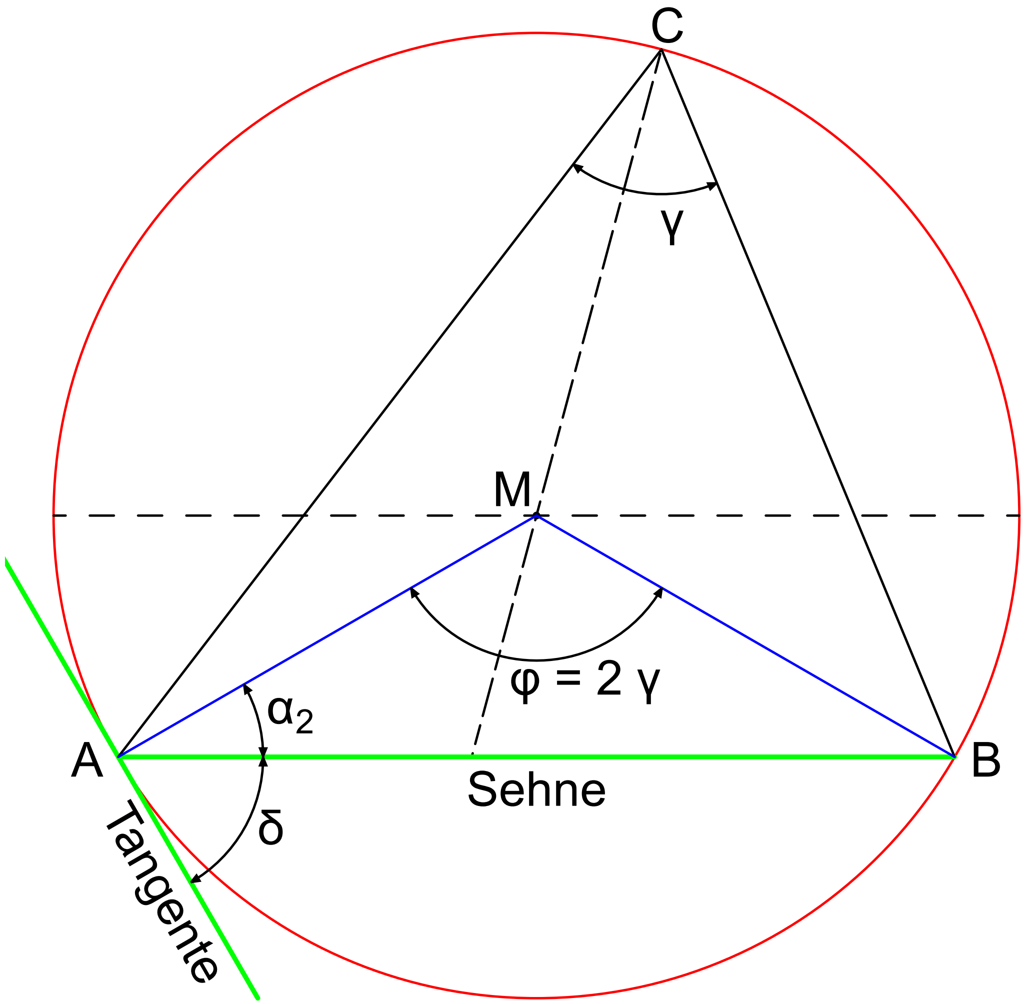
Sehnentangentenwinkelsatz:

Da $\triangle ABM$ gleichschenklig ist gilt:

$$\alpha_2 = \frac{180° - 2\gamma}{2} = 90° - \gamma$$

Zusammen mit $\alpha_2 + \delta = 90°$ folgt:

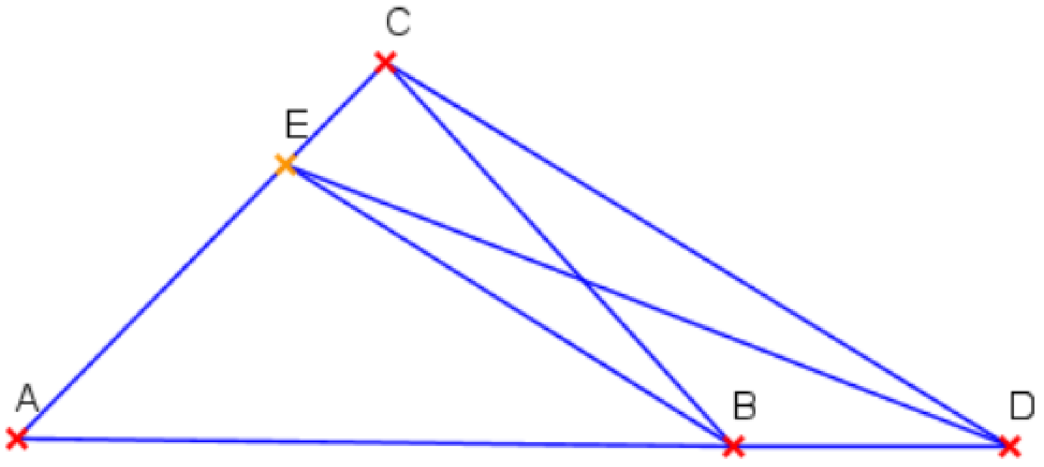
$$\delta = 90° - \alpha_2 = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$$



Übungsaufgaben_für_Mathematiktest_Sep_2016

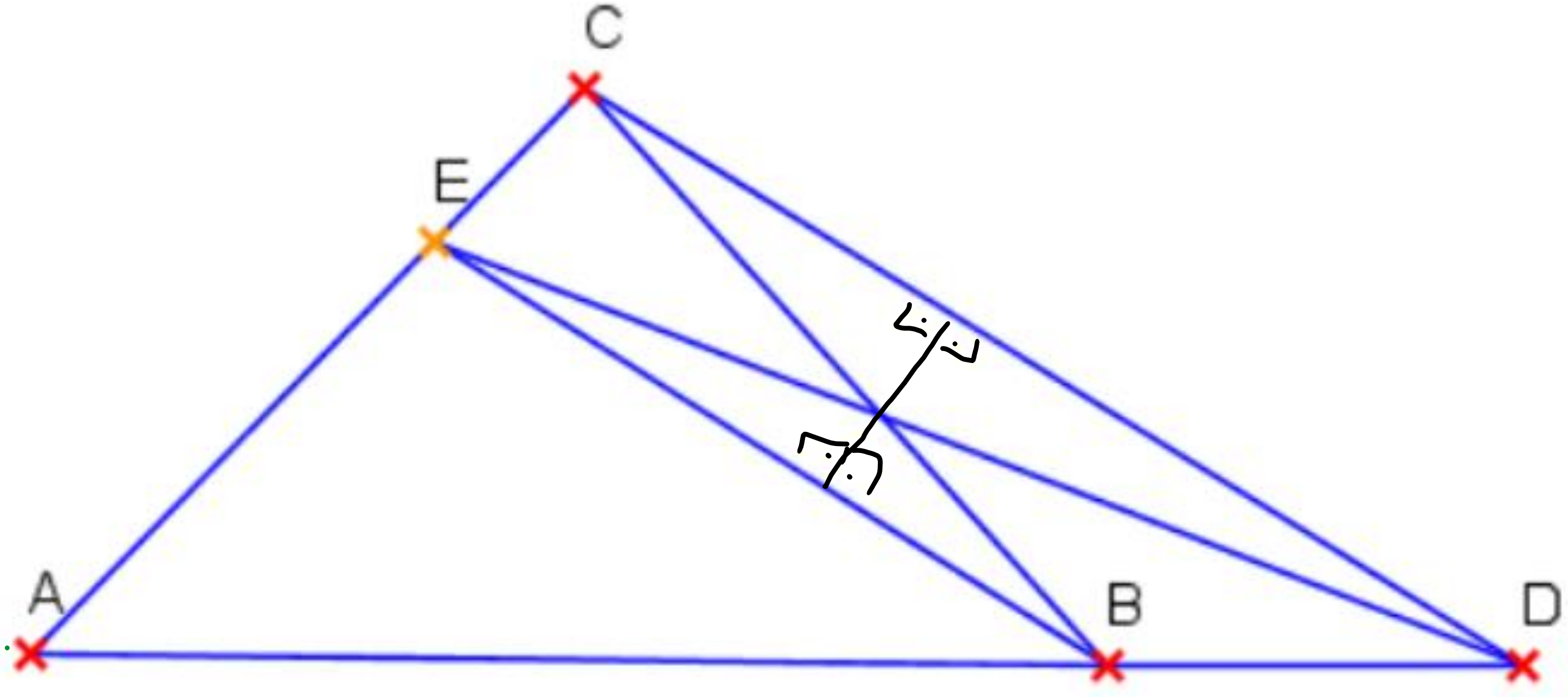
10 Aufgaben zur Geometrie:

10.1. Beweisen Sie, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta\ ABC$ und $\Delta\ ADE$ gleich sind.

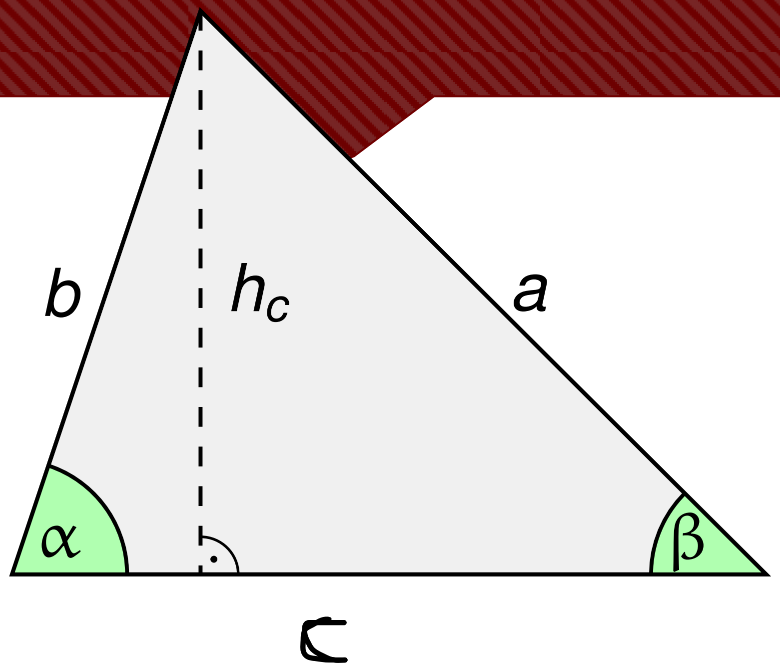


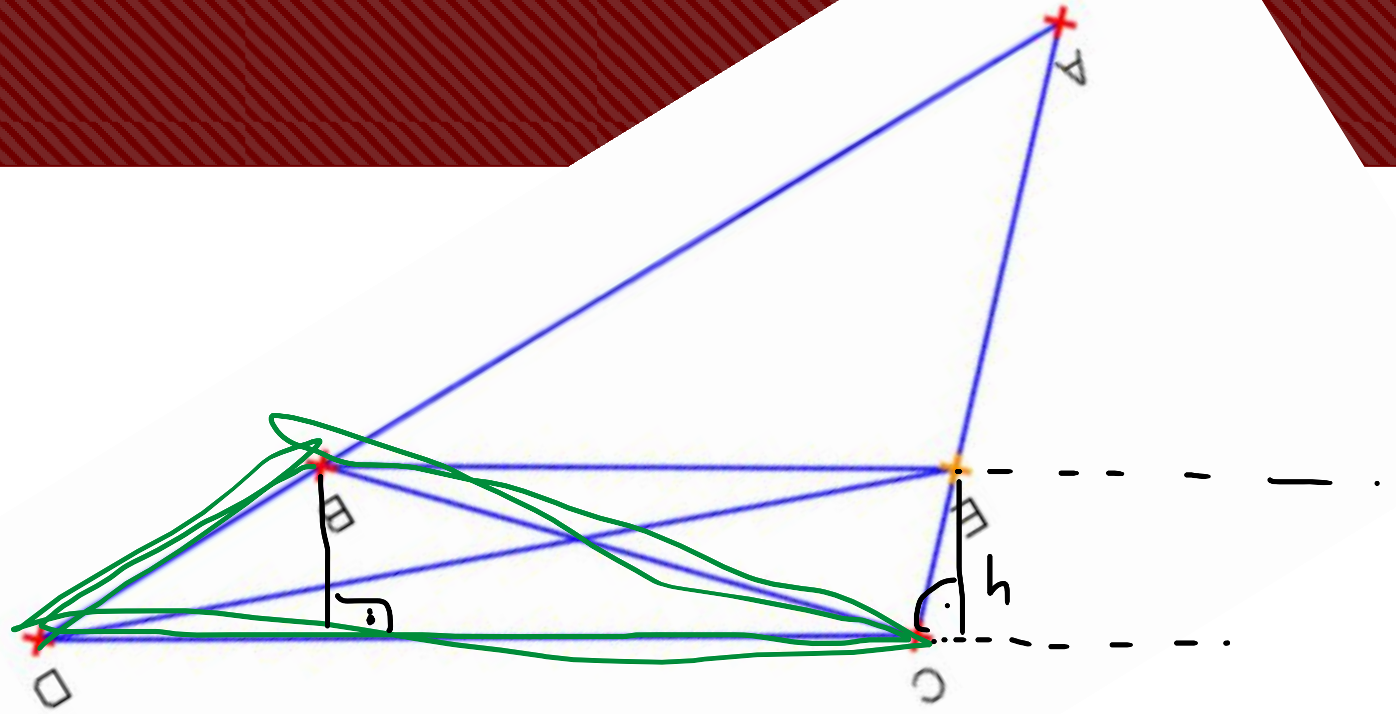
Die Strecken $[EB]$ und $[CD]$ sind parallel.

- Suche nach Symmetrien und gleichen Formen
- Konstruiere Rechtwinklige Dreiecke
- Welche Aussage beweist meine Anforderung?



Zeige $\Delta ECD = \Delta \mathrm{BDC}$



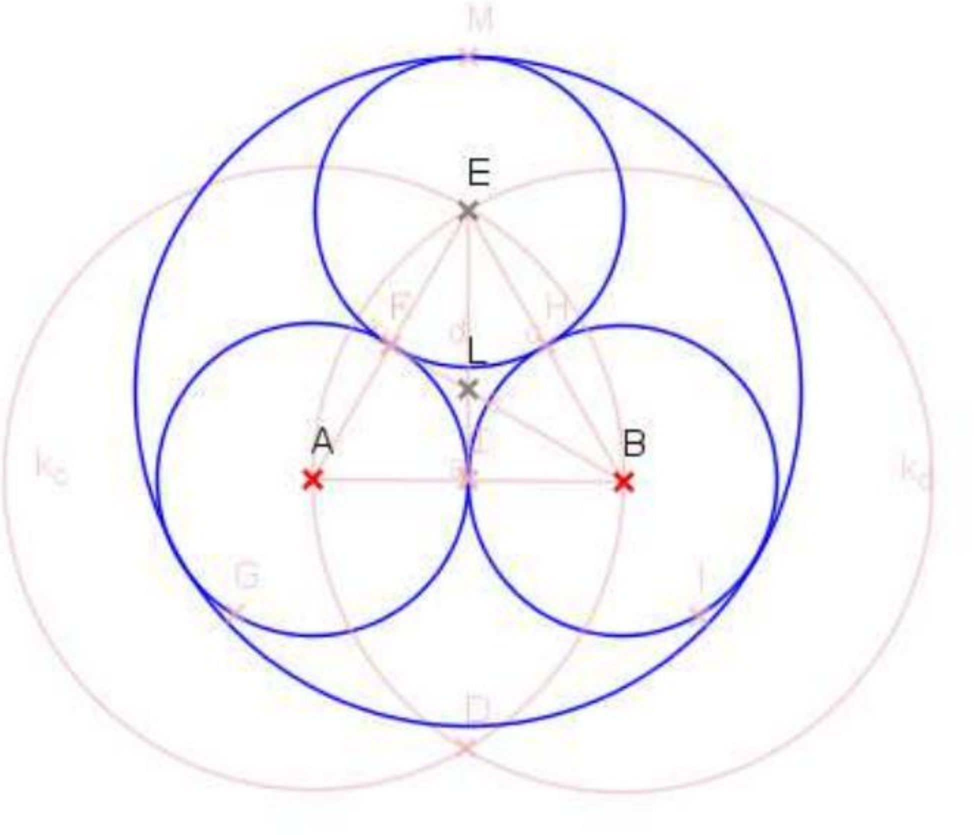


Fläche Dreieck = ½ *c*h

Zeige $\Delta ECD = \Delta \mathrm{BDC}$

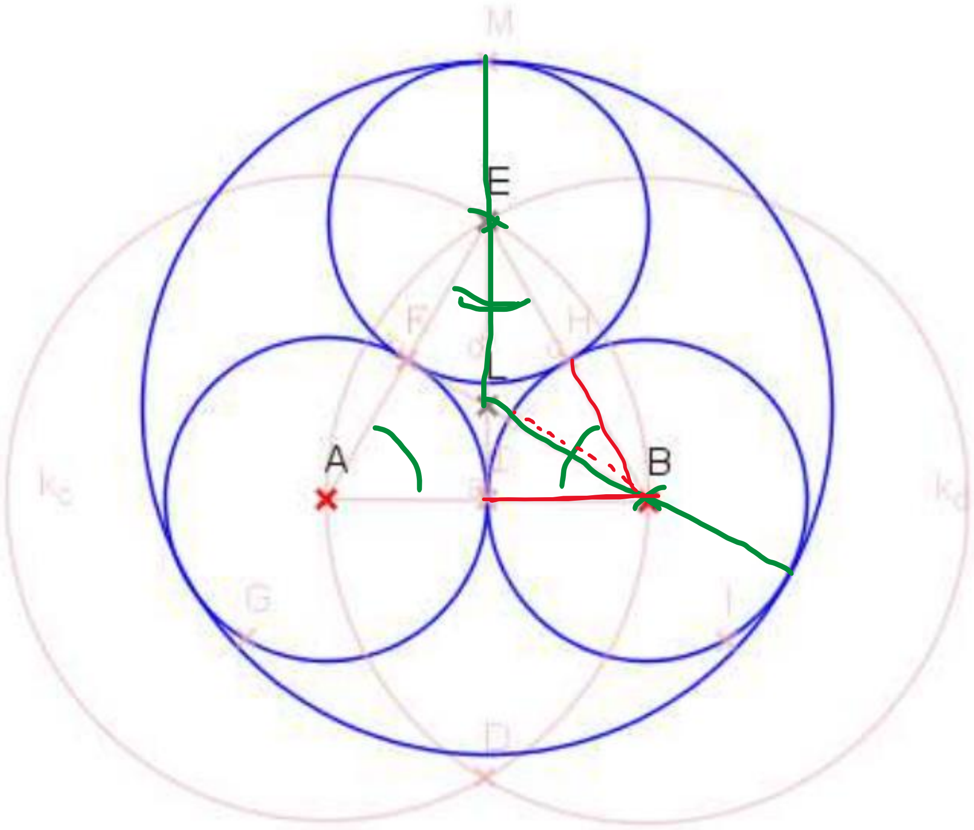
Übungsaufgaben_für_Mathematiktest_Sep_2016

10.2 Einem Kreis mit dem Mittelpunkt L und dem Radius R= 10 cm sind drei kleinere Kreise mit den Radien r einbeschrieben. Berechnen Sie den Radius r der kleineren Kreise.



- Was ist gesucht, was ist gegeben?
- Wo kann ich Rechtwinklige Dreiecke konstuieren (die ich kenne)?
- Beziehungen als Gleichung ausdrücken.

10.2 Einem Kreis mit dem Mittelpunkt L und dem Radius R= 10 cm sind drei kleinere Kreise mit den Radien r einbeschrieben. Berechnen Sie den Radius r der kleineren Kreise.

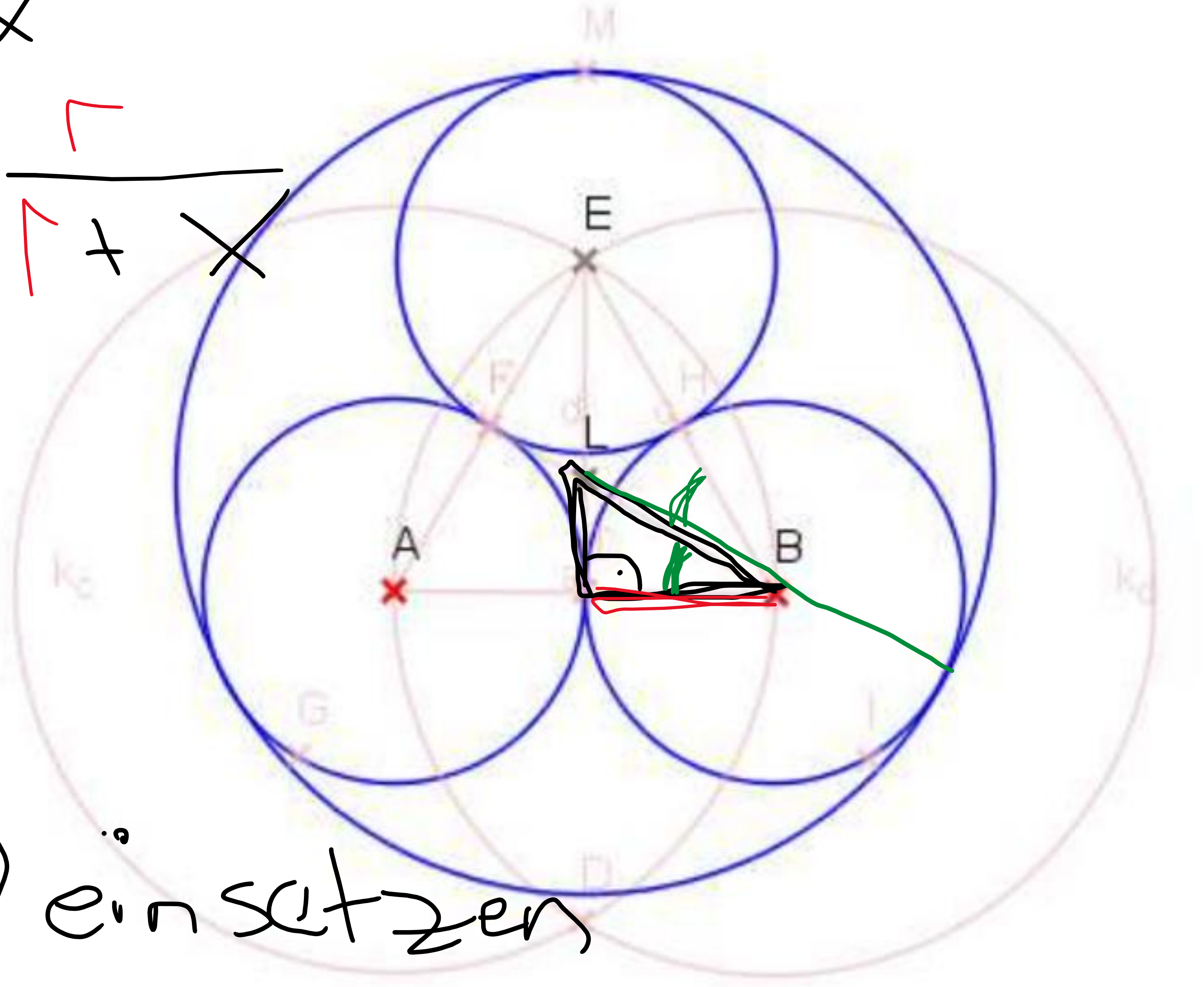


- Was ist gesucht, was ist gegeben?
- Wo kann ich Rechtwinklige Dreiecke konstuieren (die ich kenne)?
- Beziehungen als Gleichung ausdrücken.

△ GLEICHSEITIG $\Rightarrow \forall \measuredangle = 60°$

1) $R = 2r + x$

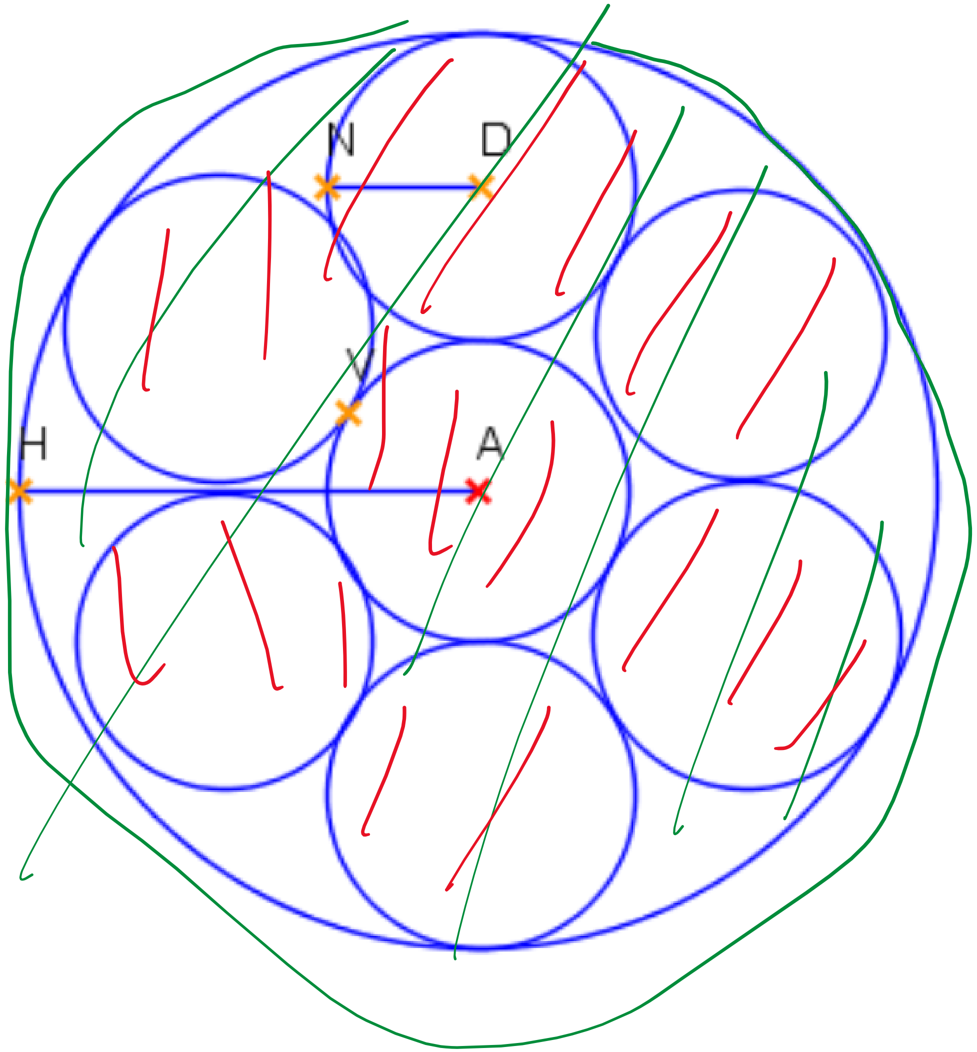
1) $\cos(30°) = \frac{r}{r + x}$



2) Nach x auflösen

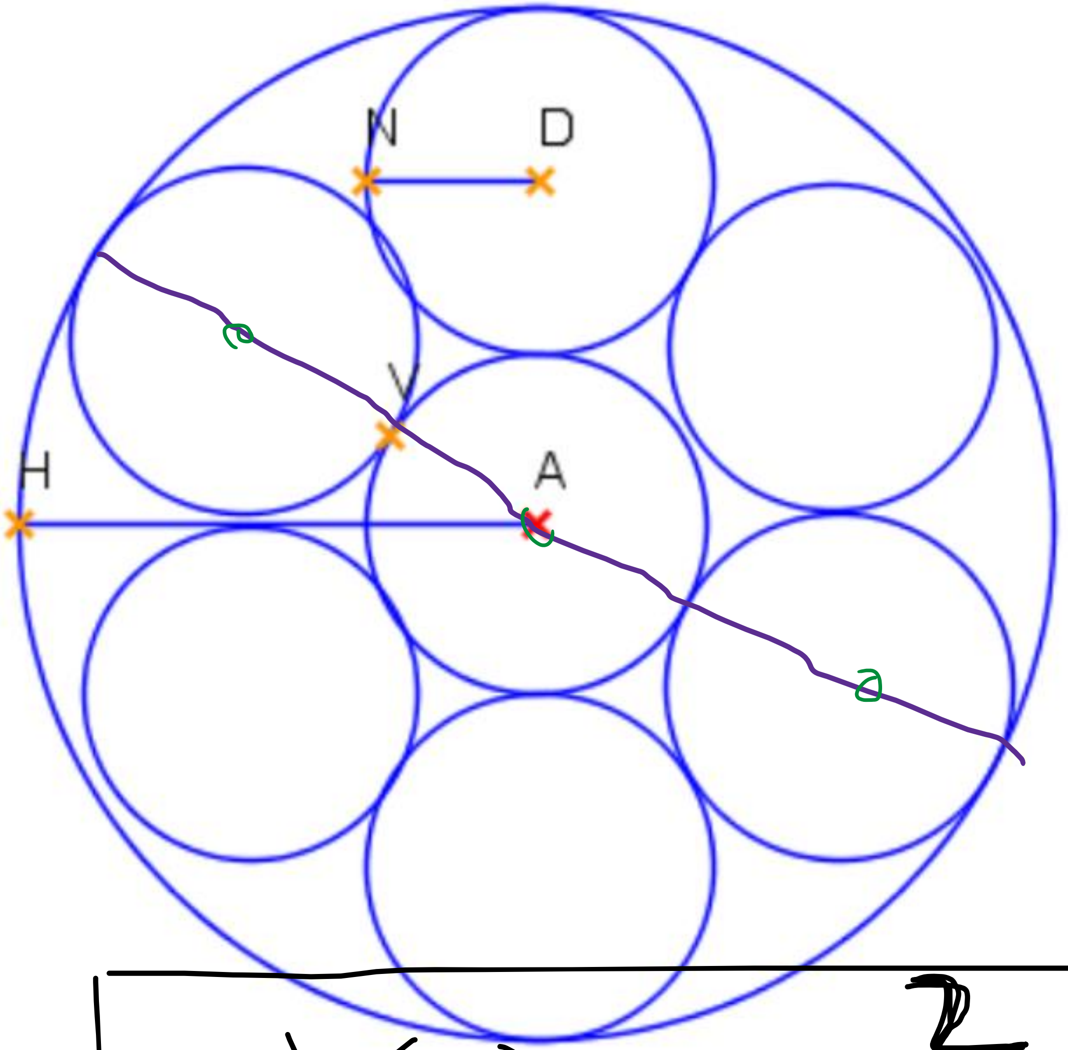
$\Rightarrow$ x in 1) einsetzen

10.3 Einem Kreis mit Radius $R = \overline{AH}$ sind 7 Kreise mit gleichem Radius $r = \overline{DN}$ so einbeschrieben, dass sich die Kreise berühren. Welcher Teil der Fläche des großen Kreises wird von den 7 kleinen Kreisen bedeckt?



- Was ist gesucht, was ist gegeben?
- Beziehungen als Gleichung ausdrücken.

[redacted]



[redacted]

$1 \cdot \bigcirc \qquad 1 \cdot \pi \cdot (6r)^2$

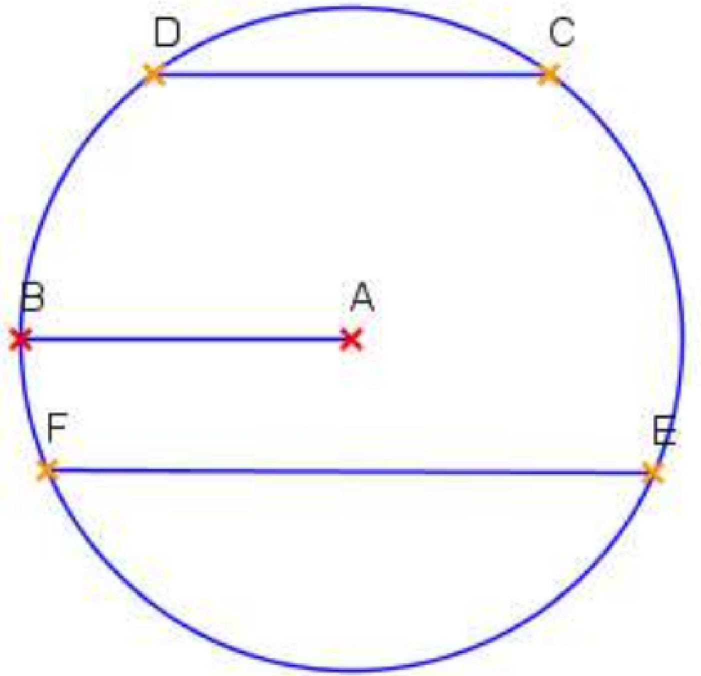
$= \frac{7}{36}$

$$\boxed{A(\bigcirc) = \pi r^2}$$

Übungsaufgaben_für_Mathematiktest_Sep_2016

10.4 Es soll der Abstand zweier paralleler Sehnen in einem Kreis mit Radius $r = \overline{AB} = 65$ cm berechnet werden. Die Sehnenlängen sind $s_1 = \overline{CD} = 112$ cm und $s_2 = \overline{EF} = 126$ cm.

- Beschrifte was gegeben und was Gesucht ist!
- Konstruiere rechtwinklige Dreiecke mit bekannten Beziehungen!
- Wende den Satz des Pythagoras an.



$$h_1^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 - r^2$$

$$h_2^2 = \left(\frac{EF}{2}\right)^2 - r^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$= \sqrt{256}$$

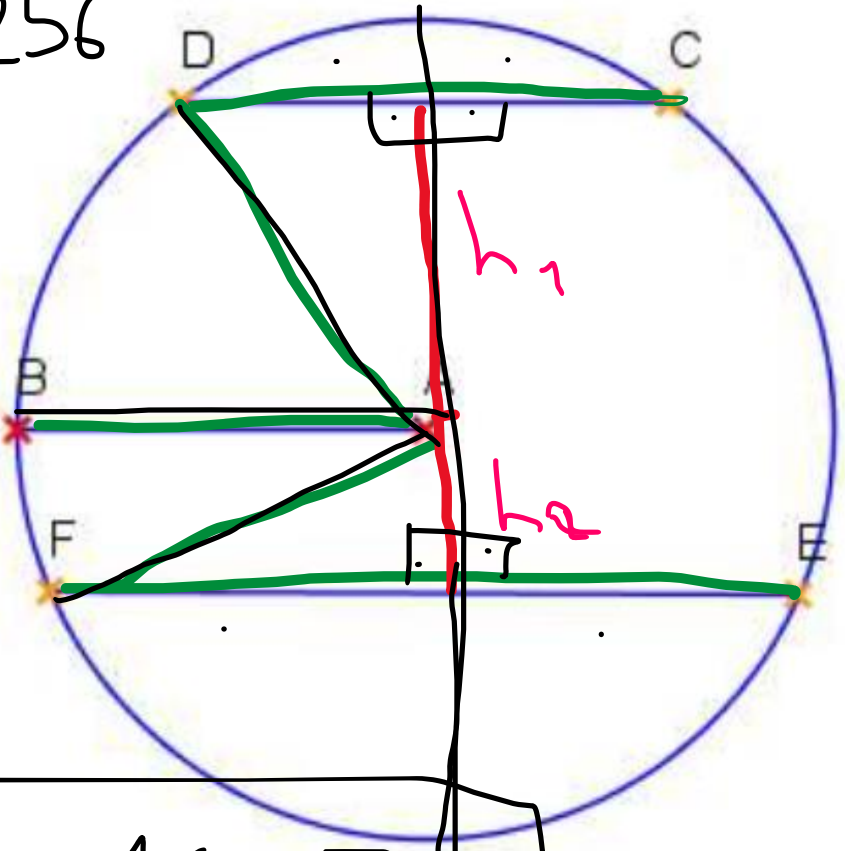
$$= \sqrt{4 \cdot 64}$$

$$= 2 \cdot 8$$

$$= \sqrt{1089}$$

$$= \sqrt{9 \cdot 121}$$

$$= 3 \cdot 11$$

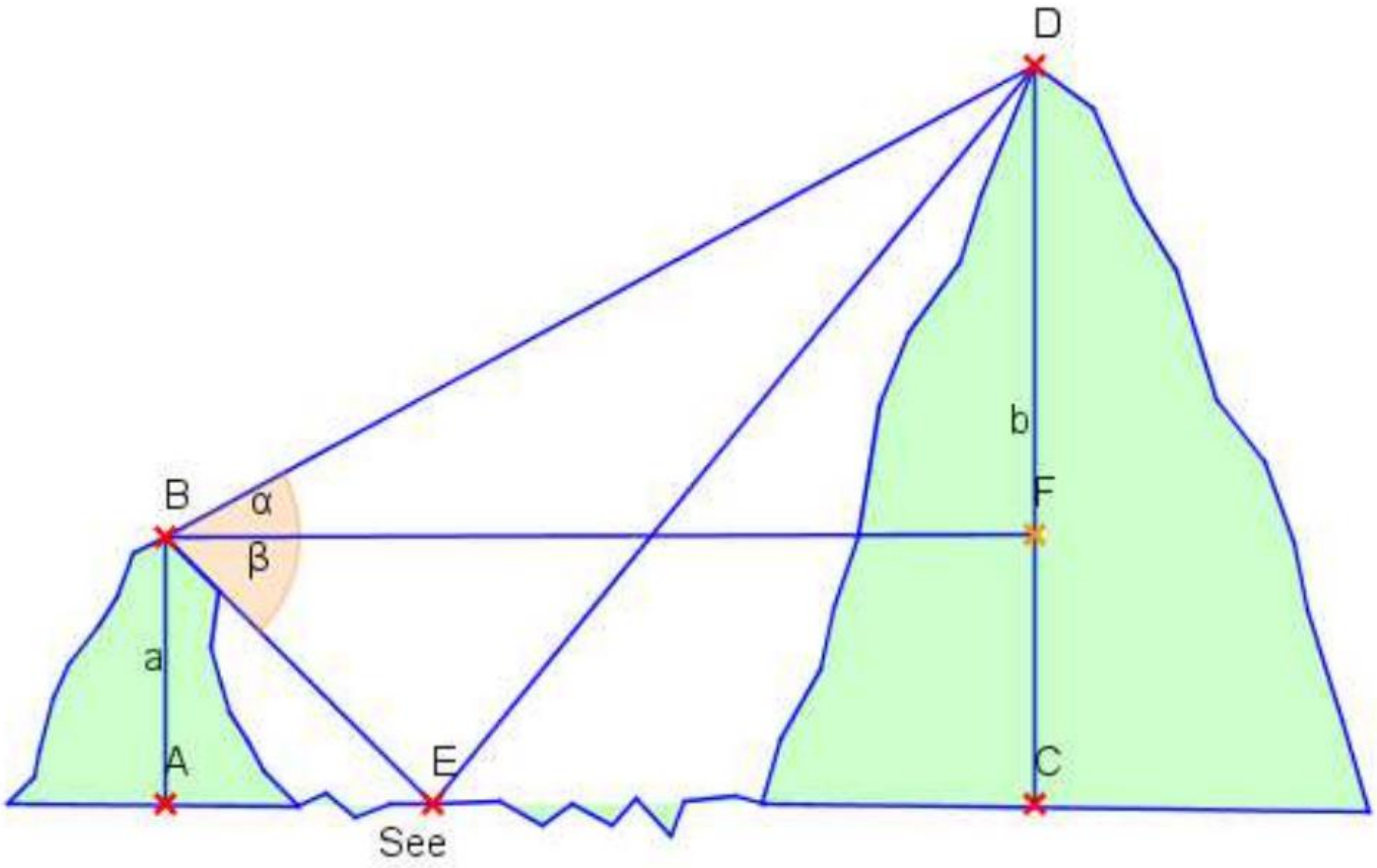


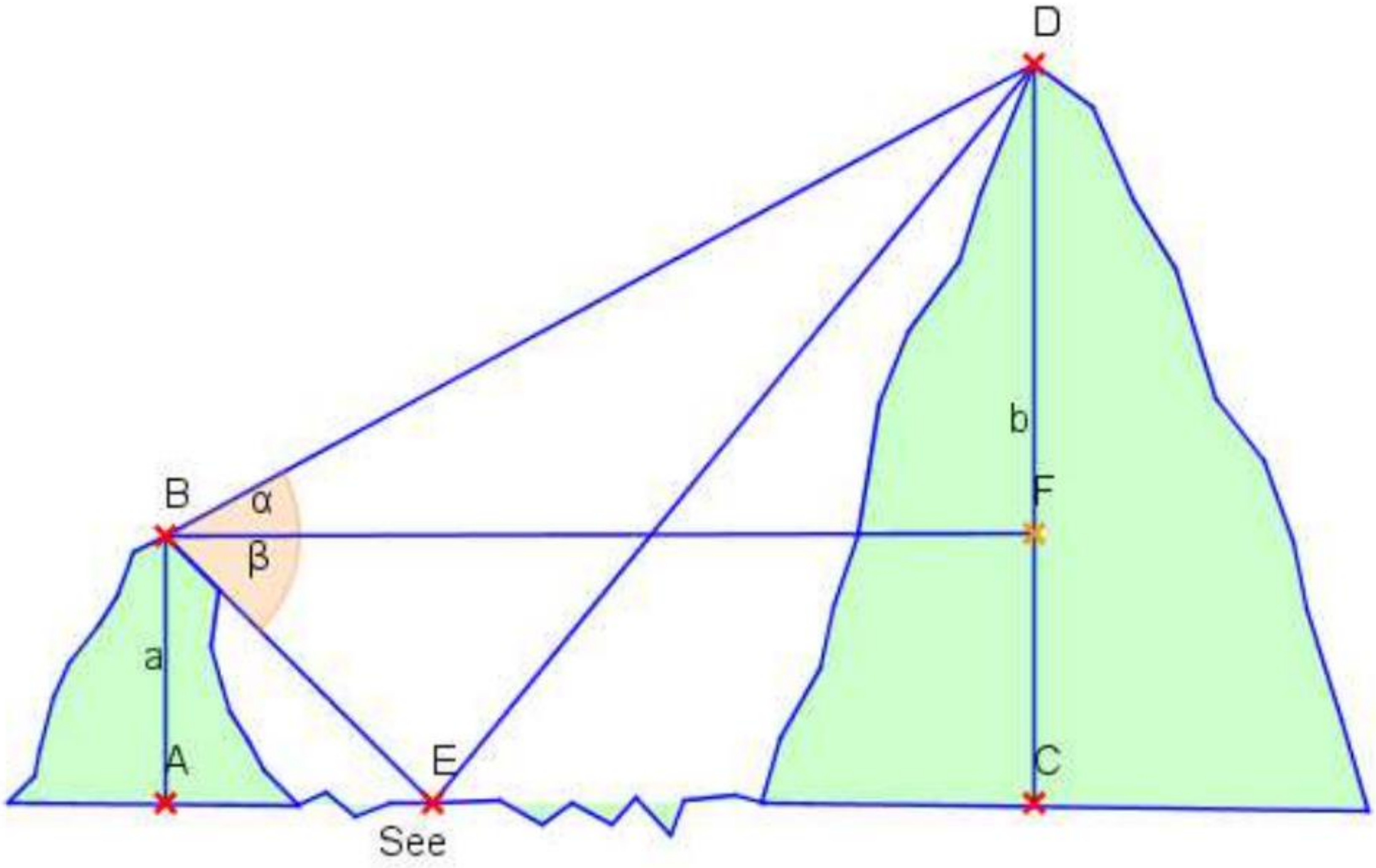
$$\boxed{h = 16 + 33}$$

Eine Zahl ist genau dann durch 3 Teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist?

10.5 Von einem Punkt B eines Berges sieht man den Gipfel D eines zweiten Berges unter dem Winkel α. Der Punkt B liegt $a = \overline{AB}$ Meter über dem See. Das Spiegelbild E des Gipfels im See sieht man von B unter dem Winkel β.

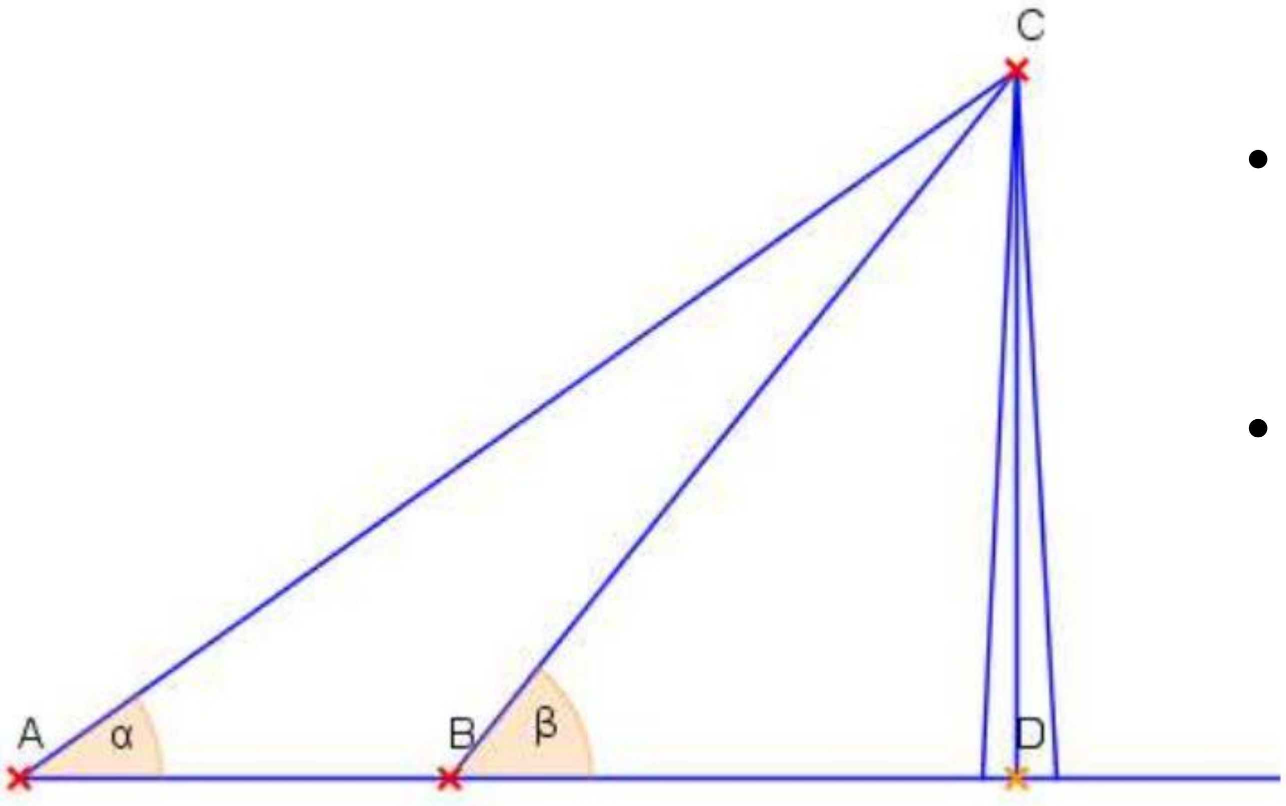
Gesucht ist die Höhe $b = \overline{CD}$ des zweiten Berges in Abhängigkeit von a, α und β.





D
b
F
B
α
β
a
A
E
C
See

10.6 Die Spitze eines Turmes wird von Punkt A aus unter einem Winkel $\alpha = 30°$ gesehen, vom Punkt B aus unter einem Winkel $\beta = 60°$. Die Strecke $\overline{AB} = 80\ m$ lang. Wie hoch ist der Turm? Höhe $h = \overline{CD}$.

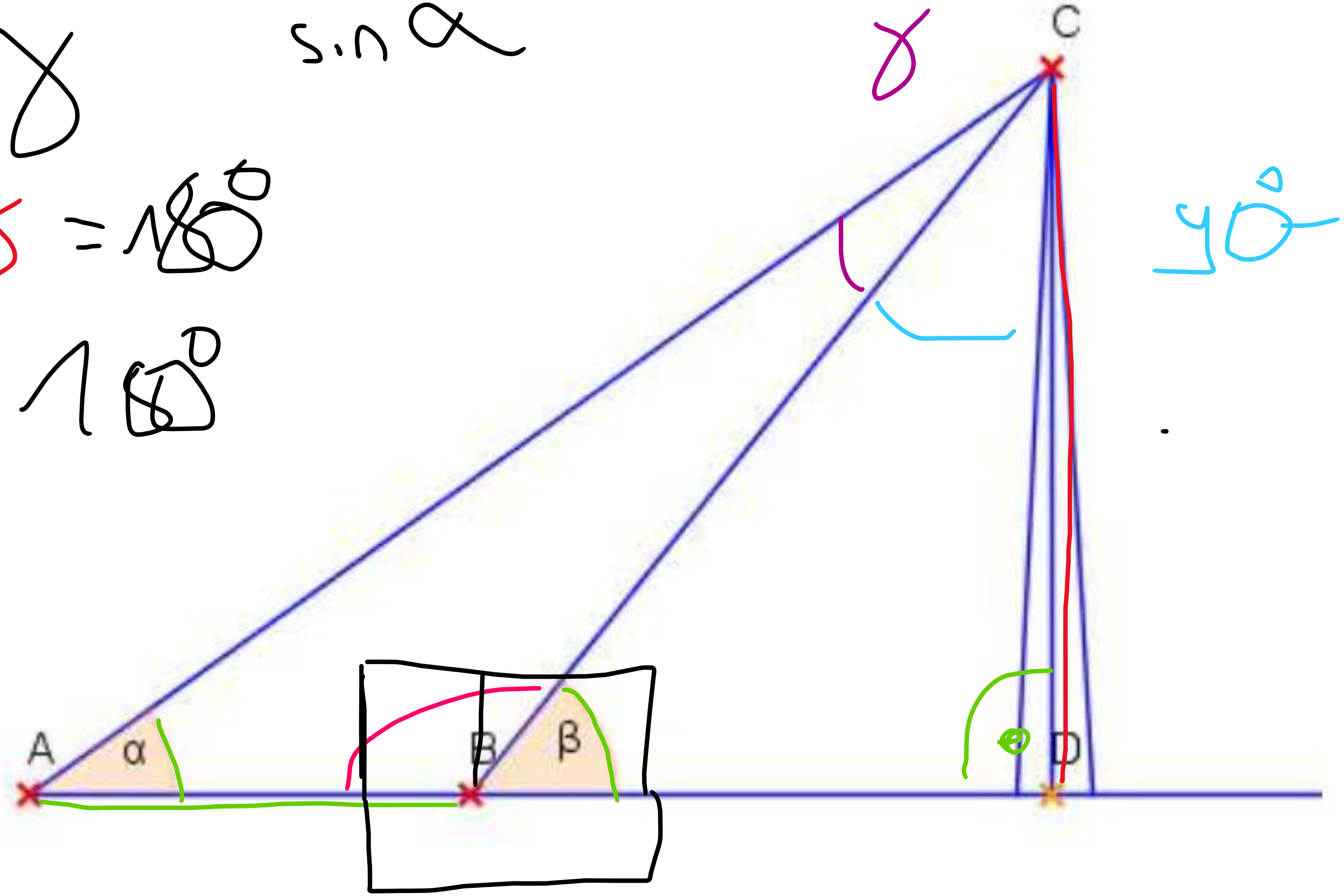


- Was ist gesucht, was ist gegeben?
- Wo kann ich Rechtwinklige Dreiecke konstuieren (die ich kenne)?
- Beziehungen als Gleichung ausdrücken.

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{CD}{\sin\alpha}$$

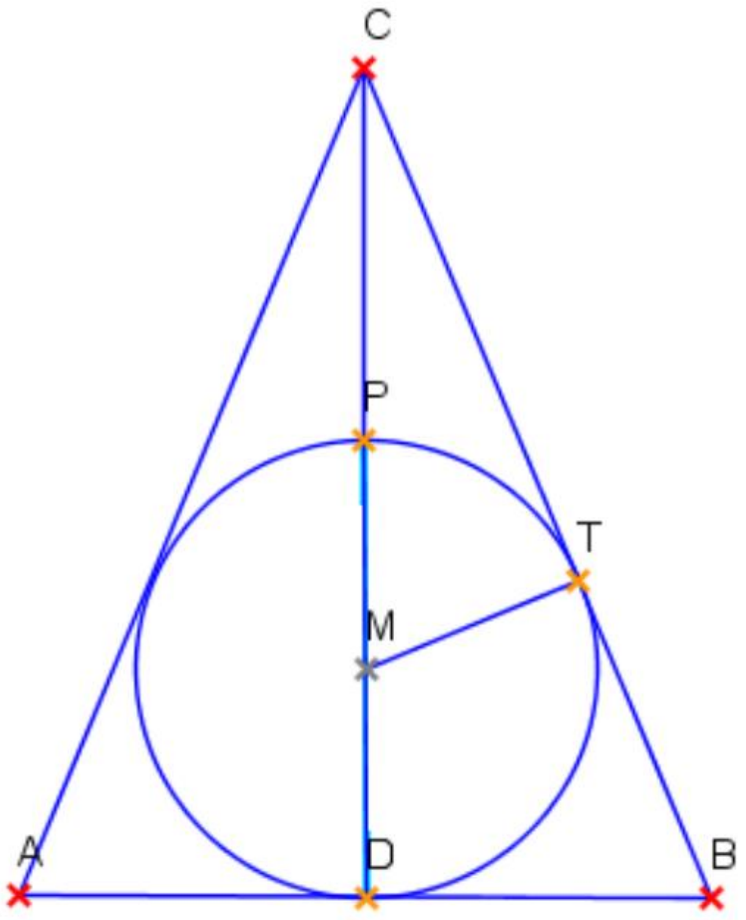
$$\gamma + \alpha + \cancel{\measuredangle} = 180^\circ$$

$$\cancel{\measuredangle} + \beta = 180^\circ$$



10.8 Gegeben: $c = 2\,\overline{AD} = 2\,\overline{DB} = 6\ cm$; $r = \overline{MT} = 2\ cm$; $y = \overline{CP}$;

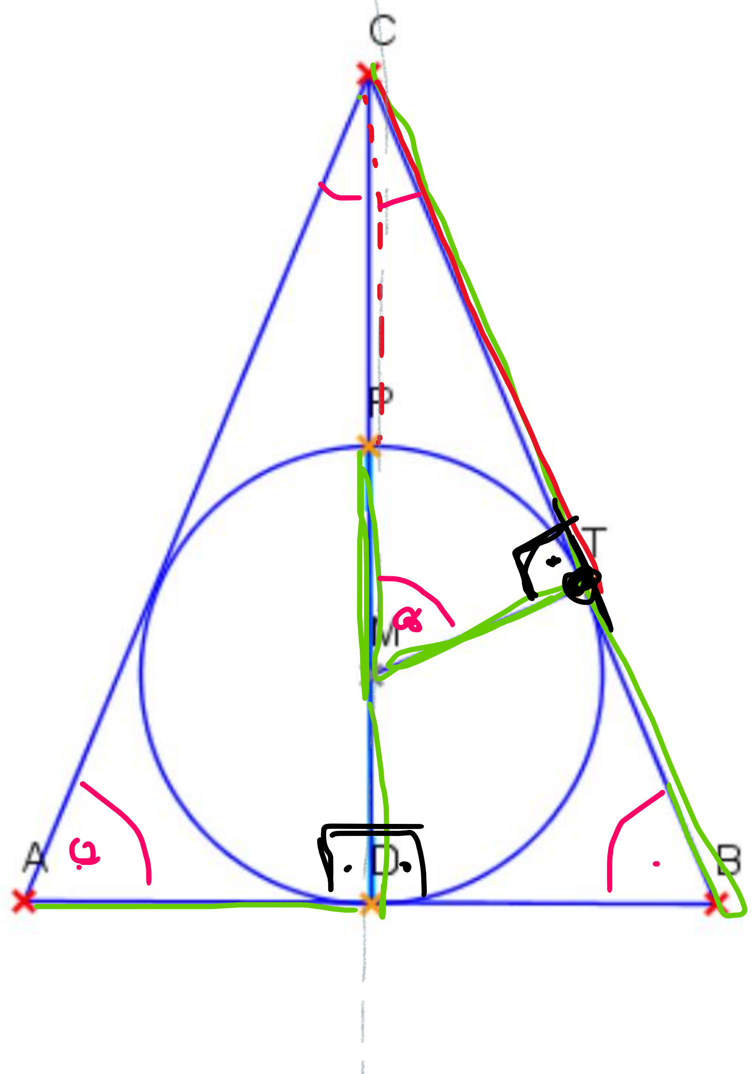
gesucht: $x = \overline{CT}$



- Was ist gegeben und was ist gesucht?
- Wo liegt Symmetrie vor?
- Welche Dreiecke sind ähnlich?

(haben die gleichen Winkel zu Seiten Beziehungen)

10.8 Gegeben: $c = 2\,\overline{AD} = 2\,\overline{DB} = 6\ cm$; $r = \overline{MT} = 2\ cm$; $y = \overline{CP}$;
gesucht: $x = \overline{CT}$

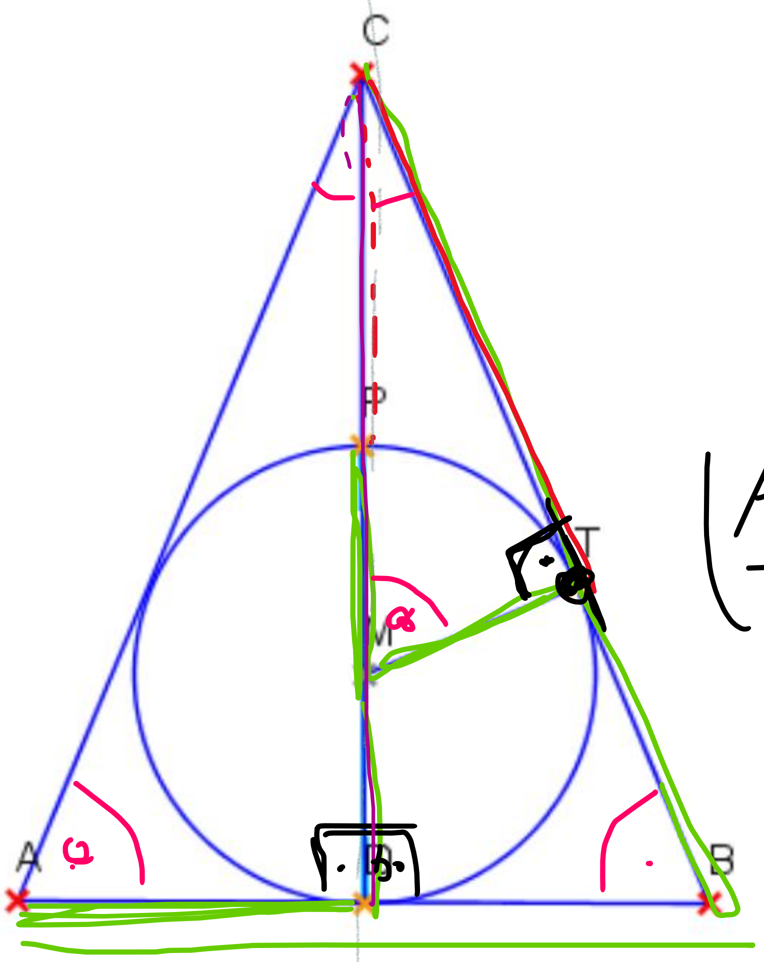


- Was ist gegeben und was ist gesucht?
- Wo liegt Symmetrie vor?
- Welche Dreiecke sind ähnlich?

(haben die gleichen Winkel zu Seiten Beziehungen)

10.8 Gegeben: $c = 2\,\overline{AD} = 2\,\overline{DB} = 6\ cm$; $r = \overline{MT} = 2\ cm$; $y = \overline{CP}$;

gesucht: $x = \overline{CT}$

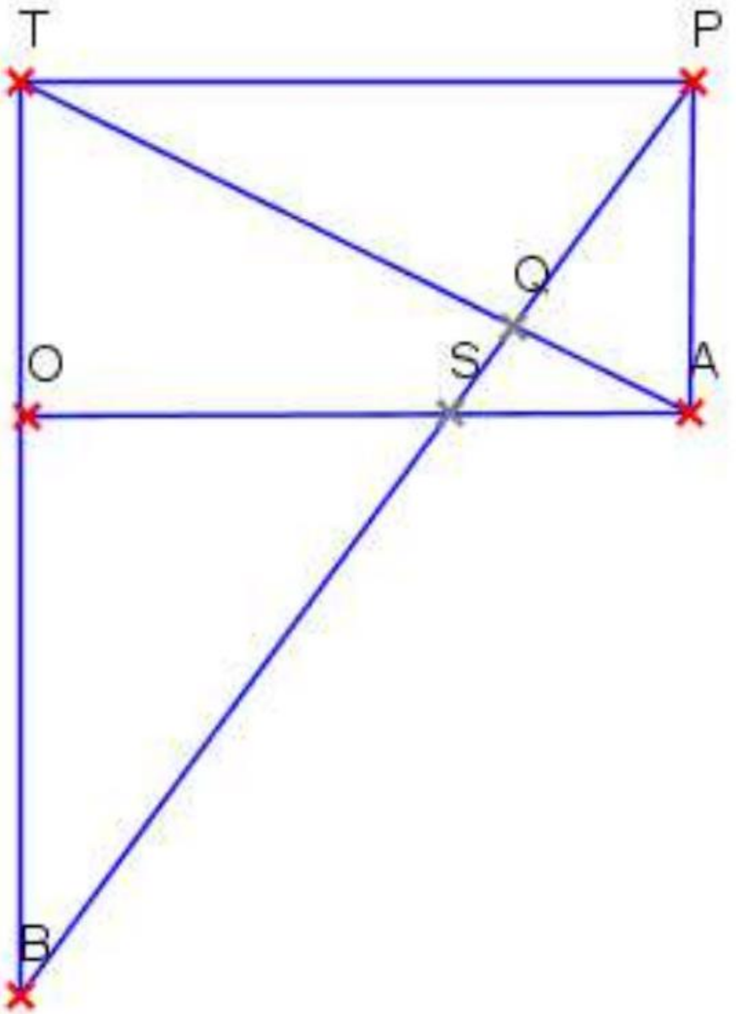


$\sin \gamma = \frac{\overline{MT}}{\overline{CT}}$

$\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$

10.9 Gegeben ist das Rechteck $OAPT$ mit $a = \overline{SA}$; $b = \overline{BT} = 4a$ und $BP \perp AT$;

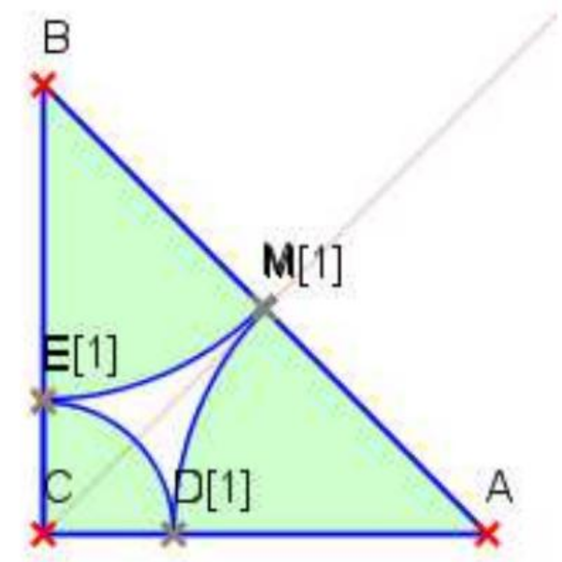
gesucht: $x = \overline{OA}$; $y = \overline{OT}$



- Zeiche die Gegebenen Seiten und Winkel ein!
- Beschrifte was Gesucht ist.
- Welche Dreiecke sind ähnlich? (haben die gleichen Winkel zu Seiten Beziehungen)

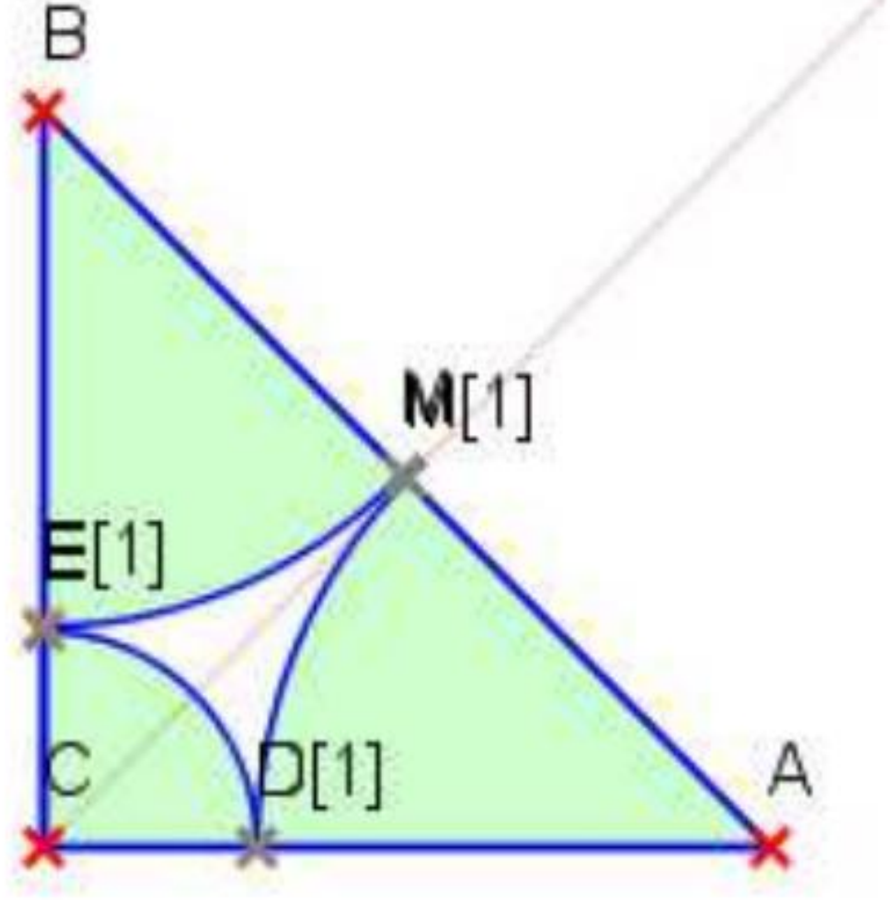
Studienkolleg bei den Universitäten des Freistaates Bayern Aufnahmeprüfung 2016

10. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Die Schenkel sind $\overline{AC} = \overline{CB} = r$ cm lang. M[1] ist der Mittelpunkt der Strecke [AB]. Die drei Kreisbögen haben die Mittelpunkte A, B und C und berühren sich auf den Dreiecksseiten in den Punkten D[1], E[1] und M[1]. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks D[1]E[1]M[1] in der Mitte des Dreiecks in Abhängigkeit von r, das von den Kreisbögen begrenzt wird. Siehe Skizze!



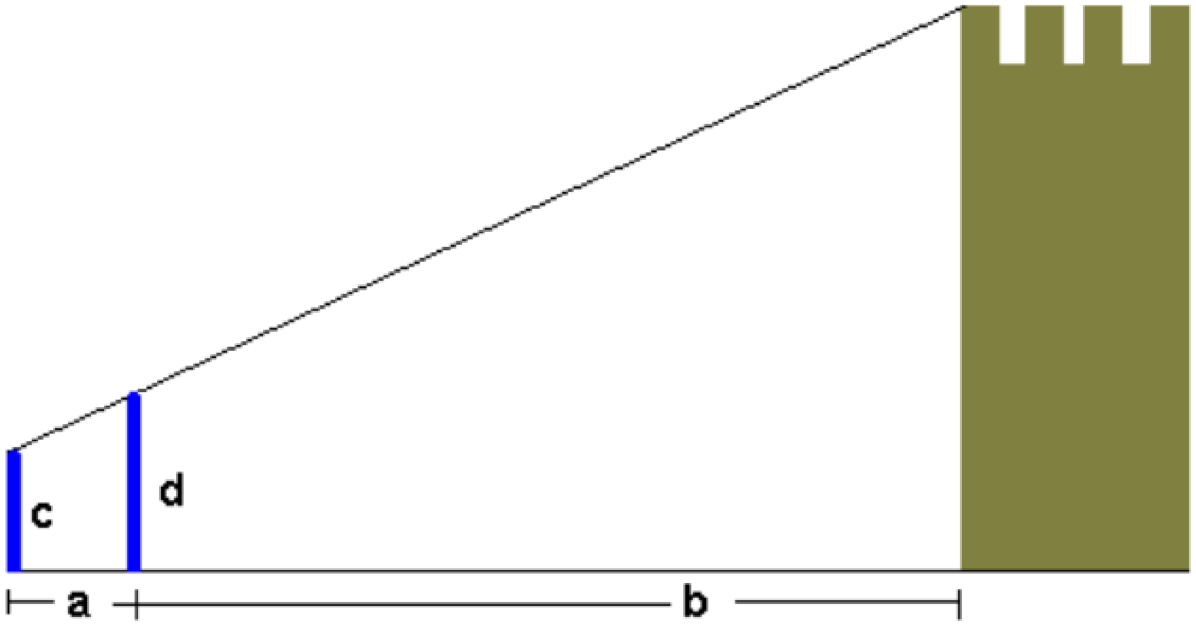
- Welche informationen Sind gegeben, was ist gesucht, zeichene entsprechend in die Skizze!
- Zeichne eine Vereinfachte Skizze!
- Selle einen Zusammenhang zwischen gegeben und gesuchten her.

10. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig. Die Schenkel sind $\overline{AC} = \overline{CB} = r$ cm lang. M[1] ist der Mittelpunkt der Strecke [AB]. Die drei Kreisbögen haben die Mittelpunkte A, B und C und berühren sich auf den Dreiecksseiten in den Punkten D[1], E[1] und M[1]. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks D[1]E[1]M[1] in der Mitte des Dreiecks in Abhängigkeit von r, das von den Kreisbögen begrenzt wird. Siehe Skizze!

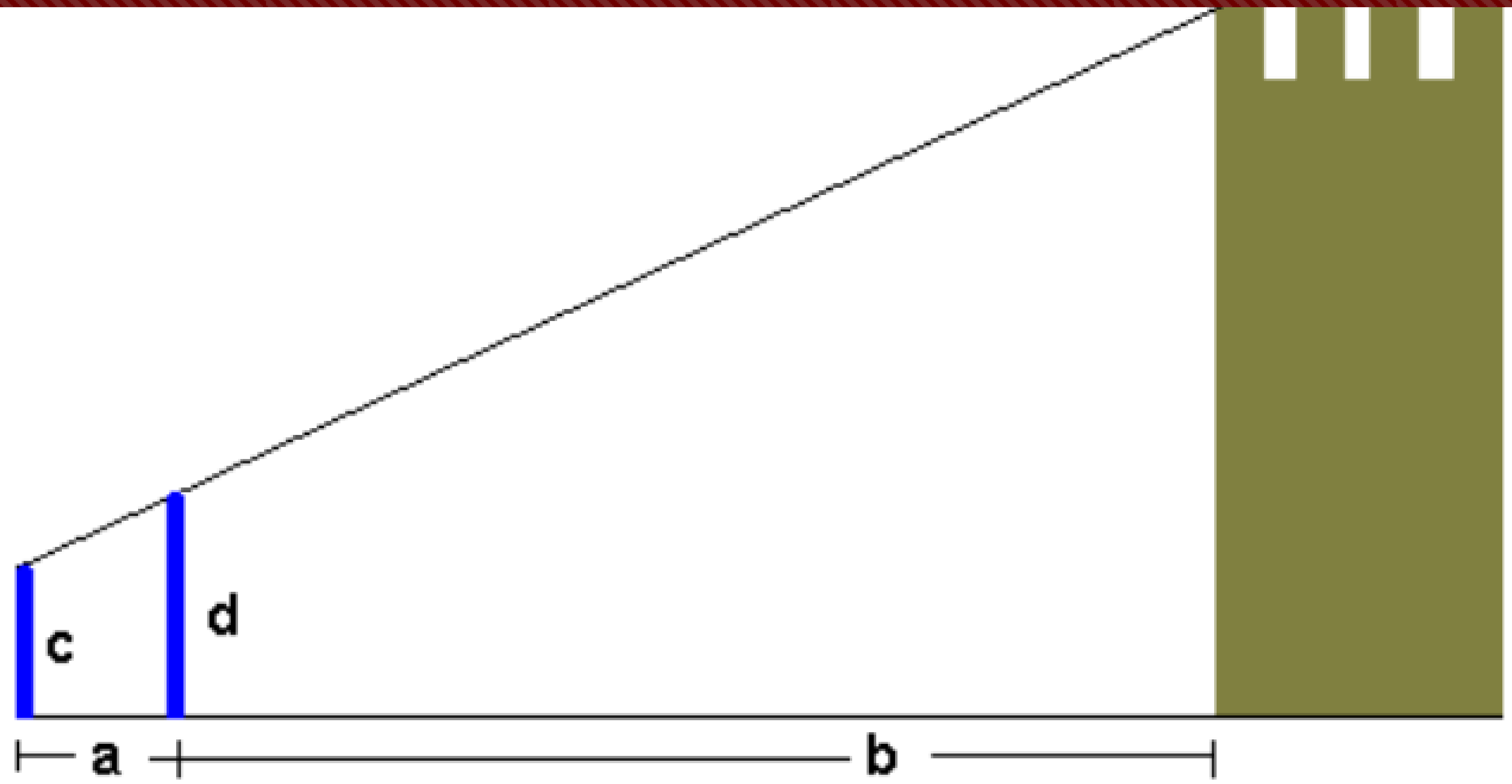


- Welche Informationen Sind gegeben, was ist gesucht, zeichne entsprechend in die Skizze!
- Zeichne eine Vereinfachte Skizze!
- Selle einen Zusammenhang zwischen gegeben und gesuchten her.

11. Es soll die Höhe des abgebildeten Turms ermittelt werden. Hierzu werden zwei Stäbe so aufgestellt, dass sie beide senkrecht stehen und dass man über ihre oberen Enden die Turmspitzen anpeilen kann. Die beiden Stäbe sind 1,80 m bzw. 2,30 m lang. Welche Turmhöhe ergibt sich, wenn folgende Messungen durchgeführt wurden:
a=2 m; b=106 m. Stellen Sie zuerst eine Formel für die Höhe h in Abhängigkeit von a, b, c und d auf und berechnen Sie dann ohne Taschenrechner die Höhe h.



- Wo befinden sich Rechtwinklige Dreiecke?,
- Wie kann ich die Aufgabe vereinfachen?


c
d
a
b

Übungsaufgaben:

- https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck
- https://de.serlo.org/mathe/55261/aufgaben-zu-volumenberechnung
- https://de.serlo.org/mathe/55248/aufgaben-zu-flächen-von-dreiecken-und-vierecken
- https://de.serlo.org/mathe/55245/aufgaben-zur-satzgruppe-des-pythagoras

- https://www.maths2mind.com/schluesselwoerter/graph-einer-funktion

Lösungs-Ansatz

- Zeichne eine eigene Skizze der Aufgabe(finde symmetrie)
- Zeichne Rechte Winkel ein
- Markiere gleiche Winkel farbig
- Welche Dreiecke sind ähnlich zueinander
- Mache dich mit den Gegebenen und Gesuchten vertraut
- Drücke Gesuchtes als Gleichung aus (oft gibt es zwei die man gleich setzen muss)
- Nutze was du hast (Symmetrie, Rechtwinklige Dreiecke, Sinussatz, Flächenformeln, Strahlensätze,...)