Trigometrie:

n) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$ Wertetabelle

Werte $60°$ & $120°$

$\boxed{\sin^2 x \text{ \& } \cos^2 x \text{ sind } \pi\text{-periodisch}}$

⇒ Die Lösungen tauchen im Abstand von π immer wieder auf.

$$x \in \left\{ 2\pi \frac{60°}{360°} \cdot k\pi \, ; \, 2\pi \frac{120°}{360°} \cdot k\pi \right\}$$

$$x \in \left\{ \frac{1}{3}\pi \cdot k\pi \, ; \, \frac{2}{3}\pi \cdot k\pi \right\}, \, k \in \mathbb{Z}$$

a) $x + y = \frac{2}{3}\pi \iff x = \frac{2}{3}\pi - y$

$\sin(x) + \sin(y) = 3/2$ Wertetabelle

oder $x + y = 120^\circ$

Ein sinus $= 1$ der andere $1/2$

$1 + 1/2 = 3/2$

$x = 30^\circ \quad y = 90^\circ$

oder

$y = 30^\circ \quad x = 90^\circ$

p)

$$\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2(1 - \sin^2 x) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$$

(statt x steht nun hier $\frac{x}{2}$)

p) $\Rightarrow$ $1 - \cos(x) = 1 - \cos(x)$ <u>Identität</u>

gilt für alle x

9) $\sin x \cdot \tan x = 1 + \cos x$; $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \pi \right\}$

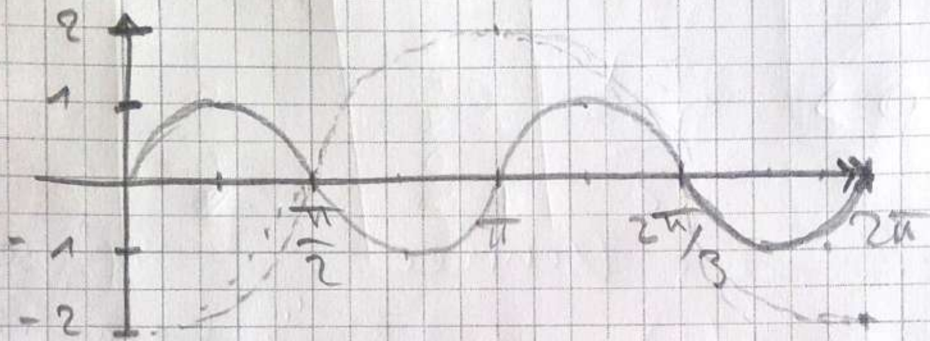
keine sinnvolle vereinfachung.

Arbeite mit der Wertetabelle

& probiere Lösungen aus.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{\sin^2 x}{\cos x} =$	$(1 + \cos x) > 0$
0	0	1		0	2
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$		$1/4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$	$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$		$1/2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$		$\frac{3}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \frac{2}{1}$	$1 + 1/2$
$\pi/2$	1	0		$-$	
$(\frac{\pi}{2} - \pi)$	$+$	$-$			
π	0	1		$\boxed{< 0}$	> 0
$(\pi - \frac{3\pi}{2})$	$-$	$-$			
$\pi \frac{3}{2}$	-1	0	$\sqrt{3}/2$	$3/2 \cdot \frac{2}{1}$	$1 + 1/2$
$(\frac{3}{2}\pi - 2\pi)$	$-$	$+$	$\sqrt{2}/$		

r) $\sin(2x) = -2\cos x$



Graphische Lösung:

$\mathbb{L} = \{ \pi/2 , \frac{2\pi}{3} \}$

s) $(1+\sin x)\cos x - \cos^2 x = 0$

$\cos x\,(1+\sin x) = \cos^2 x \quad \Big| \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

x_1 für $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2}$

$(1+\sin x) = \cos x$

$1 = \cos x - \sin x$

Wertetabelle $\Rightarrow$ $x = 0° \,;\, 180°$

$C = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi \right\}$

f) $4\sin^2 x + 3\tan^2 x = 2$

$\ \ 1/4 \qquad\qquad 1/3$

Wo gilt $\sin^2 x = 1/4$ & $\tan^2 x = 1/3$

Ihr solltet wissen:

$\sin^2 x$ & $\cos^2 x$ haben Werte $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ die als Lösung auftauchen können.

$\tan^2 x$ hat Werte von $\left\{0, \frac{1}{3}, 1, 3\right\}$ die auftauchen können.

oder

$\tan x$ hat Werte

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	— nicht def.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6};\ \pi + \frac{\pi}{6};\ 2\pi - \frac{\pi}{6}\right\}$

u) $\sin^2 x + 2\tan^2 x = 5/2$

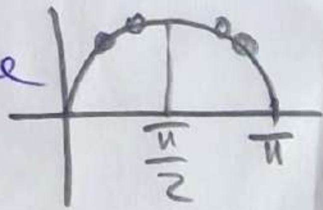
$1/2 \quad + \quad 1 \quad = 5/2$

Vergleiche mit Aufgabe (+):

Wir finden eine Lösung bei $\frac{\pi}{4}$.

$\sin^2 x$ & $\tan^2 x$ sind π-periodisch

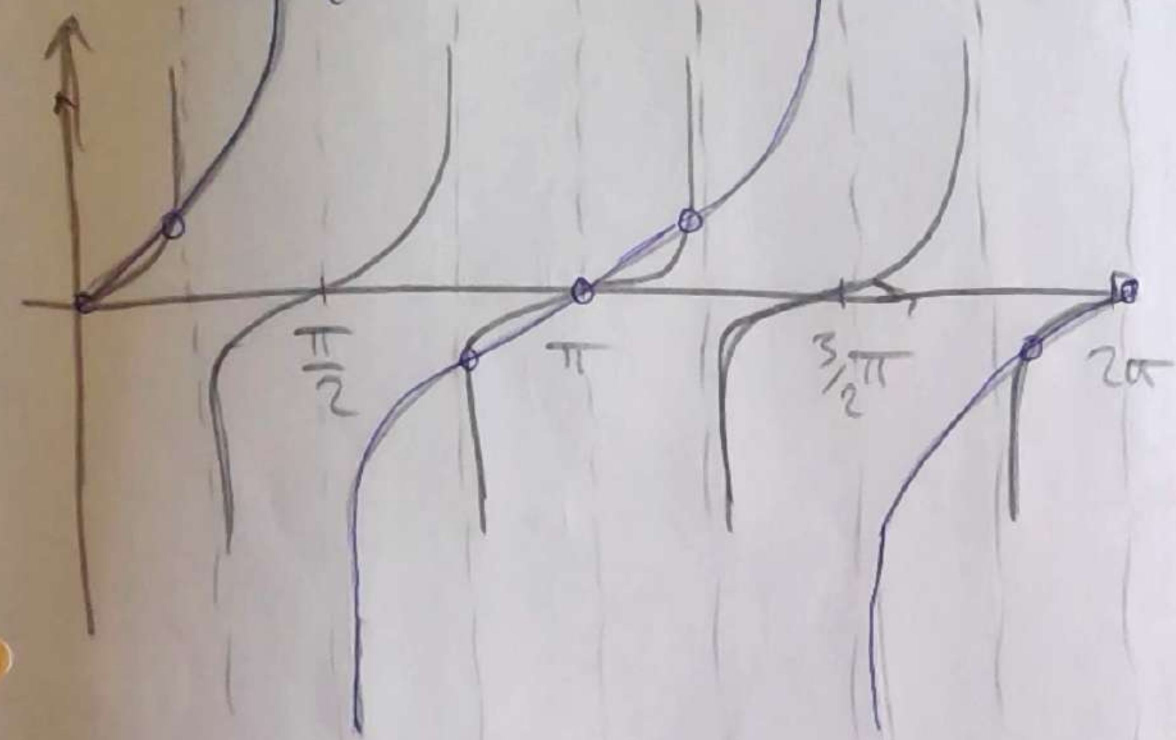
Weitere Lösung bei $\frac{\pi}{4}$ + halbe periode



$\mathcal{L} = \left\{ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}+\pi\ ;\ \frac{3\pi}{4}+\pi \right\}$

für $x \in [0, 2\pi]$

v) $\tan(2x) = 3\tan x$



7 Lösungen Graphisch gefunden.

$\left\{ \pi \,;\, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \,;\, \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{6} \,;\, \pi \,;\, \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi \,;\, \frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{6} \,;\, 2\pi \right\}$

[Einen Schritt vor $\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$]
Vergleiche mit Zeichnung.

w) $\sin x + \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\sin x + \cos x = 1$

0	1	$\Rightarrow$	$x = 0$
1	0	$\Rightarrow$	$x = \frac{\pi}{2}$
0	-1		
-1	0		
0	1		

$\mathcal{L} = \{0 ; \pi/2\}$

Y) Zeichne $f: x \mapsto y$

$$y = 1 + 2 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \ x \in \mathbb{R},$$

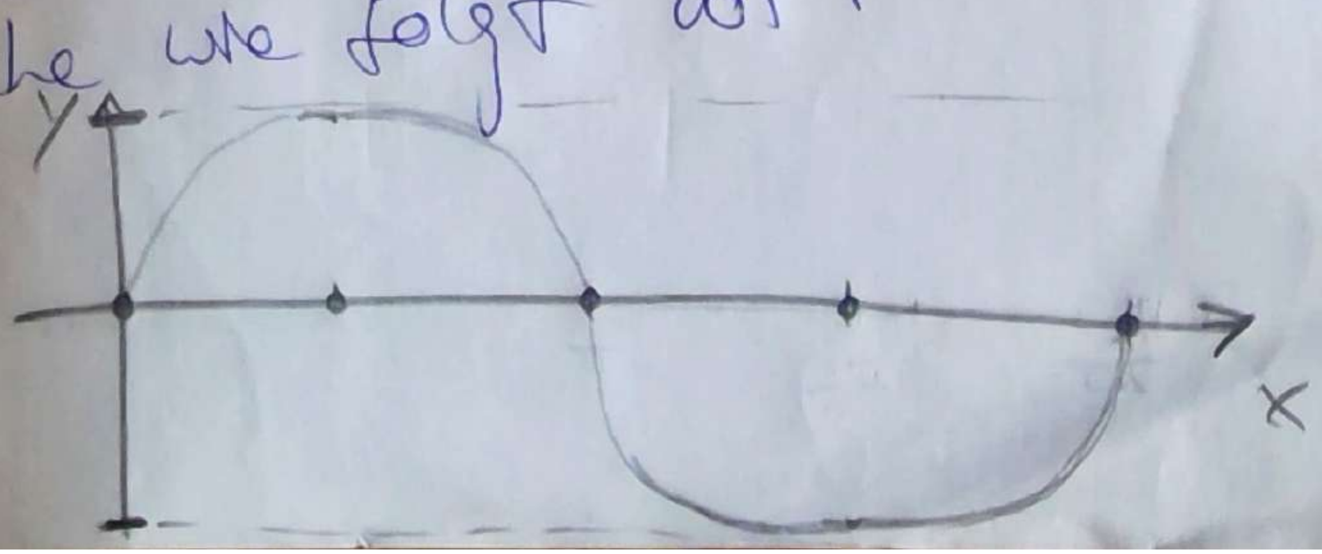
1 ist eine konstante Verschiebung der y-Achse

2 ist die verdoppelung der Amplitude, des Ausschlags der Höhe vom Sinus

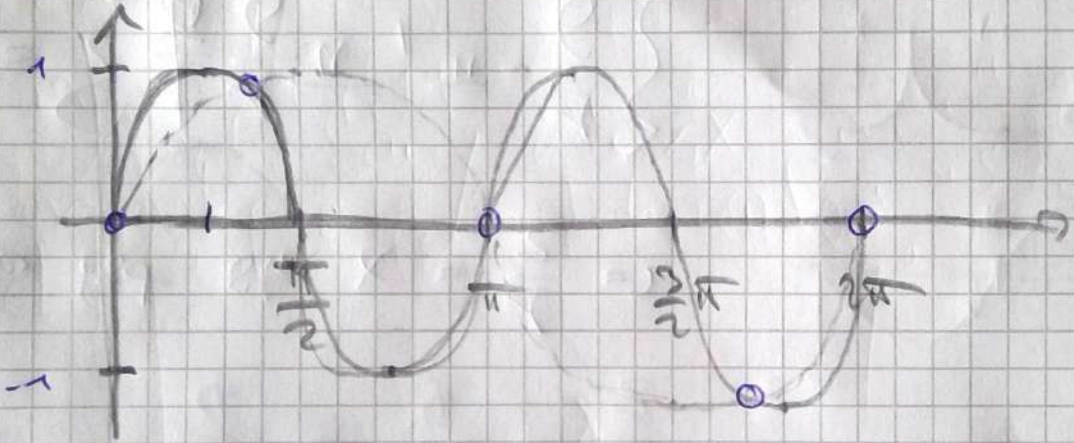
2x - der Sinus schwingt doppelt so schnell

$-\frac{\pi}{3}$ verschiebung von X um $\frac{\pi}{3}$

Gehe wie folgt vor:



a) $\sin x = \sin(2x)$



bei $\sqrt{3}/2 \rightarrow x = \frac{1}{3}\pi$

$L = \left\{ \frac{1}{3}\pi,\ \pi,\ 2\pi - \frac{1}{3}\pi,\ 0 \text{ bzw } 2\pi \right\}$

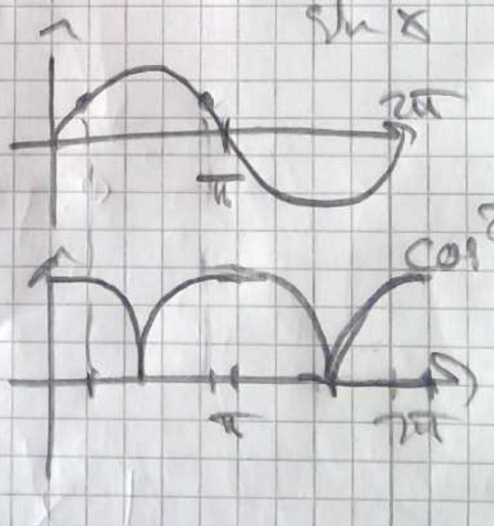
b) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

oder $\cos^2 x = \frac{1}{4} + \sin x$

$\cos^2 x$ hat $\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$ als Lösungen

$\Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Wo ist $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$



$L = \left\{ \cancel{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}\pi, \pi - \frac{1}{6} \right\}$