

Vorlesung 3

Vom 06.12.2023

Vorbereitung zur Aufnahme auf das Studienkolleg

Themen-Gebiete Gesamt

- Vereinfachung von Bruchtermen
- Polynomdivision
- Wurzelgleichungen - Ungleichungen
- Exponentialgleichungen & Logarithmusgleichungen
- Trigonometrischen Funktionen
- Erkennen von Funktionsgraphen
- Geometrie ; vor allem Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Kreisberechnungen, Flächen- und Volumenberechnungen

Organisation



- Unterricht am Montag & Mittwoch von 16.00 bis 17.30 Uhr
- Alle Materialien werden Online zur Verfügung gestellt
- GitHub
- Übungsaufgaben jede Woche Mittwoch
- Lösung Vorstellen und Besprechen am Montag

<https://github.com/ClemWeber/ASL-MatheKurs>

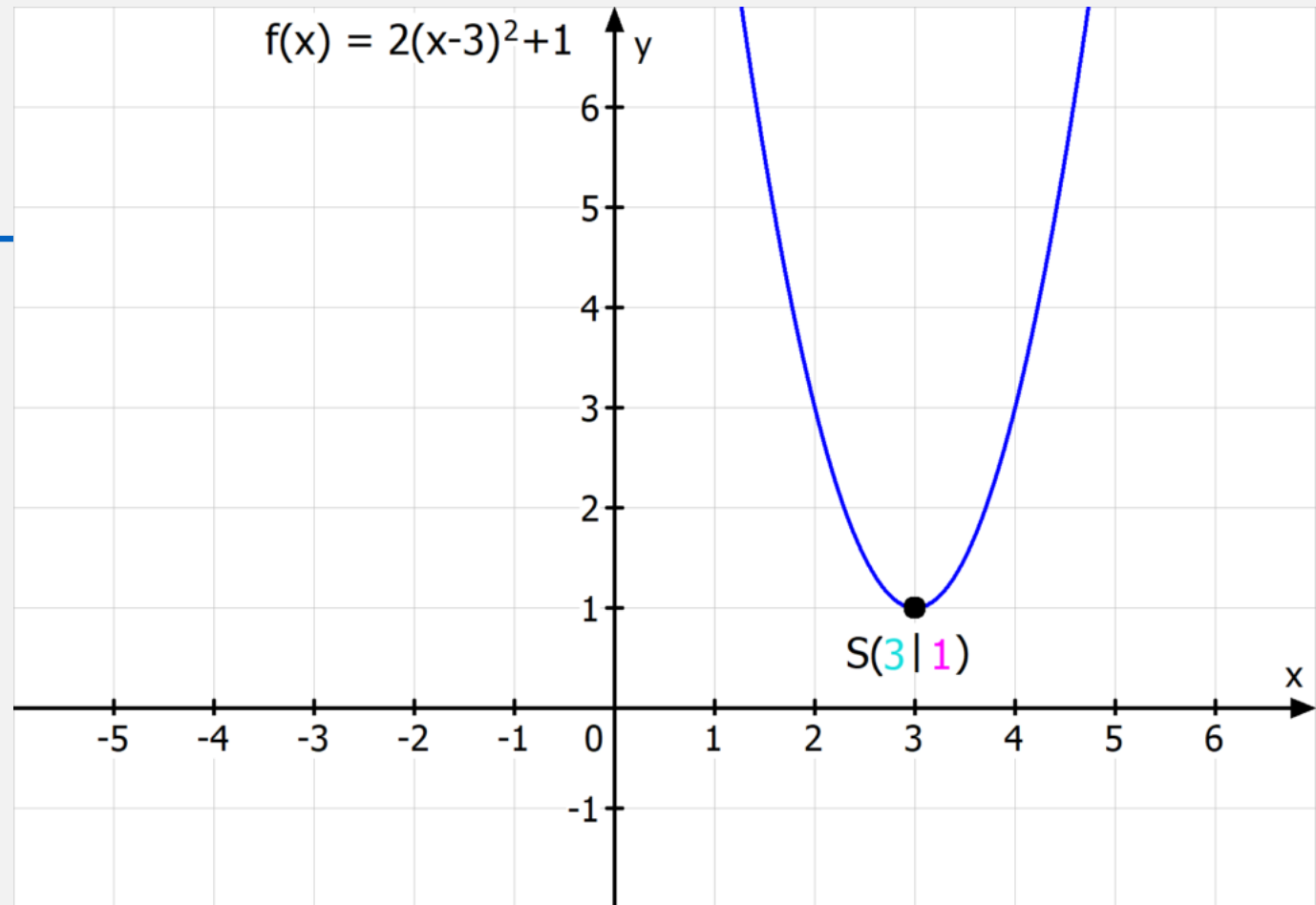
Vorlesung 3

Umfang:

- Nachschub zu Quadratische Ergänzung
- Natürlicher Logarithmus & Exponential Fkt.
- Geometrie:
 - Flächen-Berechnung
 - Winkel-Summen
 - Strahlen-Sätze
 - Volumen-Berechnung

Nachschub

- Quadratische Ergänzung:
 - Quadratische Ergänzung -
- Nützlich um:
 - Nullstellen von Quadratischen Gleichungen ohne Mitternachtsformel zu finden/berechnen



E-Funktion Exponential Funktion

○ Natürliche e-Funktion

○ $e = 2.7182 \dots$

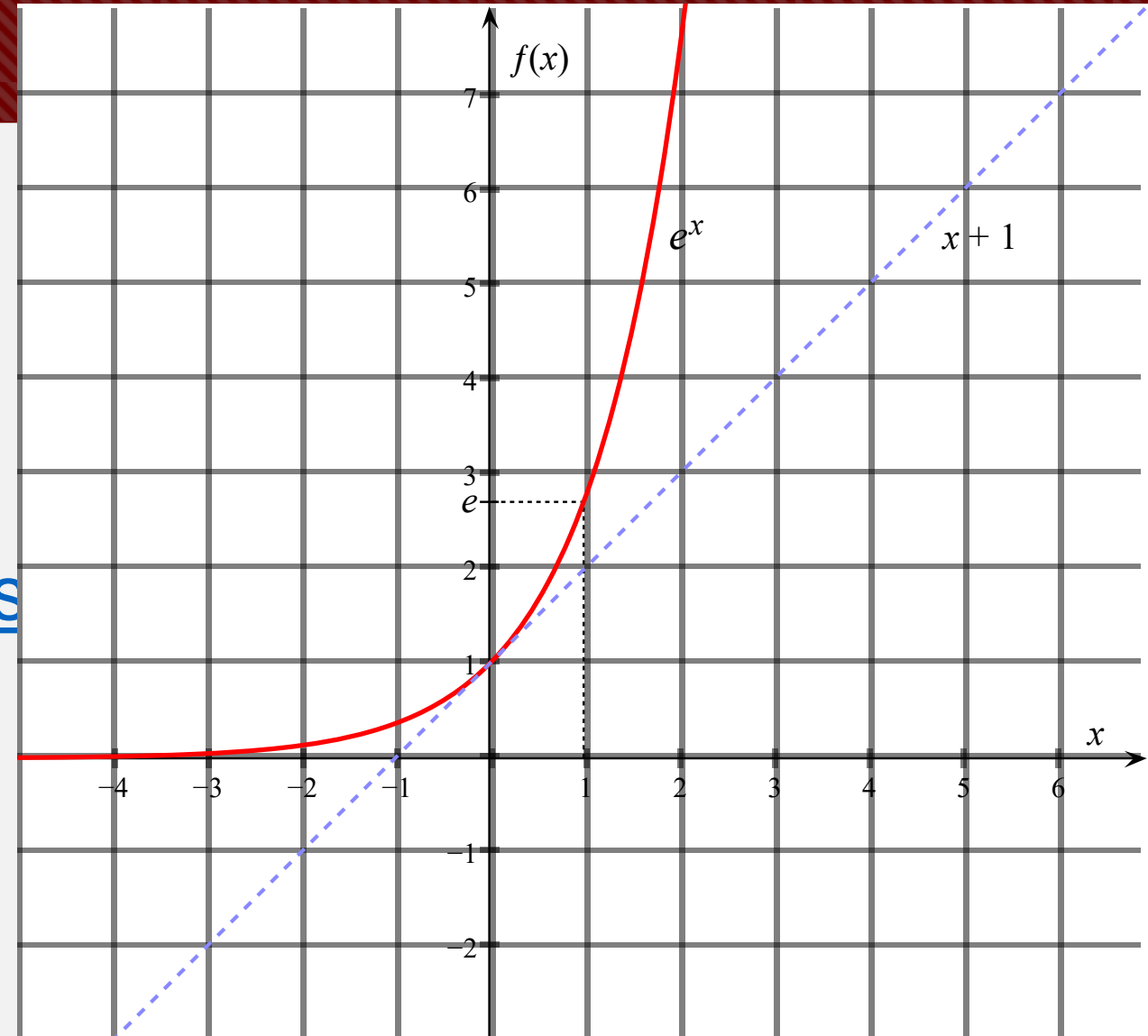
Besondere Eigenschaft:
Steigung = Wert der Fkt
An jedem Punkt!

e-Funktion Erklärung und Beis

Natürliche Logarithmus: $\ln(x)$

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}$$

$$b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{\ln(b) \cdot x}$$



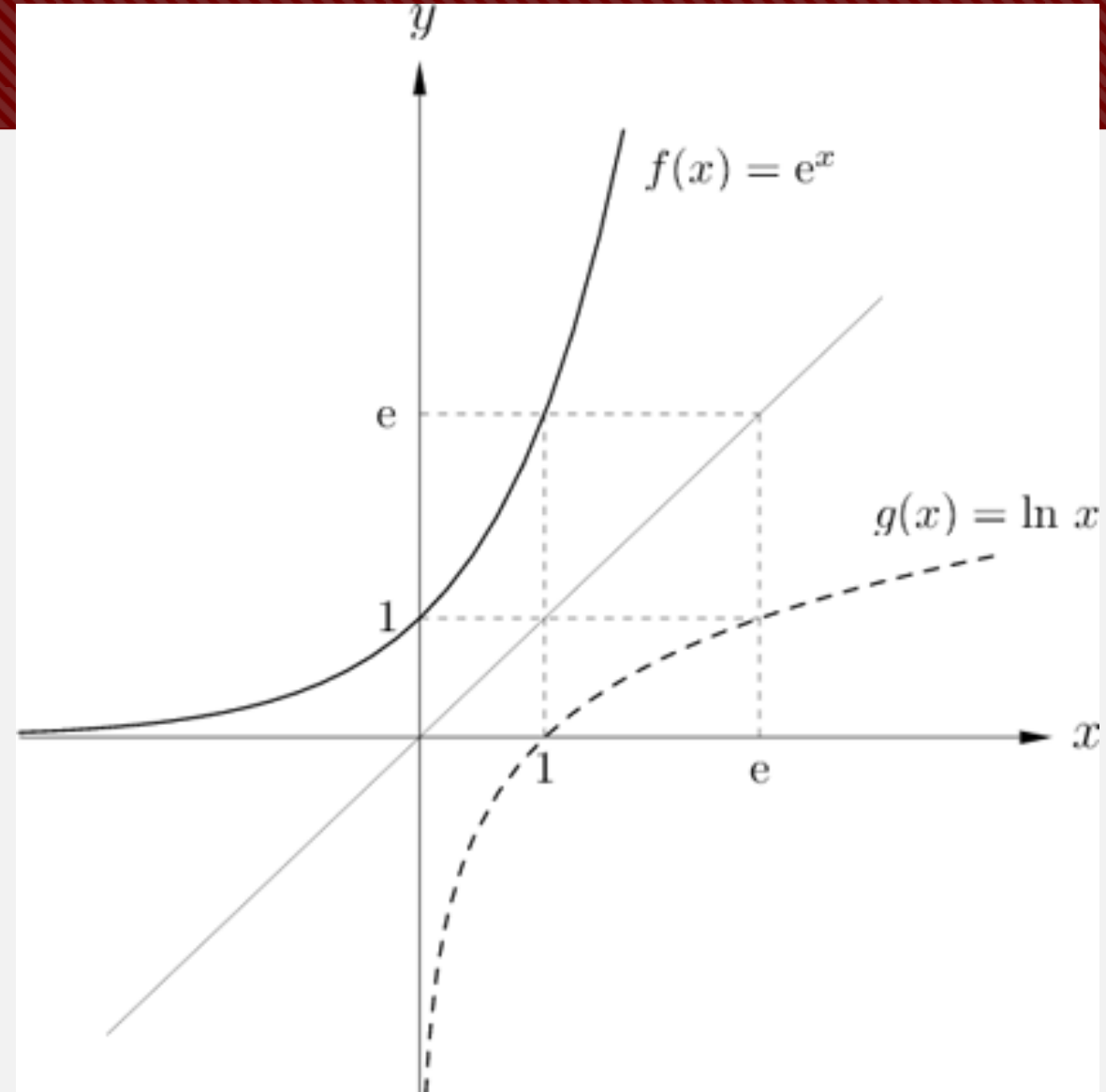
Logarithmus Funktionen

- Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

- Nur für Positive x definiert:

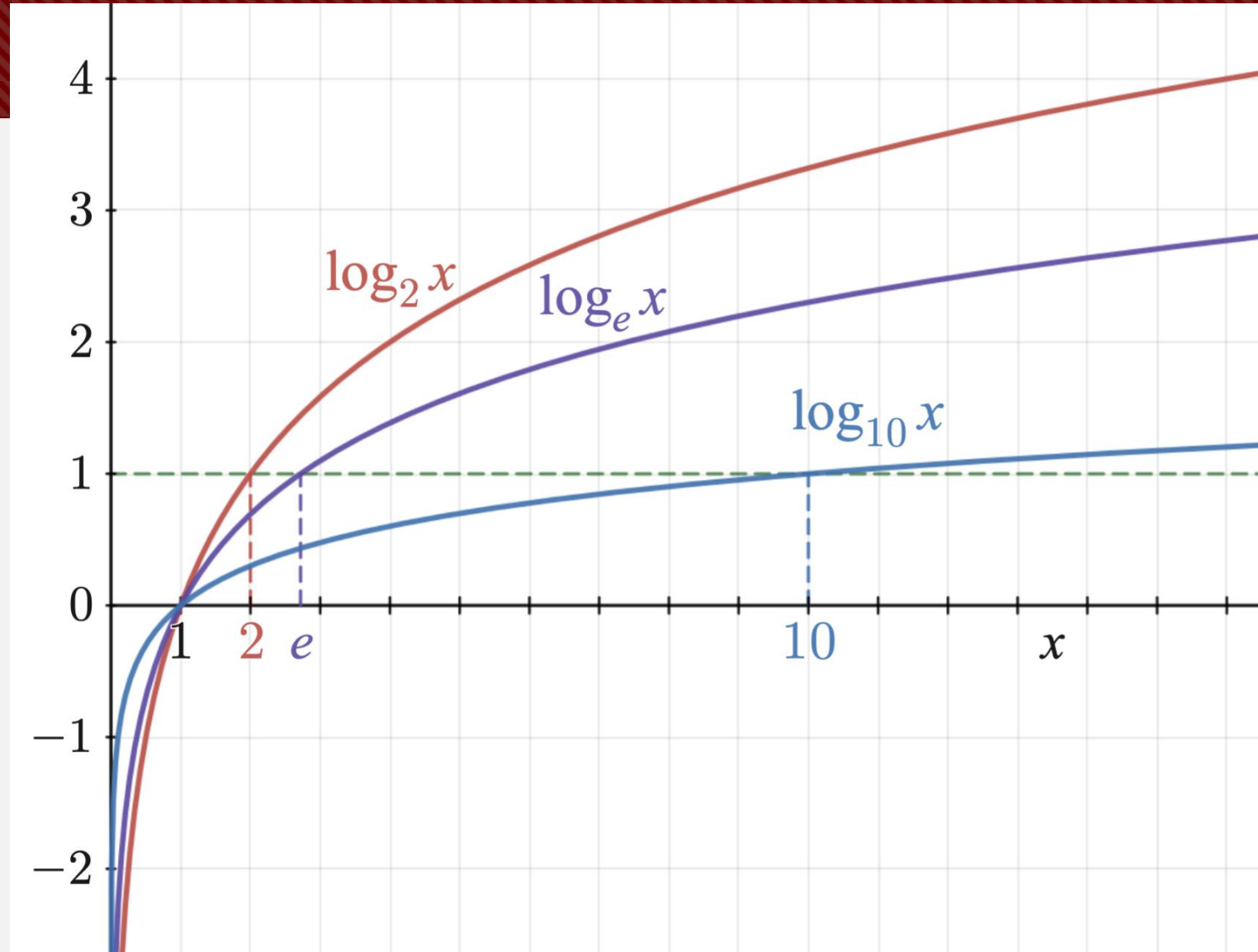
$$((-3)^{3.2} = (-3)^3 * (-3)^{0.2})$$

$$(= (-3)^3 * (-3)^{\frac{1}{5}} = (-3)^3 * \sqrt[5]{-3})$$

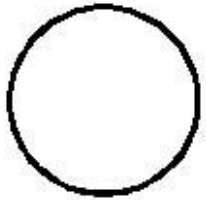


Logarithmus Funktionen

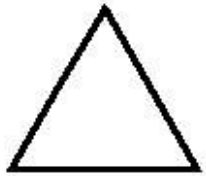
- Verschiedene Namen:
 - Natürliche Logarithmus
 - $\log_e x = \ln(x)$
 - Basis 10 Logarithmus
 - $\log_{10} x = \lg(x)$
 - Andere Basen
 - $\log_a x$
 - $\log_2 x = \log_2 x$
 - $\log_3 x = \log_3 x$
 - Usw.



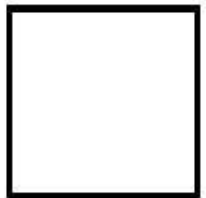
Geometrie 2D



Kreis



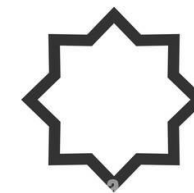
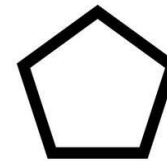
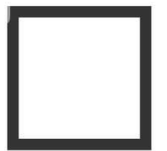
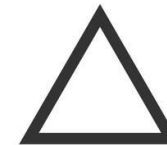
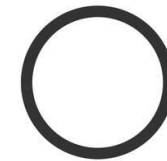
Dreieck



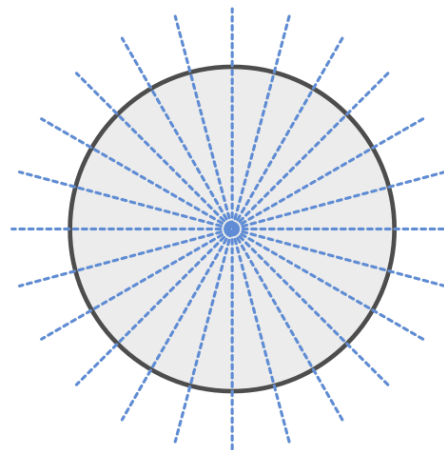
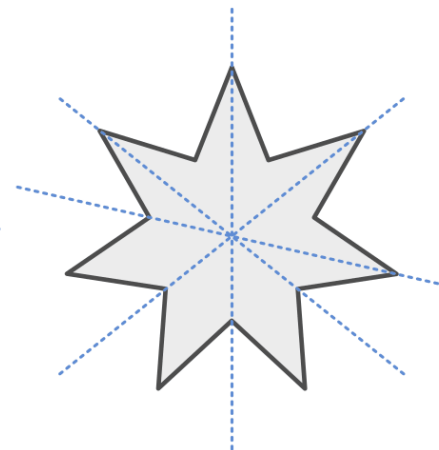
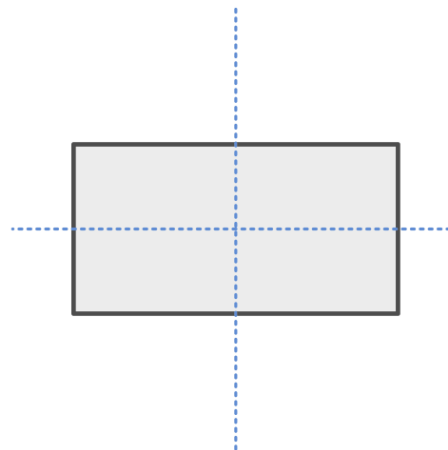
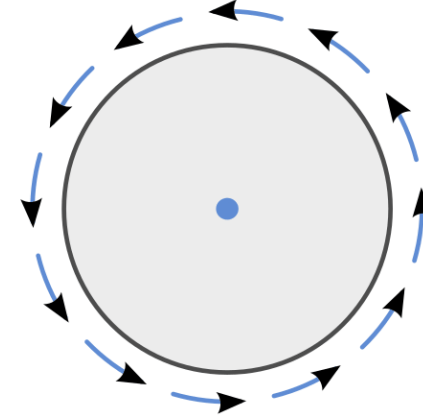
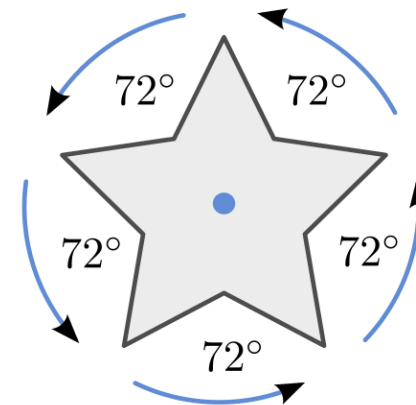
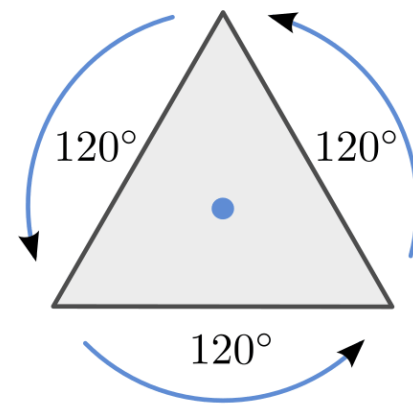
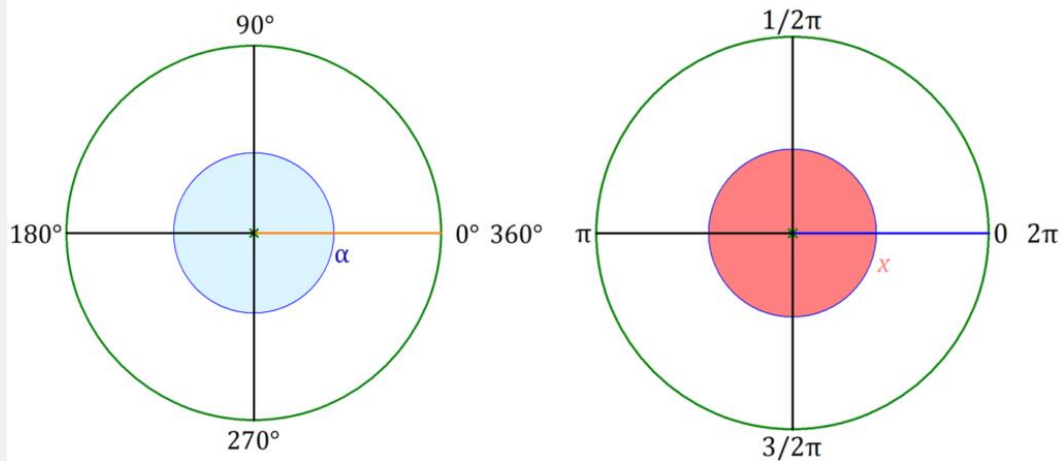
Quadrat



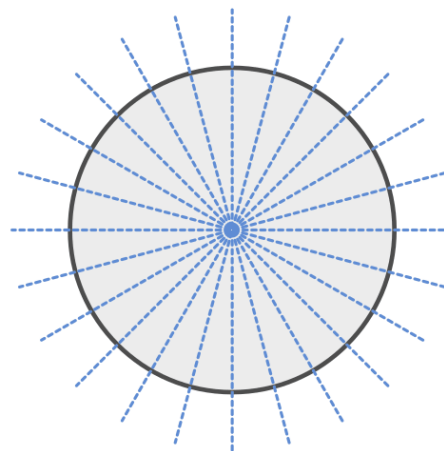
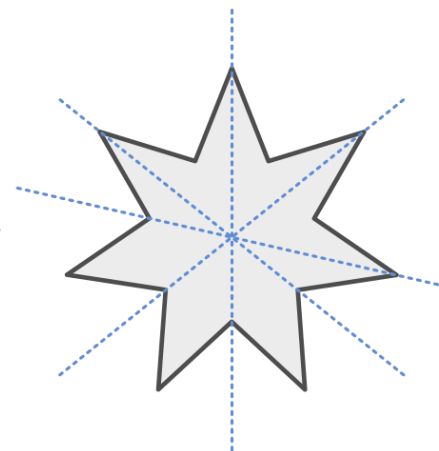
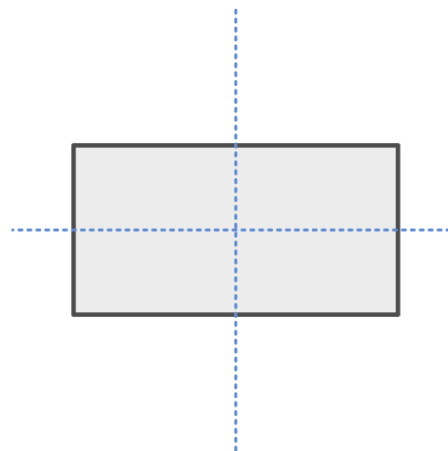
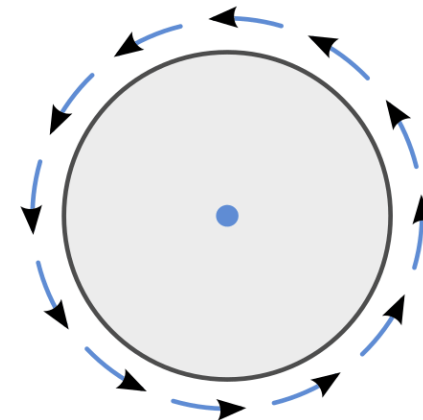
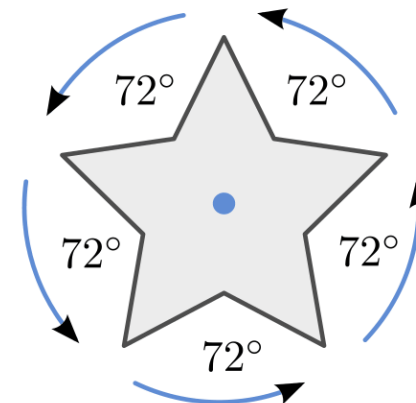
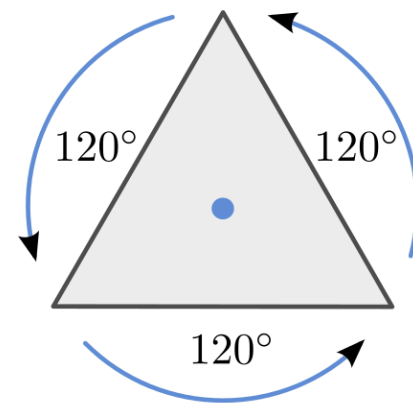
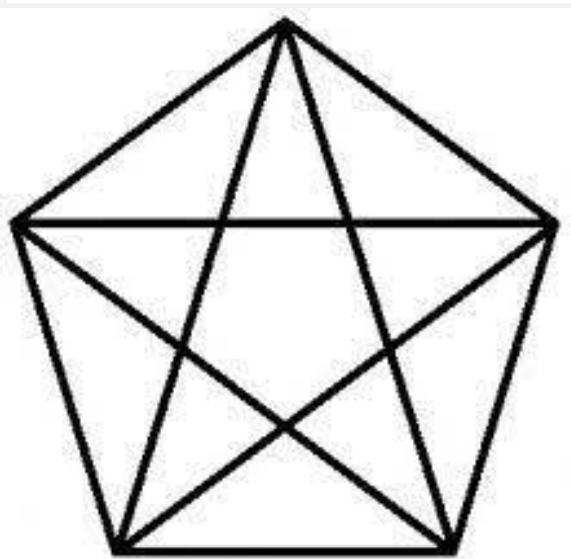
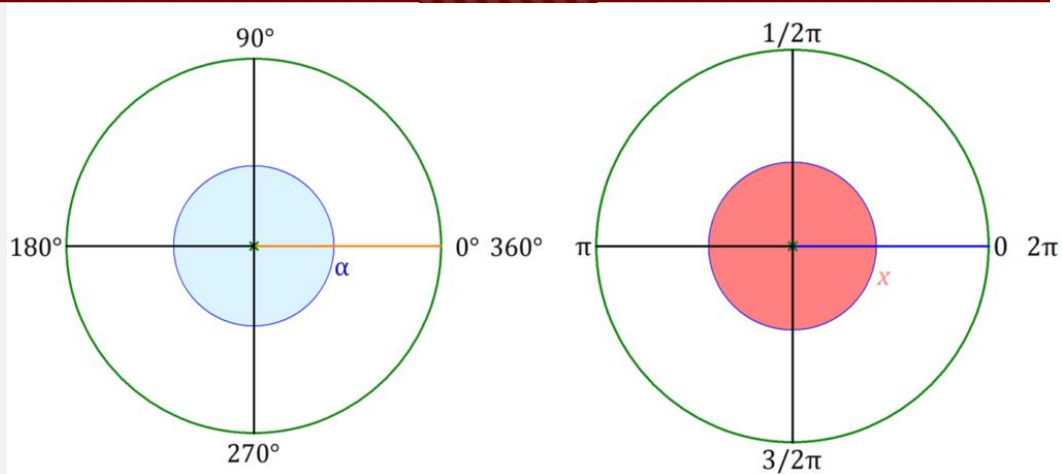
Rechteck



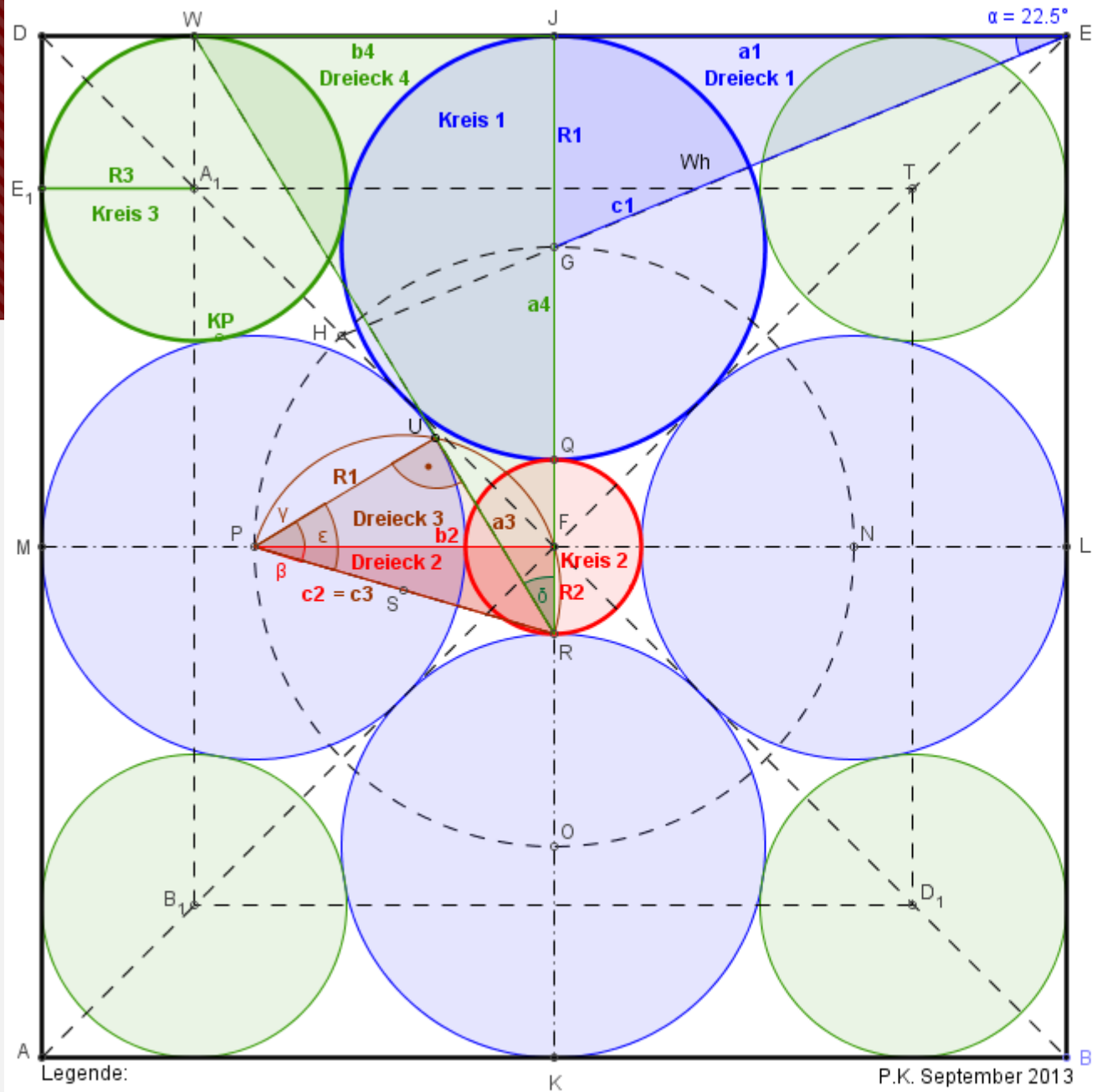
Geometrie 2D



Geometrie 2D



Geometrie 2D

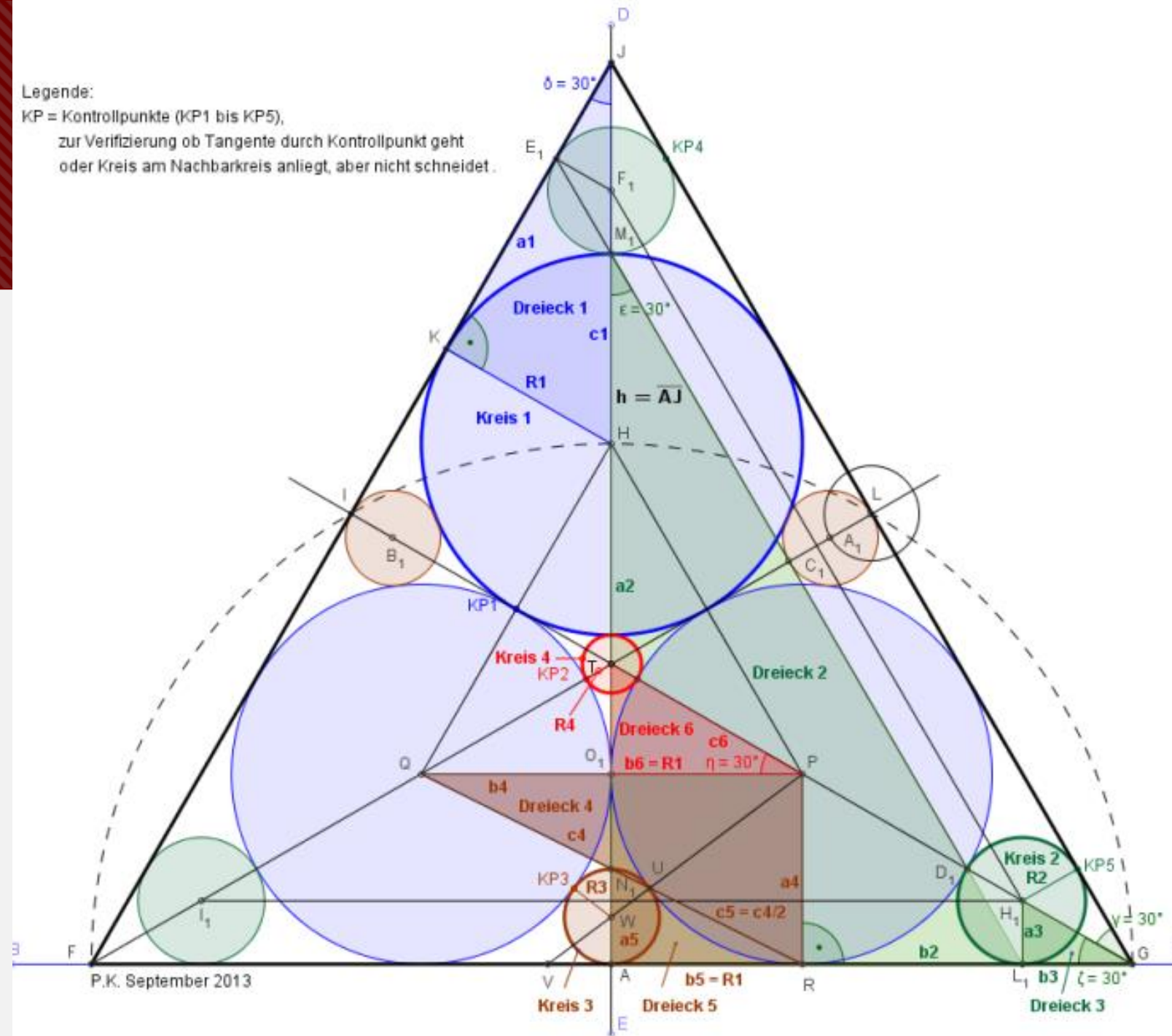


Geometrie 2D

Legende:

KP = Kontrollpunkte (KP1 bis KP5),

zur Verifizierung ob Tangente durch Kontrollpunkt geht
oder Kreis am Nachbarkreis anliegt, aber nicht schneidet.

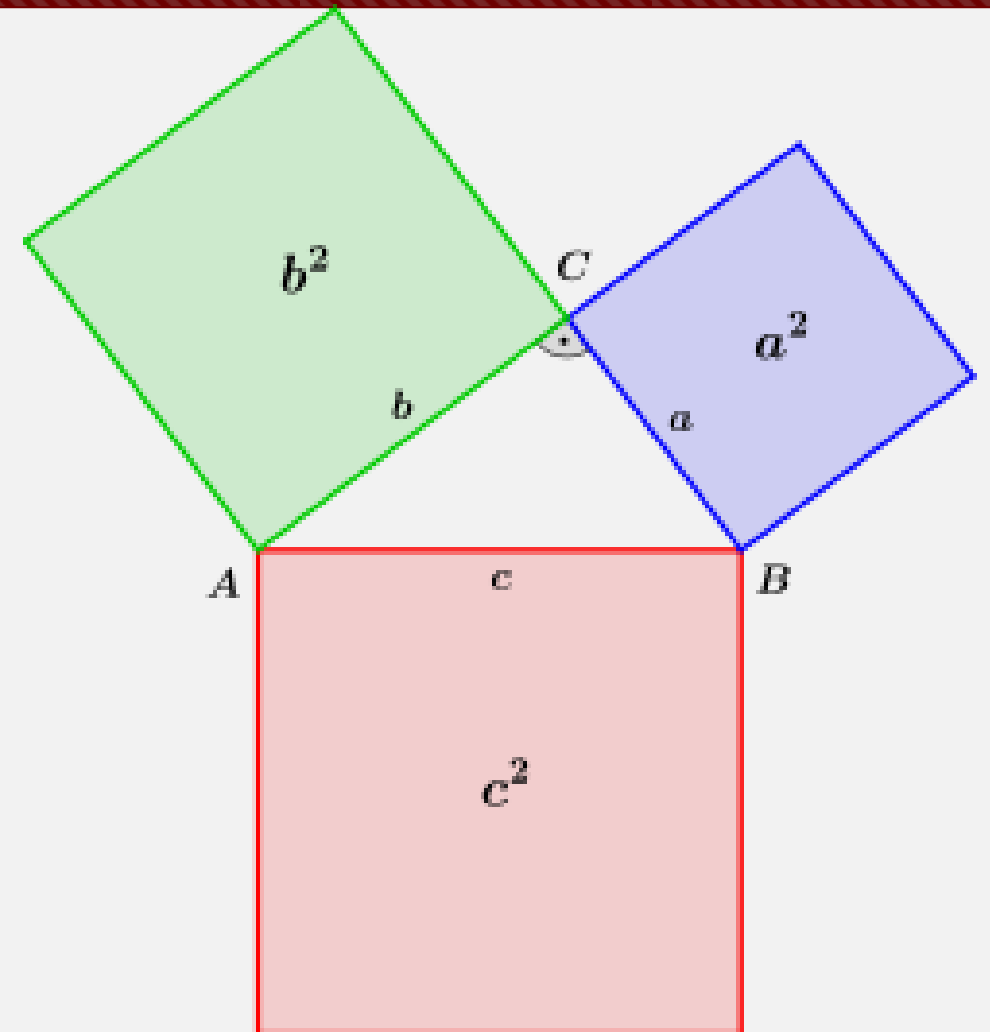


Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit
Rechtem Winkel (90 Grad)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

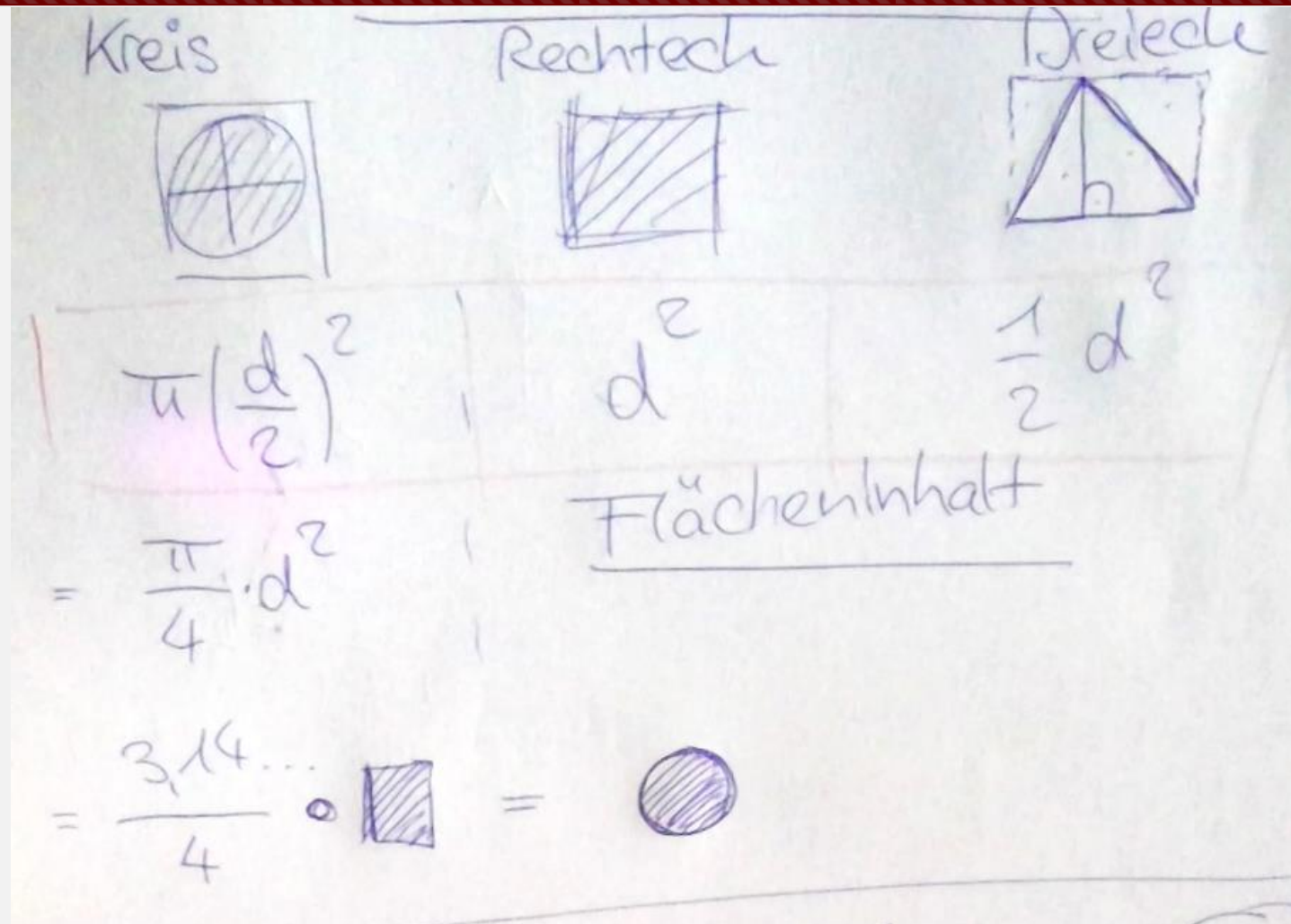


Geometrie 2D

- Einfache Formen
- Symmetrie
- Winkelsummen
 - Im Kreis 360 Grad
 - Im Viereck 360 Grad
 - Im Dreieck 180 Grad
- Volumenberechnungen

2D Flächen A

- Kreiszahl $\pi = 3.14159....$
 - Als Verhältnis von Quadrat- zu Kreis-Fläche
 - Oder Durchmesser zu Umfang
- Kreis Fläche
 - $A = \pi r^2$
- Rechteck Fläche
 - $A = \text{länge} * \text{breite}$
- Dreieck Fläche
 - $A = \frac{1}{2} d^2$



Bogenmaß und Winkelsummen

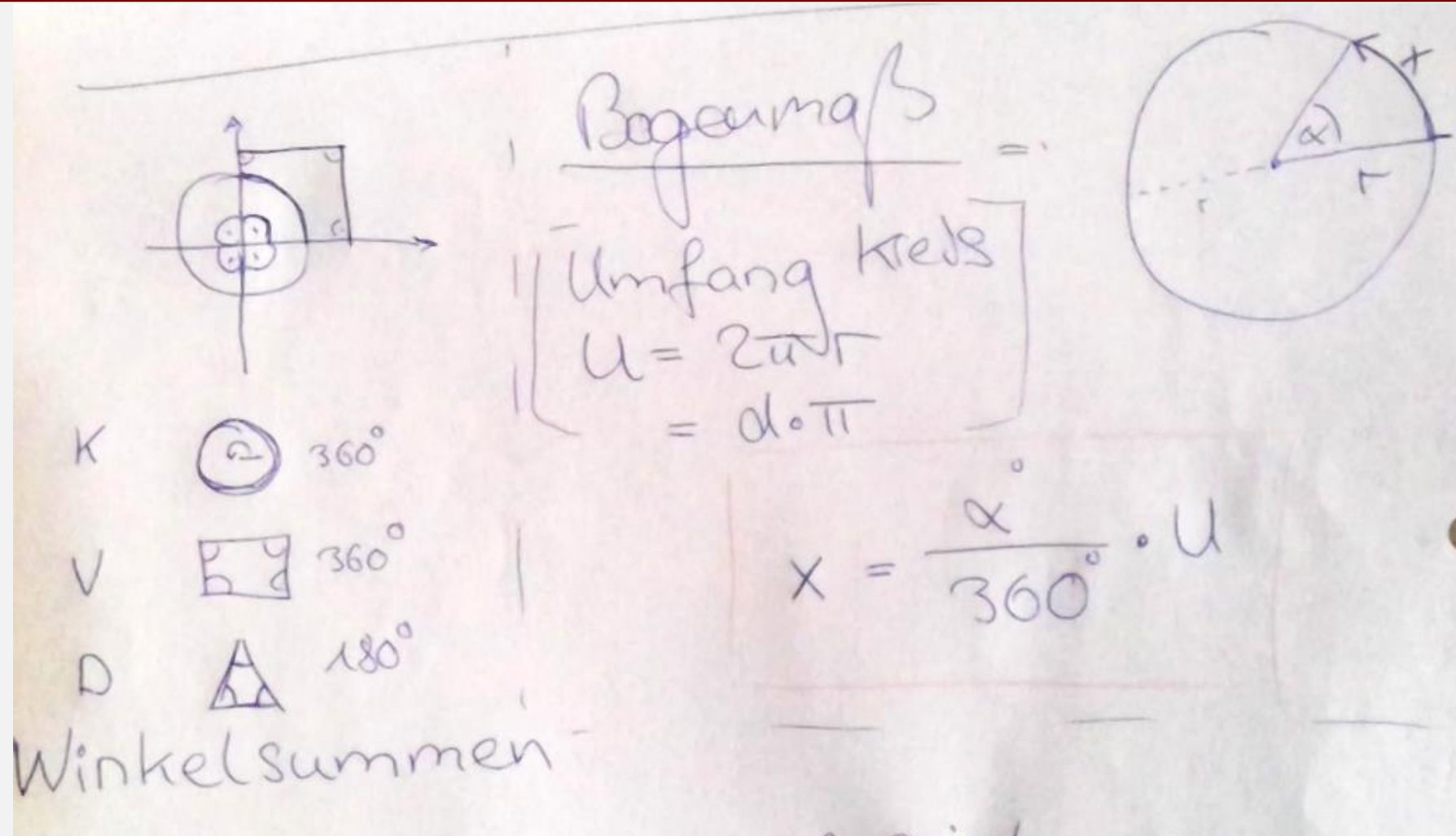
○ Bogenmaß

$$\text{○ } x = \frac{\text{alpha}}{360 \text{ Grad}} * U$$

○ Umfang U

$$\text{○ } U = 2\pi r$$

(Definition von Pie)



Bogenmaß und Winkelsummen

○ Bogenmaß

$$\text{○ } x = \frac{\text{alpha}}{360 \text{ Grad}} * U$$

○ Umfang U

$$\text{○ } U = 2\pi r$$

(Definition von Pie)

Handwritten notes on Bogenmaß (Arc Length) and Winkelsummen (Angle Sums).

Bogenmaß

Umfang Kreis
 $U = 2\pi r$
 $= \alpha \cdot \pi$

Winkelsummen


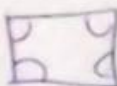

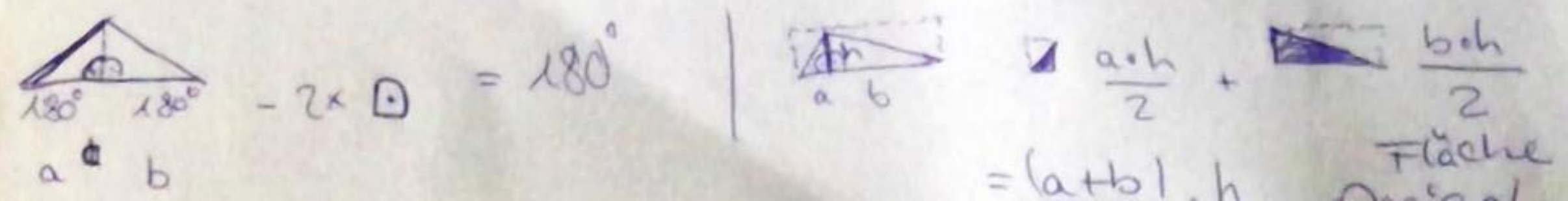
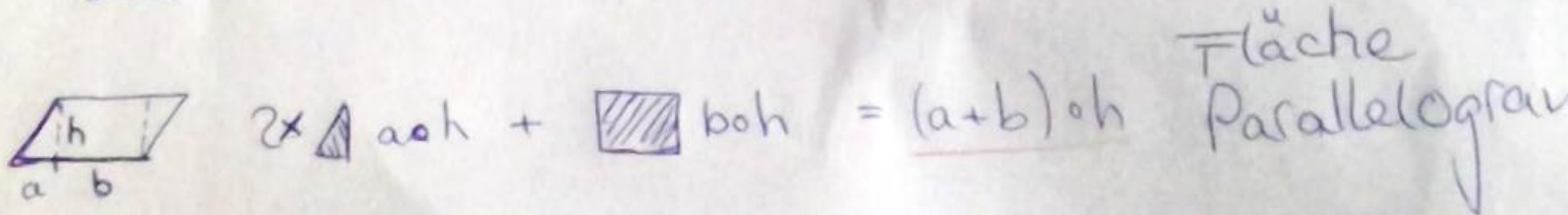
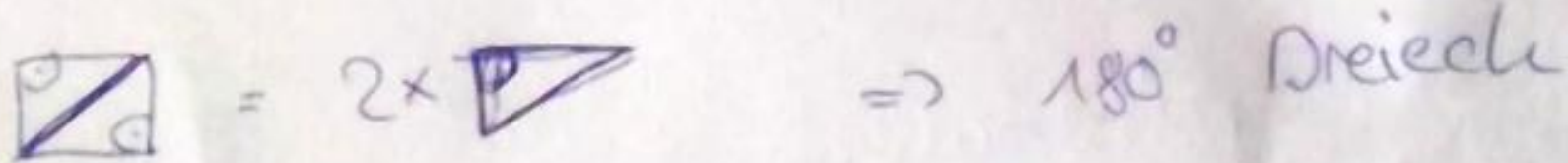
K		360°
V		360°
D		180°

Diagram illustrating the relationship between the angle α and the arc length x in a circle of radius r .

$$x = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot U$$

Flächeninhalte A und Winkelsummen



FlächenInhalte A und Winkelsummen

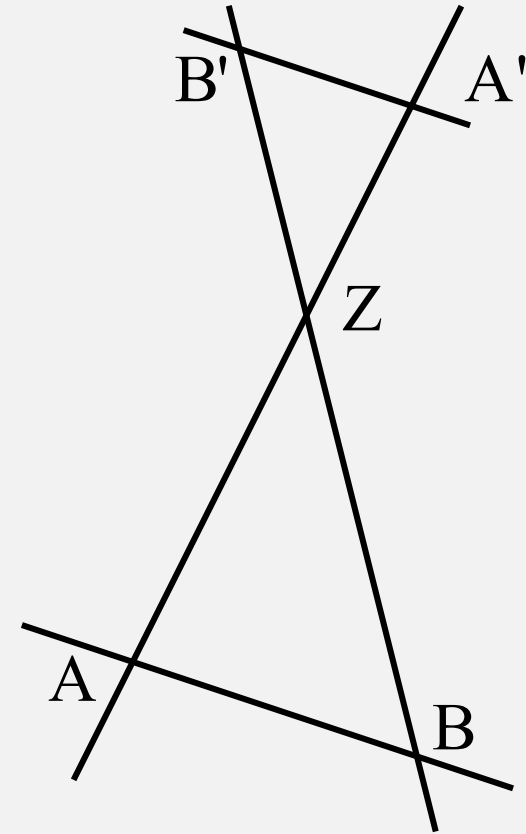
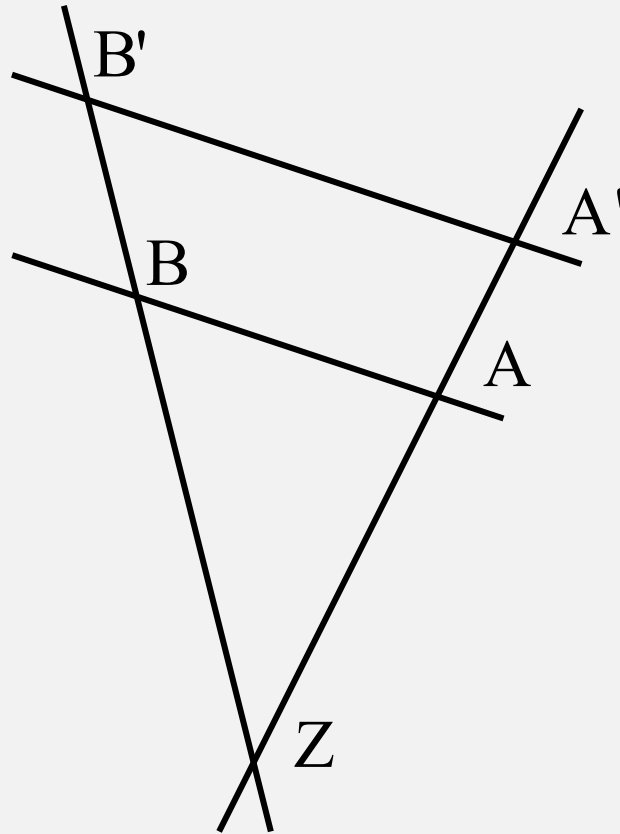
Lern-Zettel

Strahlensatz 1

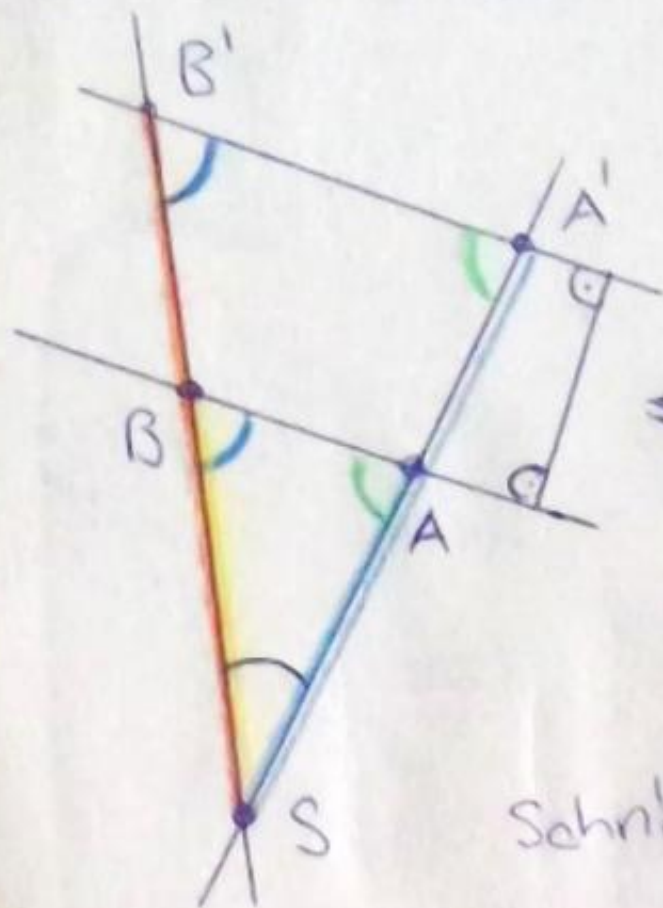
○ Seiten Verhältnisse:

$$\bigcirc \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$$

$$\bigcirc \frac{AA'}{SA'} = \frac{BB'}{SB'}$$



Strahlensätze



1.

$$\frac{|\vec{SA}|}{|\vec{SA'}|} = \frac{|\vec{SB}|}{|\vec{SB'}|}$$

= Parallelen

Schnittpunkt

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AA'} + \overline{SA}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BB'} + \overline{SB}}{\overline{SB}}$$

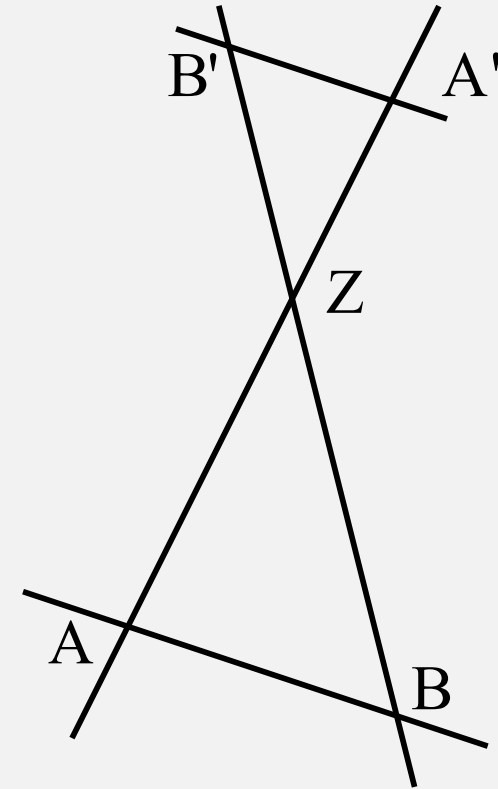
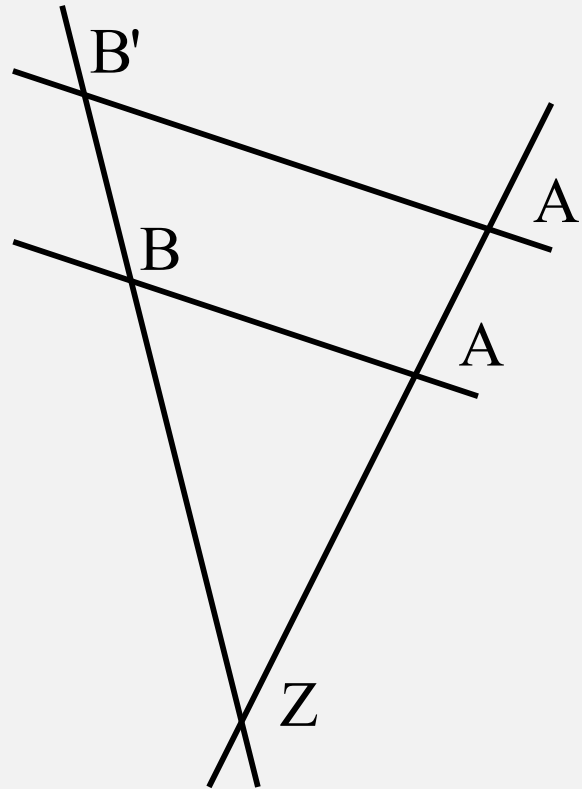
$$\Rightarrow \frac{\overline{AA'}}{\overline{SA'}} + 1 = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}} + 1$$

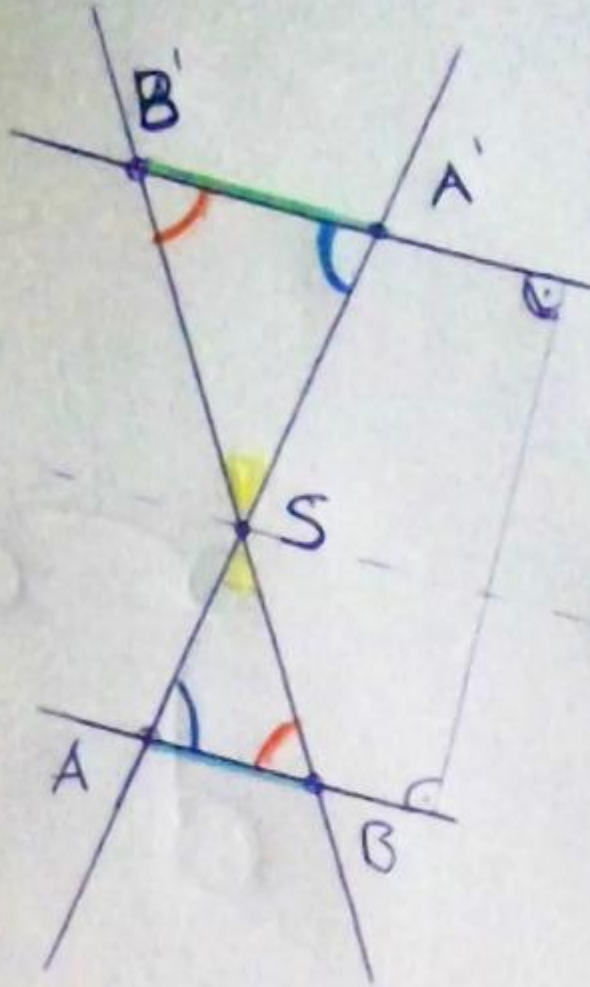
$$\Rightarrow \frac{\overline{AA'}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB'}}$$

Strahlensatz 2

○ Seiten Verhältnisse:

$$\bigcirc \frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$$





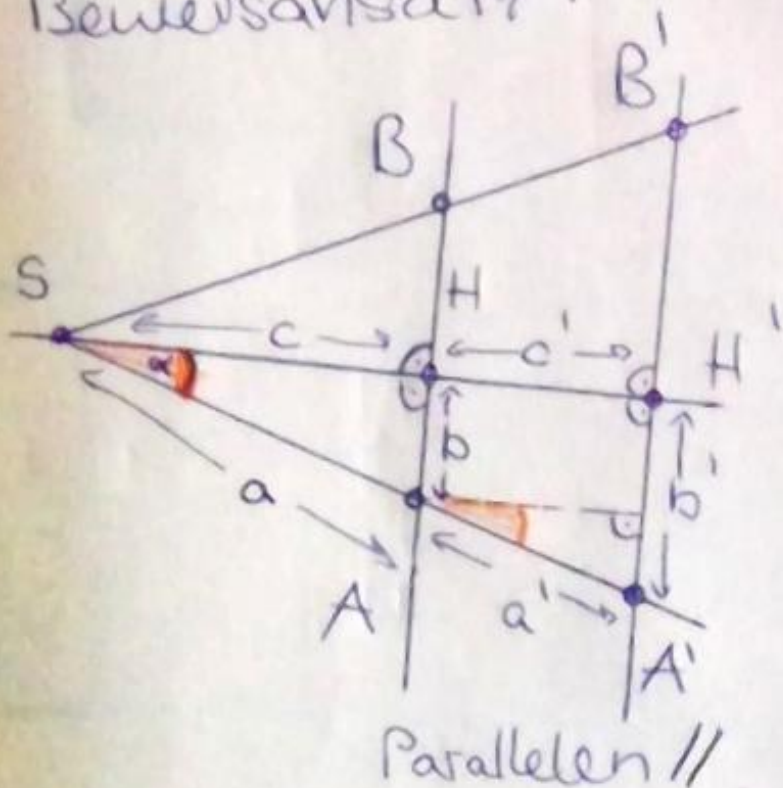
2.

$$\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{A'B'}|}$$

$$= \frac{|\vec{SA}|}{|\vec{SA'}|} = \frac{|\vec{SB}|}{|\vec{SB'}|}$$

Spiegelsymmetrie

Beweisansatz:



$$\sin \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a+a'}$$

$$= \frac{b}{SA} = \frac{b'}{SA'}$$

$$b' = b + \text{extra}$$

$$\frac{\text{extra}}{a'} = \sin \alpha \Rightarrow \text{extra} = \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \frac{c+c'}{a+a'} \quad \text{oder}$$

$$\frac{SH}{SA} = \frac{SH'}{SA'}$$

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH'}{SB'}$$

$$\&$$

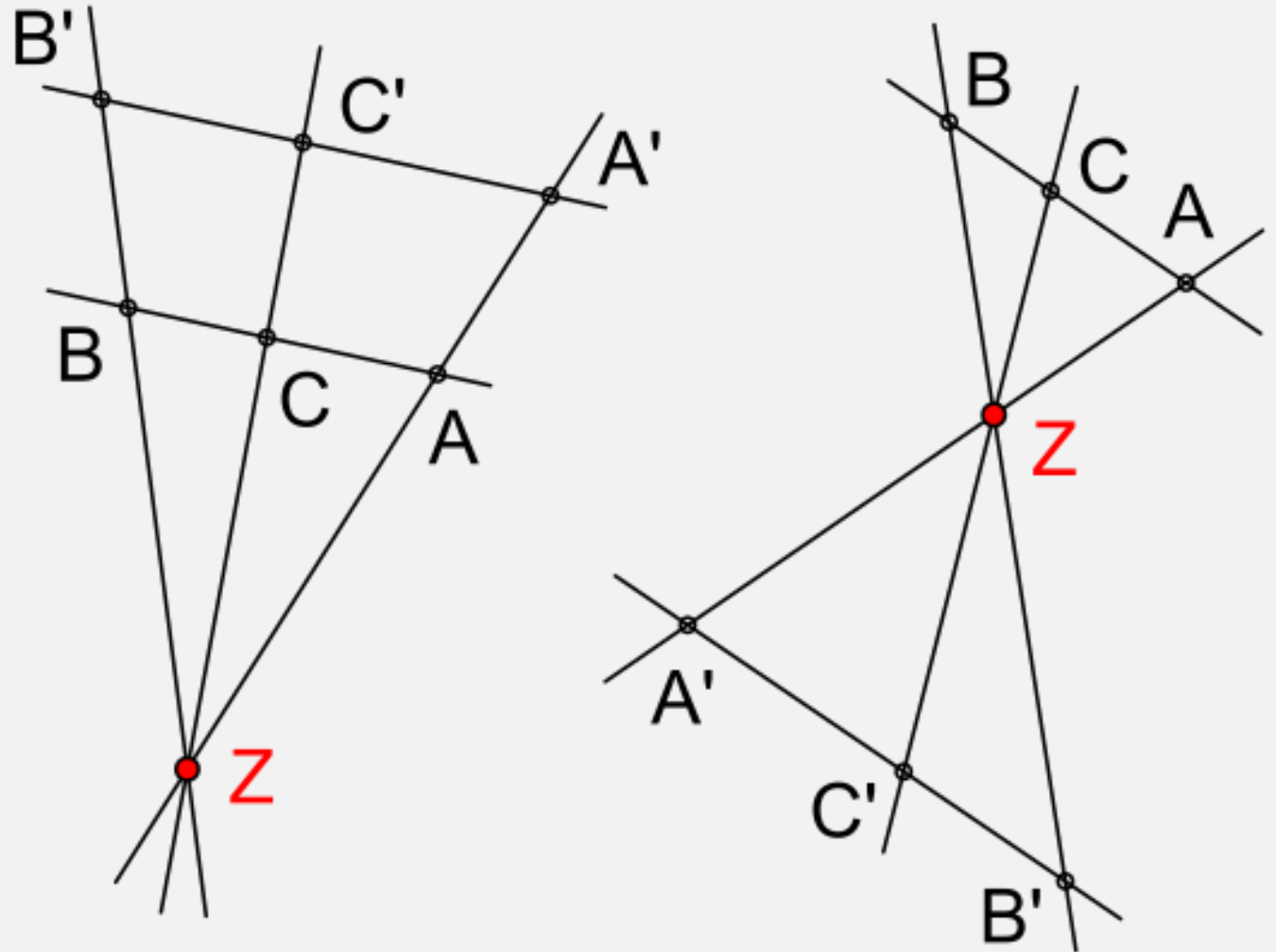
$$\sin \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a+a'} \quad \text{oder}$$

$$\frac{HA}{SA} = \frac{H'A'}{SA'}$$

$$\Rightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$$

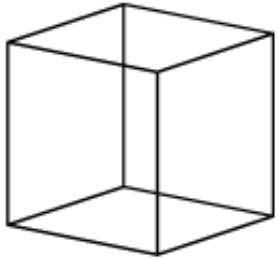
Strahlensatz Folgerung

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|A'C'|}.$$

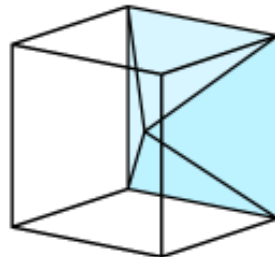
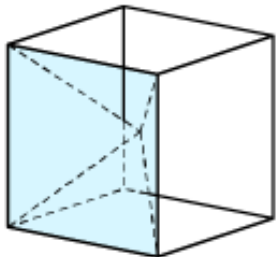
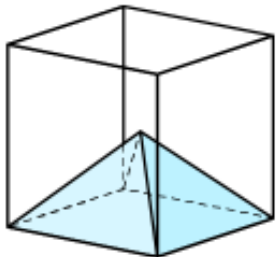
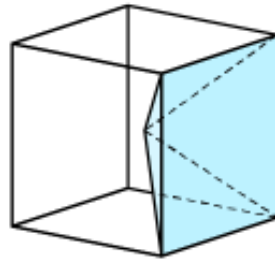
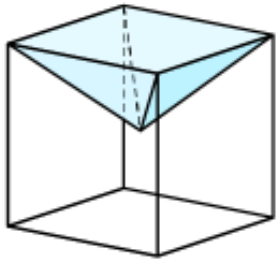
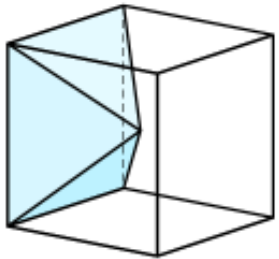


Volumenberechnung Pyramide

Du startest mit einem Würfel (alle Seiten sind gleich lang).



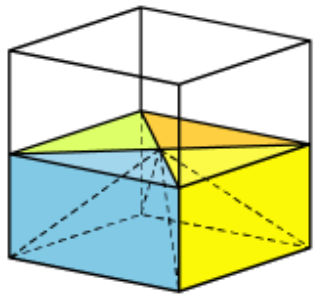
In einen Würfel passen 6 Pyramiden mit einer quadratischen Grundfläche hinein.



Also gilt: $6 \cdot V_{Py} = V_{Wü}$

In einen halben Würfel (einem Quader) passen genau 3 Pyramiden hinein (eine Ganze und vier

Halbe).



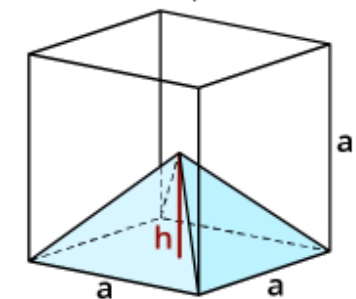
$$\text{Es gilt: } 3 \cdot V_{Py} = \left[\frac{1}{2} \cdot V_{Wü} \right] = V_{Qu}$$

Daraus folgt durch Umstellung der oberen Gleichung: $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot V_{Qu}$

Die Formel zur Berechnung des Volumens eines Quaders kennst du schon. Es ergibt sich:

$$V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

In diesem speziellen Fall kannst du sogar eine genaue Formel angeben.

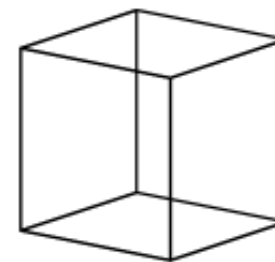


Der Würfel hat die Kantenlänge a . Die Grundfläche G ist demnach a^2 . Die Höhe der Pyramide ist

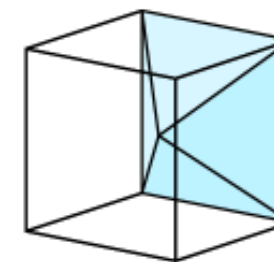
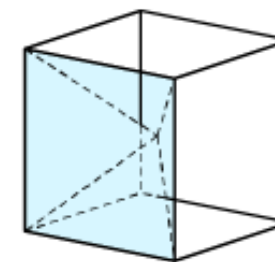
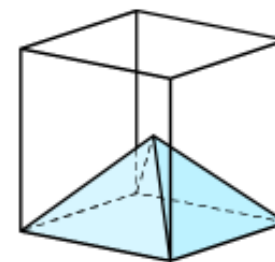
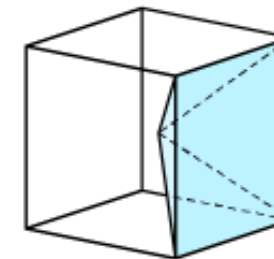
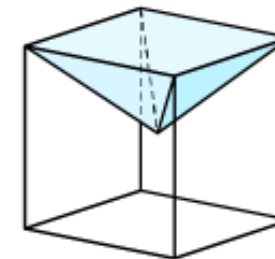
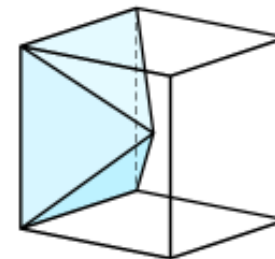
$$\frac{1}{2} \cdot a$$

$$\text{Insgesamt gilt also: } V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$$

Du startest mit einem Würfel (alle Seiten sind gleich lang).



In einen Würfel passen 6 Pyramiden mit einer quadratischen Grund



$$\text{Also gilt: } 6 \cdot V_{Py} = V_{Wü}$$

Aufgaben Dieser Woche

- Bsp:
- <https://de.serlo.org/mathe/26399/aufgaben-zur-bestimmung-von-nullstellen-bei-quadratischen-funktionen>

Vorlesung 3

Umfang:

- Nachschub zu Quadratische Ergänzung
- Natürlicher Logarithmus & Exponential Fkt.
- Geometrie:
 - Flächen-Berechnung
 - Winkel-Summen
 - Strahlen-Sätze
 - Volumen-Berechnung

Feedback

Zu viel/wenig?

Zu leicht/schwer?

Welche Aufgabe konnte ich nicht lösen?

Feedback

Tempo zu schnell/langsam?

Mathe Vokabeln?

Was wünscht ihr euch? (Basics?)

Ziel der Veranstaltung:

Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das
Studienkolleg :)

Vorherige Vorlesung

Logarithmus Gesetze

8.1 Formeln für Logarithmen:

$$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b y$$

$$(y \in \mathbb{R}^+ \text{ und } b \in \mathbb{R}^+ \text{ ohne } \{1\})$$

$$\text{z. B. } 0,5^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_{0,5} 3 = \frac{\lg 3}{\lg 0,5}$$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a$; $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$;

Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$;
($e = 2,71828\dots$ heißt Eulersche Zahl)

Logarithmus Rechengesetze

Rechengesetze für Logarithmen ($u, v > 0$)

$$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b \left(\frac{u}{v} \right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n \cdot \log_b u ,$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^n = n$$

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} \quad \text{die Basisumrechnungsformel}$$

$$(a > 0 \text{ und } b, c \in \mathbb{R} \text{ ohne } \{1\})$$

Logarithmus & Exponentialfunktion

<https://www.grund-wissen.de/mathematik/analysis/elementare-funktionen/exponentialfunktionen-und-logarithmusfunktionen.html>

Bakterien verdoppeln sich jede stunde (Zeit = x), anfangs waren es 300.

$$\text{Anzahl Bakterien} = 300 \cdot 2^x$$

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Er fragt: Wie viel Zeit ist vergangen um eine Population von 3200 bakterien zu haben?

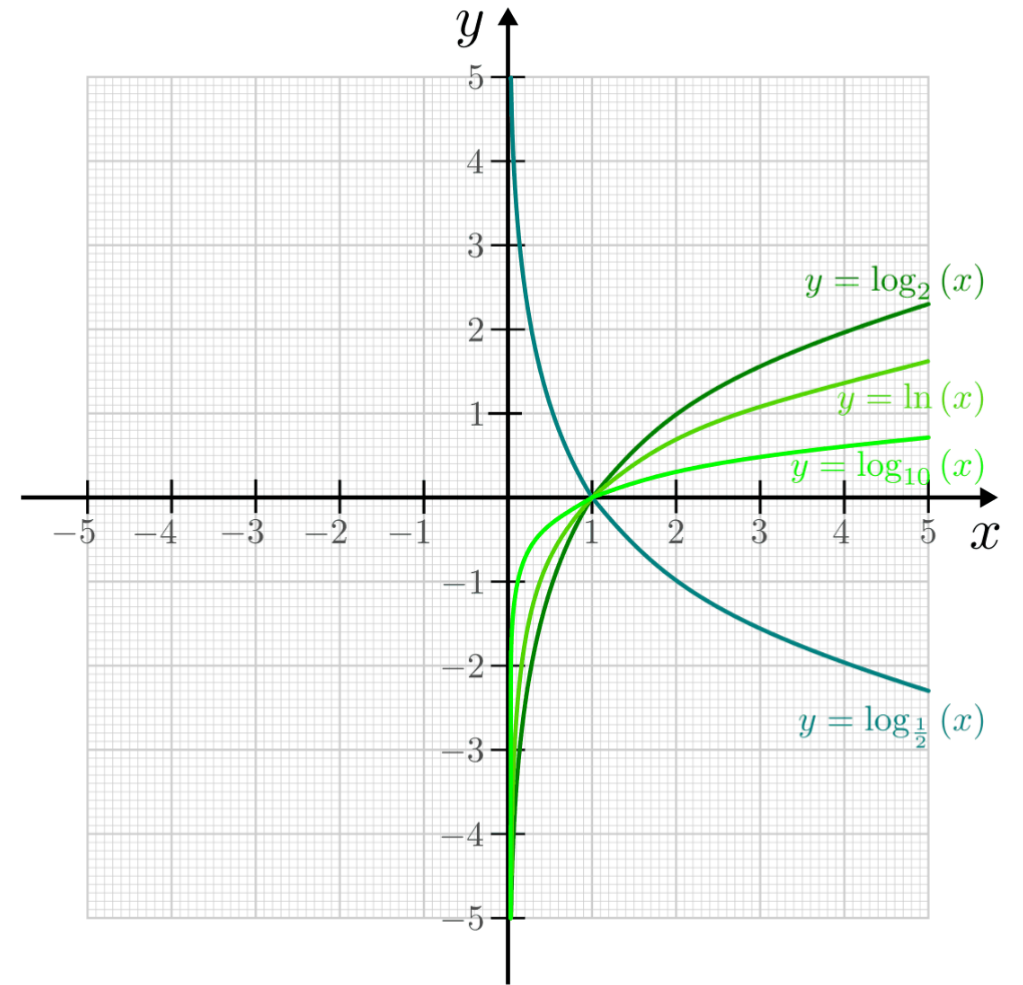
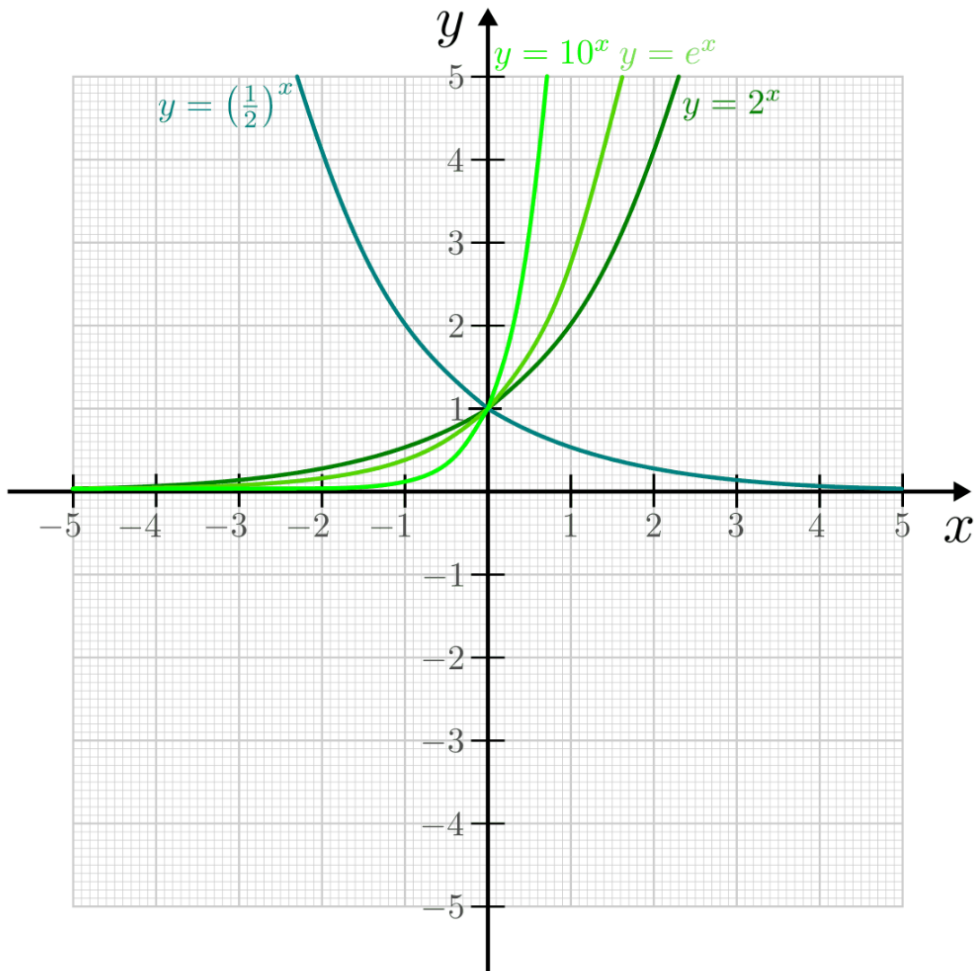
$$\log_2\left(\frac{3200}{300}\right) = x \text{ stunden}$$

Warum ist der Logarithmus nur für positive Basis definiert?

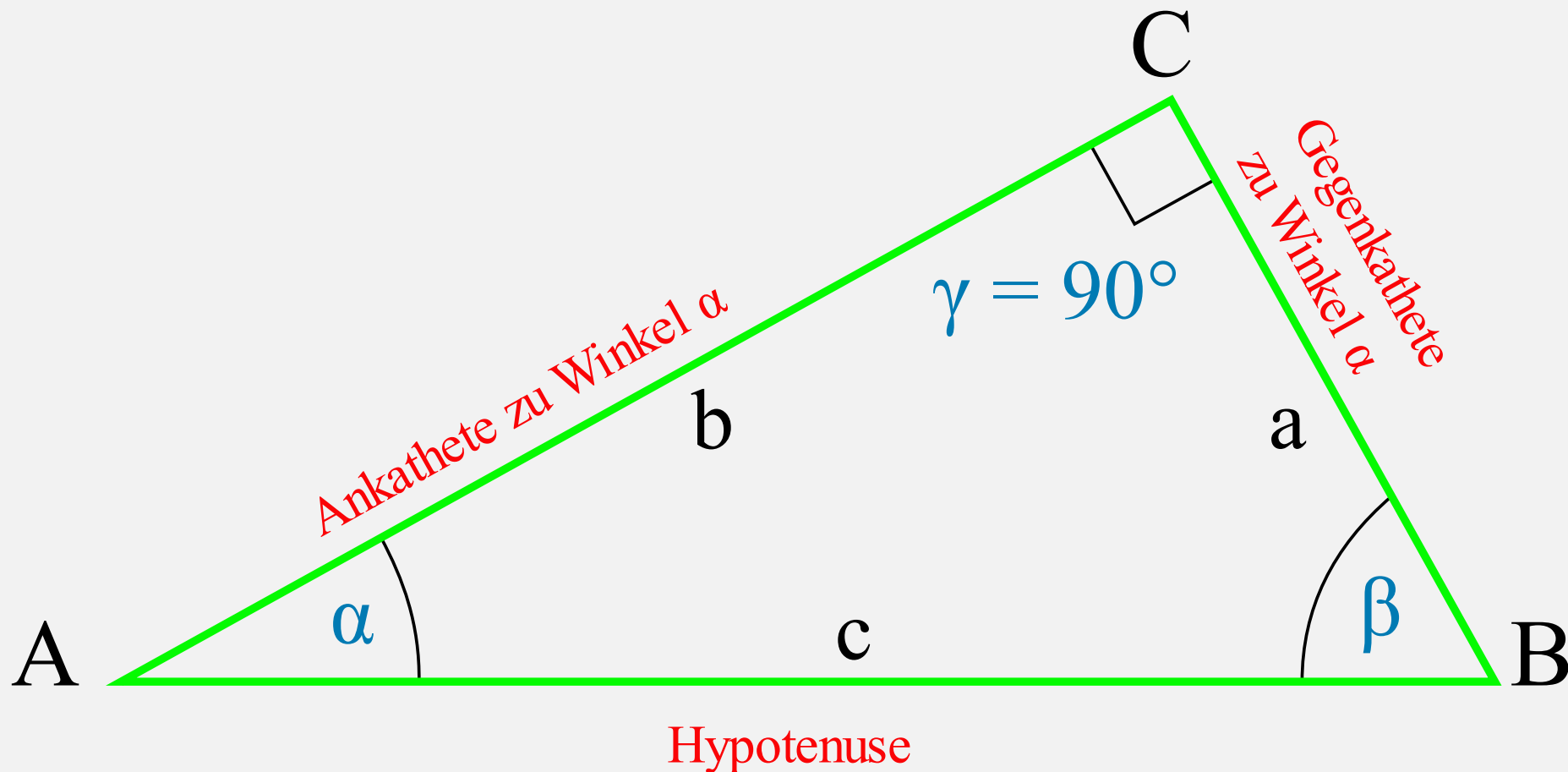
Intuition:

Population, Länge, Radioaktivität : etwas was wachsen kann (größer oder kleiner werden kann), lässt sich nur mit einem positiven Wert beschreiben.

Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion



Trigonometrische Funktionen



Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

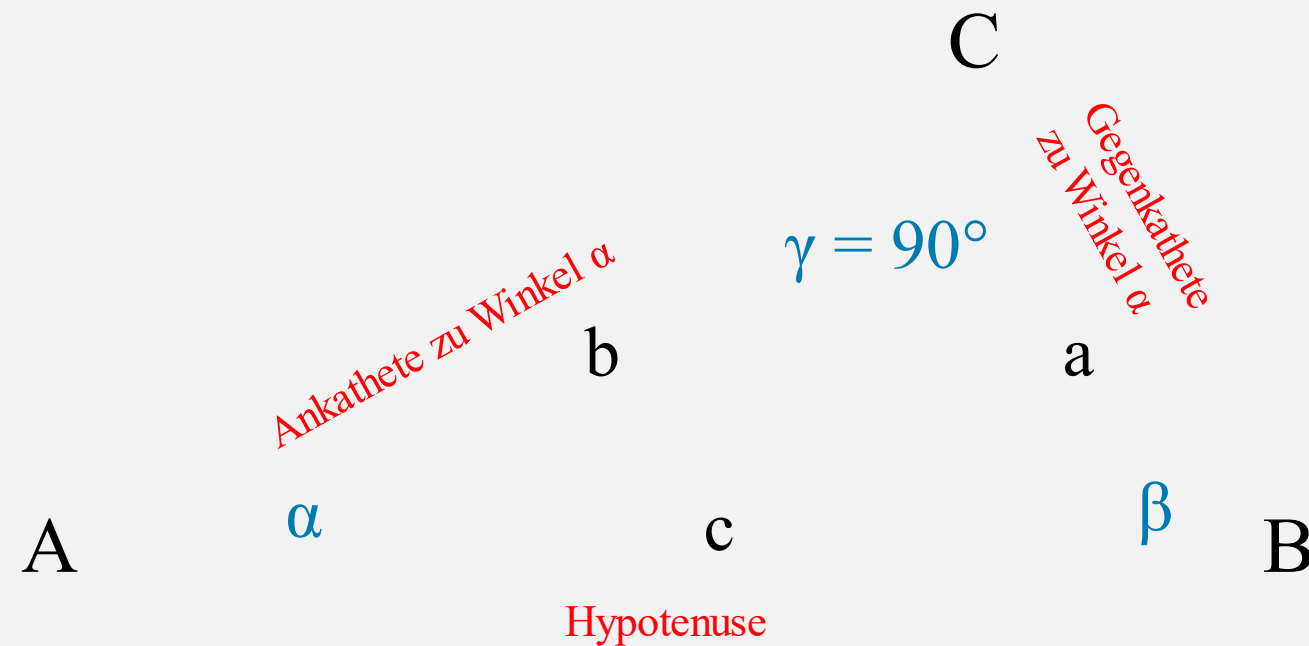
Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(\text{alpha}) = \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von alpha}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Cosinus}(\text{alpha}) = \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von alpha}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens}(\text{alpha}) = \tan(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Summe aller Winkel: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

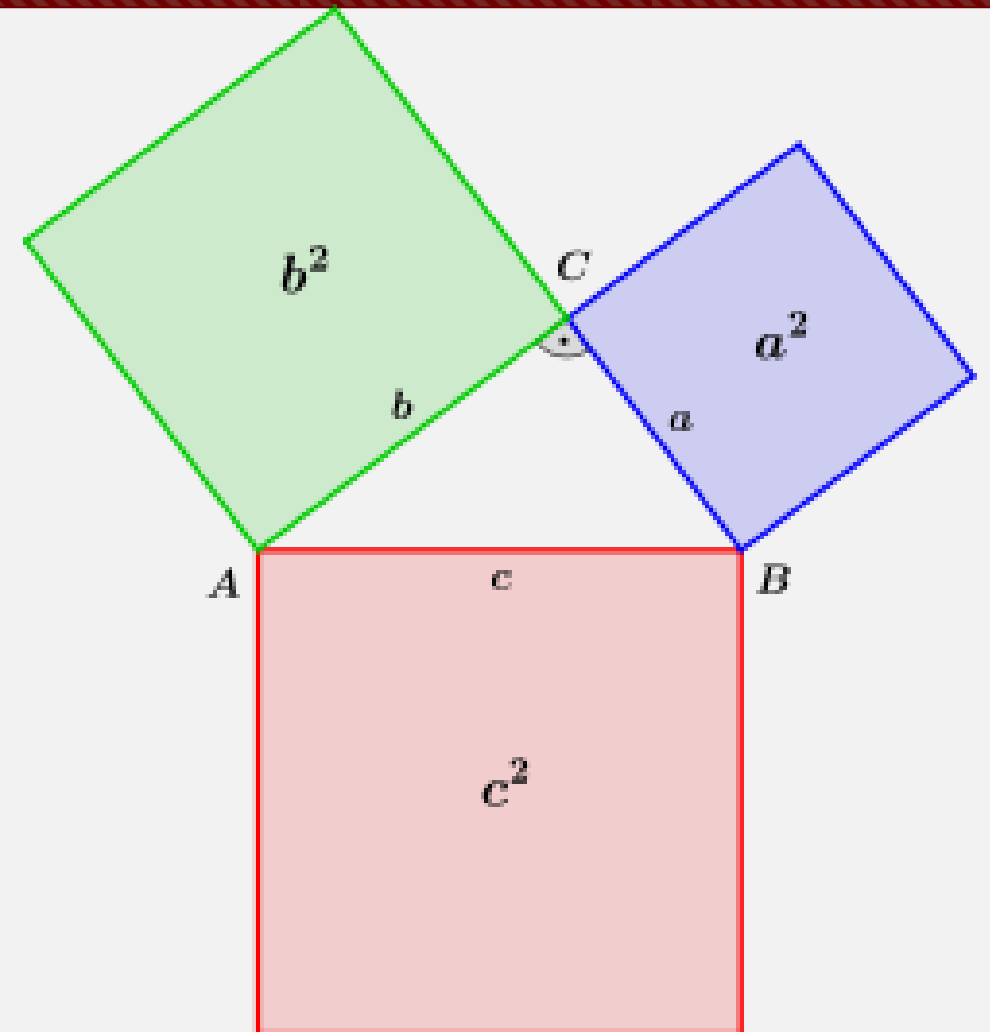


Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit
Rechtem Winkel (90 Grad)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

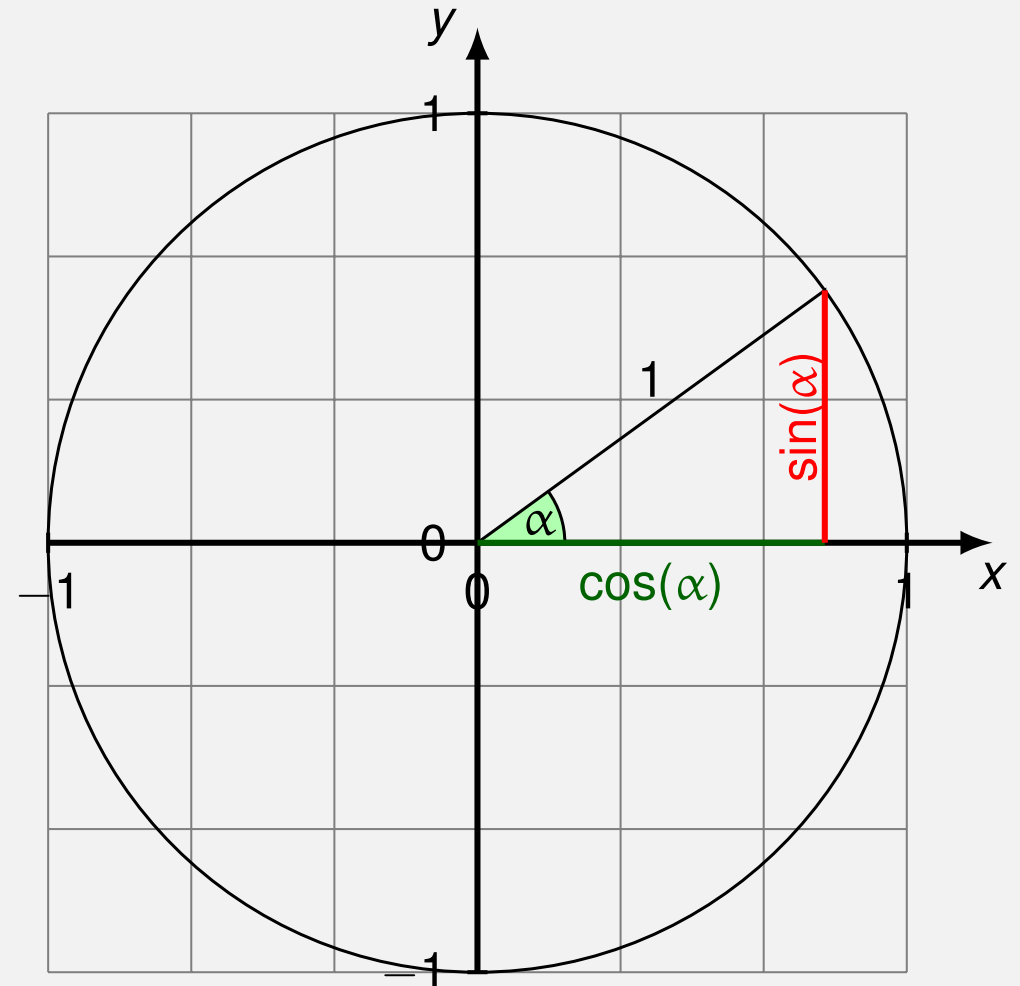


Rechtwinklige Dreiecke

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

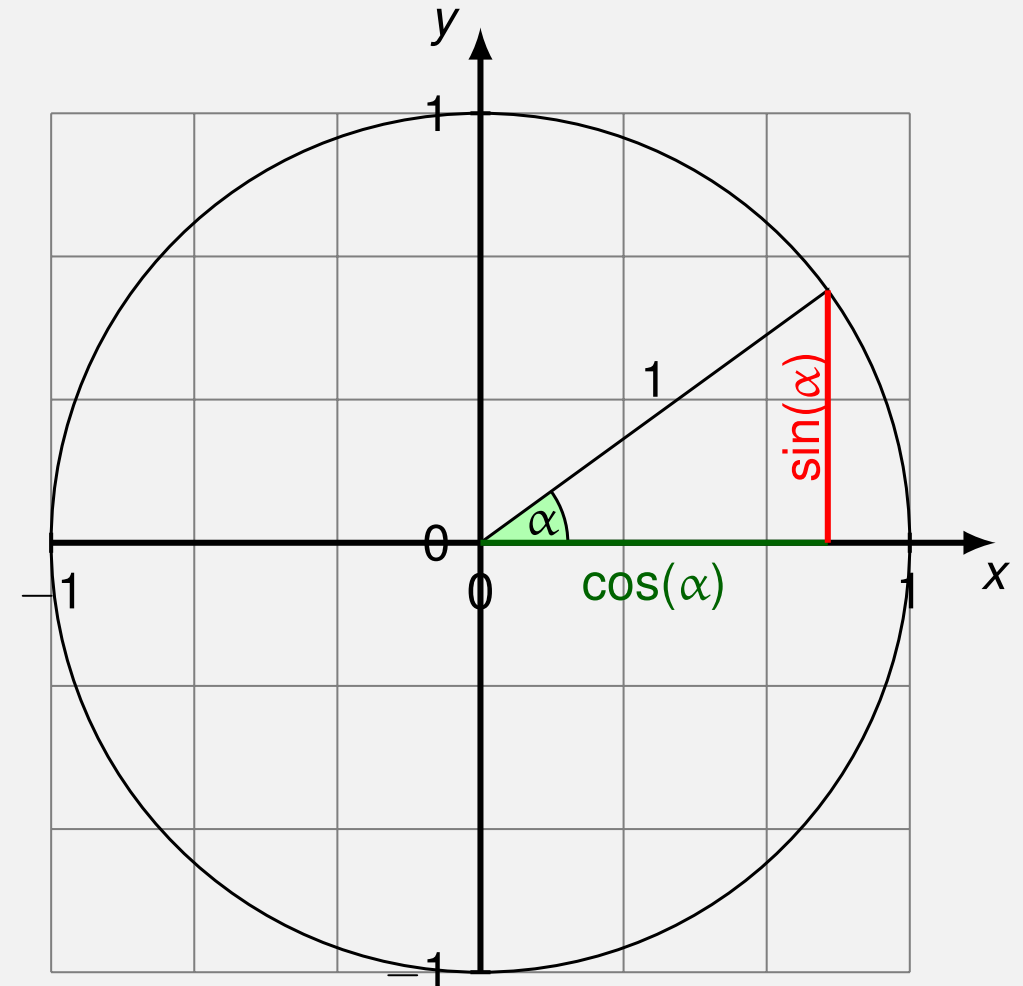
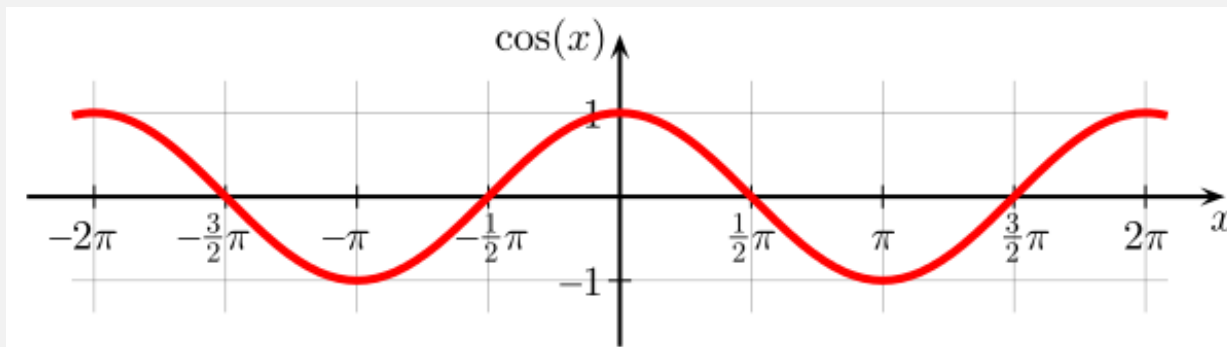
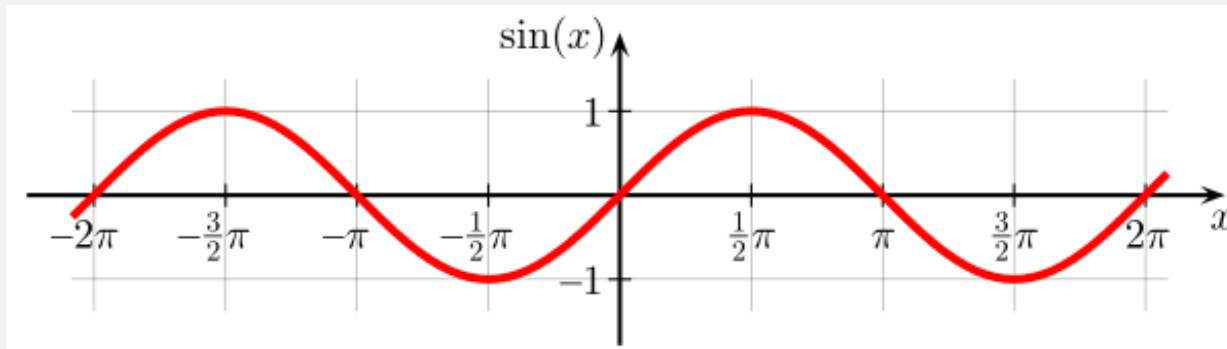
Animation:

<https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo>



Rechtwinklige Dreiecke

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

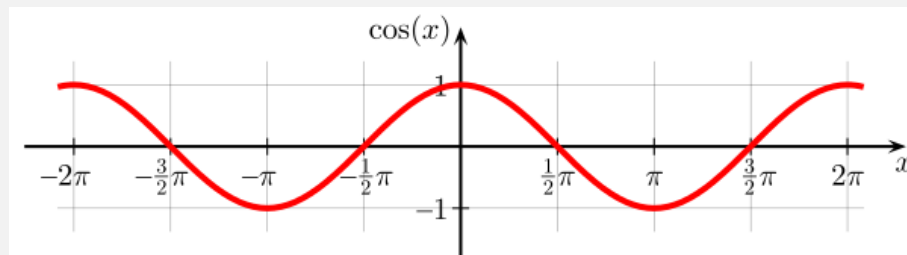
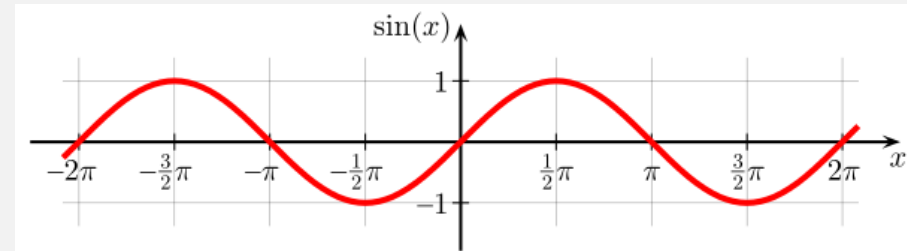
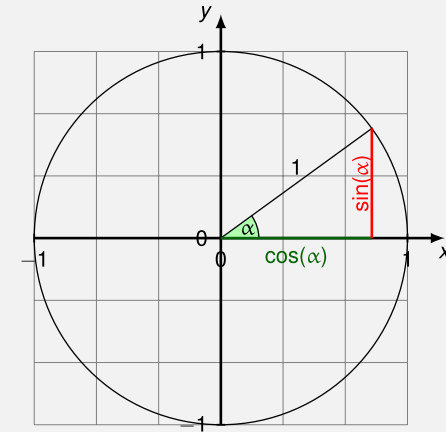


Rechtwinklige Dreiecke

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$$

Wertetabelle :

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin a = y$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos a = x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

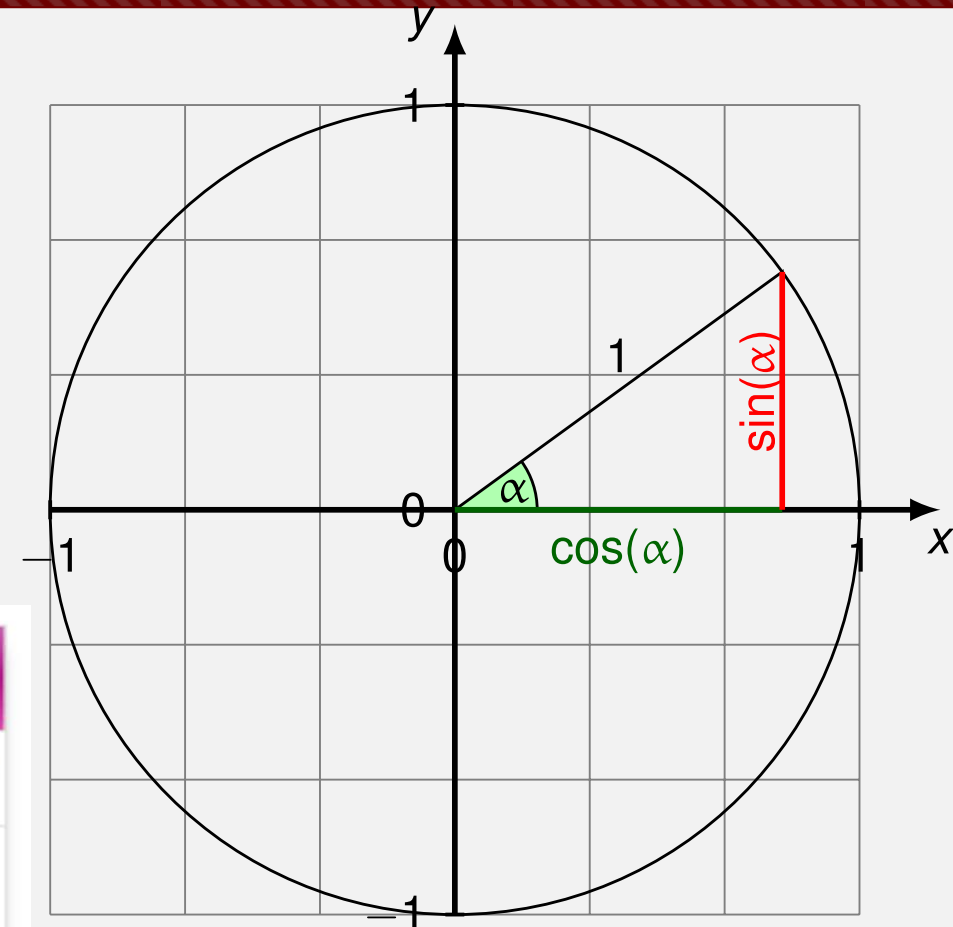


Rechtwinklige Dreiecke

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(a) = y$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(a) = x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Ziel der Veranstaltung:

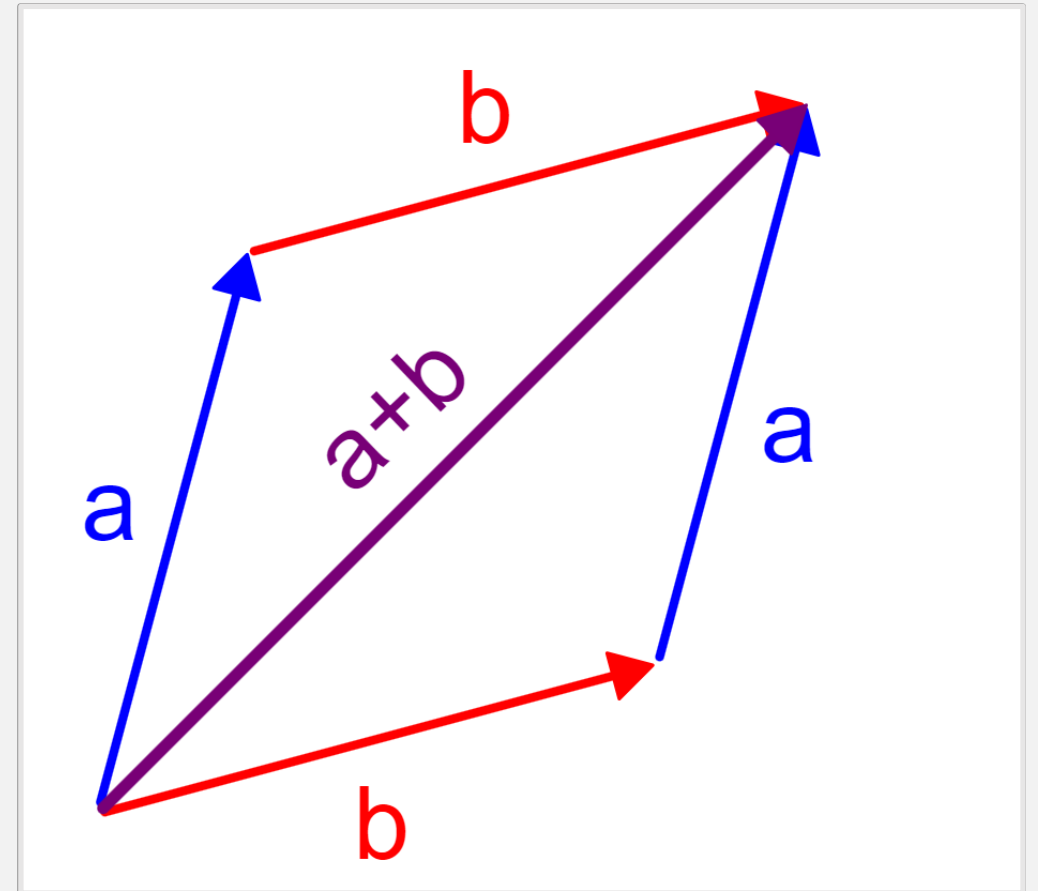
Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das
Studienkolleg :)

Mathe Grundlagen

○ Kommutativ Gesetz

$$a + b = b + a$$

$$a * b = b * a = ba$$



Mathe Grundlagen

○ Distributiv Gesetz

○ $a(b + c) = ab + ac$

○ $(b + c)/a = b/a + c/a$

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

The diagram illustrates the distributive law $a(b+c) = ab + ac$ using rectangles. On the left, a green rectangle with height a and width b is shown next to a blue rectangle with height a and width c . Below these rectangles are the labels ab and ac respectively. An equals sign follows. On the right, a single rectangle is shown, divided into a green part with width b and a blue part with width c , both with height a . Below this rectangle is the label $a(b+c)$.

$$ab + ac = a(b+c)$$

Binomische Formeln

Binomische Formeln: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

Dritter Ordnung:

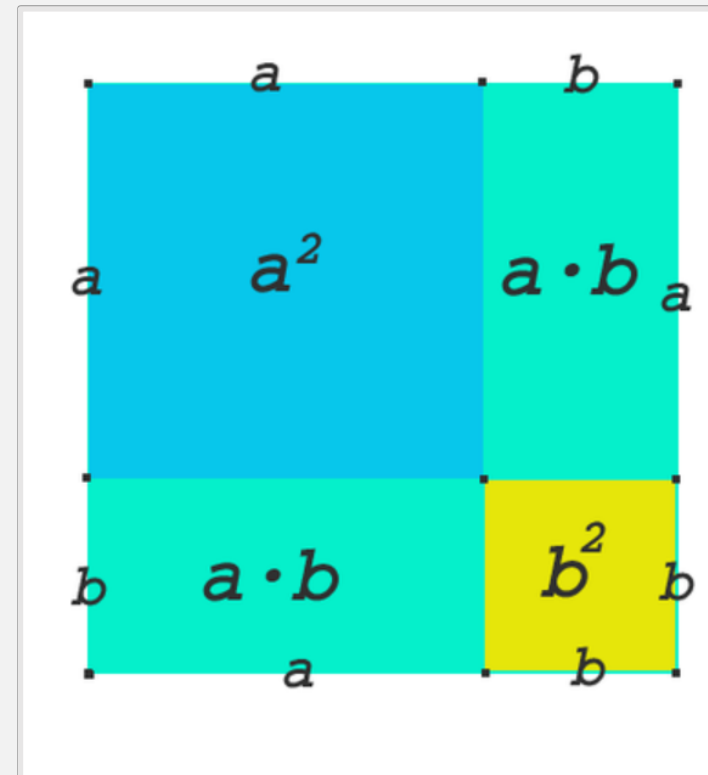
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Mathe Grundlagen

Erste Binomische Formel

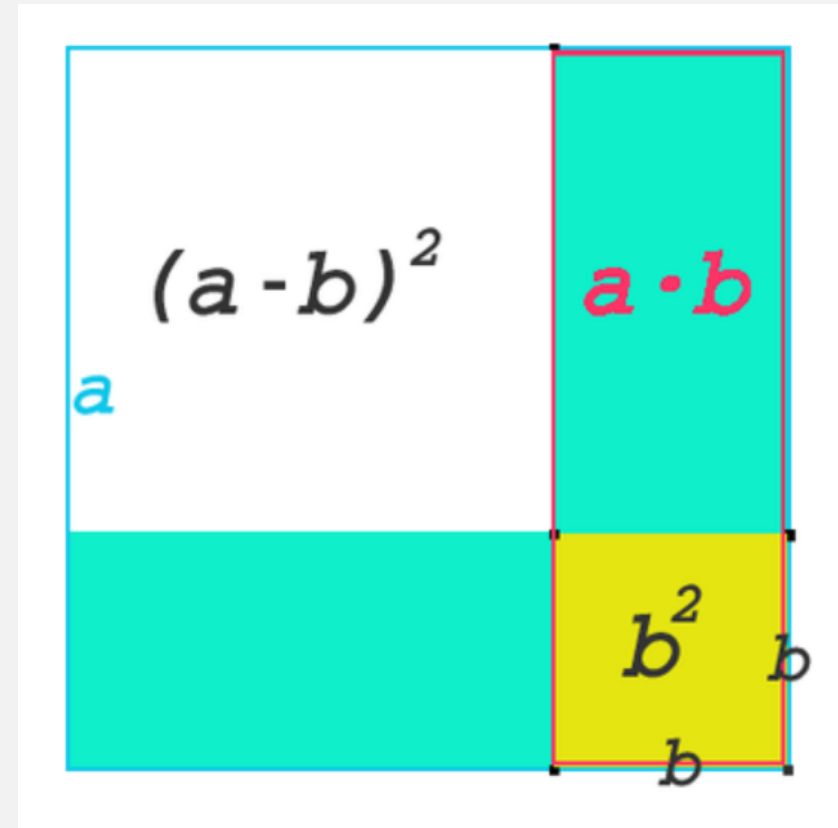
$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Zweite Binomische Formel

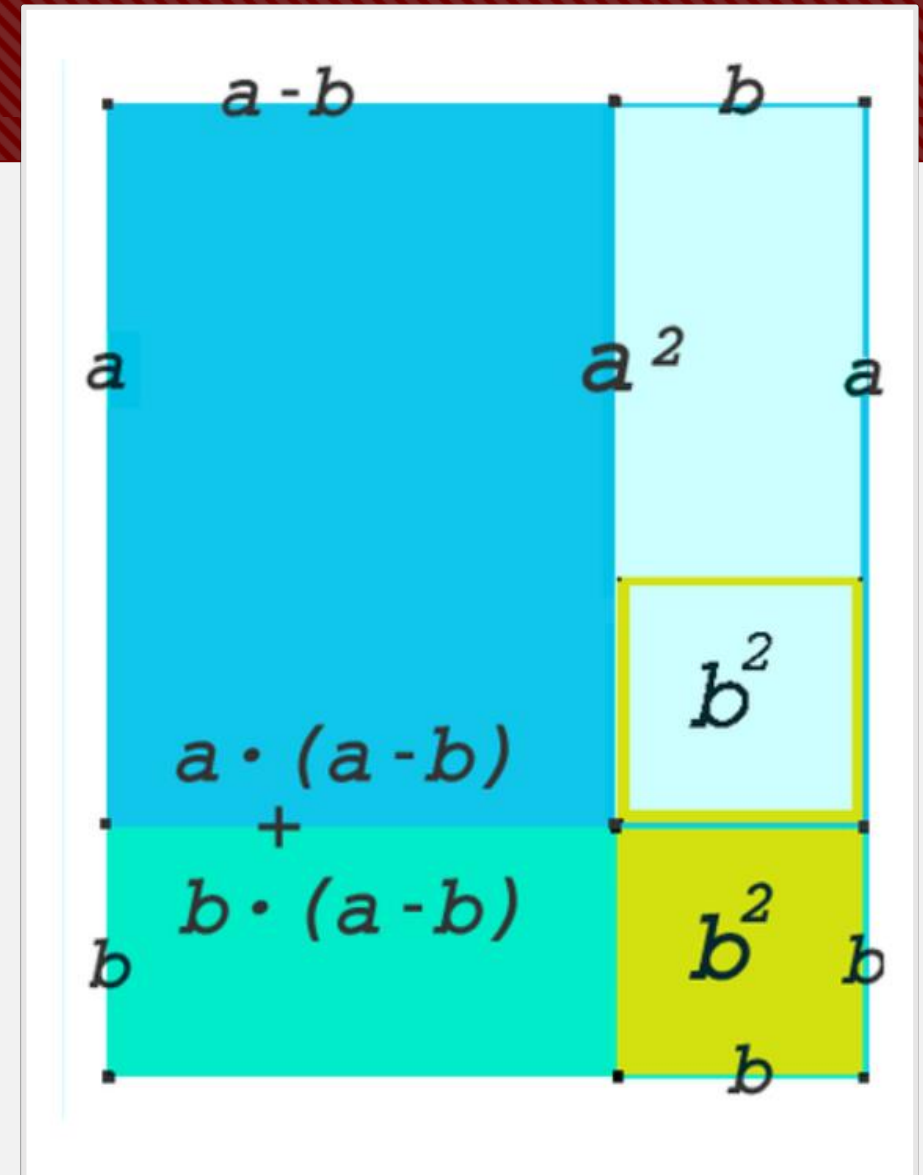
$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Dritte Binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$



Kopfrechen Tricks

Trick mit den Binomischen Formel:

$$37^2 = (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$$

oder

$$37^2 = (40 - 3)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$$

Kopfrechen Tricks

Addition und Subtraktion der Wurzel:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Auswendig lernen!

