Vortragender:
Clemens Weber

Übung 01

Vom 20.12.2023

Vorbereitung zur Aufnahme auf das Studienkolleg

Organisation

Januar 2024

Kalenderpedia
Informationen zum Kalender

KW	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20	21
4	22	23	24	25	26	27	28
5	29	30	31	1	2	3	4

1.: Neujahrstag

Angaben ohne Gewähr

Clemens Weber

Themen-Gebiete Gesamt

- Vereinfachung von Bruchtermen
- Polynomdivision
- Wurzelgleichungen - Ungleichungen
- Exponentialgleichungen & Logarithmusgleichungen
- Trigonometrischen Funktionen
- Erkennen von Funktionsgraphen
- Geometrie ; vor allem Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Kreisberechnungen, Flächen- und Volumenberechnungen

Potenzgesetze

- Potenzgesetze anwenden
- Wurzeln als Potenz schreiben

Rechnen mit Potenzen

	Bei gleicher Basis	Bei gleichem Exponent
Multiplizieren	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
Dividieren	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0$ $Wenn\ n = m \Rightarrow a^0 = 1$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; b \neq 0$
Potenzen von Potenzen	$(a^n)^m = a^{nm}$	

Rechnen mit Wurzeln

	Bei gleichem Wurzelexponent
Multiplizieren	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b};\ \ a, b \geq 0$
Dividieren	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; a \geq 0, b \geq 0$

Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Zum Rechnen wandelt man Wurzeln in Potenzen um.

Vereinfachung von Bruchtermen

- Ausklammern von Terme oder gemeinsamen Faktoren
- Binomische Formeln erkennen
- Auf gemeinsamen Nenner bringen
- Kürzen

Addieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
	Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}; \qquad a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$
Subtrahieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$
	Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}; \qquad a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$
Multiplizieren	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}; \qquad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$
Dividieren	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}; \qquad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$
Erweitern	$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ Der Zähler und der Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.
Kürzen	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ Der Zähler und der Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.
Mehrfachbrüche	Beispiel: $\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{c}{\frac{df+e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{cf}{df+e}}=\frac{a}{\frac{b(df+e)+cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{bdf+be+cf}$

Übung zu Bruchtermen

Addieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
	Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}; \qquad a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$
Subtrahieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$
	Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}; \qquad a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$
Multiplizieren	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}; \qquad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$
Dividieren	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}; \qquad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$
Erweitern	$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ Der Zähler und der Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.
Kürzen	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ Der Zähler und der Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.
Mehrfachbrüche	Beispiel: $\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{c}{\frac{df+e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{cf}{df+e}}=\frac{a}{\frac{b(df+e)+cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{bdf+be+cf}$

2. <u>Bruchterme</u>:

2.1 Fassen Sie zusammen!

$$\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}=$$

2.2 Vereinfachen Sie soweit wie möglich!

a) $$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)}=$$

b) $$\frac{a^4b^3x^2y-u^2v^5x^2y+a^4b^3xy^2-u^2v^5xy^2}{u^2v^5xy-a^4b^3xy-u^2v^5x^2y^2+a^4b^3x^2y^2}=$$

c) $$\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^{n-3}}-\frac{82}{2^{n+1}}=$$

d) $$\frac{1-x^2}{x^8}+\frac{1+x}{x^6}-\frac{1}{x^5}=$$

Quadratische Gleichungen

- Nullstellen bestimmen
- Binomische Formeln erkennen
- In Termen schreiben
- Faktorisieren

https://de.khanacademy.org/ma
/quadratics/solving-quadratic-eq
factoring/a/solving-quadratic-equ
factoring

- Quadratische Ergänzung

https://www.studimup.de/abitur/l
algebra/quadratische-ergänzung

Lösen Quadratischer Gleichungen

Anwenden der Lösungsformel für Quadratische Gleichungen

Für die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:
x_1 und x_2 sind zwei Lösungen der quadratischen Gleichung:
$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Lösen biquadratischer Gleichungen

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Lösung durch Substitution $z = x^2$ und anschließender Lösung der quadratischen Gleichung.

Clemens Weber

Binomische Formeln

Binomische Formeln: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

Dritter Ordnung:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

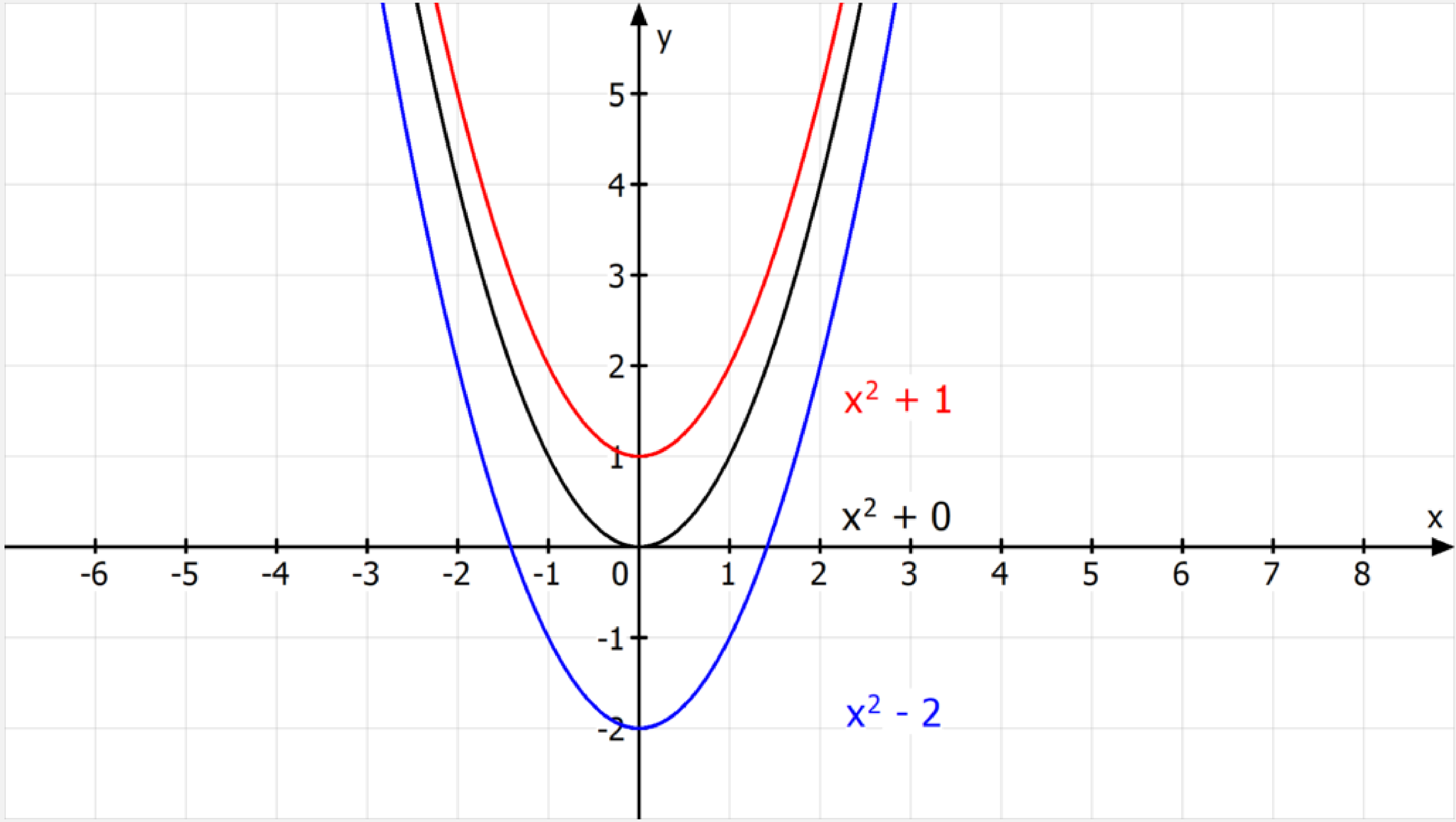
Clemens Weber

Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Auswendig lernen!



Übung zu Quadratischen Gleichungen

Lösen Quadratischer Gleichungen

Anwenden der Lösungsformel für Quadratische Gleichungen

Für die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:
x_1 und x_2 sind zwei Lösungen der quadratischen Gleichung:
$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Lösen biquadratischer Gleichungen

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Lösung durch Substitution $z = x^2$ und anschließender Lösung der quadratischen Gleichung.

b) $x^2 + 7x = 0$;

d) $x^2 + 6x - 3 = 0$;

f) $6x^2 - 5x - 6 = 0$;

h) $3x^2 - 10x + 6 = 0$

j) $x^2 + x - 1 = 0$;

Übung zu Quadratischen Gleichungen

Lösen Quadratischer Gleichungen

Anwenden der Lösungsformel für Quadratische Gleichungen

Für die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:
x_1 und x_2 sind zwei Lösungen der quadratischen Gleichung:
$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Lösen biquadratischer Gleichungen

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Lösung durch Substitution $z = x^2$ und anschließender Lösung der quadratischen Gleichung.

g) $x - 6\sqrt{x} + 4 = 0;$

i) $(3x^2 - 7) \cdot (2x^2 - 5) = x^2 - 1$

Übung zu Potenzgesetzen

Rechnen mit Potenzen

	Bei gleicher Basis	Bei gleichem Exponent
Multiplizieren	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
Dividieren	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0$ $Wenn\ n = m \Rightarrow a^0 = 1$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; b \neq 0$
Potenzen von Potenzen	$(a^n)^m = a^{nm}$	

Rechnen mit Wurzeln

	Bei gleichem Wurzelexponent
Multiplizieren	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b};\ \ a, b \geq 0$
Dividieren	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; a \geq 0, b \geq 0$

Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Zum Rechnen wandelt man Wurzeln in Potenzen um.

i) $\left(x^{\frac{2}{5}} + 4\right)^{\frac{4}{3}} = 16;$

k) $(x-2)\sqrt{x^2 - 9} = 0;$

m) $\sqrt{x^2 - 5} = x - 5;$

o) $(x+6)^{0,75} = 8;$

Logarithmus und Exponential-Funktion

8.1 Formeln für Logarithmen:

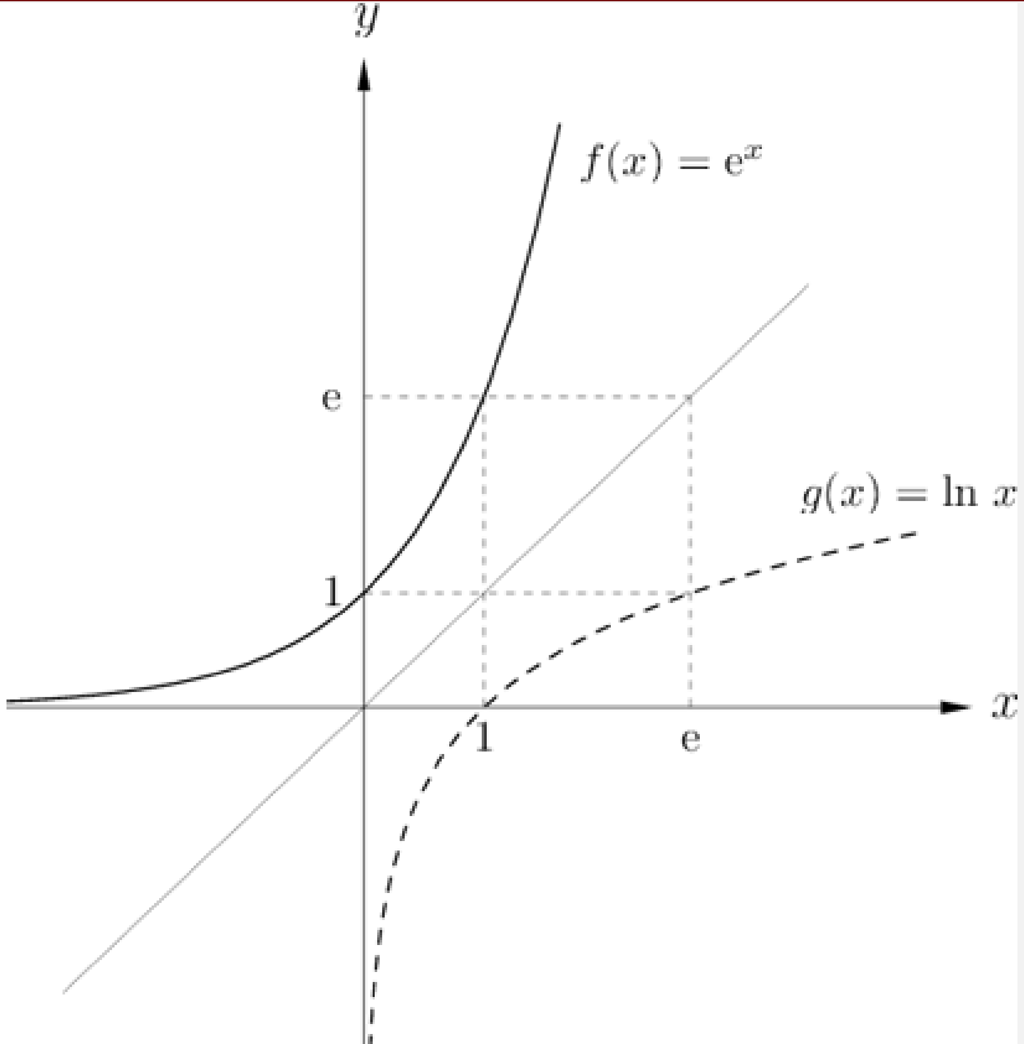
$$\boxed{b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y}$$

$\left(y \in IR^+ \ und \ b \in IR^+ ohne \ \{1\}\right)$

z. B. $0{,}5^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{0,5} 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 0{,}5}$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a$; $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$;

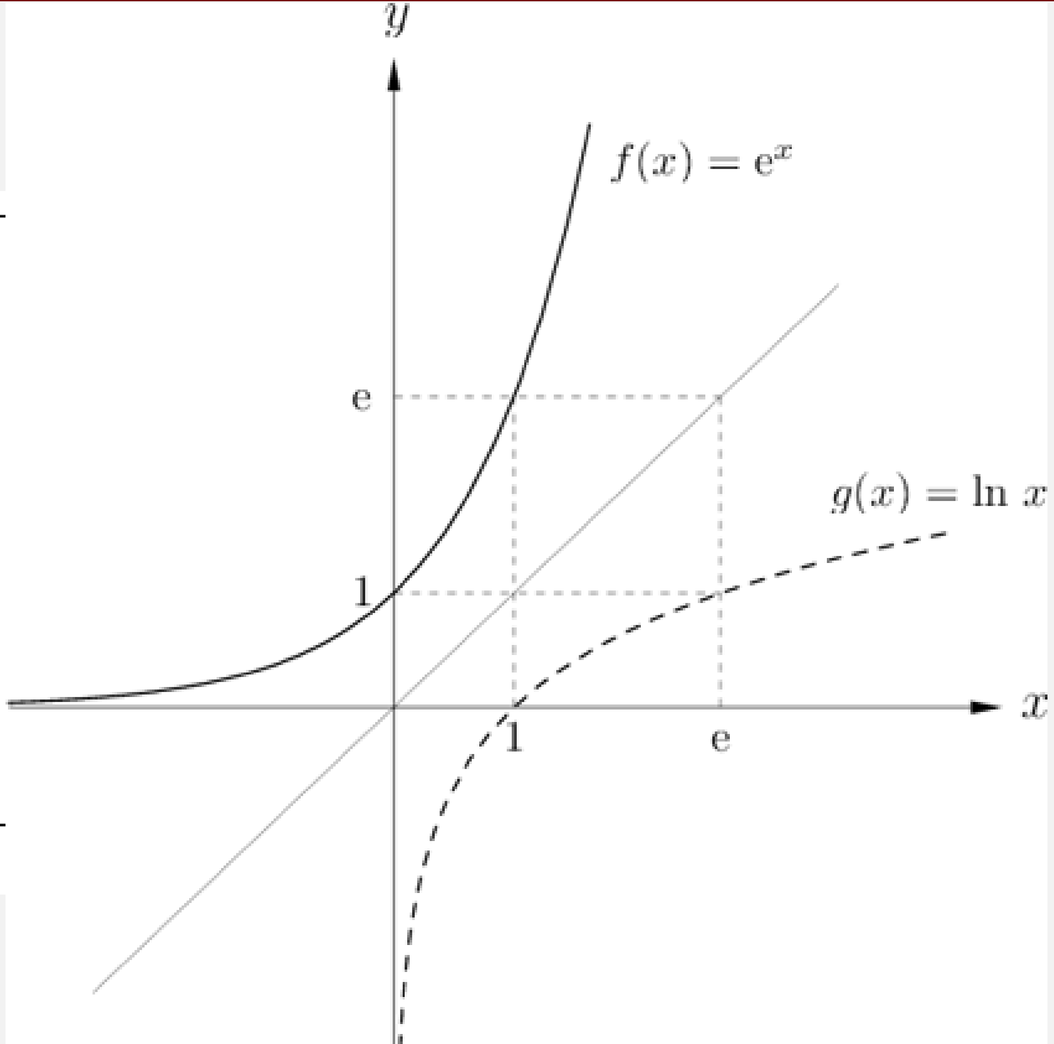
Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$;
($e = 2{,}71828\ldots$ heißt Eulersche Zahl)



Logarithmus und Exponential-Funktion

<u>Rechengesetze für Logarithmen</u> $(u, v > 0)$

$\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$	$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$
$\log_b u^n = n \cdot \log_b u$,	$\log_b 1 = 0$
$\log_b b^n = n$	$b^{\log_b n} = n$
$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ die Basisumrechnungsformel	$(a > 0 \; und \; b, c \in IR \; ohne \; \{1\})$



Übung zu $\log(x)$ & e^x

<u>Rechengesetze für Logarithmen</u> $(u, v > 0)$

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n \cdot \log_b u \quad ,$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^n = n$$

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$ die Basisumrechnungsformel

$$(a > 0 \; und \; b, c \in IR \; ohne \; \{1\})$$

Vorlesung 6 Umfang

- Fragen zu Aufgaben?
- Geraden-Gleichung oder Punkt Steigung Formel
- Extremwerte einer Funktion:
  - Schnittpunkte (Achsen)
  - Sattelpunkt
  - Maximum oder Minimum

Feedback Runde Q&A

Wie findet ihr den Kurs?

Was wünscht ihr euch für den Kurs?

Anregungen oder Fragen

Aufgaben:

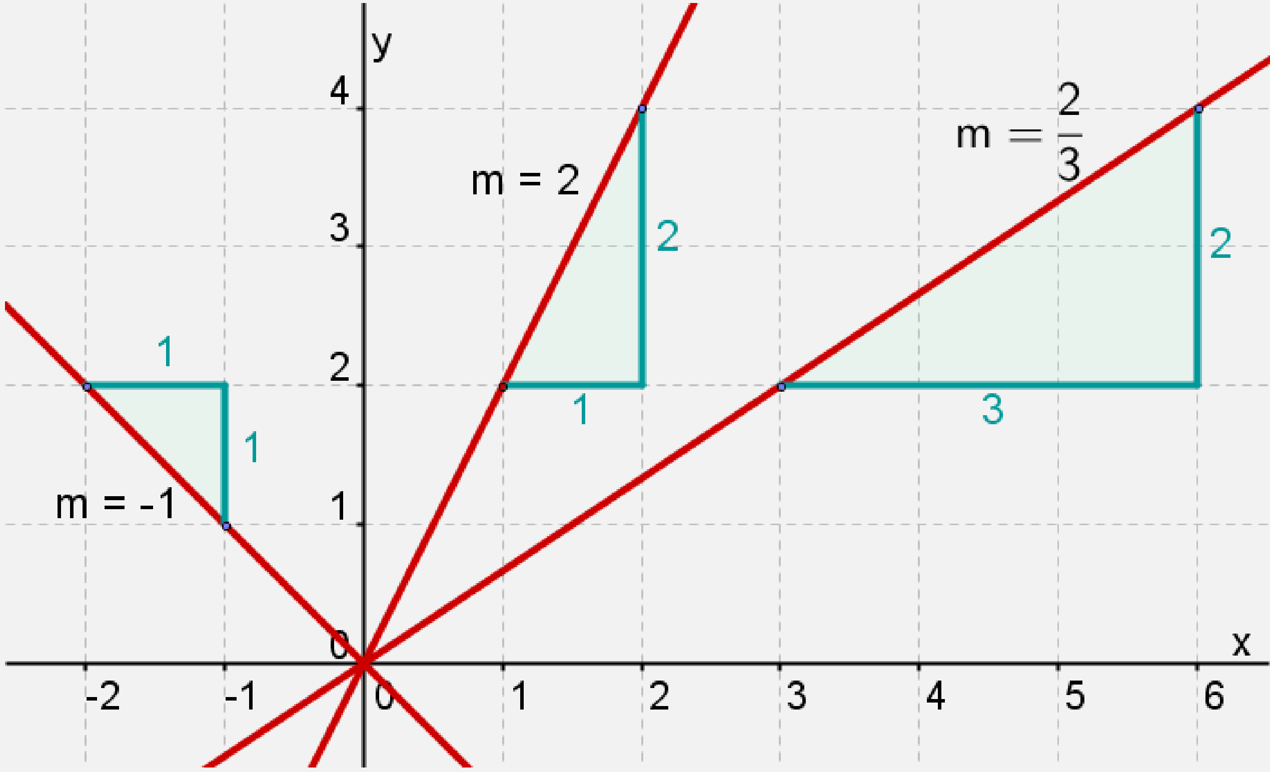
- Konstanz-Mathe-Formelsammlung
- https://www.maths2mind.com/schluesselwoerter/graph-einer-funktion
- https://mathe.aufgabenfuchs.de/funktion/funktion.shtml
- https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck

Ursprungs-Geraden in der Ebene(2D)

- Geraden durch den Ursprung x,y= (0,0)
- Besitzen eine Steigung (Steigungsdreieck)
- Steigung m =

  Weglänge in x Richtung/
  Dazugehörige Weglänge in y-Richtung
- Geraden-Gleichung durch den Ursprung:

  y = m*x

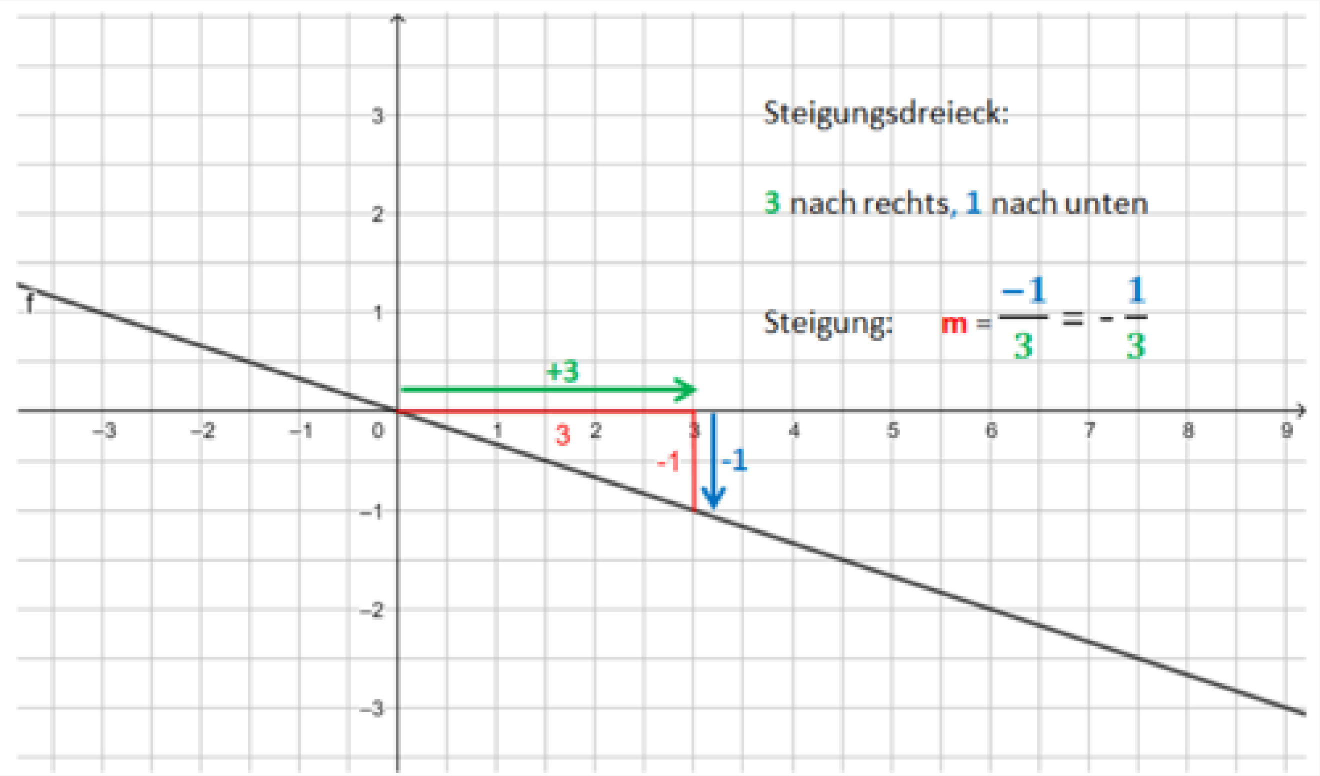


Ursprungs-Geraden in der Ebene(2D)

- Geraden durch den Ursprung x,y= (0,0)
- Besitzen eine Steigung (Steigungsdreieck)
- Steigung m =

  Weglänge in x Richtung/
  Dazugehörige Weglänge in y-Richtung
- Geraden-Gleichung durch den Ursprung:

  y = m*x



Allgemein Geraden in der Ebene (2D)

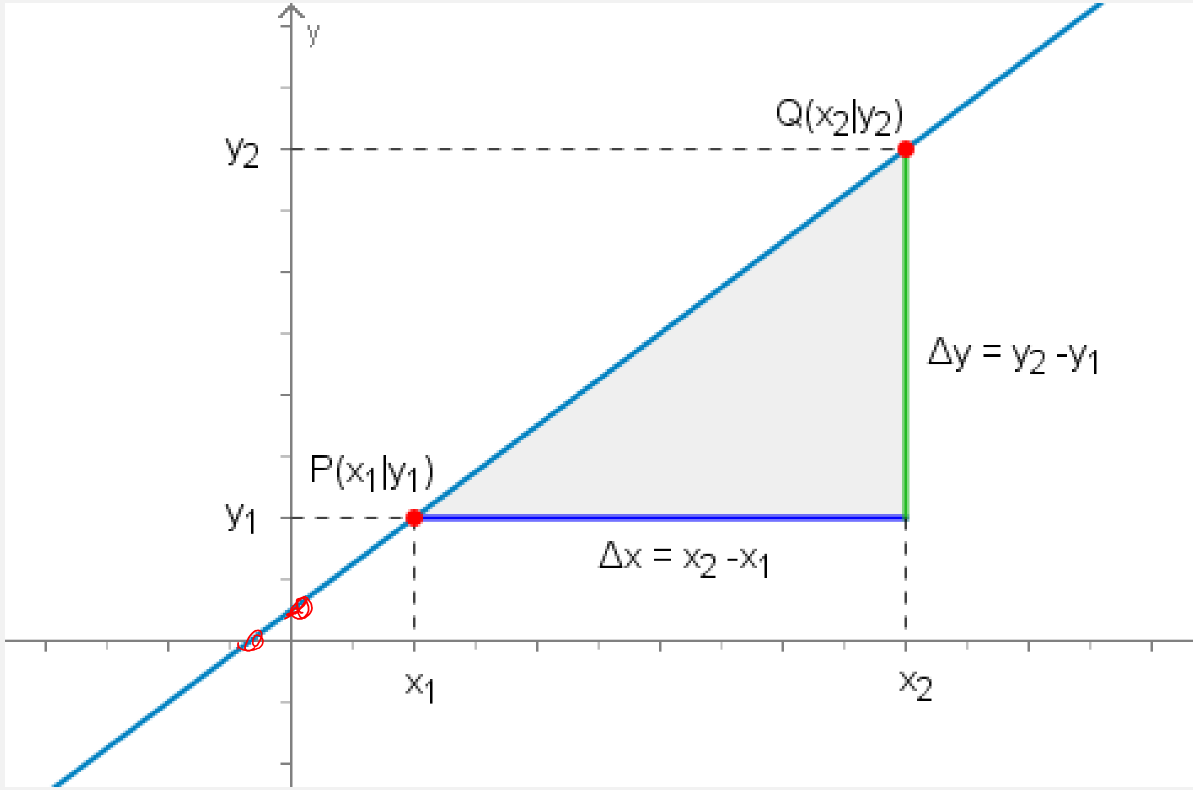
- Kann man als vom Ursprung verschobene Geraden betrachten.
- Steigung m =

  Weglänge in y Richtung/
  Dazugehörige Weglänge in x-Richtung
- Steigung kann mit zwei Punkten (P & Q) die auf der Gerade liegen ermittelt warden
- Geradengleichung:

  $$y = m * (x - Schnittpunkt\ xAchse)$$

Oder

$$y = m * x + Schnittpunkt\ yAchse$$



Allgemein Geraden in der Ebene (2D)

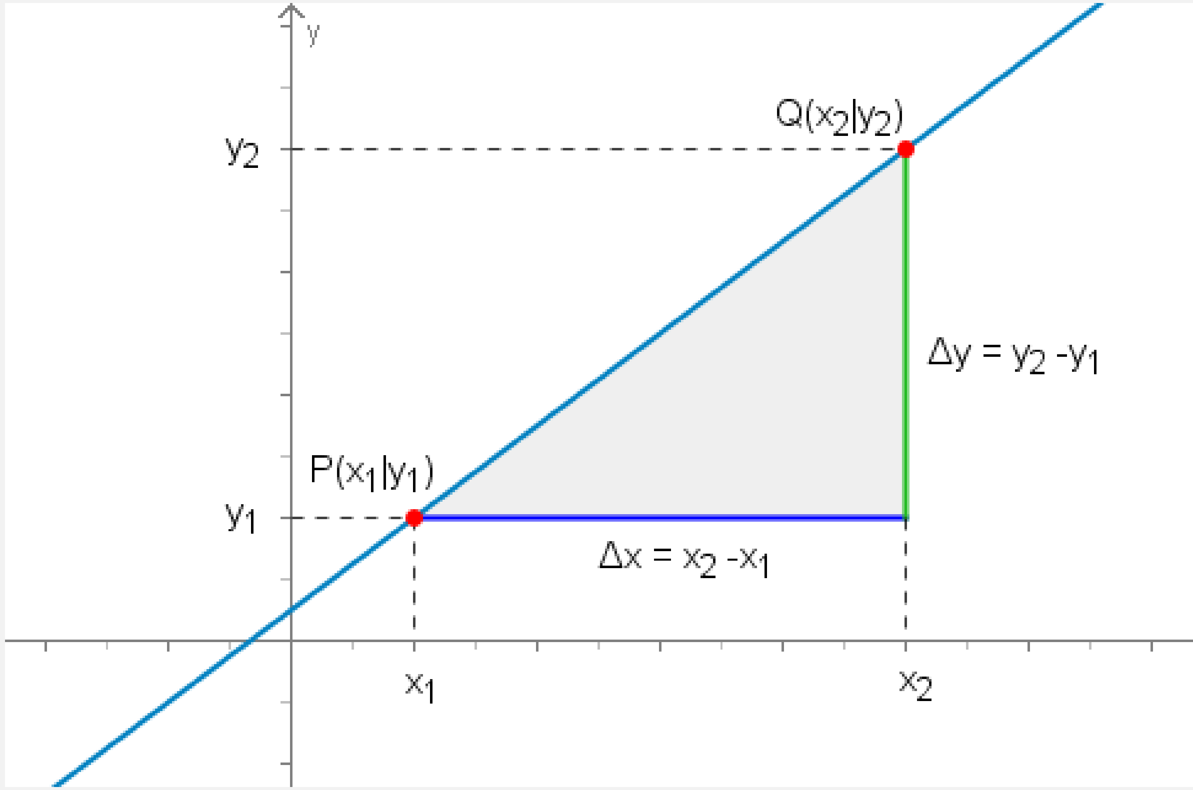
- Geradengleichung:

$$y = m * (x - Schnittpunkt\ xAchse)$$

Oder

$$y = m * x + Schnittpunkt\ yAchse$$

- Punkt einsetzen um Schnittpunkt(c1 oder c2) zu bestimmen:
- $y_1 = x_1 * m + c_1$
- $y_1 = m * (x_1 - c_2)$



Allgemein Geraden in der Ebene (2D)

- Geradengleichung:

$$y = m * (x - Schnittpunkt\ xAchse)$$

Oder

$$y = m * x + Schnittpunkt\ yAchse$$

- Punkt einsetzen um Schnittpunkt (c1 oder c2) zu bestimmen:
- $y_1 = x_1 * m + c_1$
- $y_1 = m * (x_1 - c_2)$

Funktionsgleichung : Y-Achsenabschnitt und Steigungsdreieck berechnen

Eine Gerade verläuft durch die Punkte P(1|1) und Q(2|3). Bestimme die Funktionsgleichung.

Aus den gegebenen Punkten kann man das **Steigungsdreieck** bestimmen:

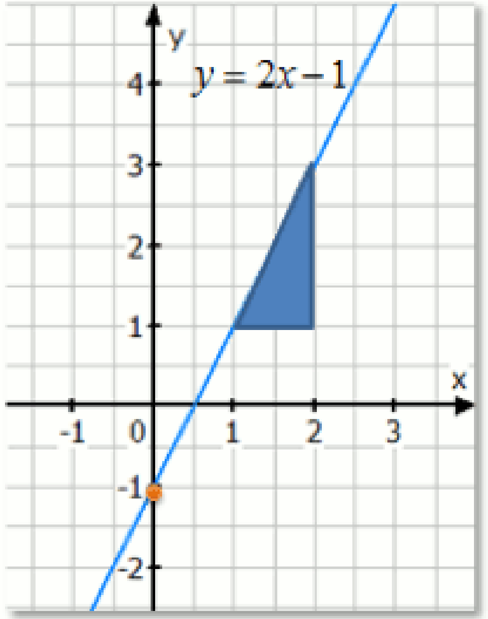
$$Steigung\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

Für den **y-Achsenabschnitt** setzt man ein Punkt in die Funktionsgleichung:

$y = 2x + c \quad mit\ P(1|1)$

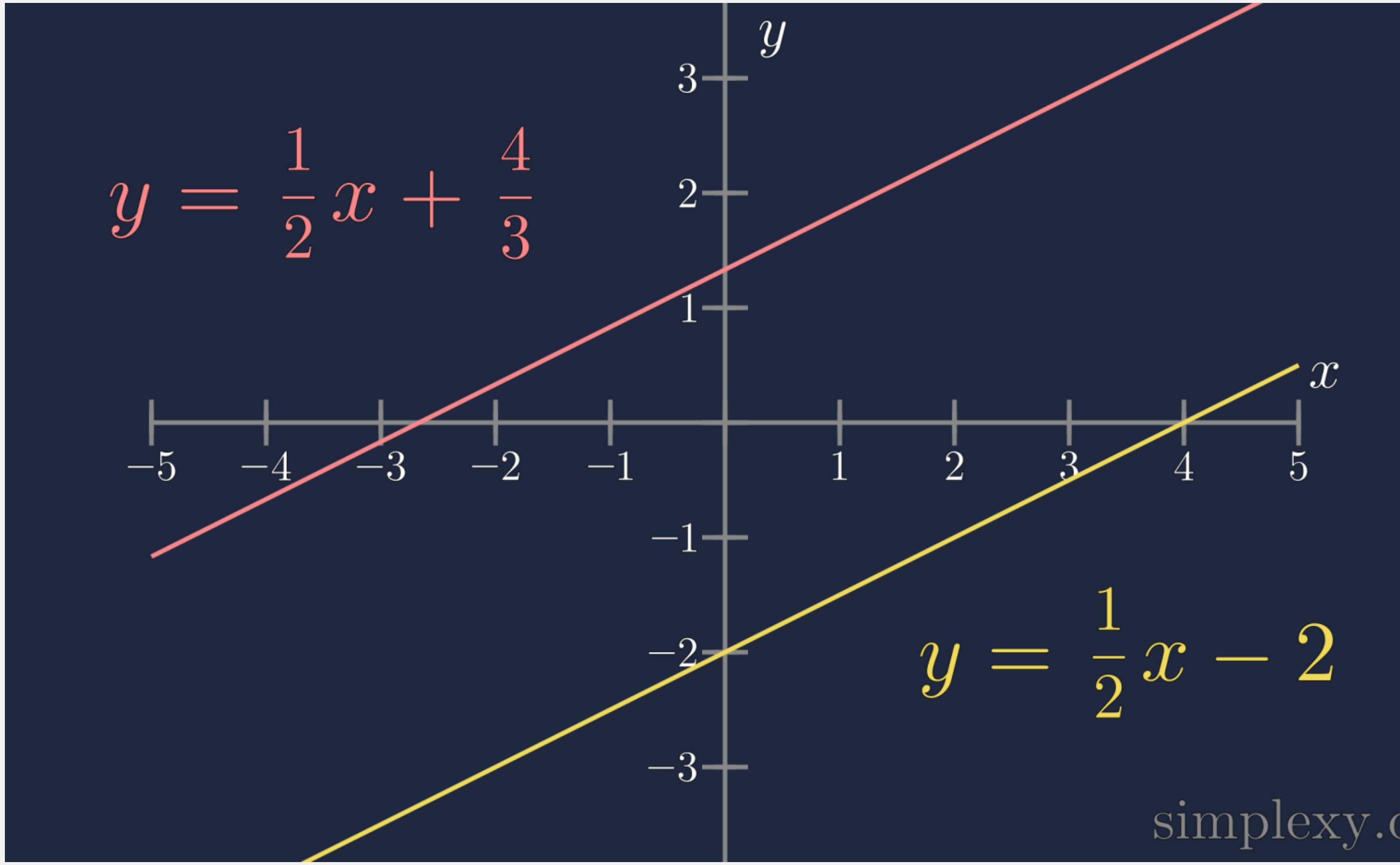
$1 = 2 + c \quad \rightarrow \quad c = -1$

Daraus folgt die Funktionsgleichung: $y = 2x - 1$



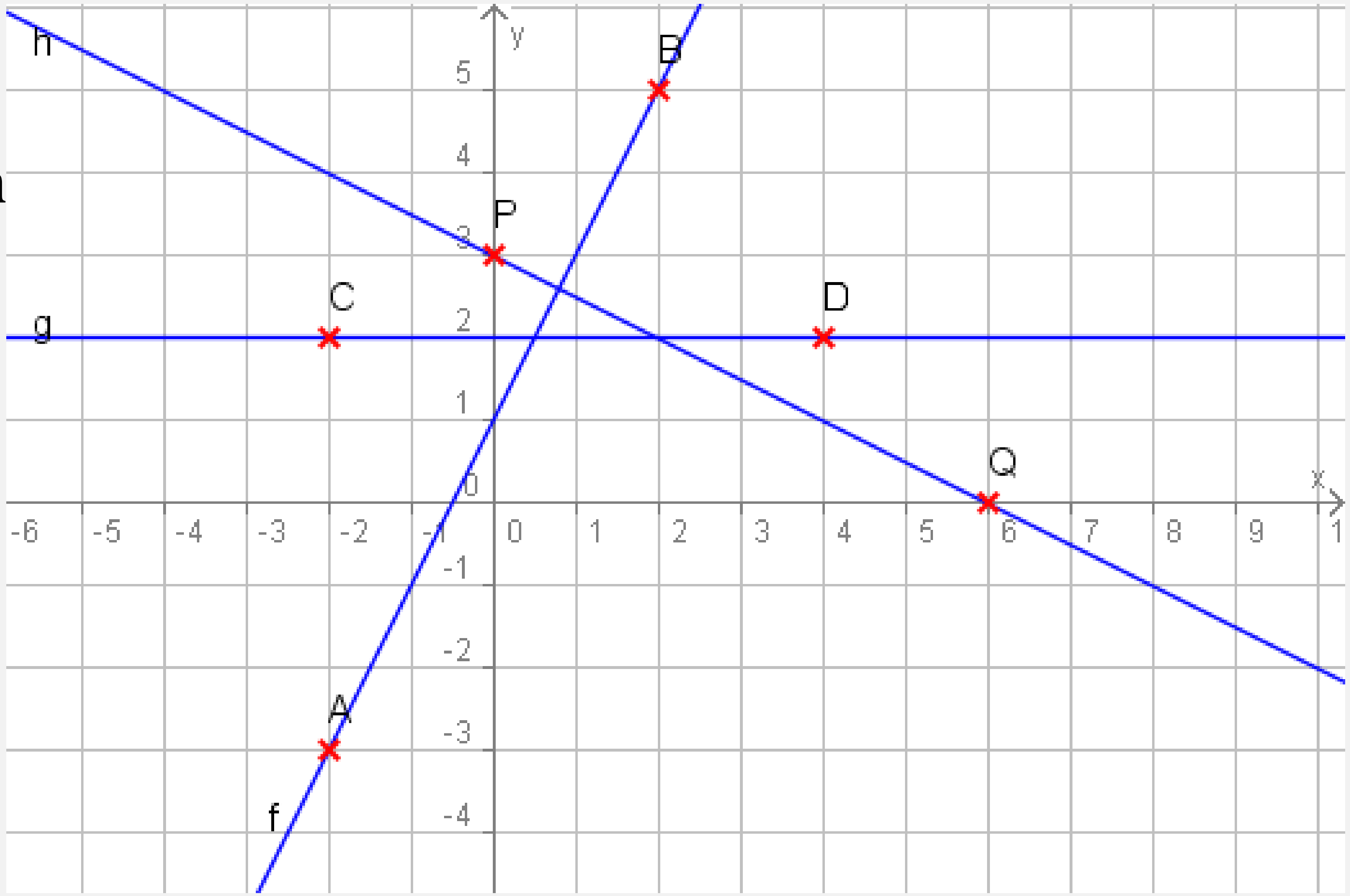
Aufgabe: Schnittpunkte mit den Achsen Bestimmen

- Gegeben sind zwei Geradengleichungen
- Bestimmen Sie jeweils die Schnittpunkte mit den Achsen



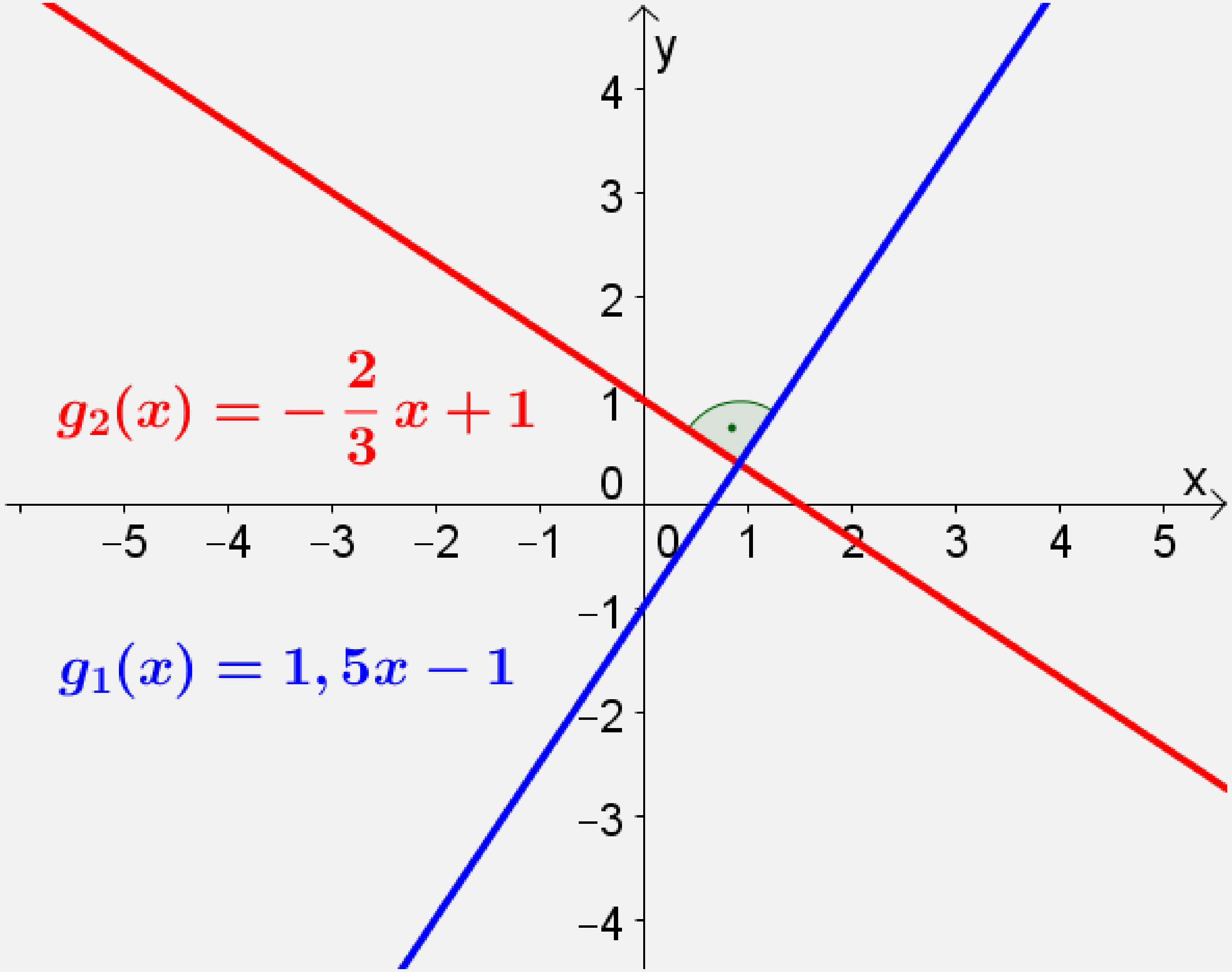
Aufgabe: Verschiedene GeradenGleichungen

- Schreiben Sie je eine der Gera
- $y_1 = m * x + h$
- $y_2 = m * (x - d)$
- Oder Gemischt:
- $y_3 = m * (x - d) + h$



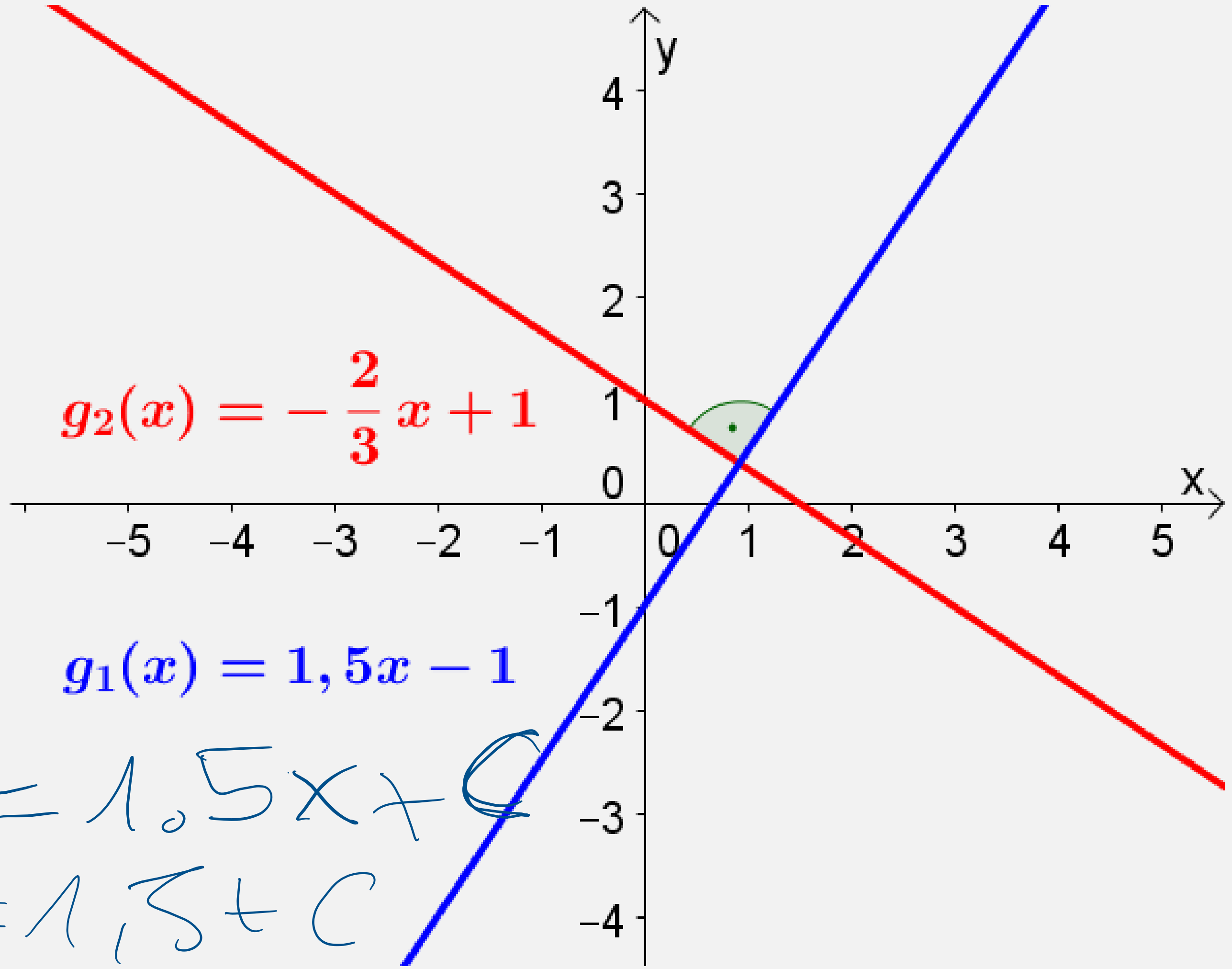
Senkrechte Geraden

- GeradenGleichungen:
  - $y_1 = m_1 * x + h_1$
  - $y_2 = m_2 * x + h_2$ oder $y_2 = m_2 * (x - d)$
- Eine Gerade steht senkrecht zu einer anderen, wenn:
  - $m_1 = -\frac{1}{m_2}$



Senkrechte Geraden Aufgabe

- Gegeben ist g_2.
- Bestimmen Sie eine Geradengleichung von der Gerade die:
  - Senkrecht zu g_2
  - Den Punkt (0,1) schneidet
- GeradenGleichungen:
  - $y_1 = m_1 * x + h_1$
  - $y_2 = m_2 * x + h_2$ oder $y_2 = m_2 * (x - d)$
- Eine Gerade steht senkrecht zu einer anderen, wenn:
  - $m_1 = -\frac{1}{m_2}$



$0 = 1{,}5x + c$

$0 = 1{,}5 + c$

Allgemein Geraden in der Ebene (2D)

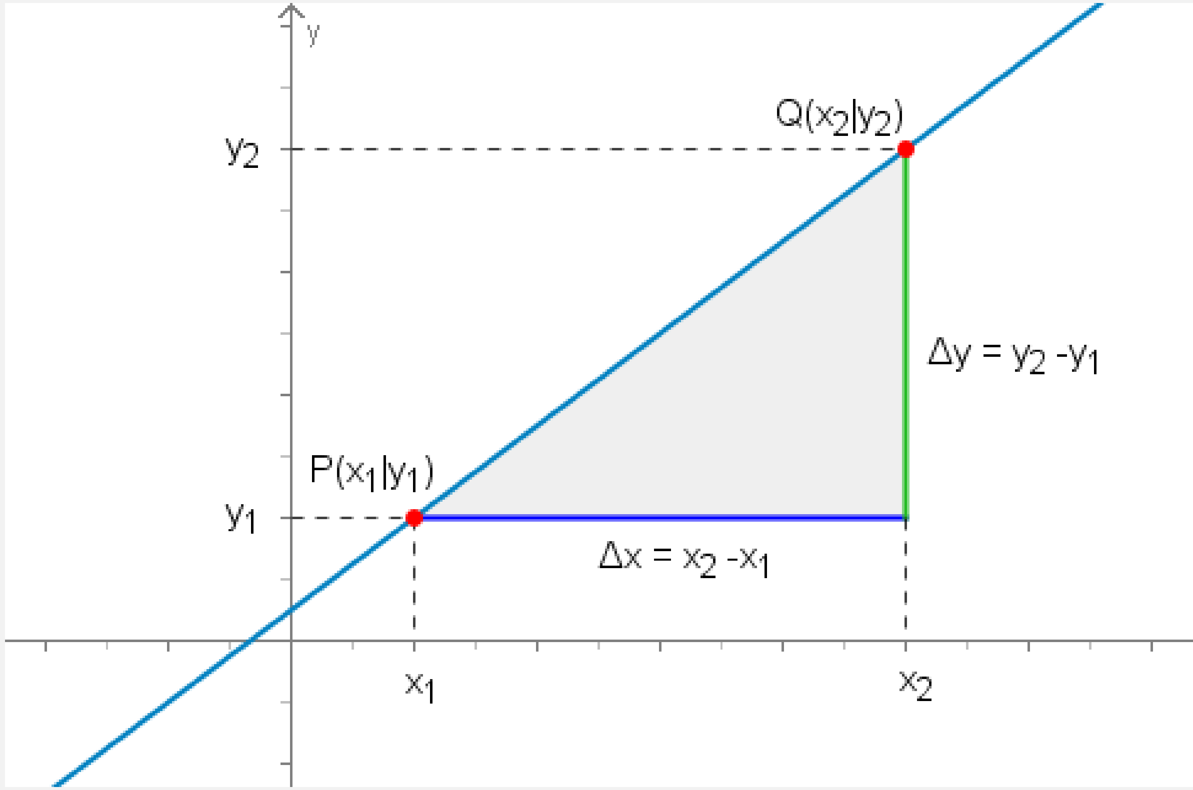
- Kann man als vom Ursprung verschobene Geraden betrachten.
- Steigung m =

  Weglänge in y Richtung/
  Dazugehörige Weglänge in x-Richtung
- Steigung kann mit zwei Punkten (P & Q) die auf der Gerade liegen ermittelt warden
- Geradengleichung:

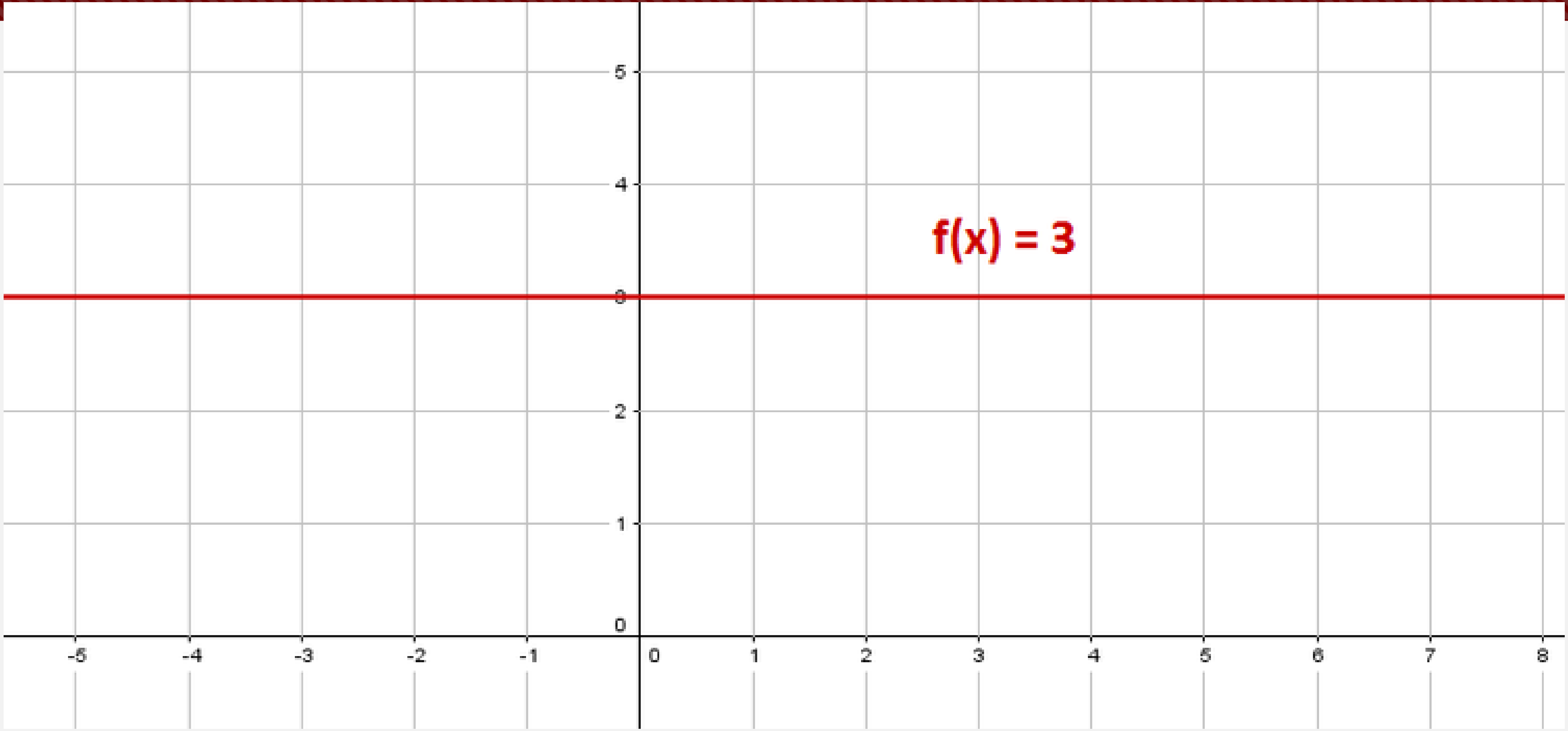
  $$y = m * (x - Schnittpunkt\ xAchse)$$

Oder

$$y = m * x + Schnittpunkt\ yAchse$$



Waagerechte Gerade – Welche Steigung?

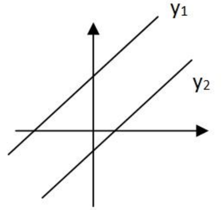
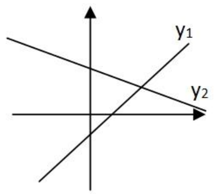
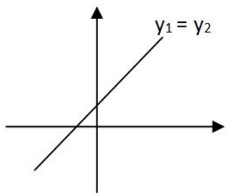


Aufgaben Zu Geraden

- https://mathe.aufgabenfuchs.de/funktion/funktion.sht

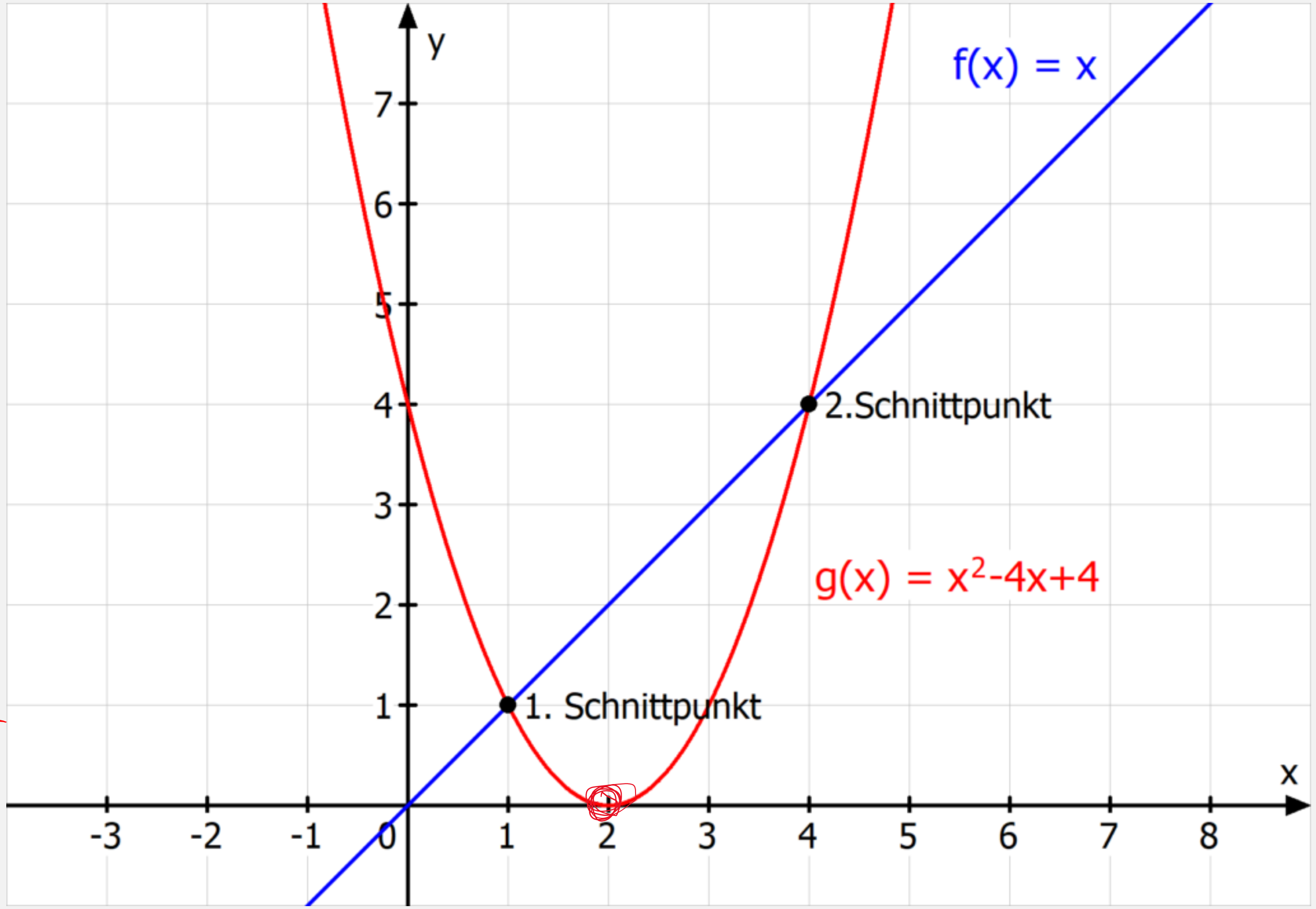
<u>**Lagebeziehungen von Geraden!**</u>

Geraden haben einen, keinen oder unendlich viele Schnittpunkte gemeinsam!

kein Schnittpunkt	**genau ein Schnittpunkt**	**unendlich viele Schnittpunkte**
Geraden sind parallel	**Geraden sind nicht parallel und nicht identisch**	**Geraden sind identsich**
Für die Geradengleichung $y=mx+n$ gilt:		
m ist bei beiden gleich n ist beliebig	**m ist ungleich n ist beliebig**	**m und n sind jeweils gleich**
		
Beispiel: $y=3x+4$ $y=3x+2$	**Beispiel:** $y=2x+2$ $y=3x+2$	**Beispiel:** $y=2x+2$ $y=\frac{8}{4}x+2$

Extrem Punkte von Funktionen

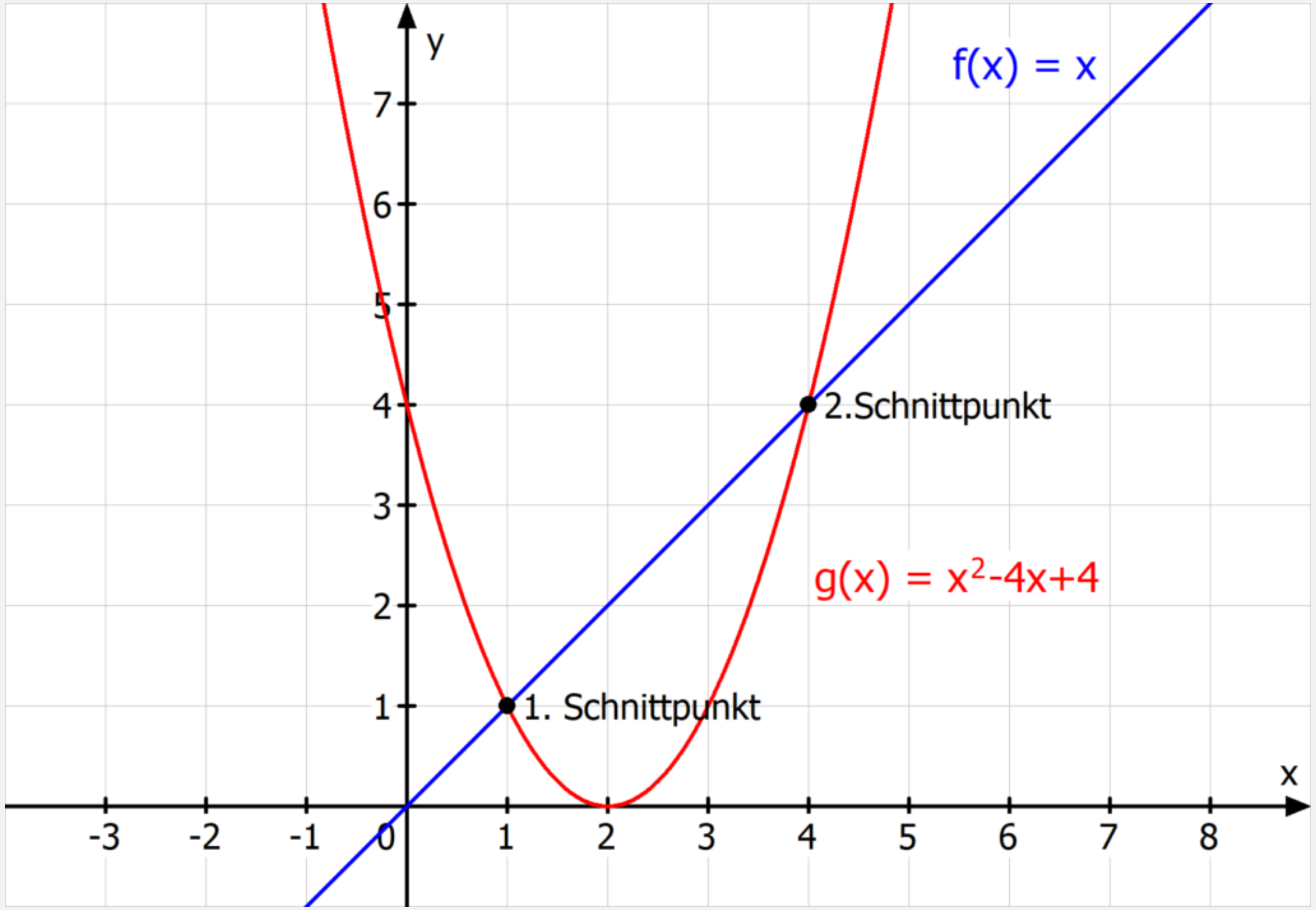
- Schnittpunkte mit:
  - Achsen
  - Anderen Funktionen
    (Geraden sind Funktionen)



$g'(x) = (x-2)^2 = x$

Extrem Punkte von Funktionen

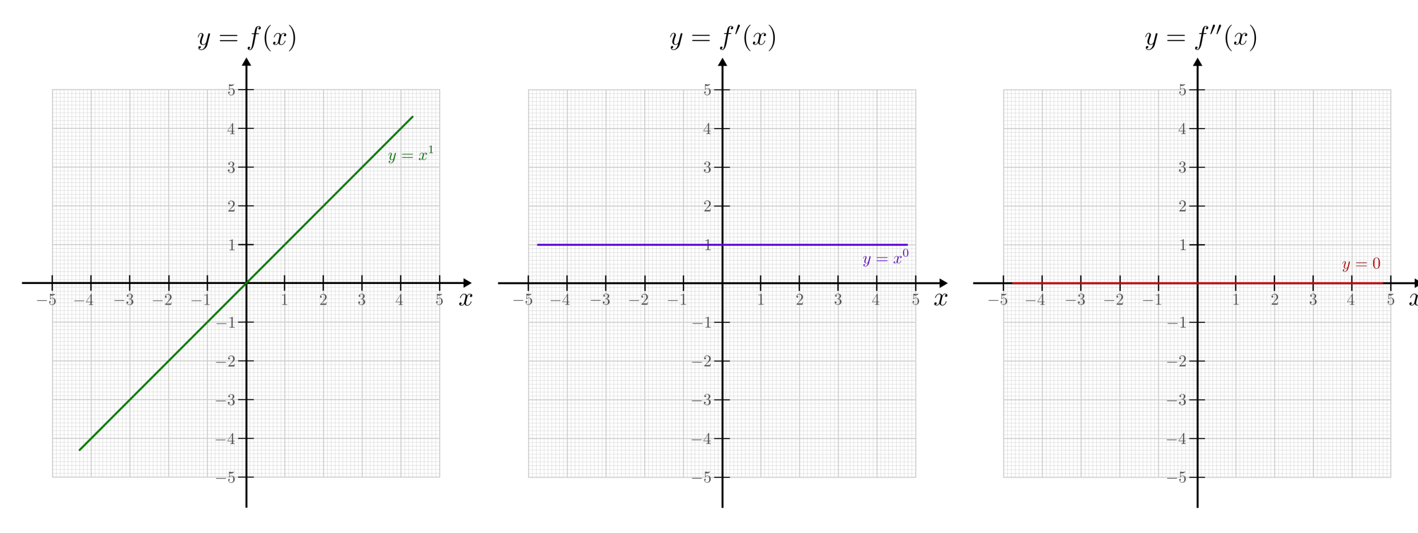
- Aufgaben: https://www.studimup.de/übungen/analysis/schnittpunkte-linearer-funktionen/
- Schnittpunkte mit:
  - Achsen
  - Anderen Funktionen
    (Geraden sind Funktionen)



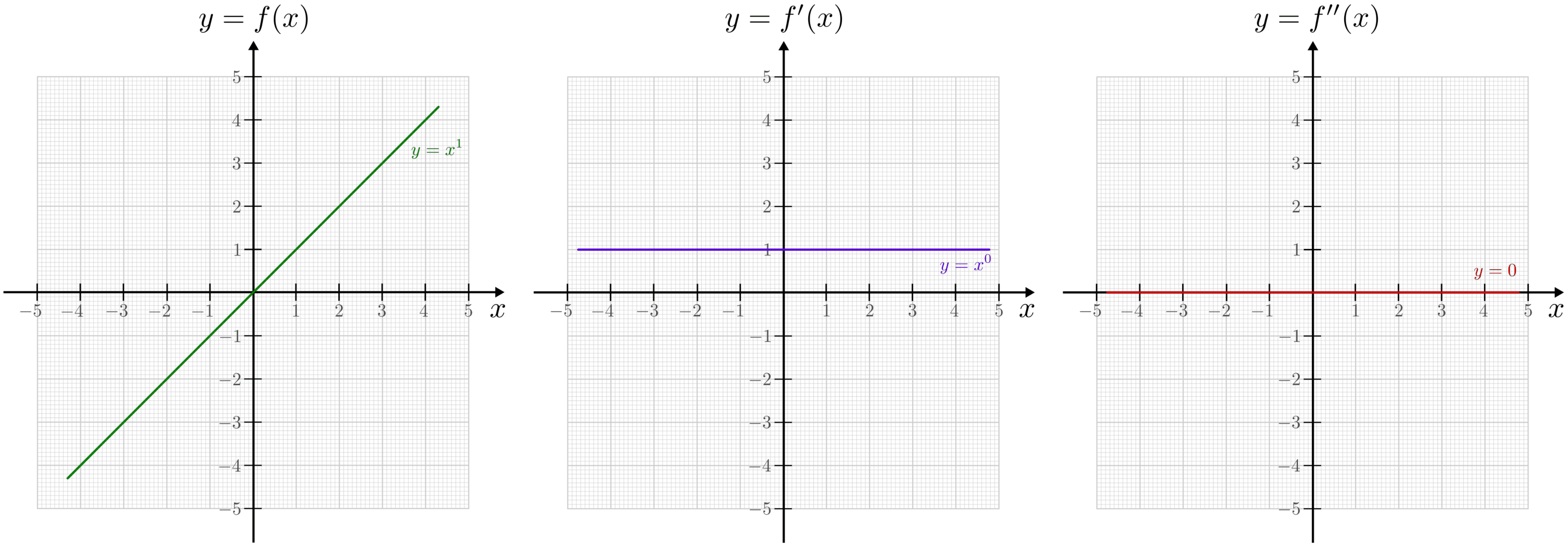
Minimum & Maximum

- Wenn die Steigung einer Funktion an einer Stelle Null ist, dann hat sie dort eine Extremstelle!
- Die Ableitung einer Funktion entspricht der Steigung an einem gegeben x-Wert.
- Ausblick Ableitungs Regeln:

https://www.studimup.de/abitur/analysis/ableitung/



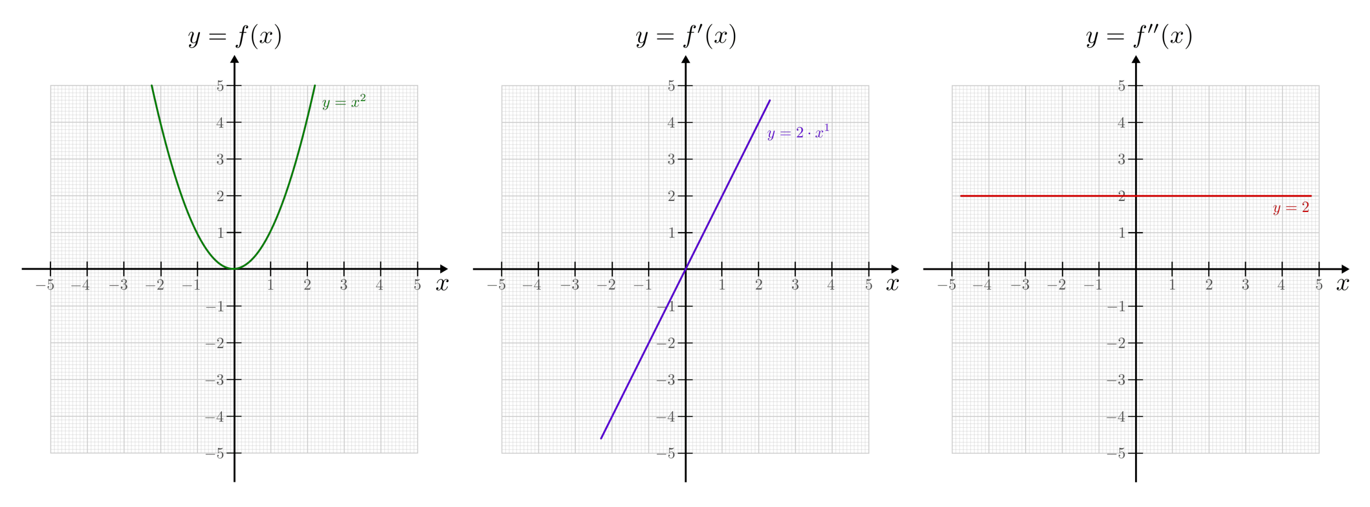
Ableitungen einer Geraden



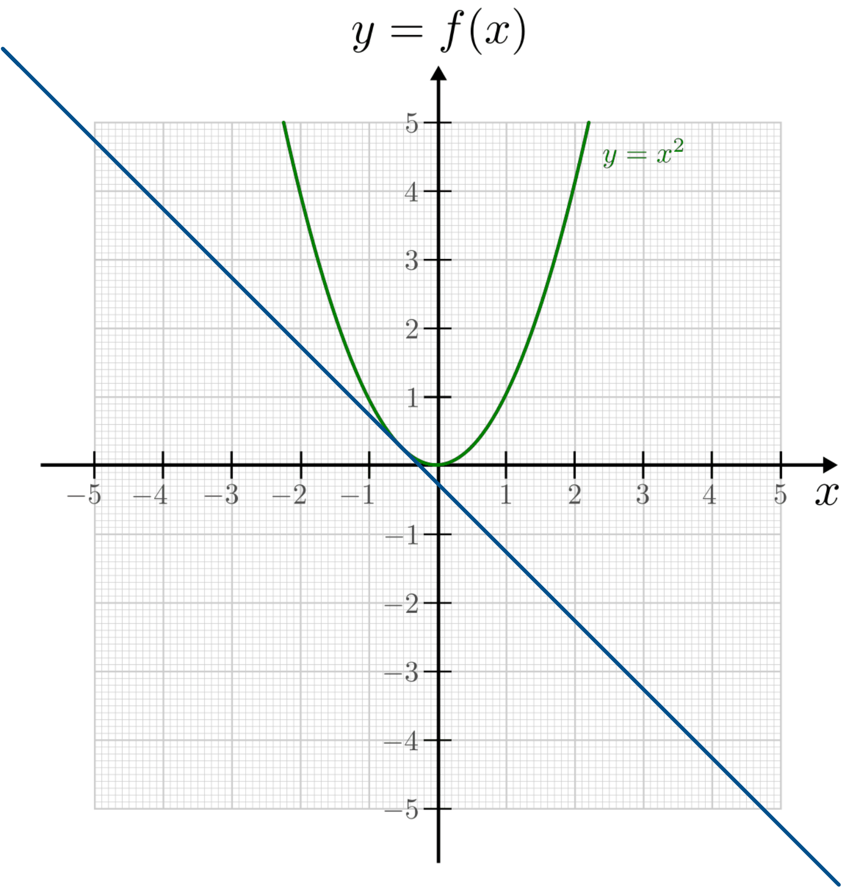
Minimum & Maximum

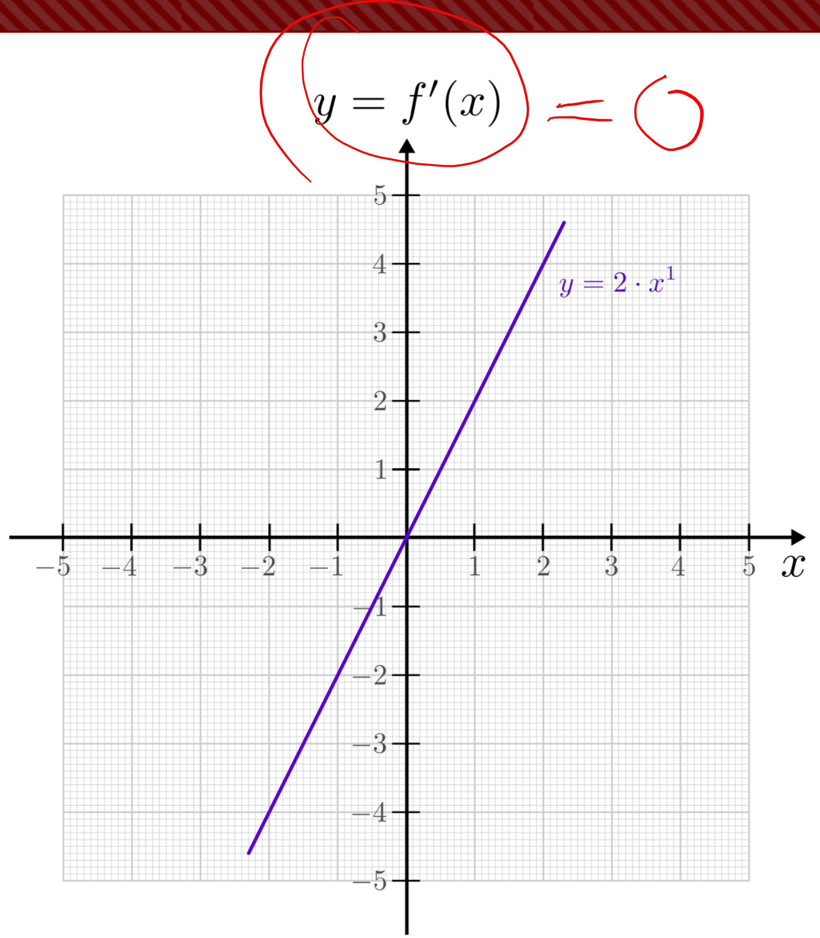
- Wenn die Steigung einer Funktion an einer Stelle Null ist, dann hat sie dort eine Extremstelle!
- Die Ableitung einer Funktion entspricht der Steigung an einem gegeben x-Wert.
- Mit der Ableitung kann man leicht Extremwerte bestimmen!
- Ausblick Ableitungs Regeln:

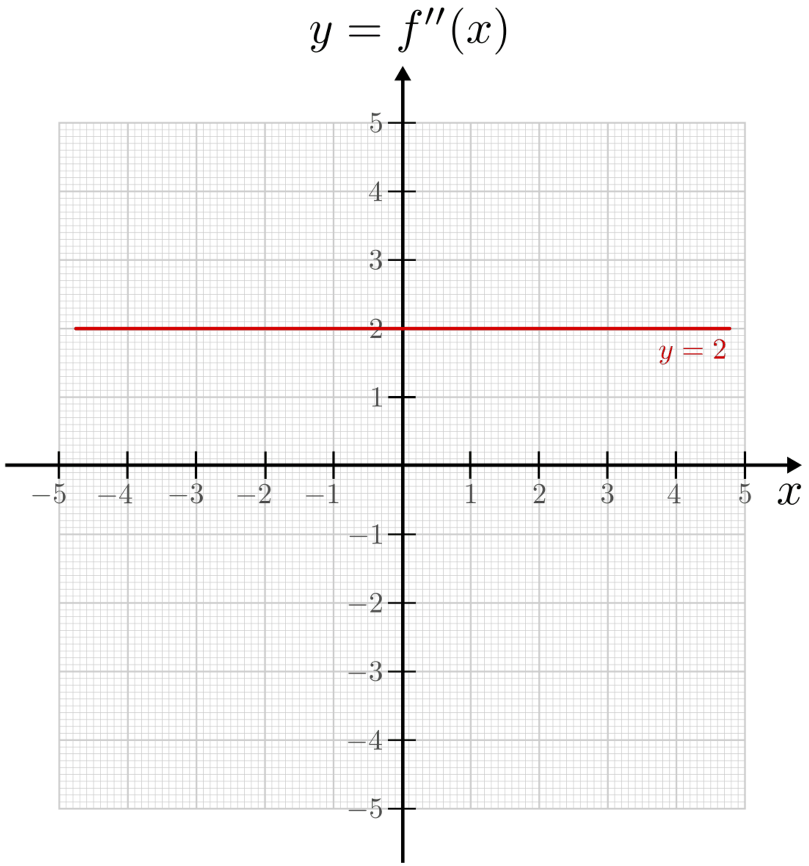
https://www.studimup.de/abitur/analysis/ableitung/



Ableitungen einer Parabel

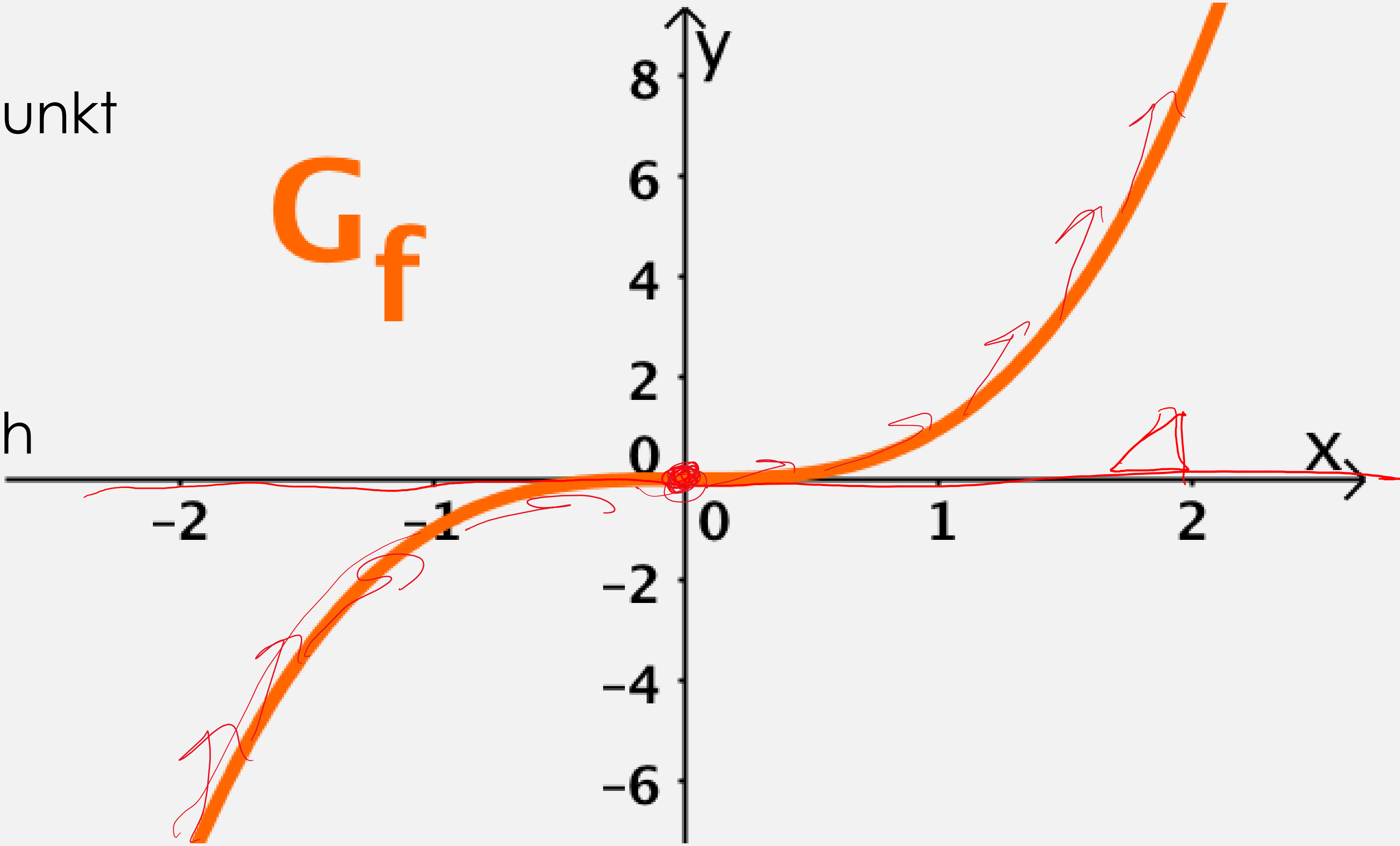






Extrem Punkte von Funktionen

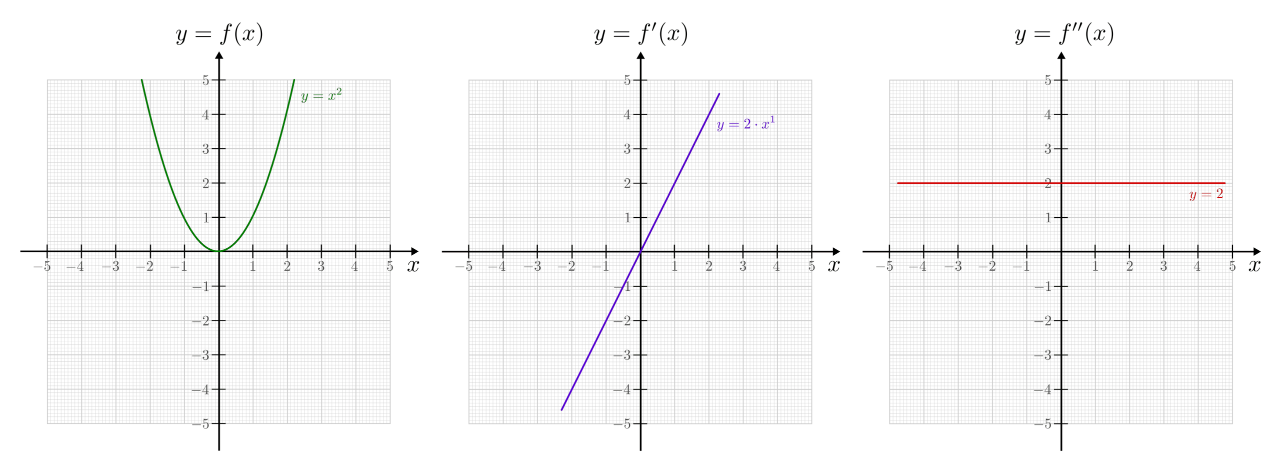
- Steigung ist Null am Sattelpunkt
- Sattelpunkt entspricht Wendepunkt
- Die Funktion dreht sich erst nach rechts und dann nach links! (Wendepunkt)



Ableitungen einer Parabel

- P(0,0) ist eine Extremstelle
- Achtung! Aber kein Wende-Punkt
- Die Funktion dreht sich immer nach links.

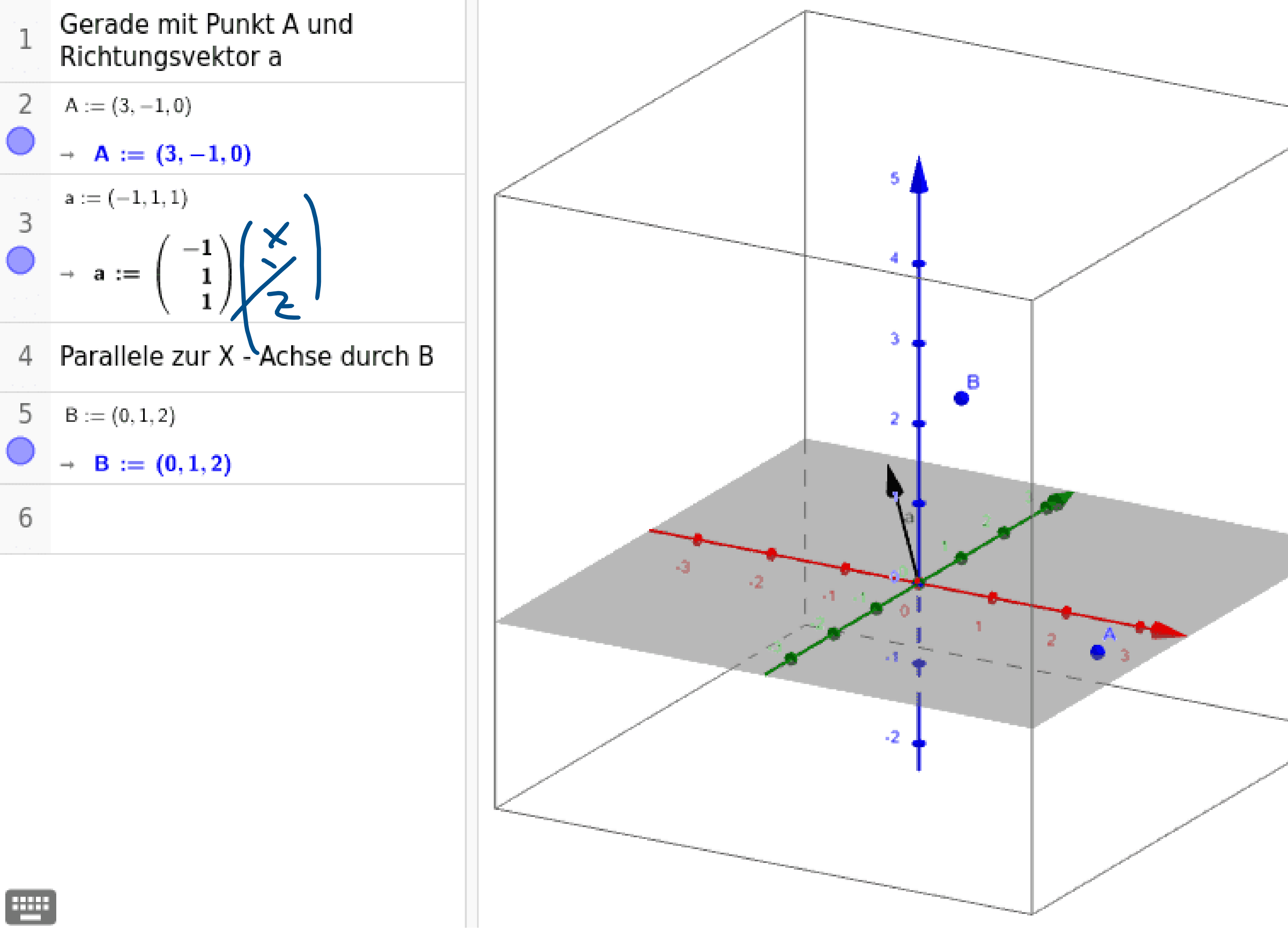
(Auto im Drift)



Ausblick Geraden in 3D

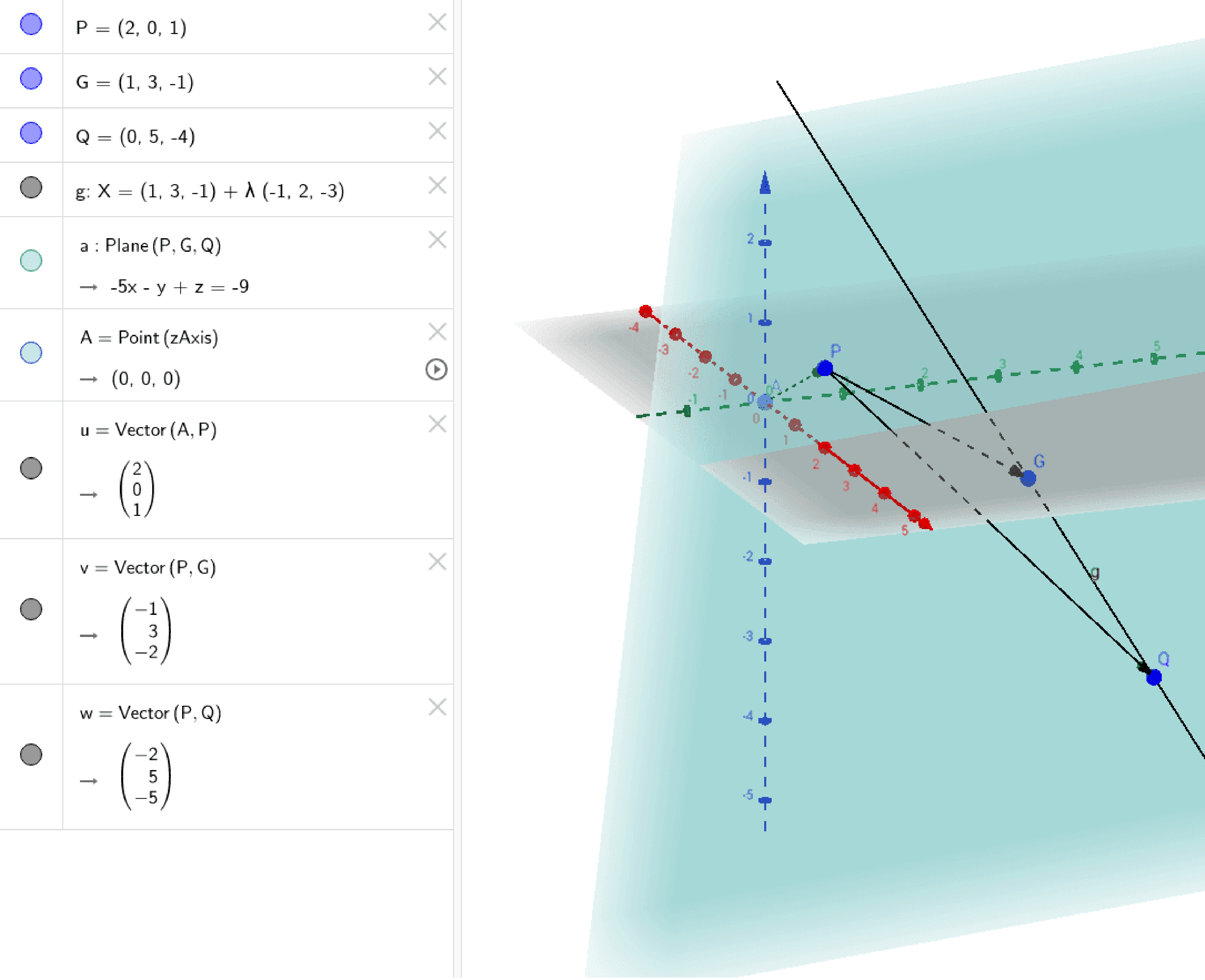
- Koordinaten haben drei Werte für x,z und z-Achse

- Position= Koordinate
- Steigung als Vektor
- Vektor = Pfeil im Raum



Ausblick

- Geradengleichung mit m= λ
- Ebenen-Gleichung



Ziel der Veranstaltung:

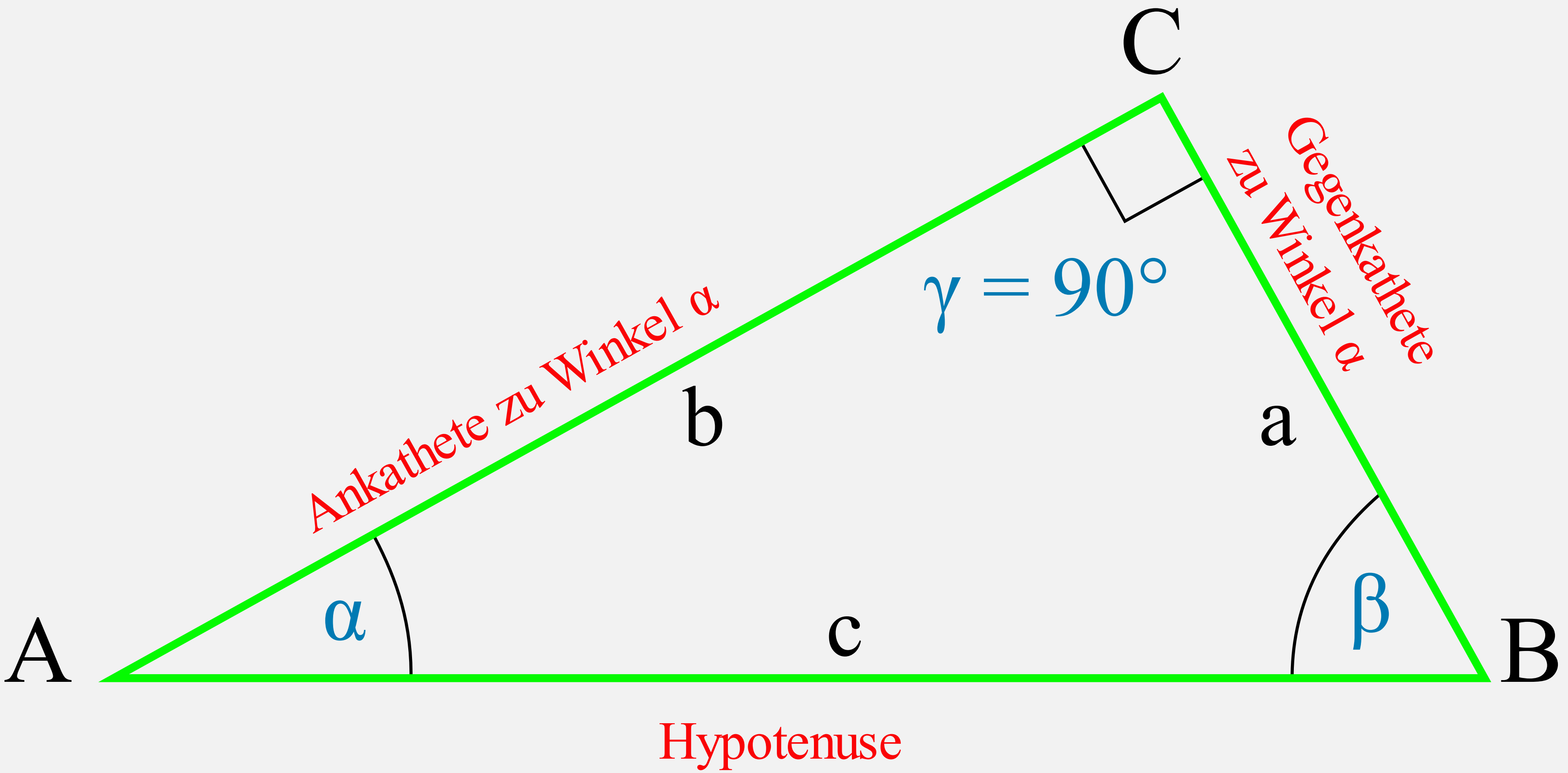
Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das Studienkolleg :)

Übung zu
Studienkolleg Konstanz Musteraufgaben

Aus den letzten Vorlesungen

Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen



Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(alpha) = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Cosinus}\ (alpha) = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Tangens}\ (alpha) = \tan(\alpha) = \frac{Cos(\alpha)}{Sin(\alpha)} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

Summe aller Winkel: $\alpha+\beta+\gamma = 180\,°$

C

Gegenkathete zu Winkel α

$\gamma = 90°$

Ankathete zu Winkel α

b

a

A

α

c

β

B

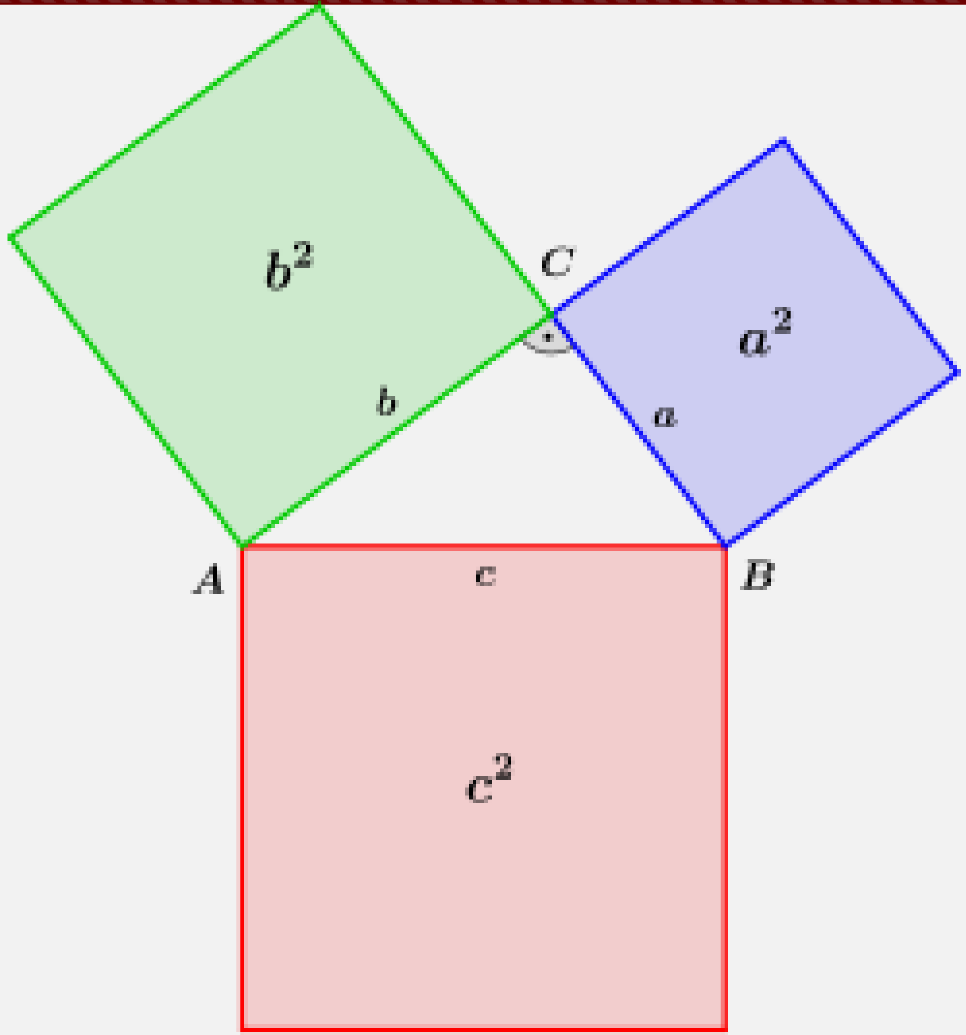
Hypotenuse

Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit Rechtem Winkel (90 Grad)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$



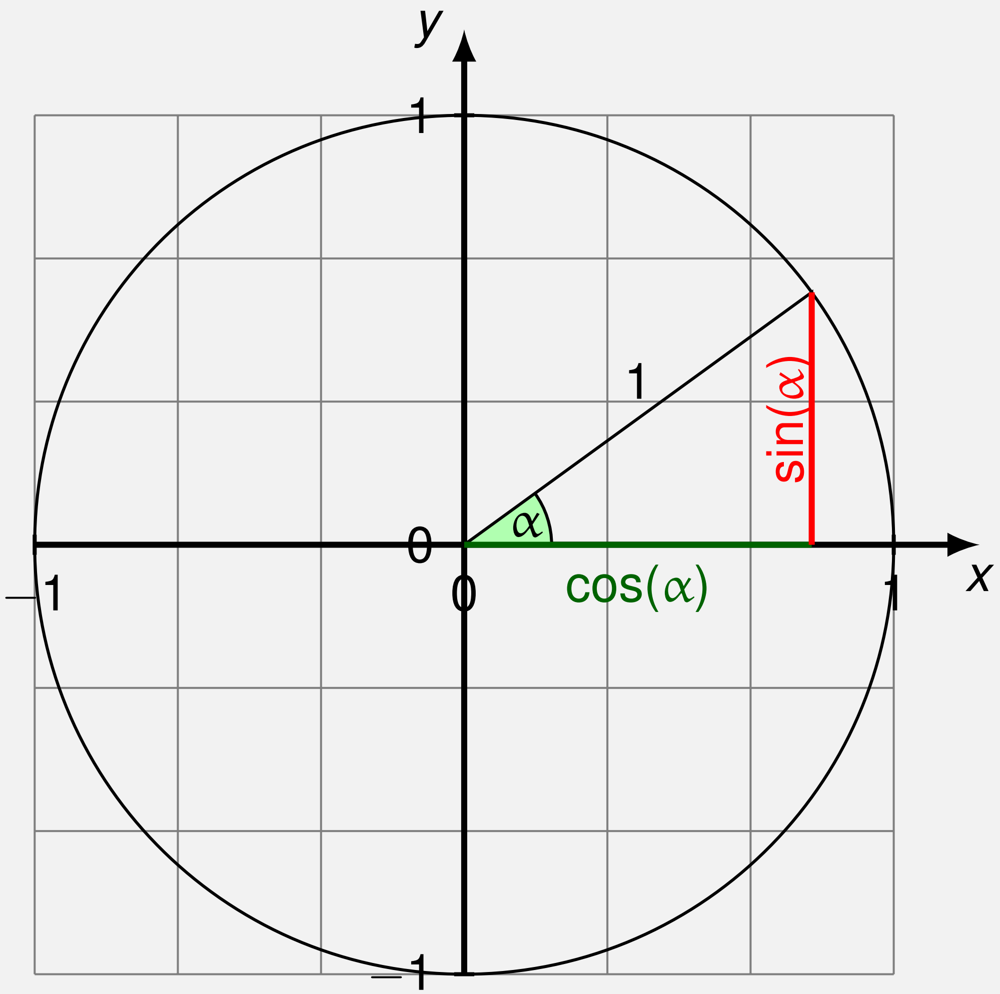
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Annimation:

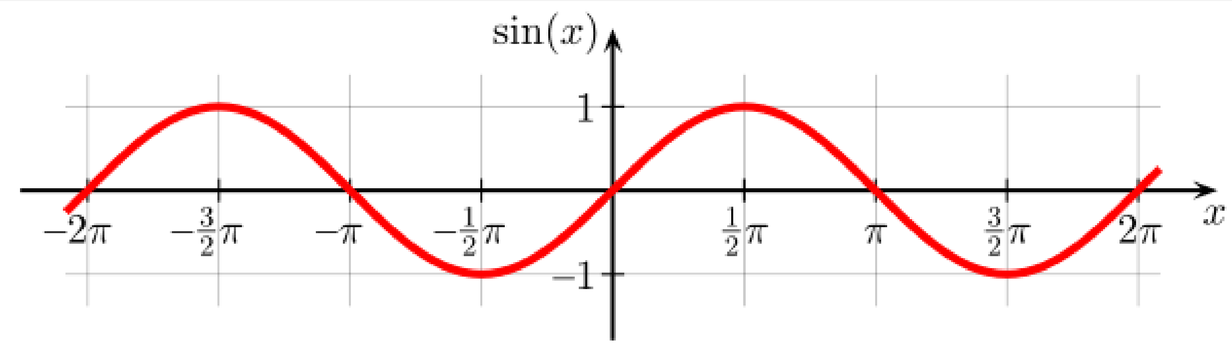
https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo

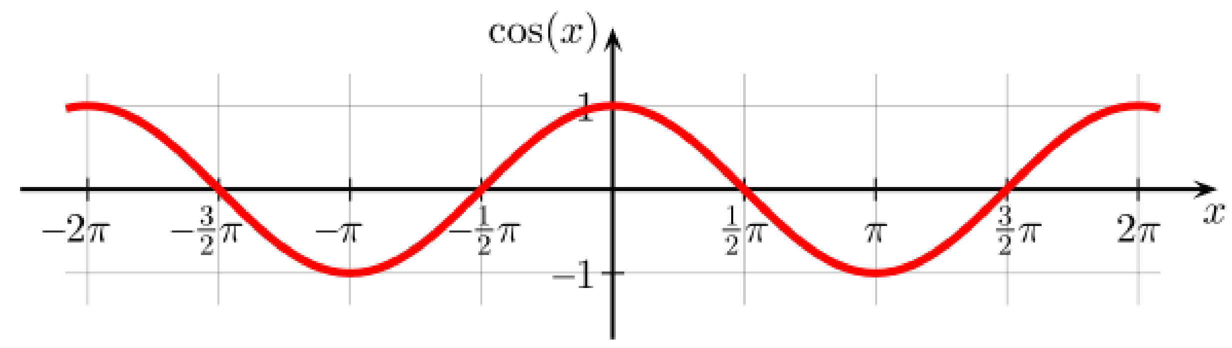


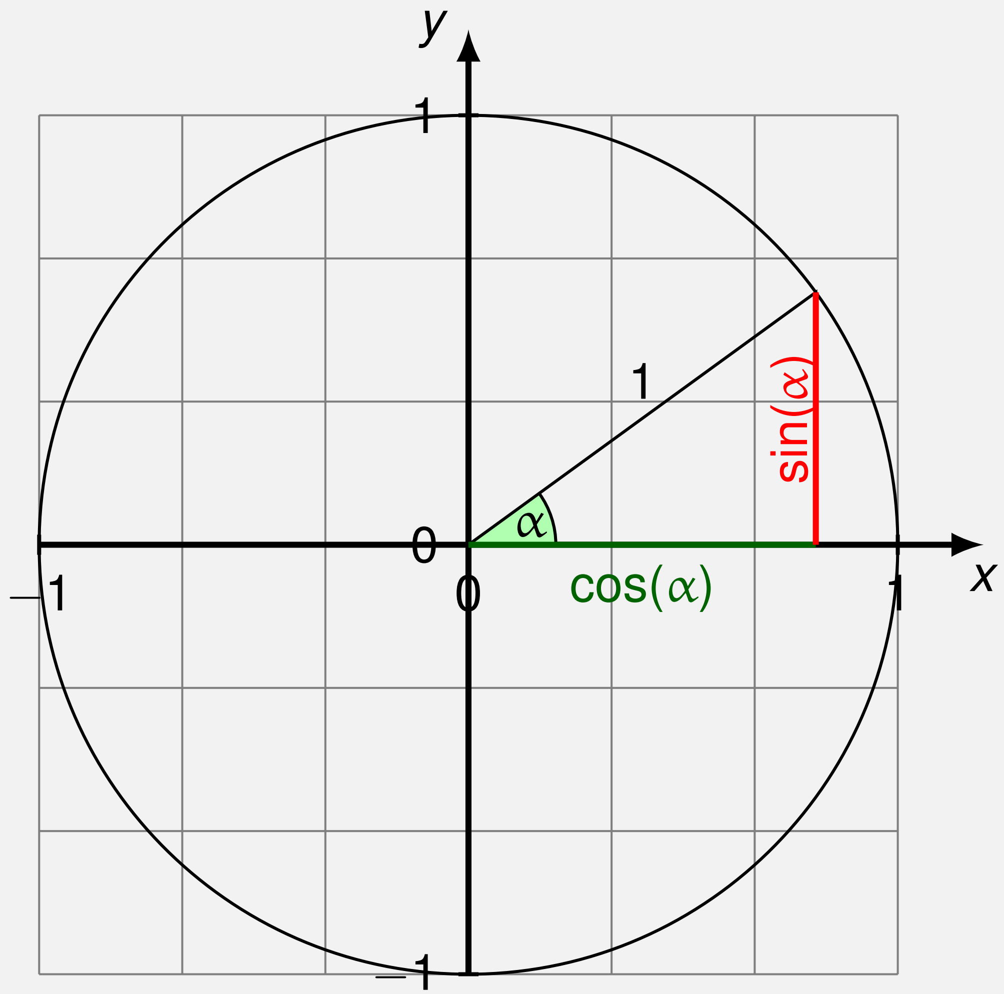
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(x) + Cos^2(x) = 1$$







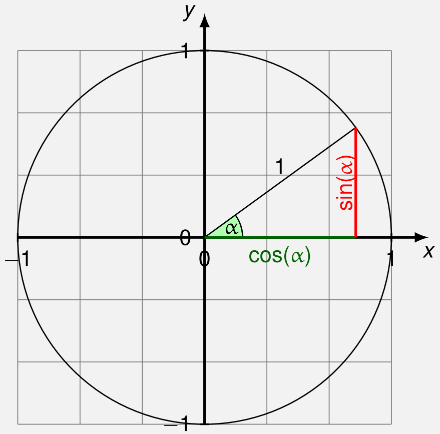
Clemens Weber

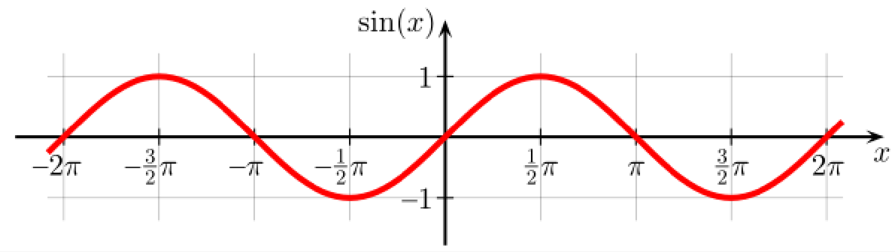
Rechtwinklige Dreiecke

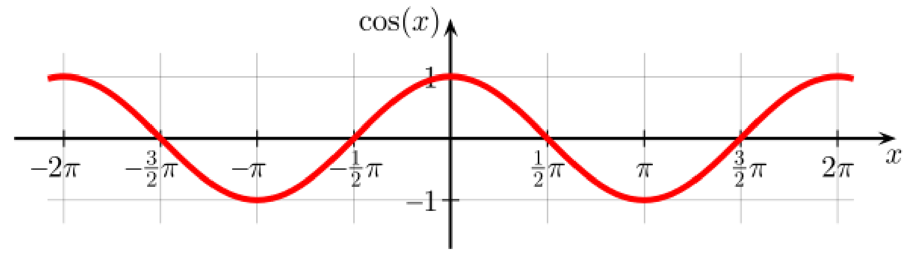
$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$

Wertetabelle :

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin **a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos **a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1







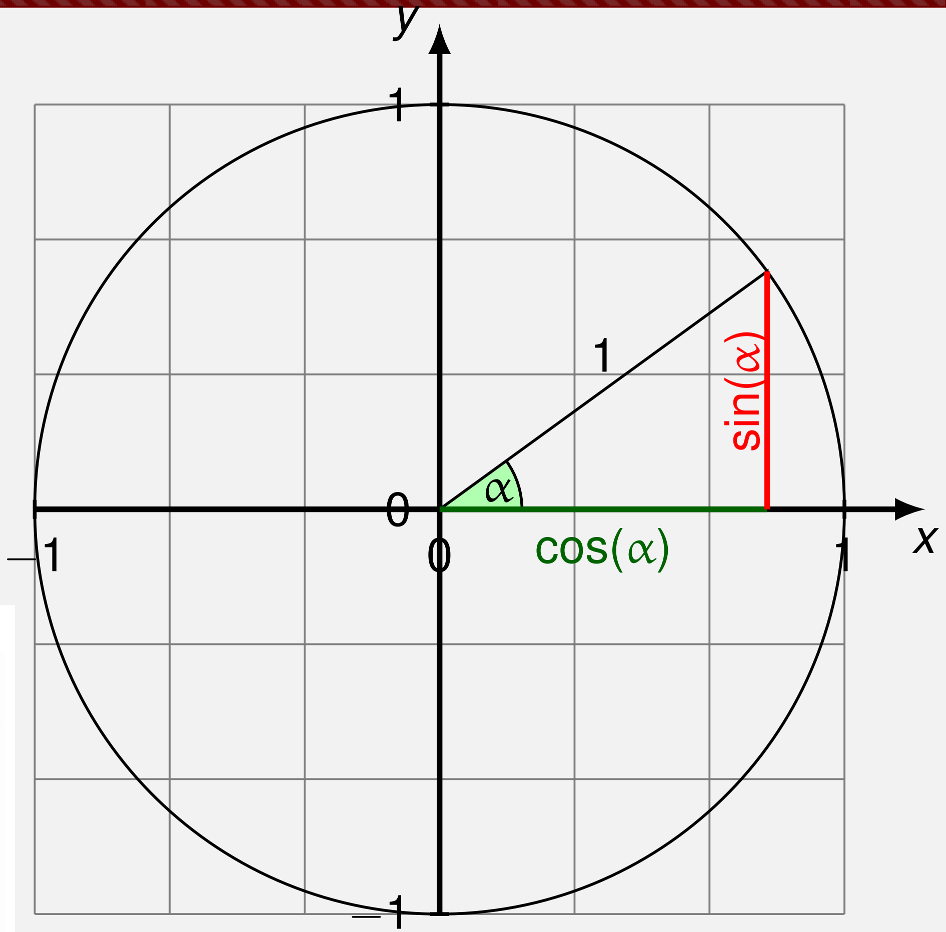
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin(a = y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(a = x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

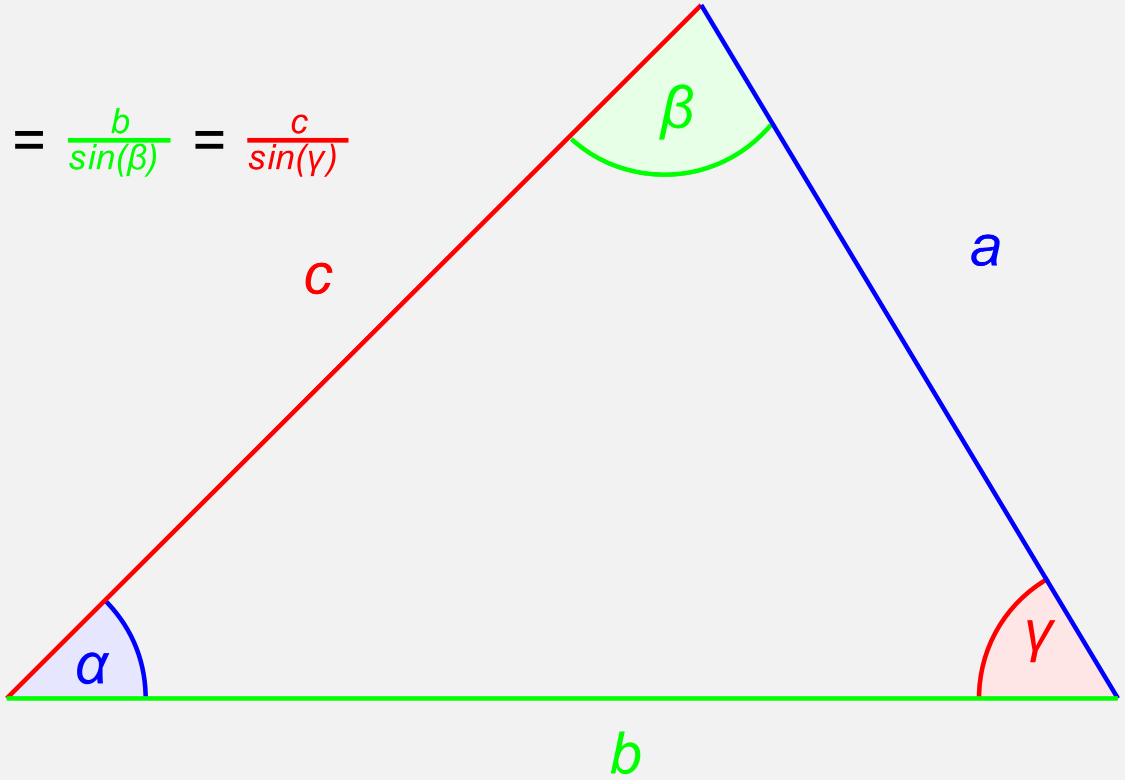


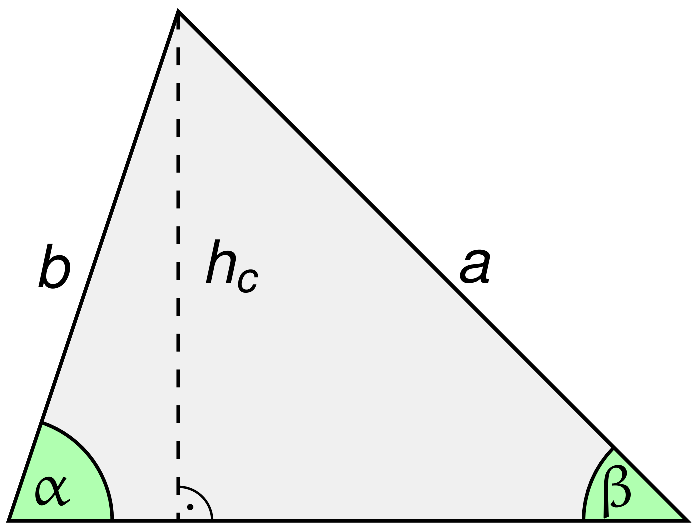
Clemens Weber

Sinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den gegenüberliegenden Seiten.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$





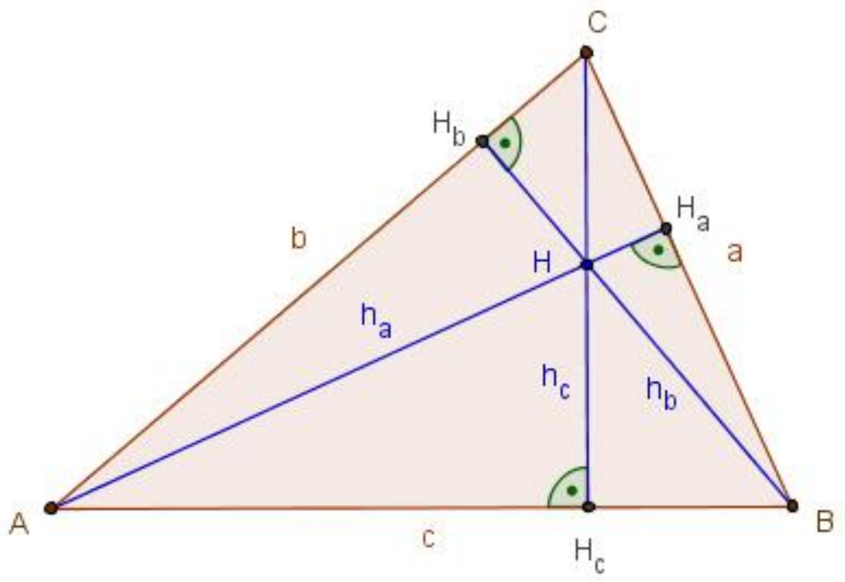
$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

Sinus-Satz

- Gilt in **jedem** Dreieck



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

Sinus-Satz

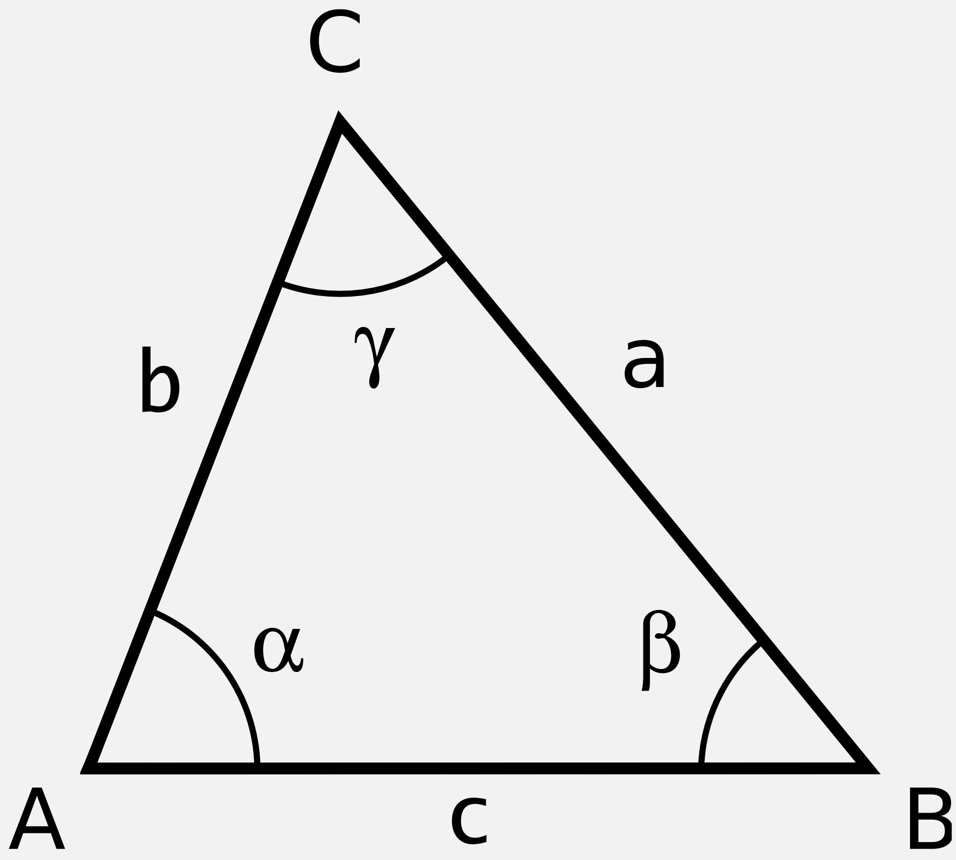
- Gilt in **jedem** Dreieck

Clemens Weber

Cosinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den Seiten.

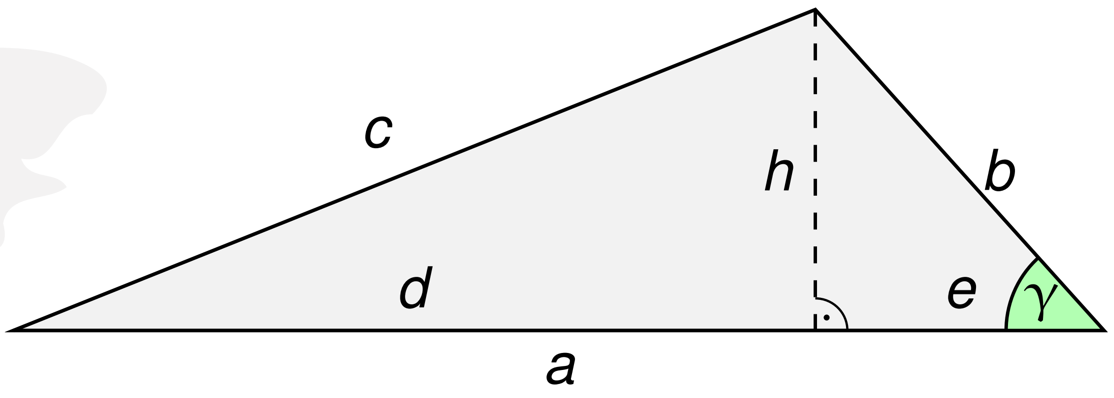
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



$$h^2 = b^2 - e^2$$ (Satz des Pythagoras für das rechte Teildreieck)

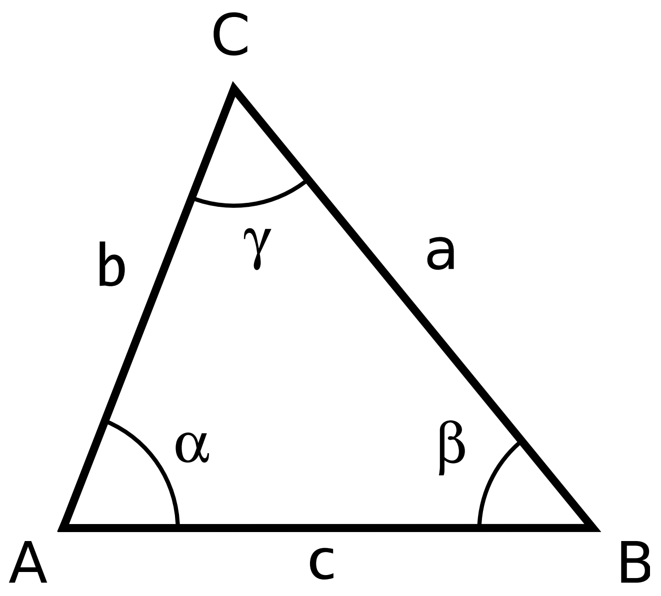
$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$ (binomische Formel)

Cosinus-Satz Herleitung Ansatz



Cosinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den Seiten.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, \cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \, \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, \cos\gamma$$

Trigonomerischer Zusammenhang

- Lernspruch:
- Sinus: SiCo CoSi
- Cosinus: CoCo SiSi

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$ [4]

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$ [4]

Ziel der Veranstaltung:

Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das Studienkolleg :)

E-Funktion Exponential Funktion

- Natürliche e-Funktion
  - $e = 2.7182 \ldots \ldots$

Besondere Eigenschaft:

Steigung = Wert der Fkt

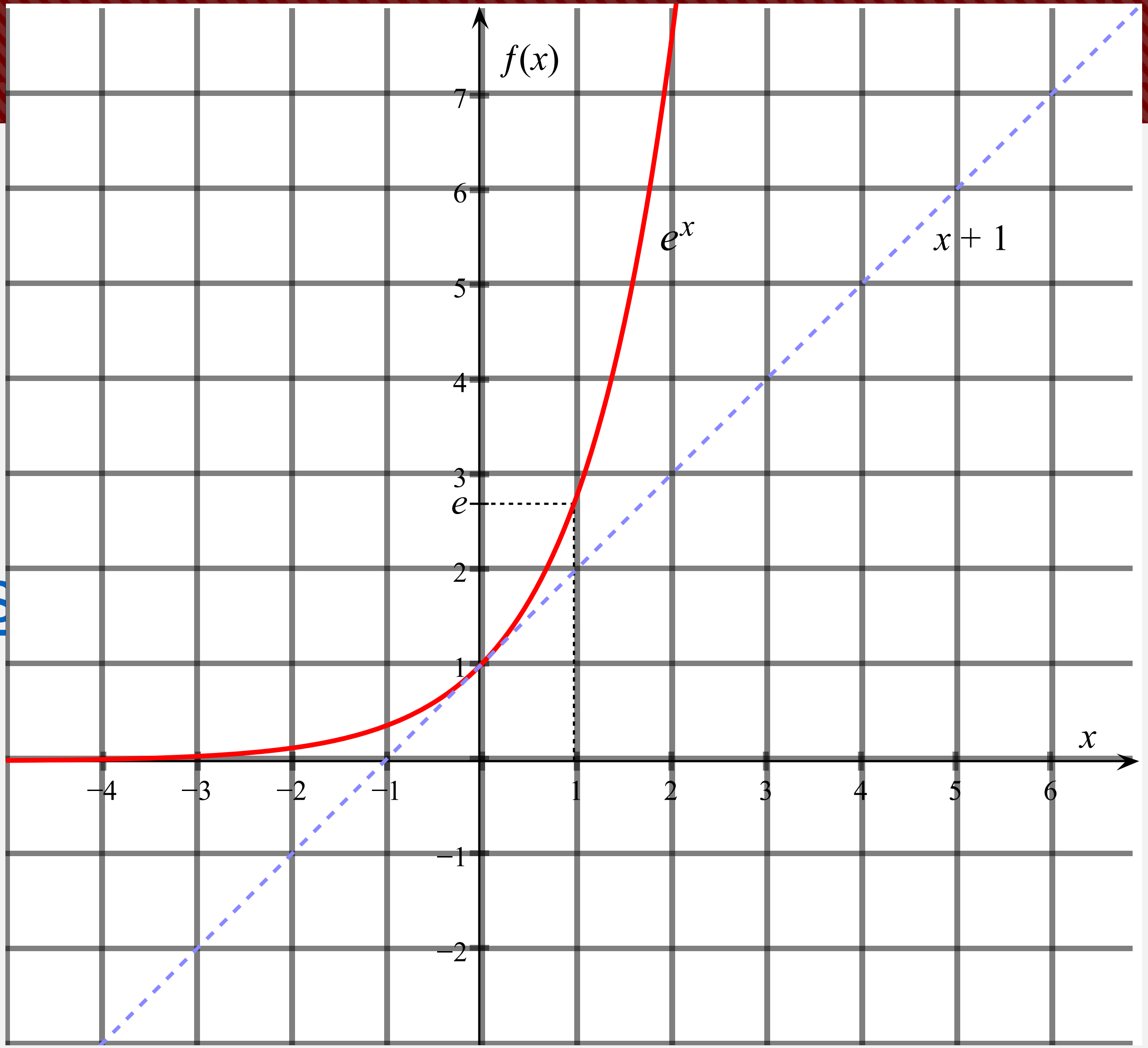
An jedem Punkt!

e-Funktion Erklärung und Beis

Natürliche Logarithmus: $\ln(x)$

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}$$

$$b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{\ln(b)*x}$$



Logarithmus Gesetze

8.1 Formeln für Logarithmen:

$$\boxed{b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y}$$

$$\left(y \in IR^+ \; und \; b \in IR^+ ohne \; \{1\}\right)$$

z. B. $\quad 0{,}5^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{0,5} 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 0{,}5}$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a; \quad \lg 1 = 0; \quad \lg 10 = 1; \quad \lg 100 = 2;$

Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln e = 1;$

($e = 2{,}71828\ldots$ heißt Eulersche Zahl)

Clemens Weber

Logarithmus Rechengesetze

Rechengesetze für Logarithmen $(u, v > 0)$

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v \qquad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

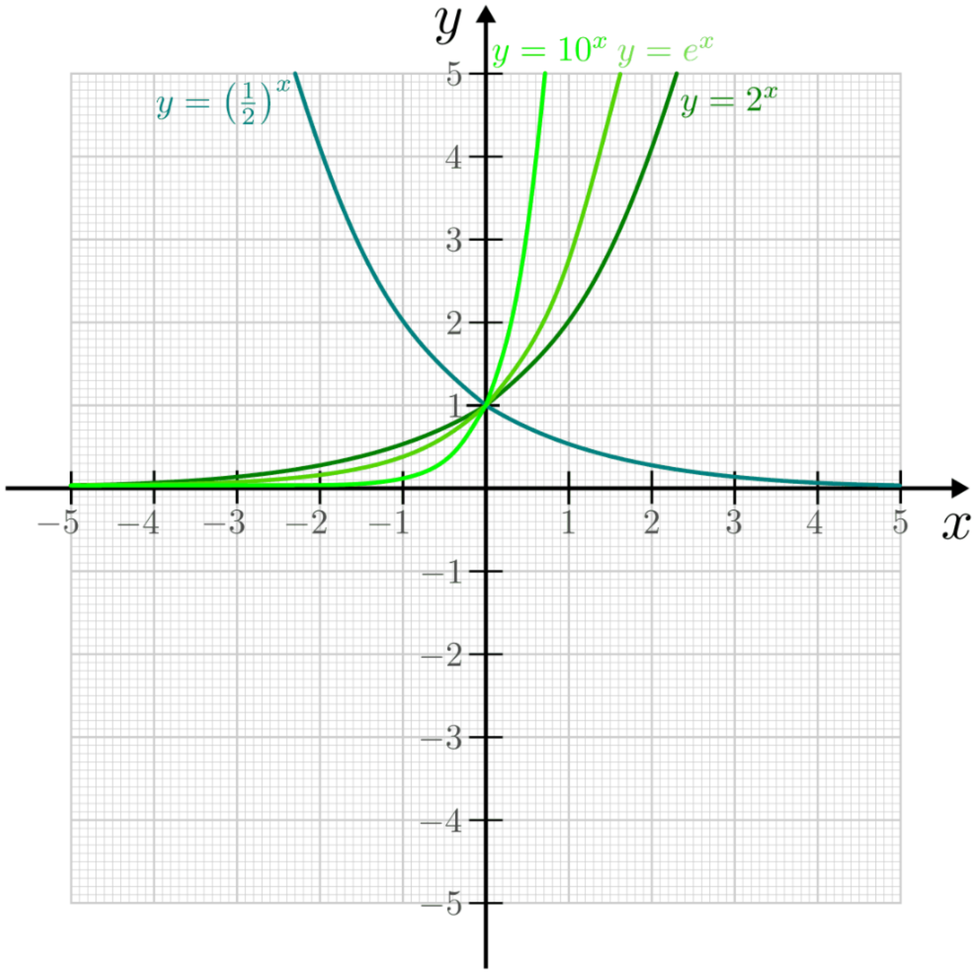
$$\log_b u^n = n \cdot \log_b u \;, \qquad \log_b 1 = 0$$

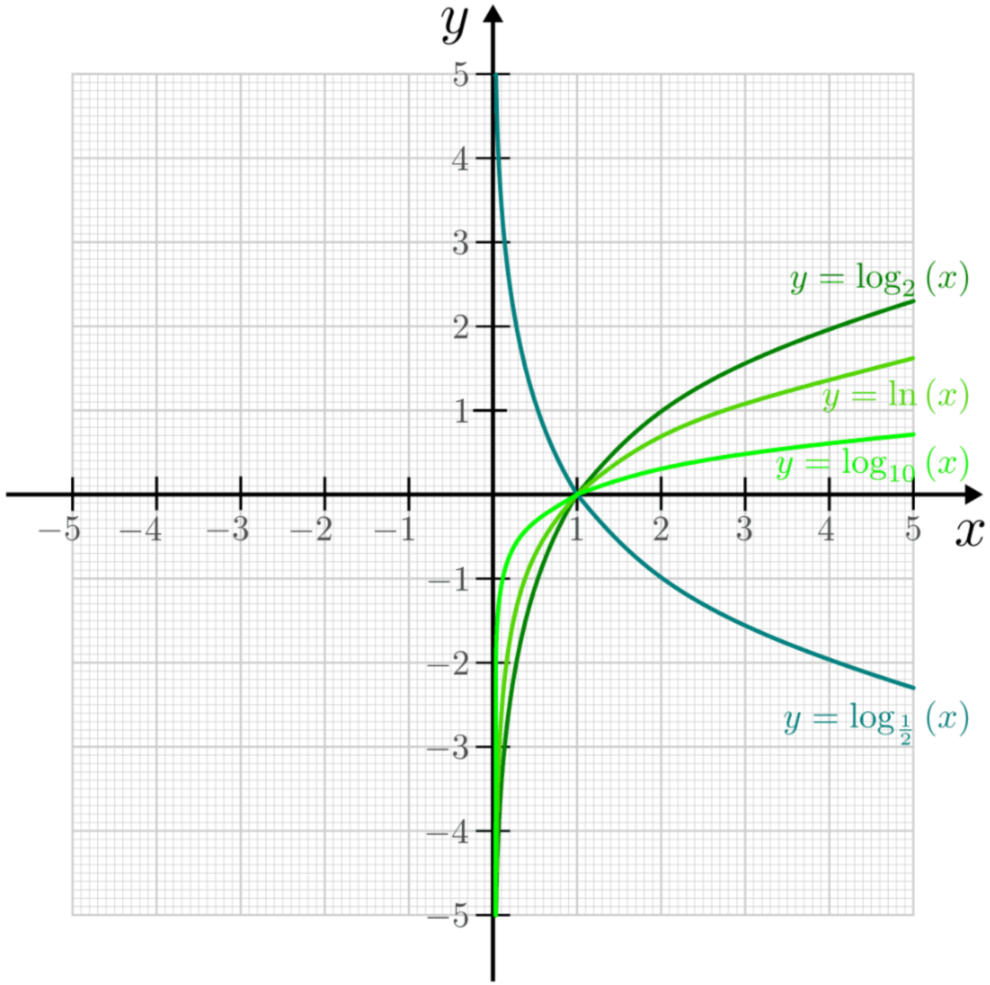
$$\log_b b^n = n \qquad b^{\log_b n} = n$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$ die Basisumrechnungsformel $(a > 0 \; und \; b, c \in IR \; ohne \; \{1\})$

Clemens Weber

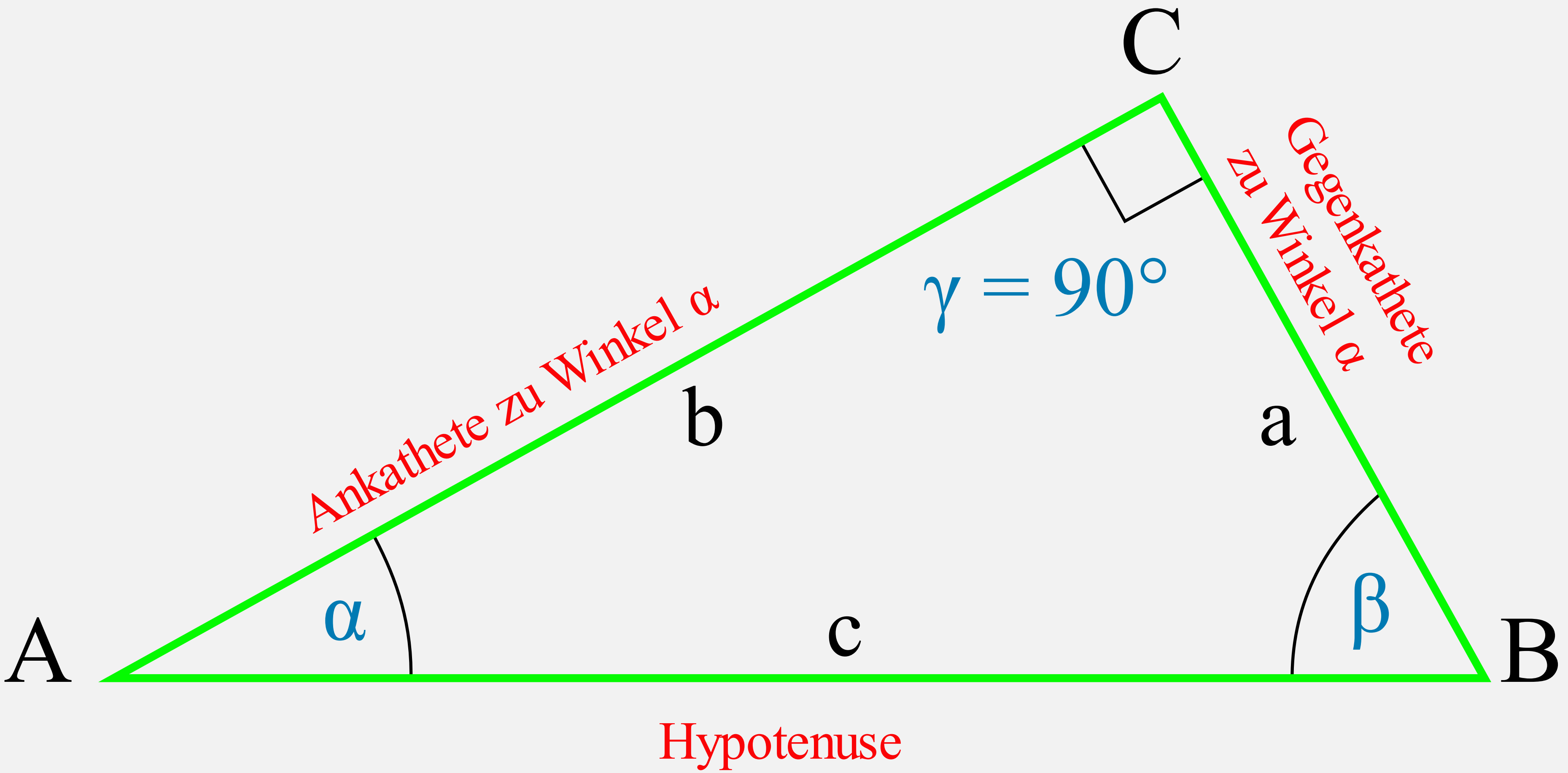
Logarithmus als Umkerhfunktion der Exponentialfunktion





Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen



Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(alpha) = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Cosinus}\ (alpha) = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Tangens}\ (alpha) = \tan(\alpha) = \frac{Cos(\alpha)}{Sin(\alpha)} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

Summe aller Winkel: a+β + $\gamma = 180\ °$

C

Gegenkathete zu Winkel α

$\gamma = 90°$

Ankathete zu Winkel α

b

a

A

α

c

β

B

Hypotenuse

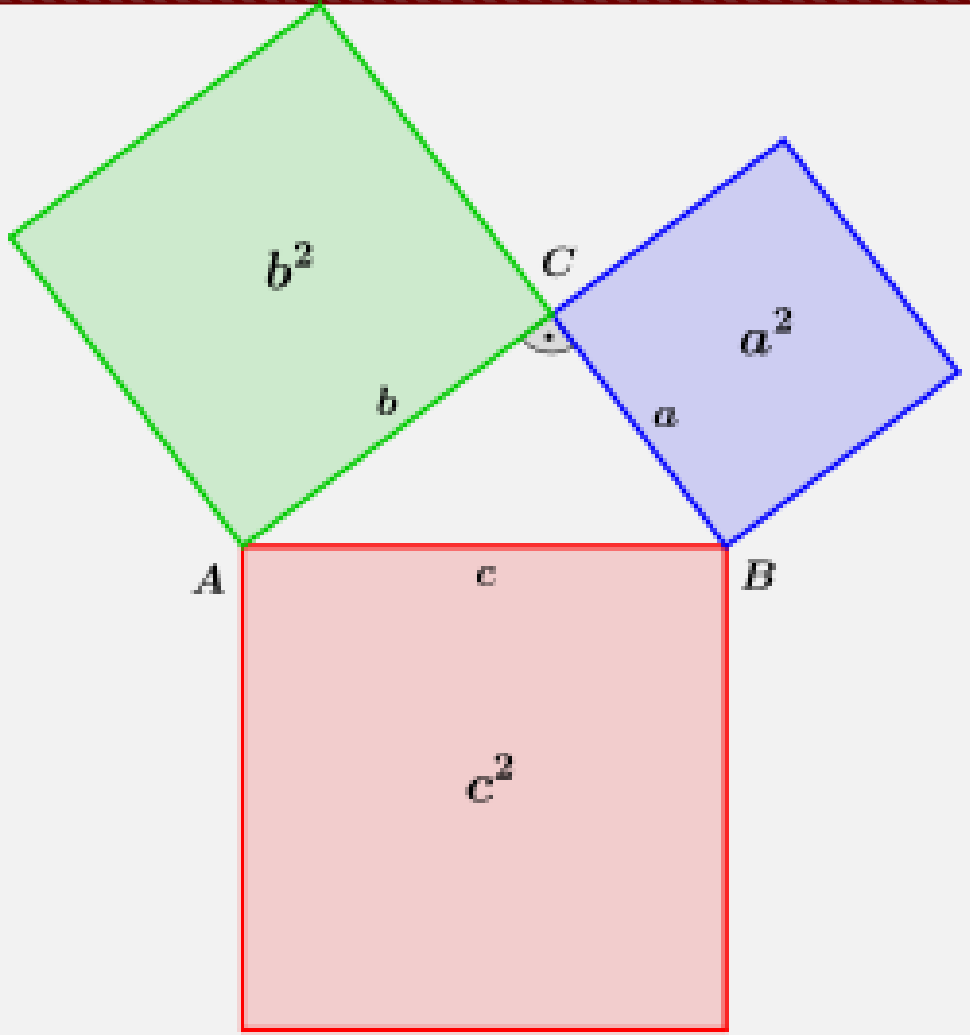
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit Rechtem Winkel (90 Grad)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$



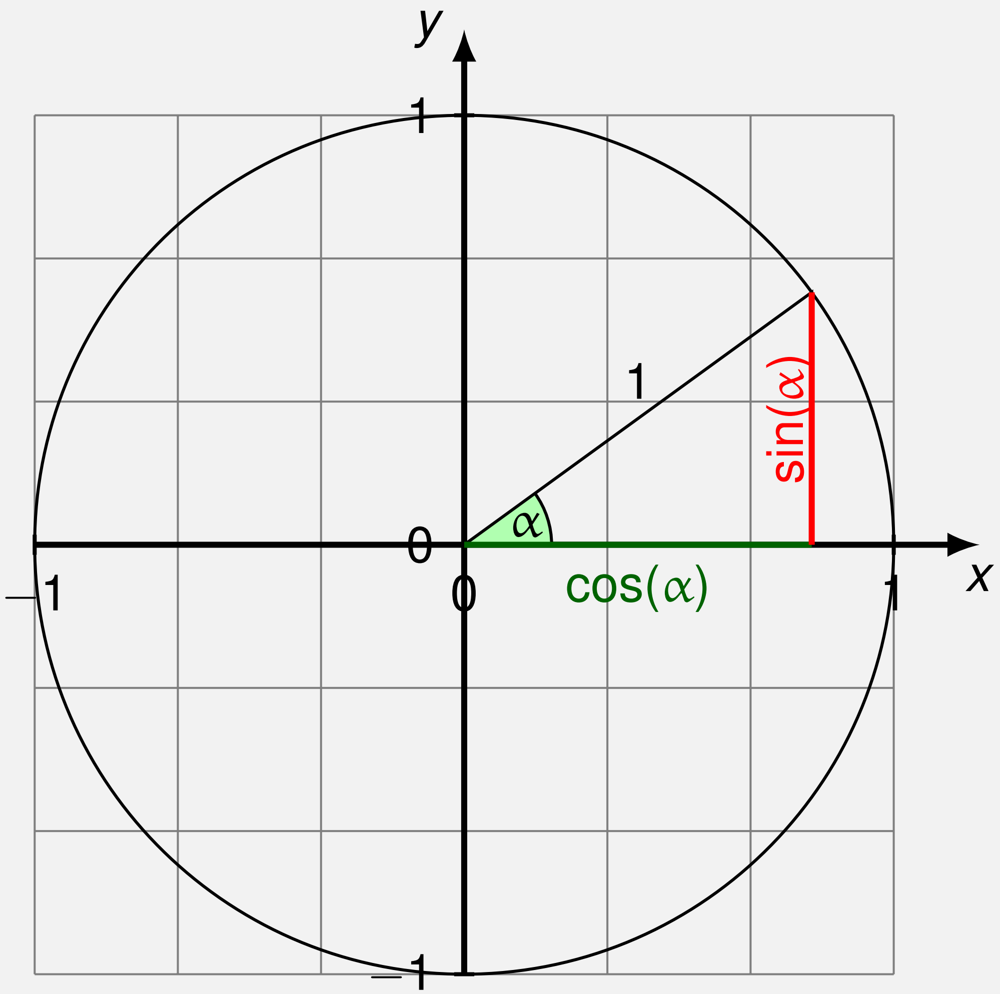
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

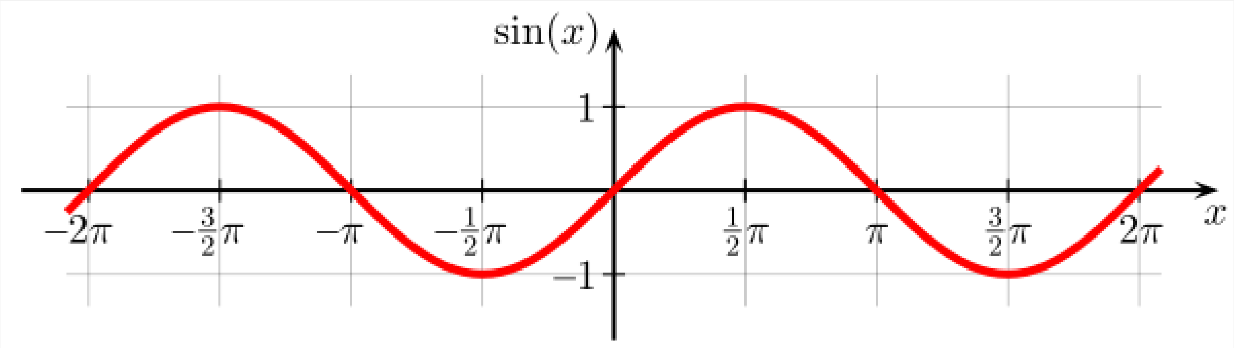
Annimation:

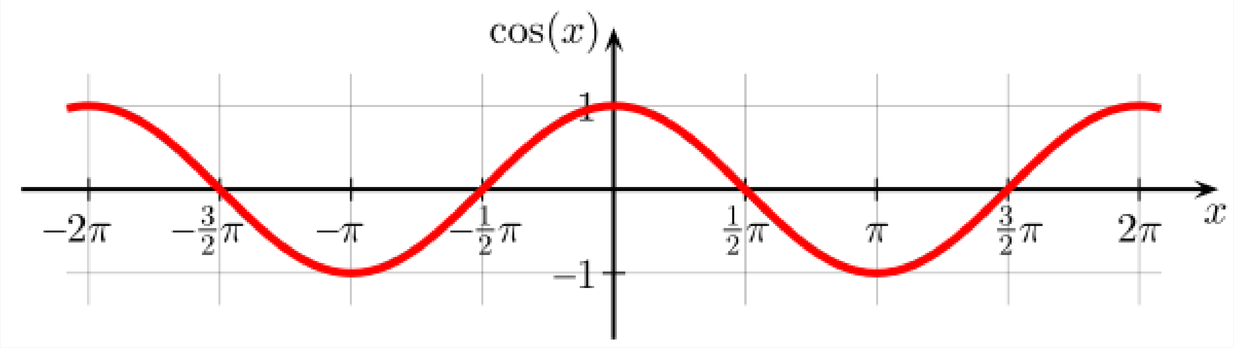
https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo

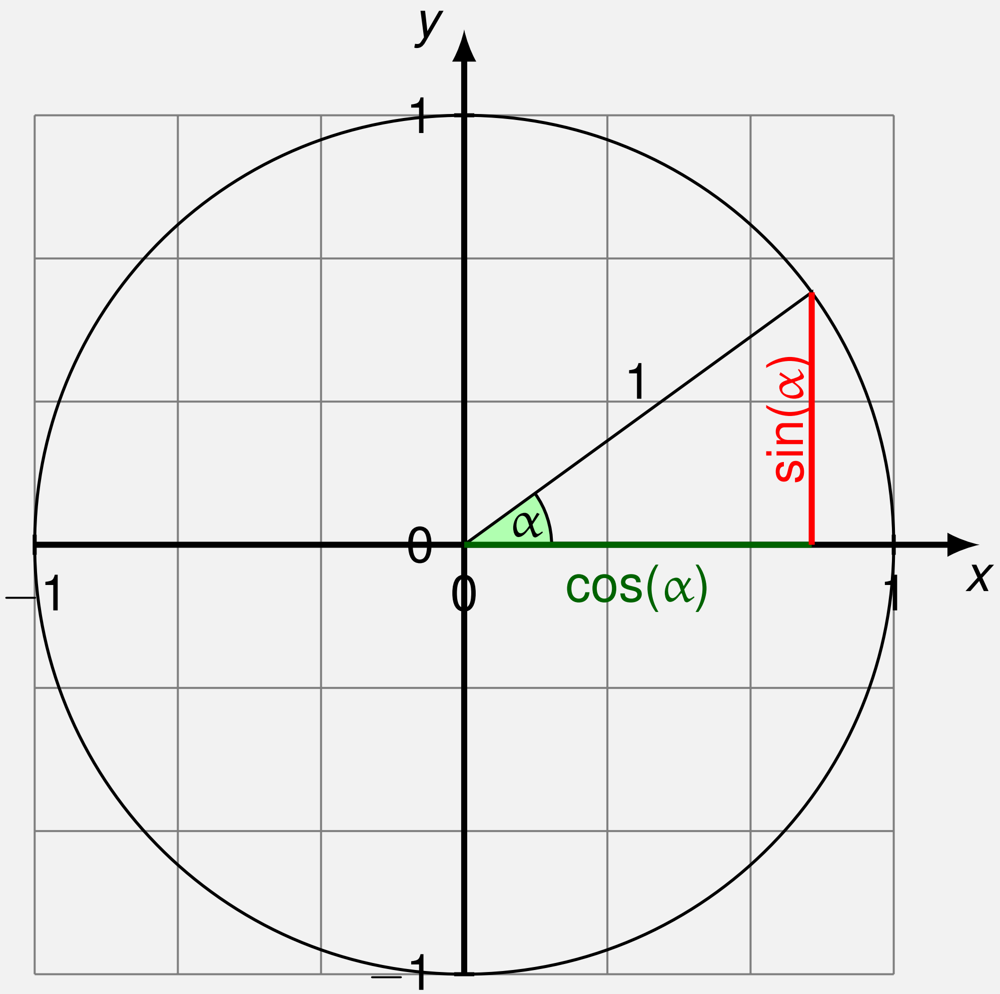


Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(x) + Cos^2(x) = 1$$



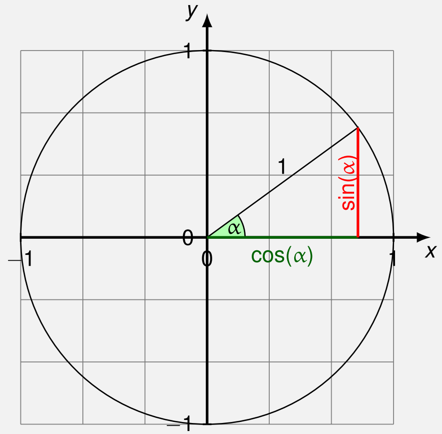




Clemens Weber

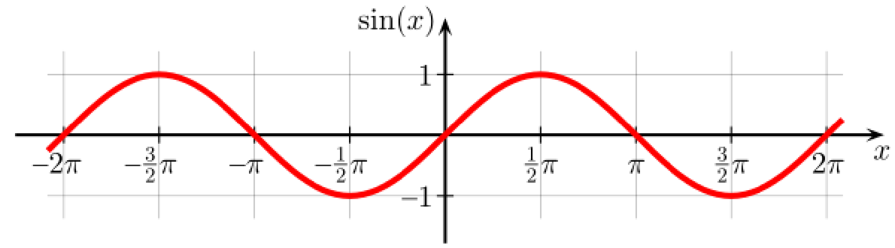
Rechtwinklige Dreiecke

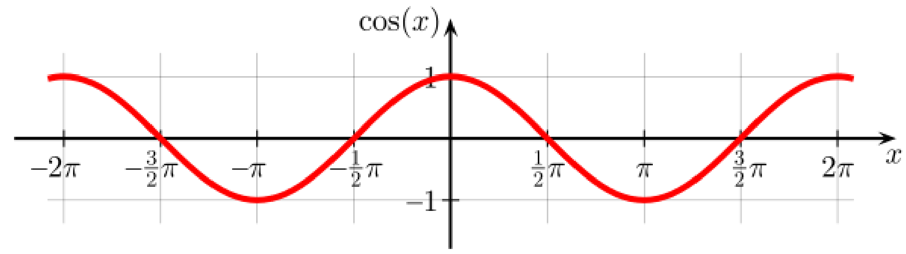
$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$



Wertetabelle :

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin **a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos **a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1





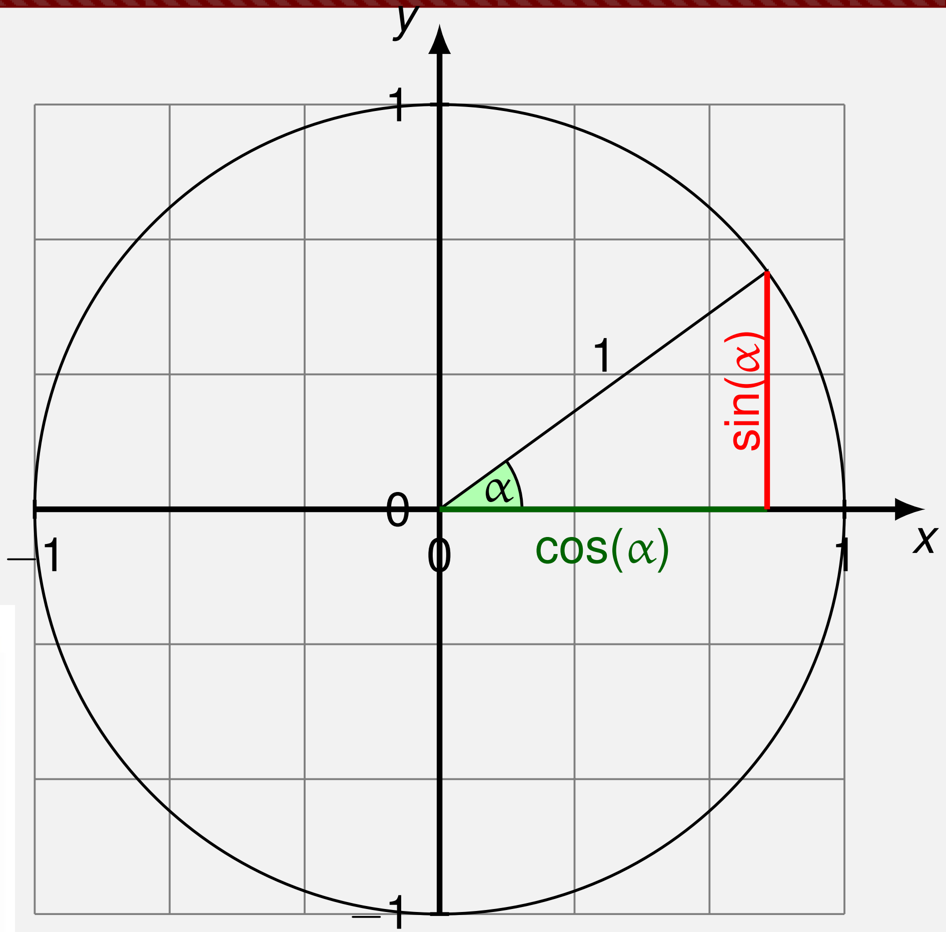
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin(**a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(**a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Ziel der Veranstaltung:

Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das Studienkolleg :)

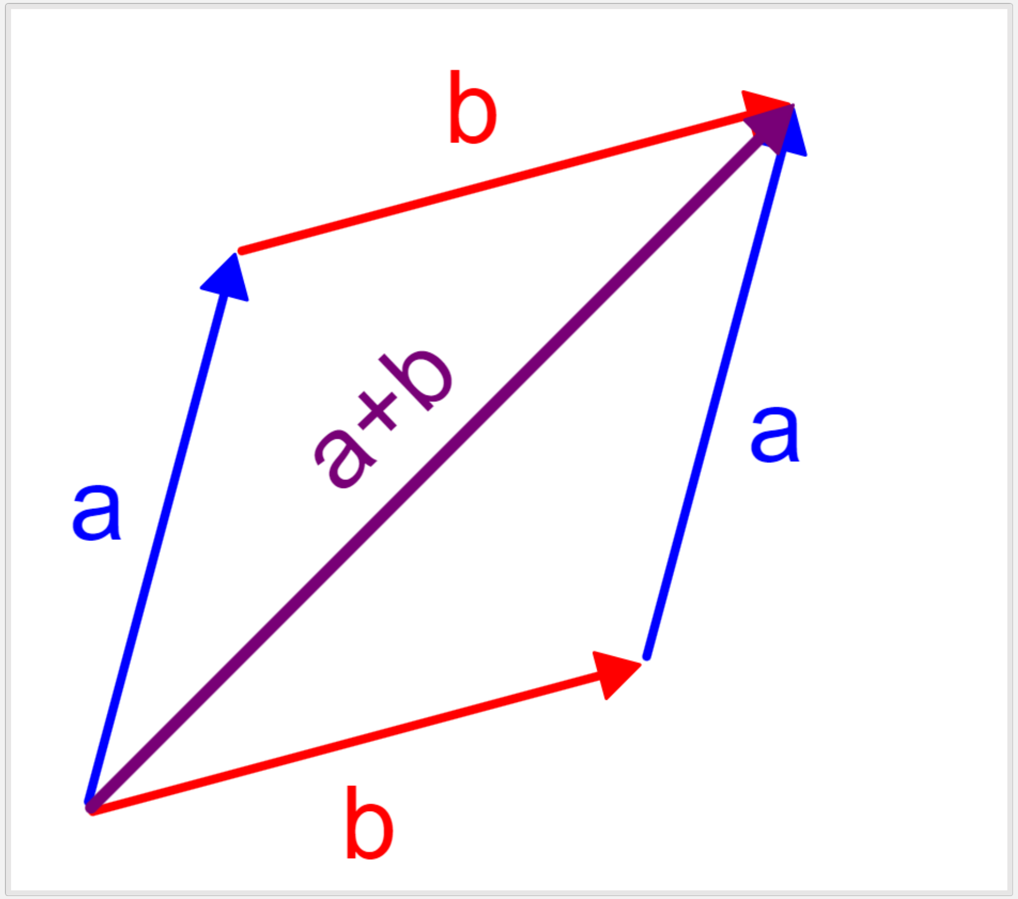
Clemens Weber

Mathe Grundlagen

- **Kommutativ Gesetz**

$$a + b = b + a$$

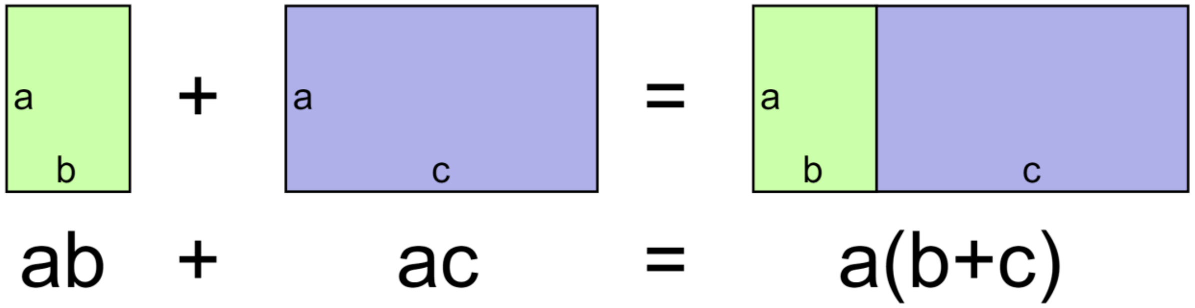
$$a * b = b * a = ba$$



Mathe Grundlagen

- **Distributiv Gesetz**
- $a(b+c) = ab + ac$
- $(b+c)/a = b/a + c/a$

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$



Clemens Weber

Binomische Formeln

Binomische Formeln: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

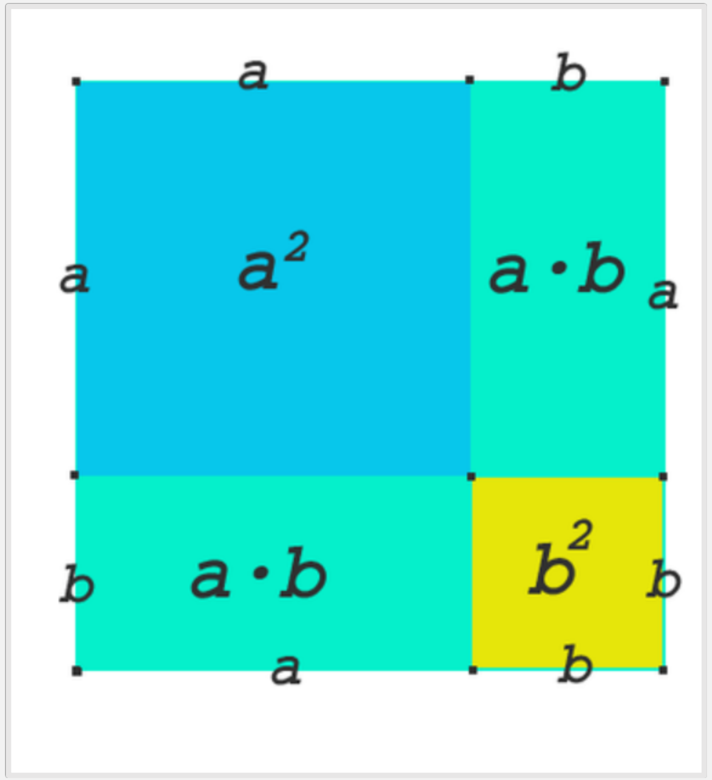
Dritter Ordnung:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Mathe Grundlagen

Erste Binomische Formel

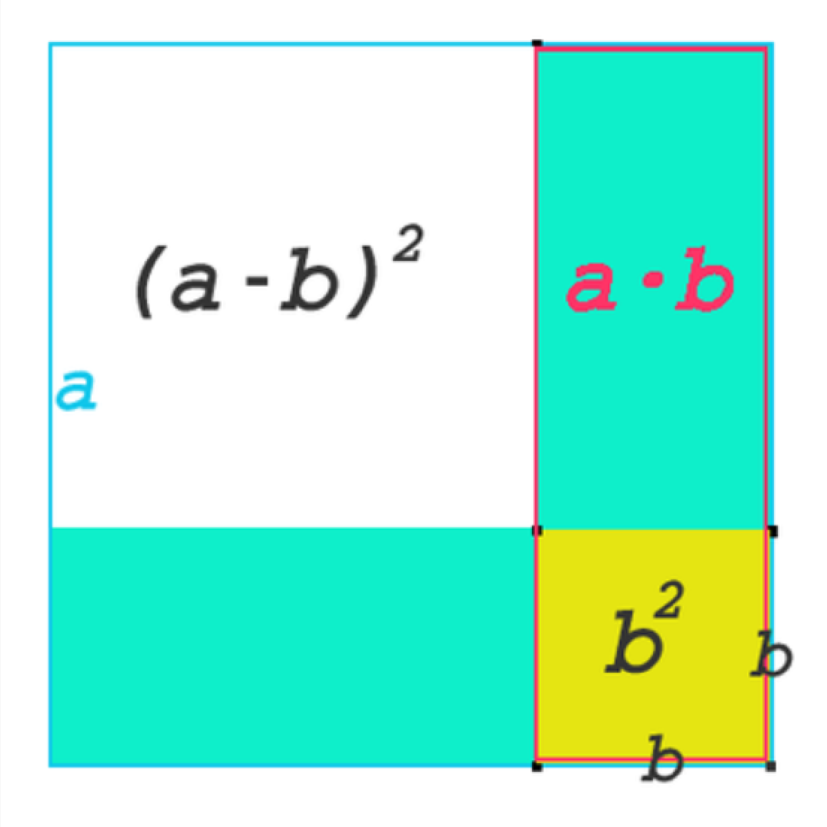
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Zweite Binomische Formel

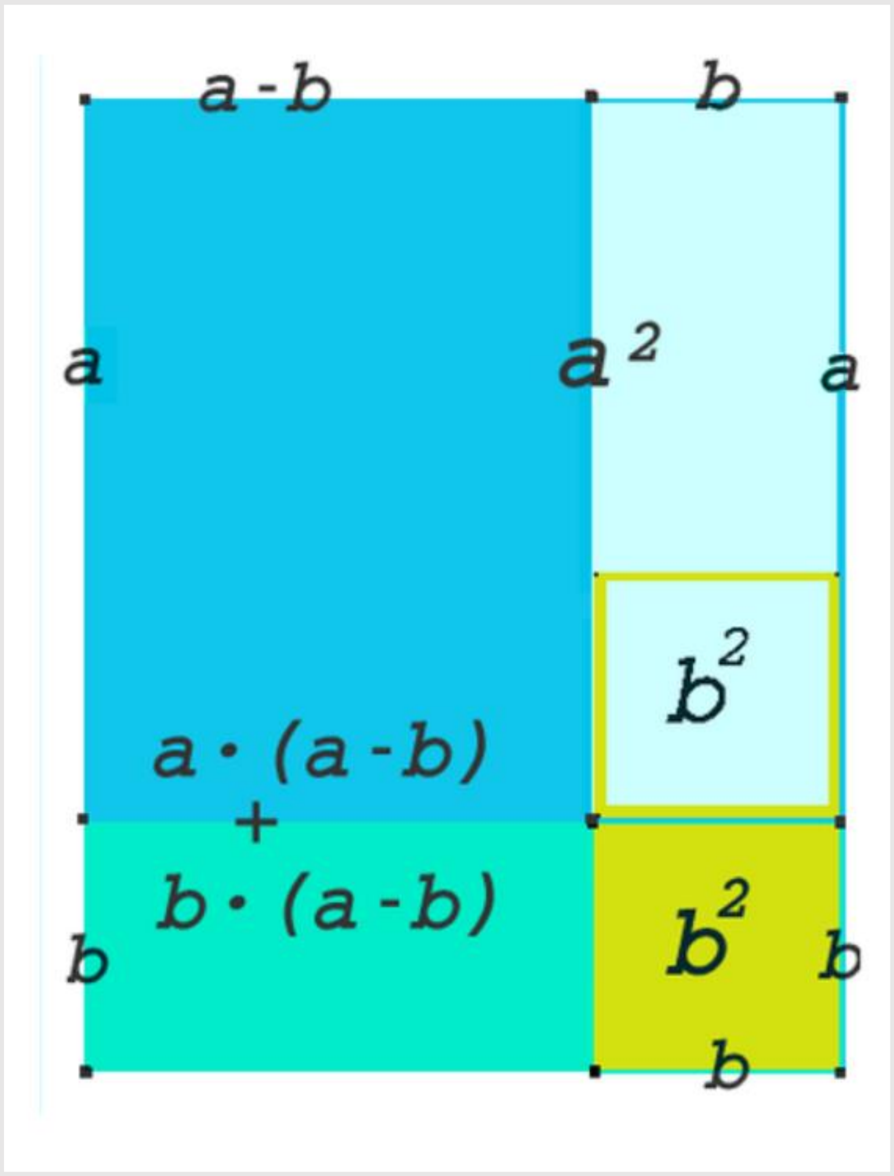
$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Dritte Binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$



Clemens Weber

Kopfrechen Tricks

Trick mit den Binomischen Formel:

$$37^2 = (30+7)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$$

der

$$37^2 = (40-3)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$$

Kopfrechen Tricks

Addition und Subtraktion der Wurzel:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Clemens Weber

Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Auswendig lernen!