Vortragender:
Clemens Weber

Vorlesung 5

Vom 13.12.2023

Vorbereitung zur Aufnahme auf das Studienkolleg

Clemens Weber

Themen-Gebiete Gesamt

- Vereinfachung von Bruchtermen
- Polynomdivision
- Wurzelgleichungen - Ungleichungen
- Exponentialgleichungen & Logarithmusgleichungen
- Trigonometrischen Funktionen
- Erkennen von Funktionsgraphen
- Geometrie ; vor allem Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Kreisberechnungen, Flächen- und Volumenberechnungen

Organisation

Januar 2024

Kalenderpedia
Informationen zum Kalender

KW	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20	21
4	22	23	24	25	26	27	28
5	29	30	31	1	2	3	4

© Kalenderpedia® www.kalenderpedia.de

1.: Neujahrstag

Angaben ohne Gewähr

- Nächste Woche Montag <u>Unterricht um 14.30 Uhr</u>

& Letzte Woche vor den Weihnachtsferien

- Ab Januar Mittwochs Präsenz in ASL-Schule (+Online Hybrid)
- Weiter Infos folgen
- Montags weiterhin Online
- 16.00 bis 17.30 Uhr
- Material auf:

https://github.com/ClemWeber/ASL-MatheKurs

Clemens Weber

Vorlesung 5

- Fragen zu Aufgaben?
- Trigonometrie Fortsetzung
  - Sinus- & Cosinus- Satz
  - Satz des Thales
- Übung:
  - Trigonometrie
  - Funktionsgraphen erkennen

Feedback Runde

Zu viel/wenig? Zu leicht/schwer?

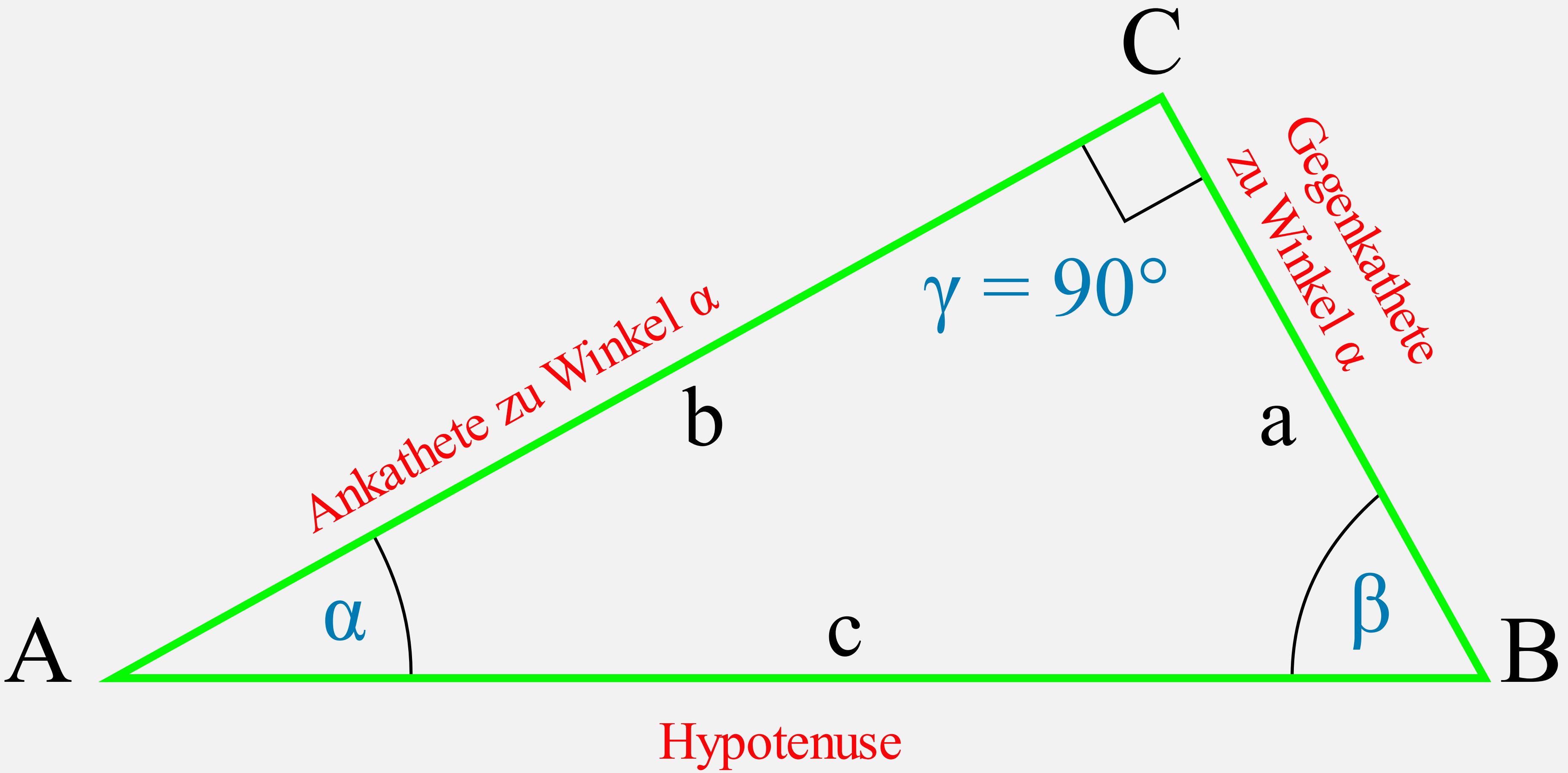
Welche Aufgabe konnte ich nicht lösen?

Was soll nochmal erklärt werden?

Wiederholung
Sinus & Cosinus

Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen



Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(alpha) = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Cosinus}\ (alpha) = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Tangens}\ (alpha) = \tan(\alpha) = \frac{Cos(\alpha)}{Sin(\alpha)} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

Summe aller Winkel: a+β + $\gamma = 180\ °$

C

Gegenkathete zu Winkel α

$\gamma = 90°$

Ankathete zu Winkel α

b

a

A

α

c

β

B

Hypotenuse

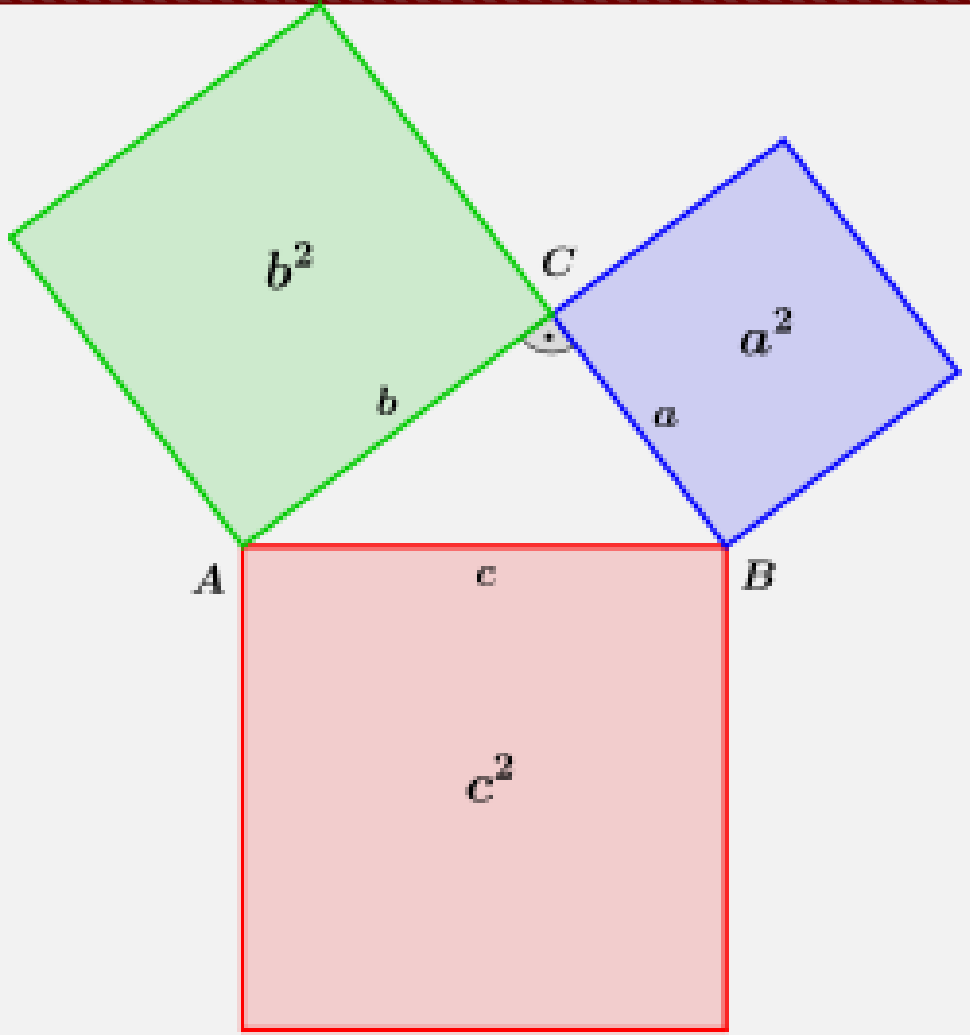
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit Rechtem Winkel (90 Grad)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

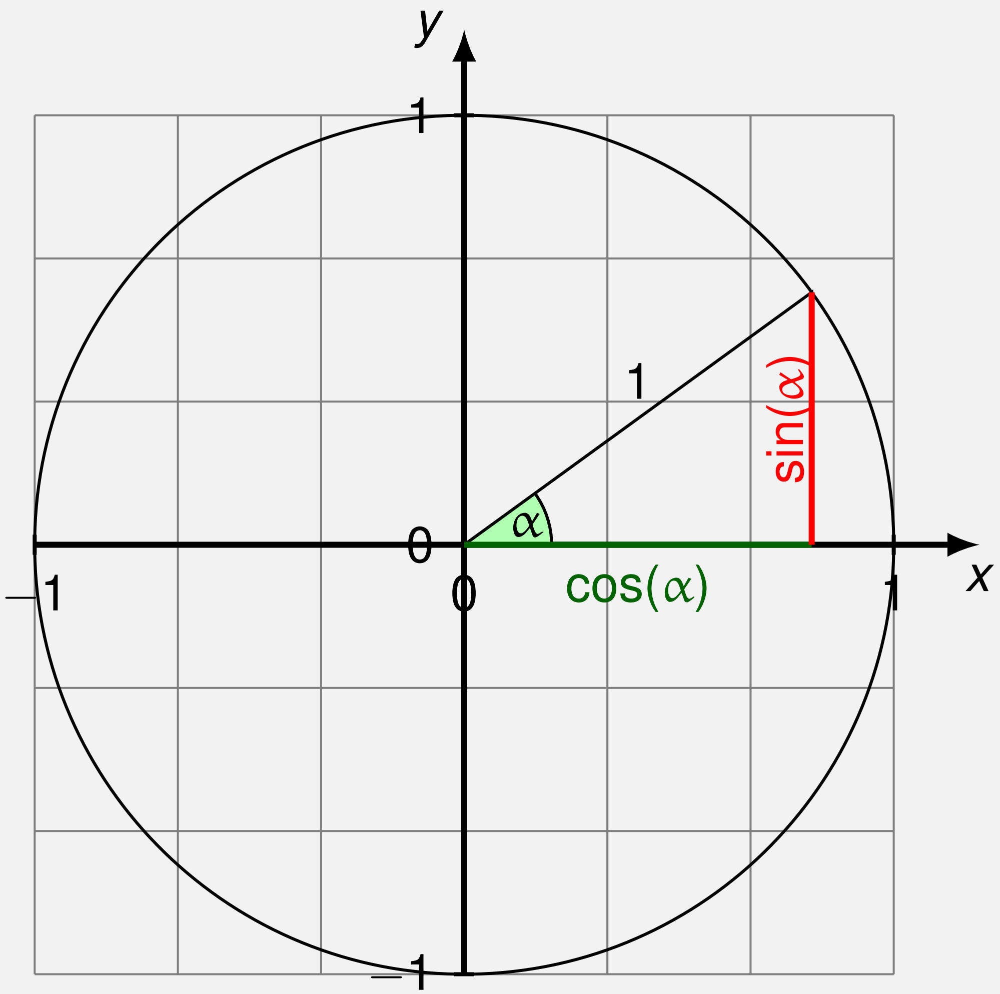


Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Annimation:

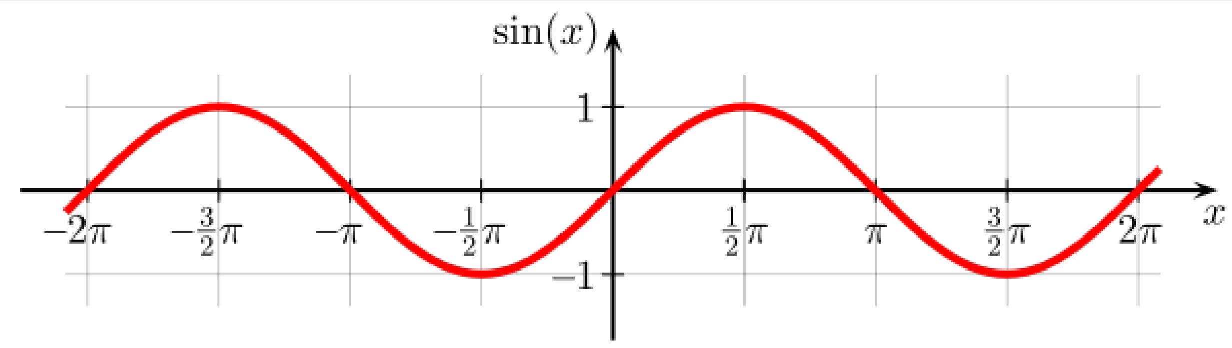
https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo

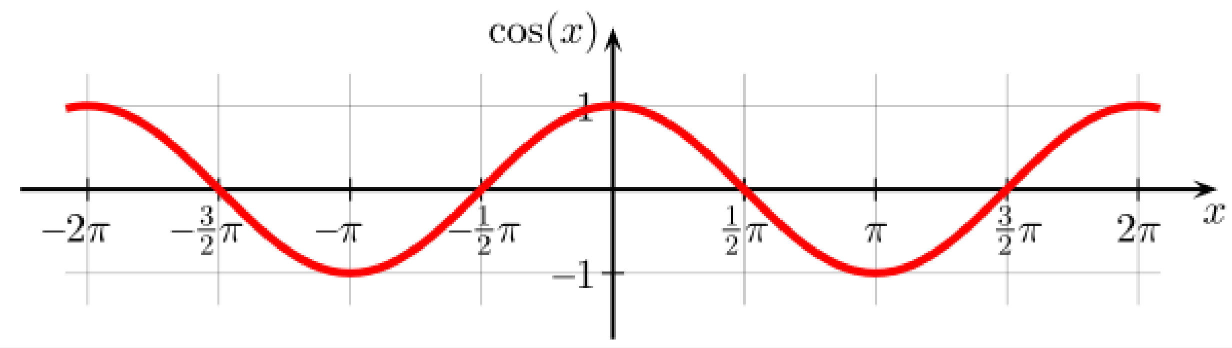


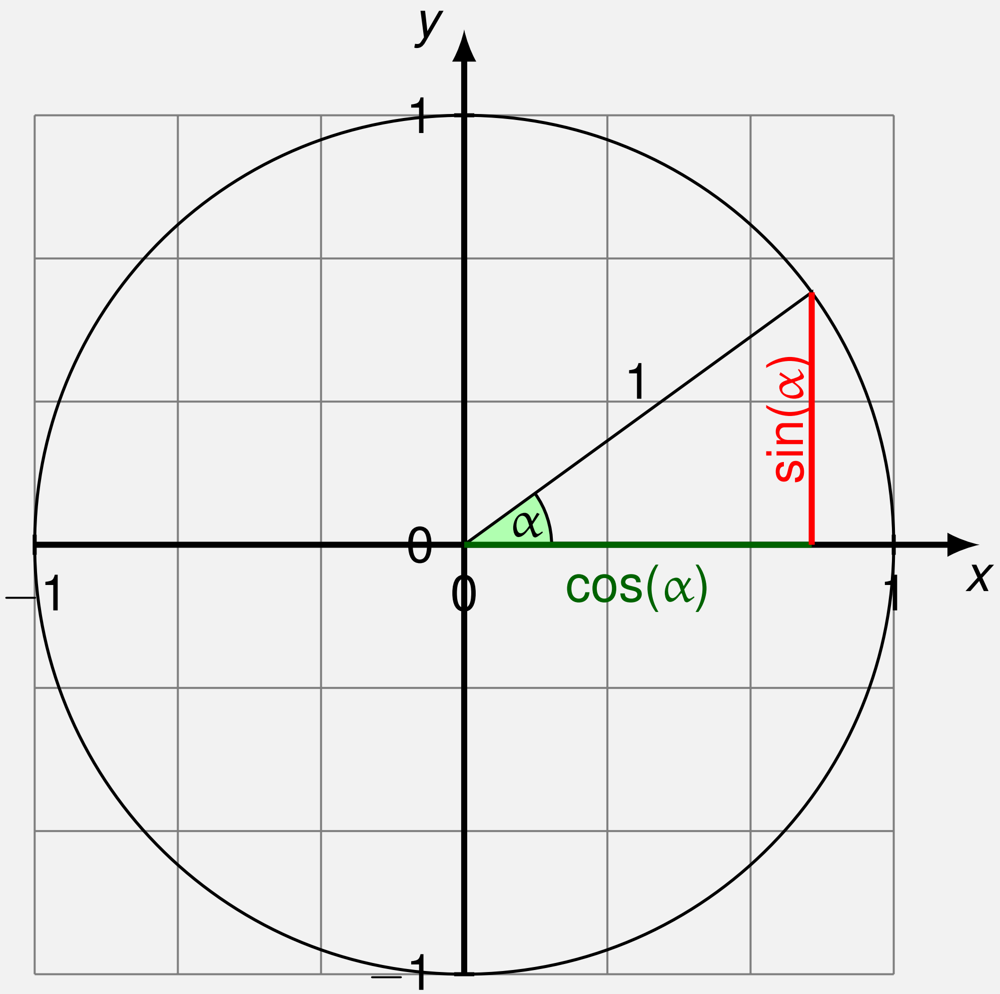
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$Sin^2(x) + Cos^2(x) = 1$

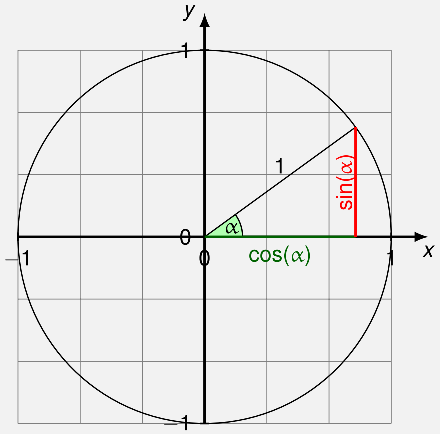






Clemens Weber

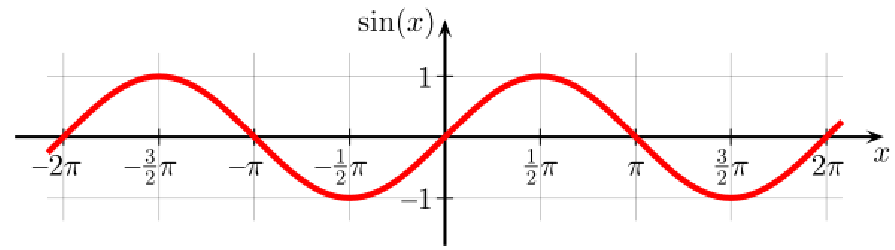
Rechtwinklige Dreiecke

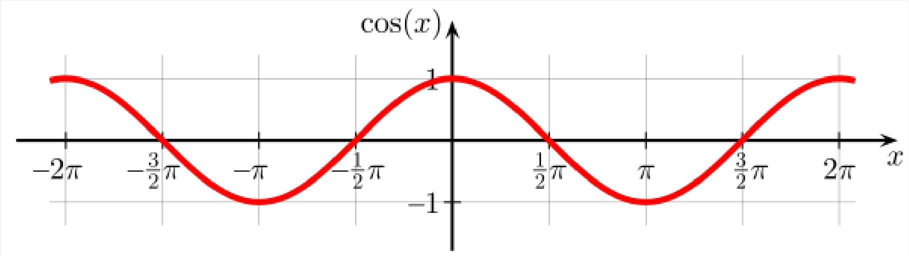


$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Wertetabelle :

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin a = y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos a = x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1





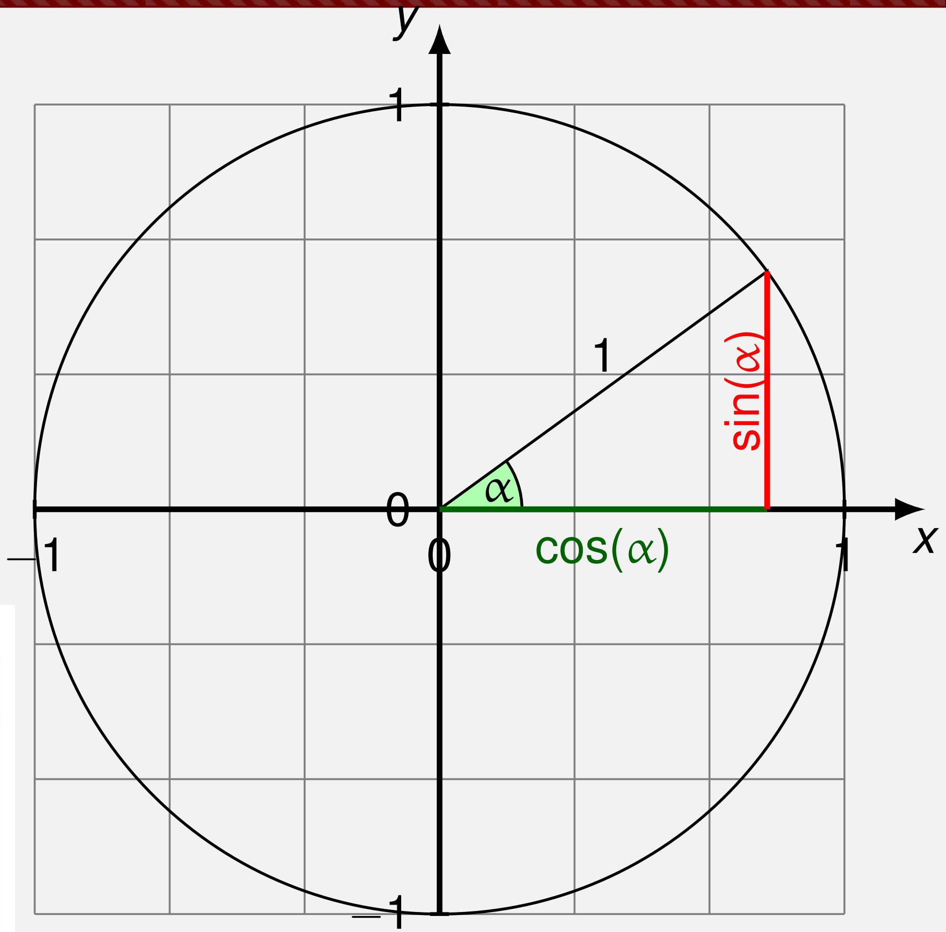
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin(**a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(**a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

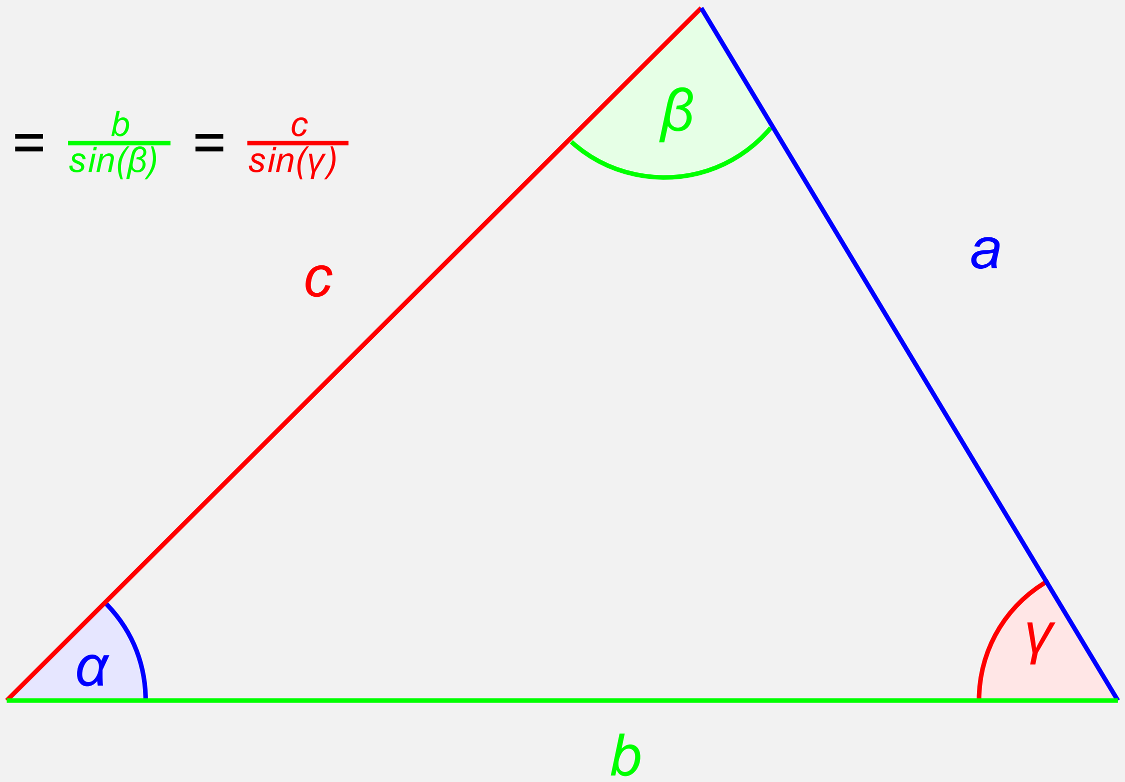
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

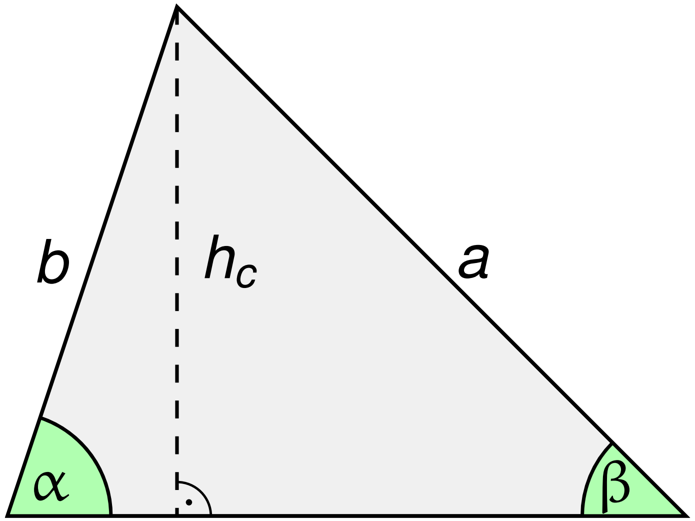


Sinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den gegenüberliegenden Seiten.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$





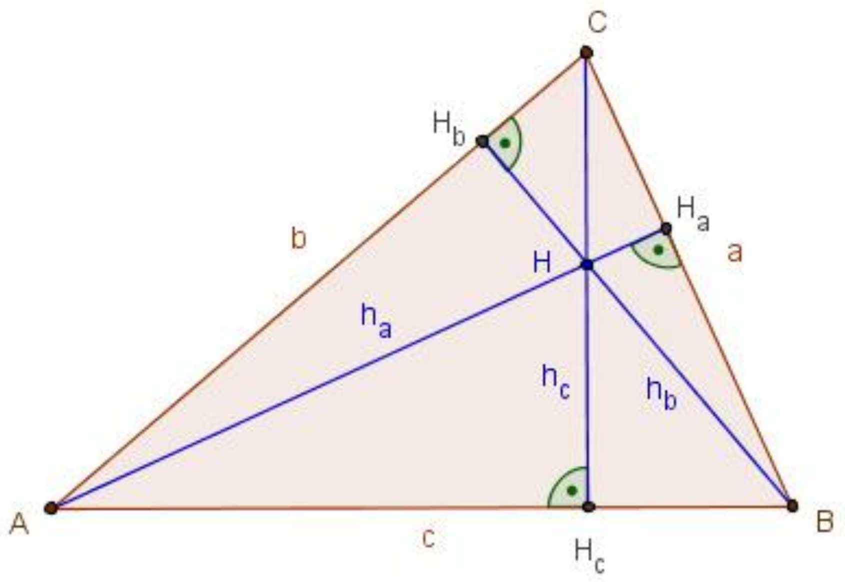
$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

Sinus-Satz

- Gilt in **jedem** Dreieck



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

Sinus-Satz

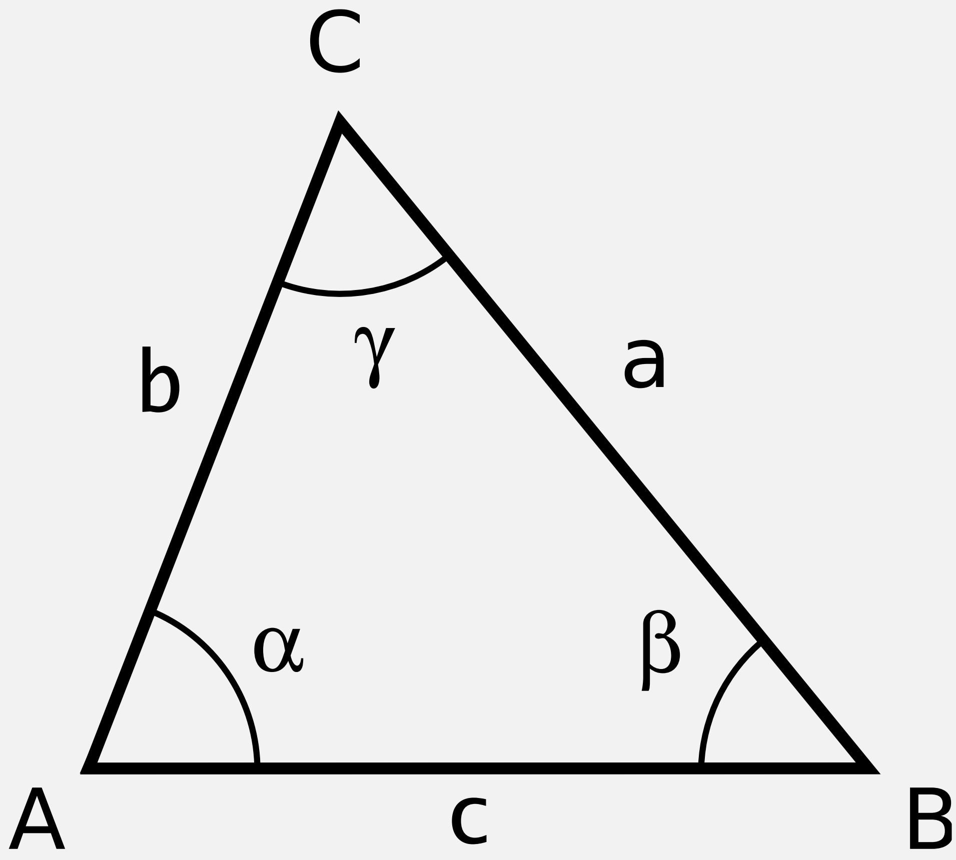
- Gilt in **jedem** Dreieck

Clemens Weber

Cosinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den Seiten.

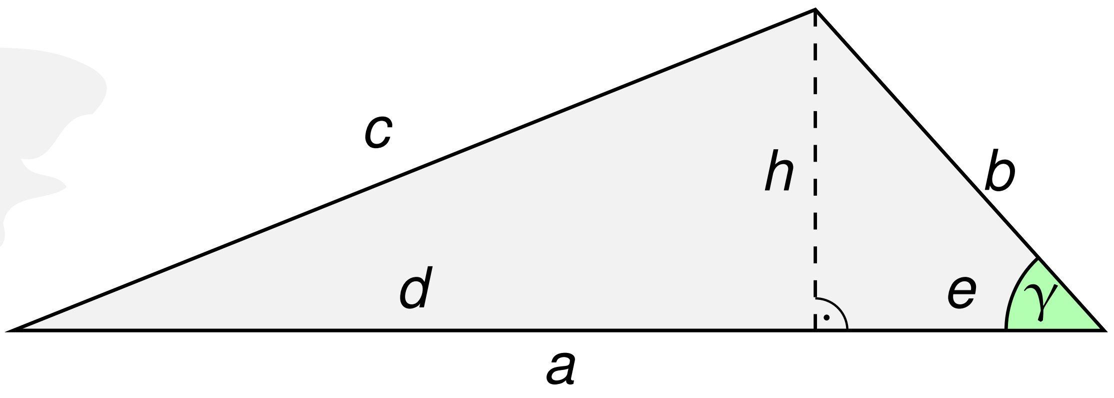
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



$$h^2 = b^2 - e^2$$ (Satz des Pythagoras für das rechte Teildreieck)

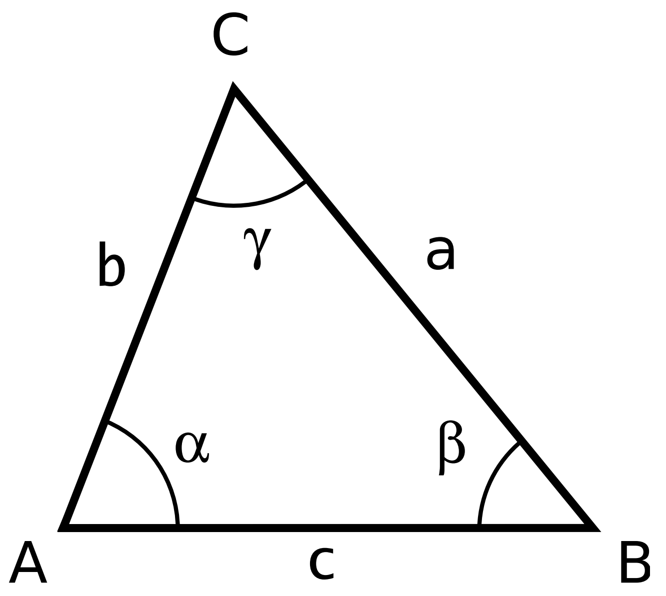
$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$ (binomische Formel)

Cosinus-Satz
Herleitung
Ansatz



Cosinus-Satz

- Beziehung zwischen den Winkeln eines allgemeinen Dreiecks und den Seiten.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

Trigonomerischer Zusammenhang

- Lernspruch:
- Sinus: SiCo CoSi
- Cosinus: CoCo SiSi

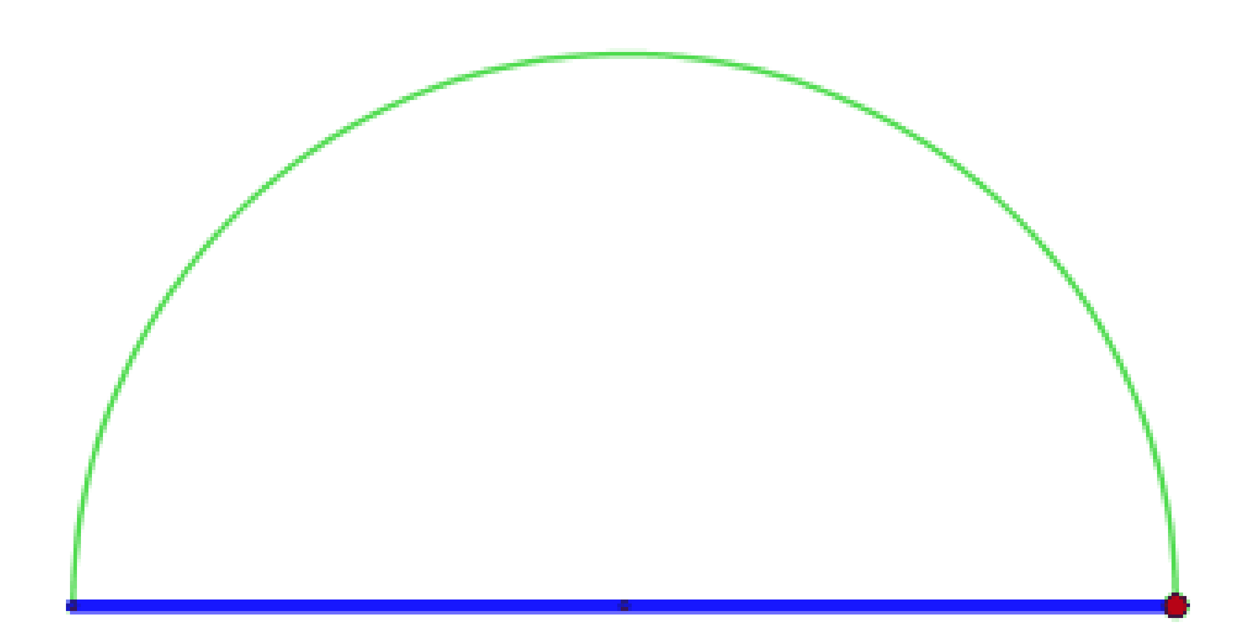
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$ [4]

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$ [4]

Clemens Weber

Satz des Thales

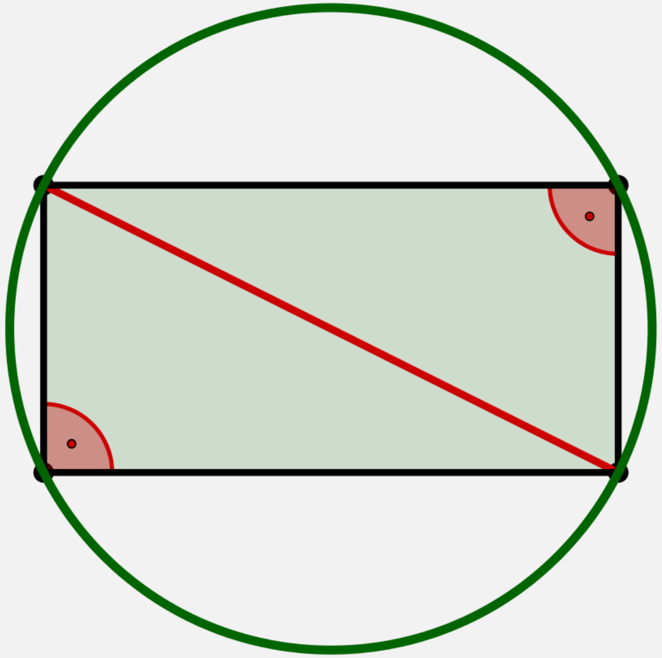
- Halb-Kreis = Thaleskreis
  - *Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig.*

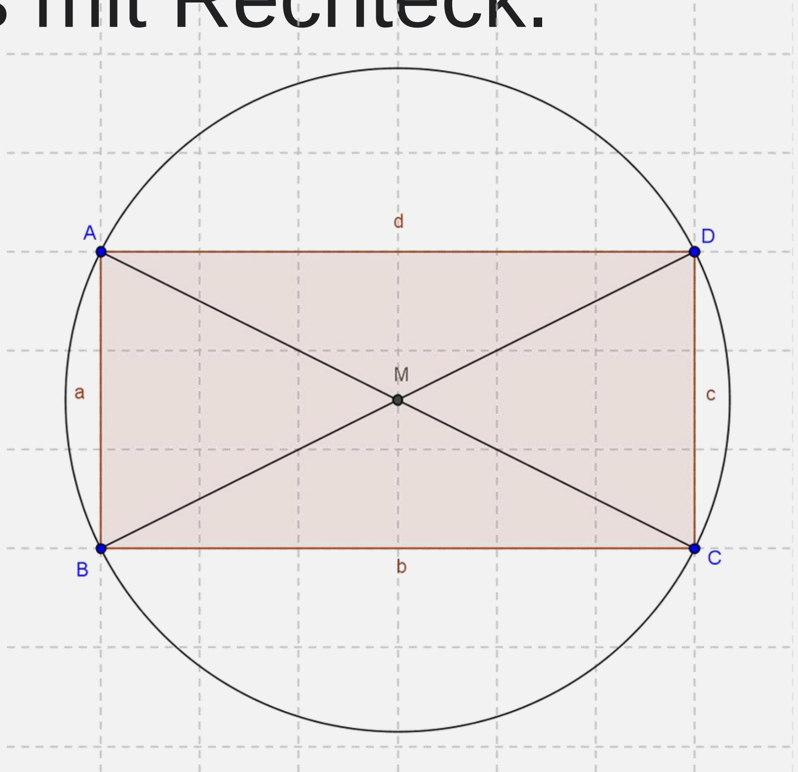


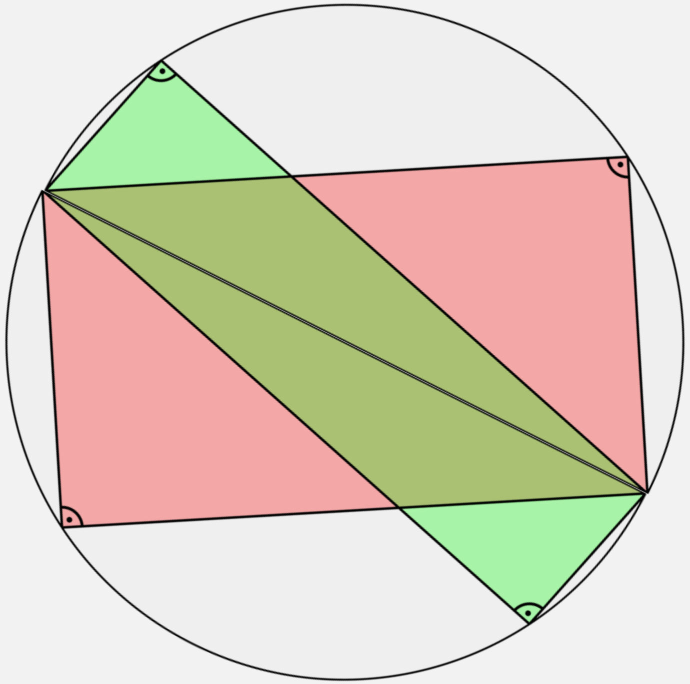
Clemens Weber

Satz des Thales

- *Alle von einem [Halbkreis](#) umschriebenen [Dreiecke](#) sind [rechtwinklig](#).*
- Geometrischer Beweis mit Rechteck.



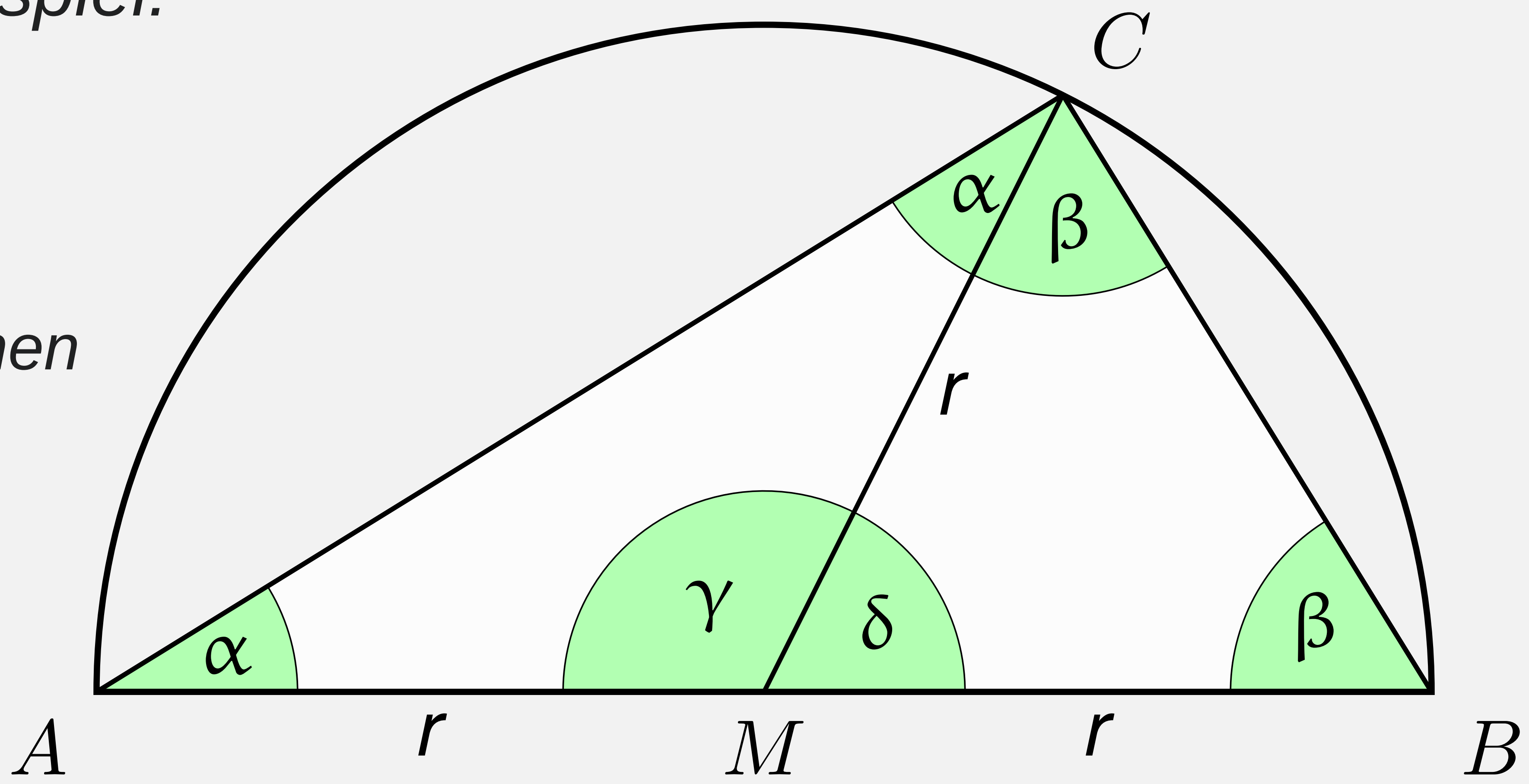




Clemens Weber

Satz des Thales

- *Anwendungs Beispiel:*
- $\alpha + \beta = 90°$
  - *Alpha gegeben*
  - *Gamma bestimmen*
  - *Viele weitere*

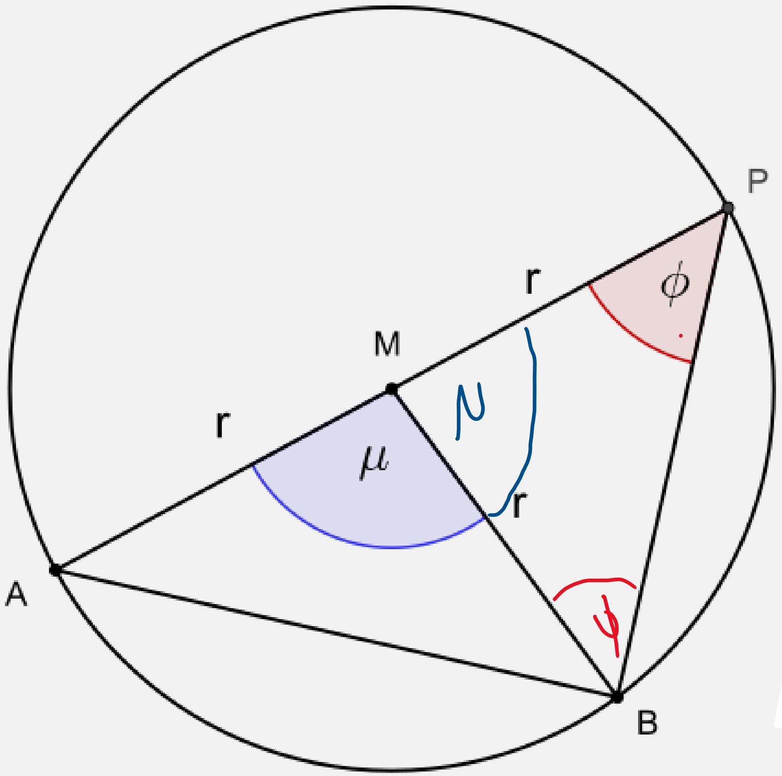


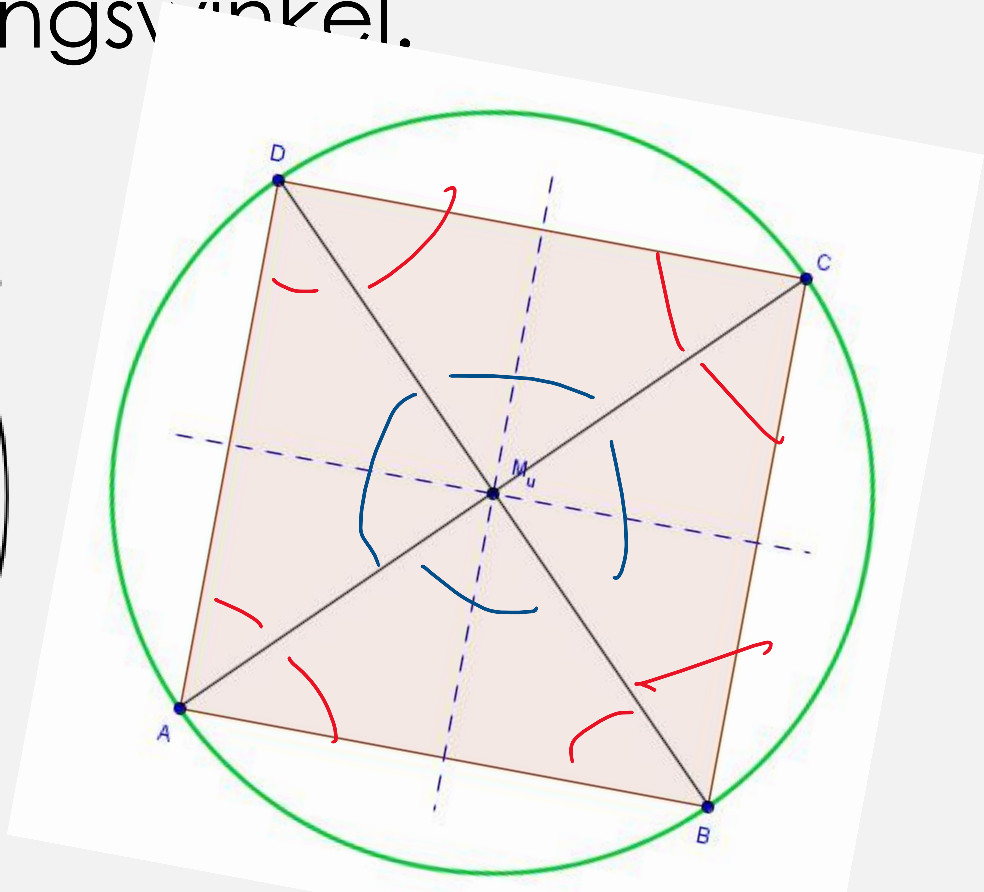
Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu = 2\varphi$

$2 \times \mu = 180^\circ$

$2\phi + \mu = 180^\circ$

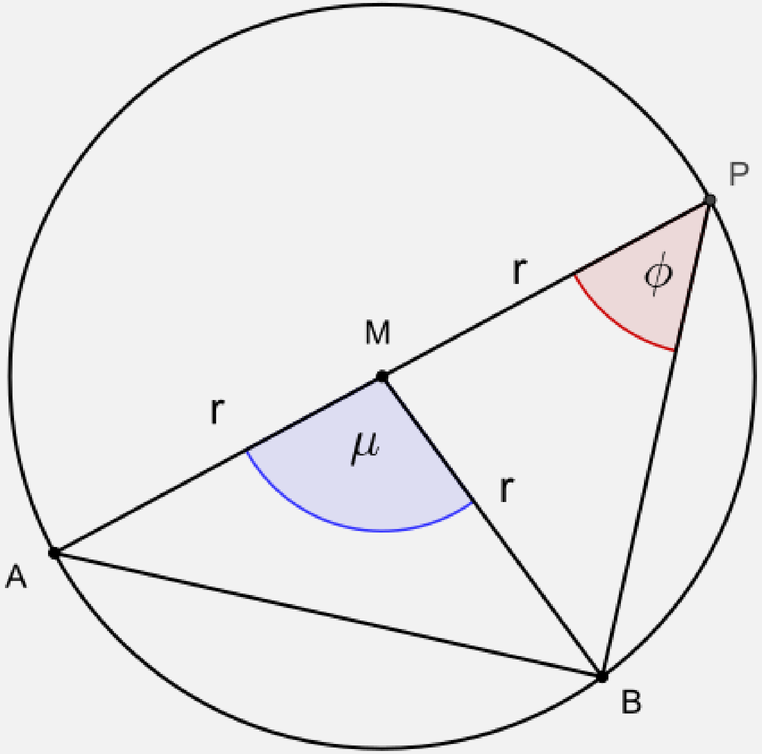


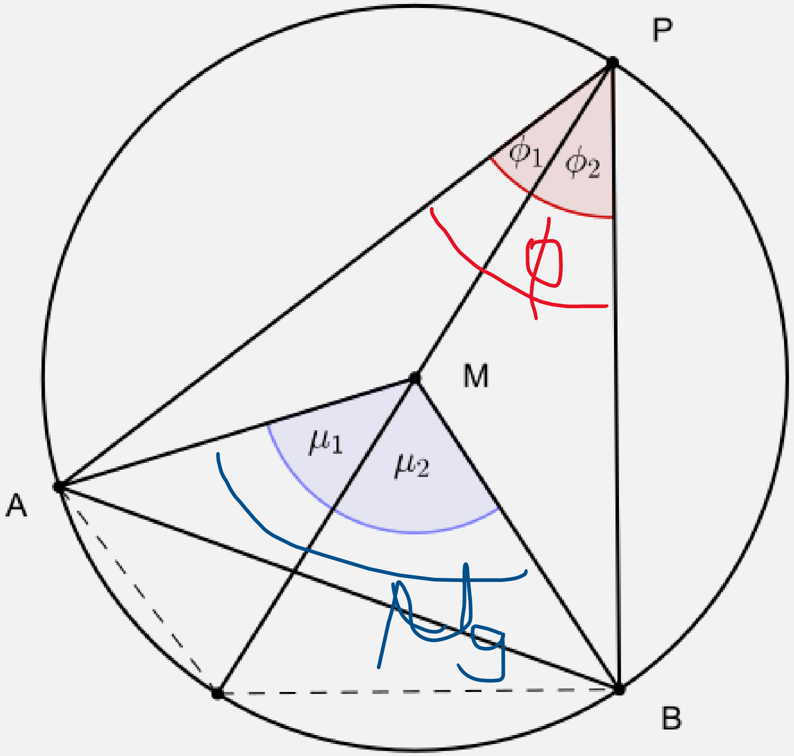


Clemens Weber

Kreiswinkel-Satz

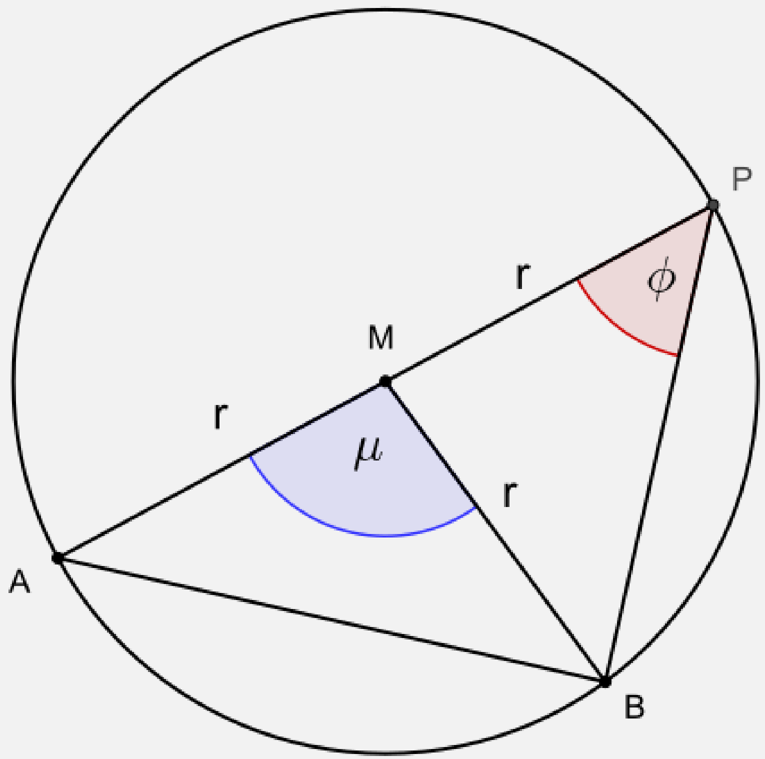
- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

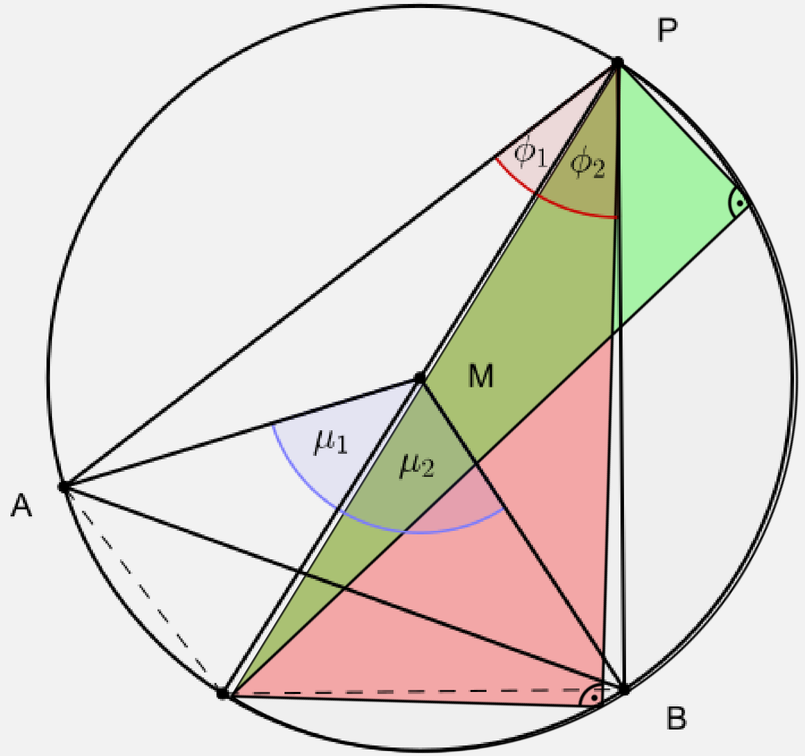




Kreiswinkel-Satz

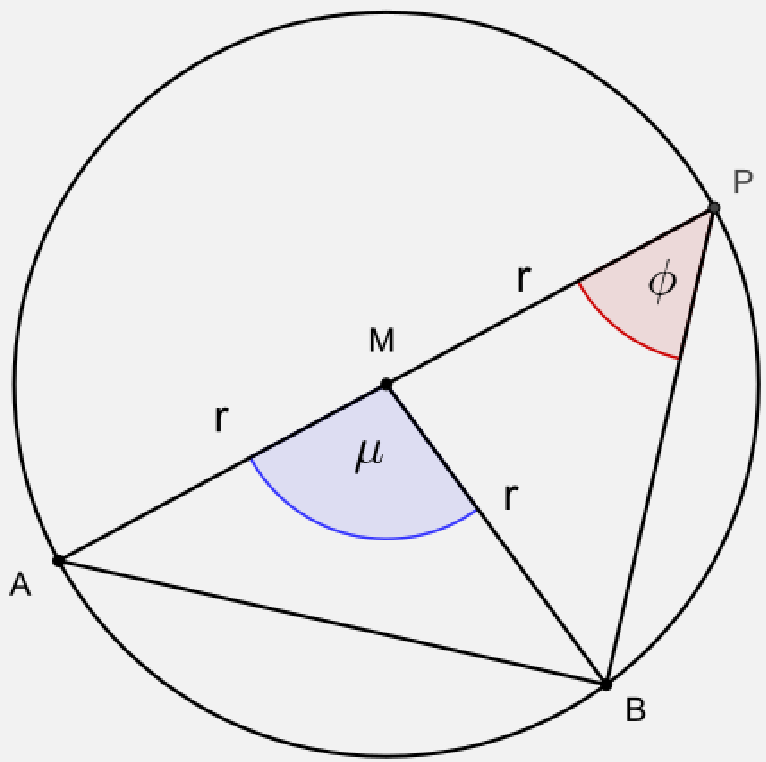
- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

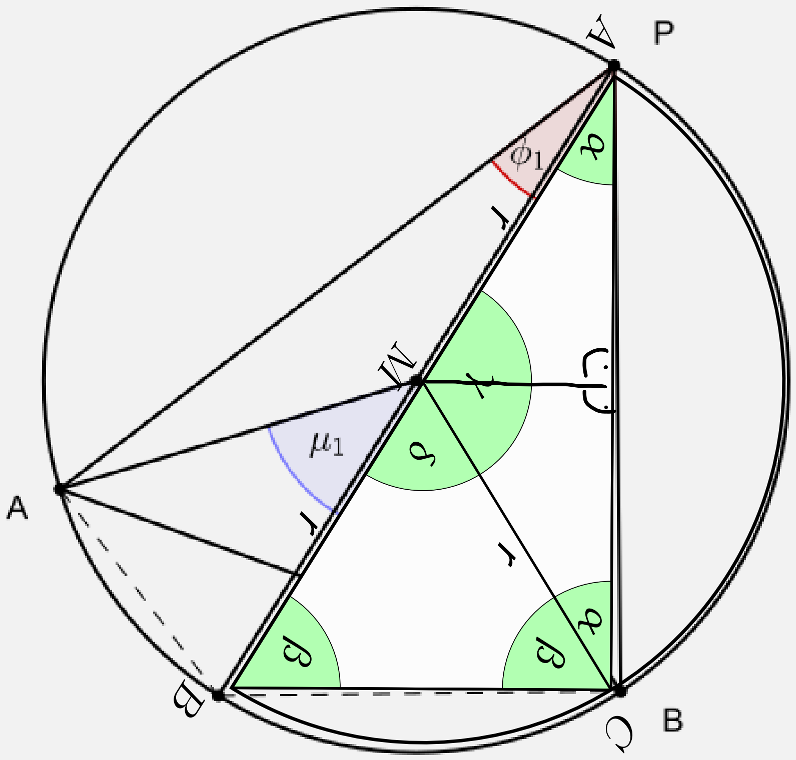




Kreiswinkel-Satz

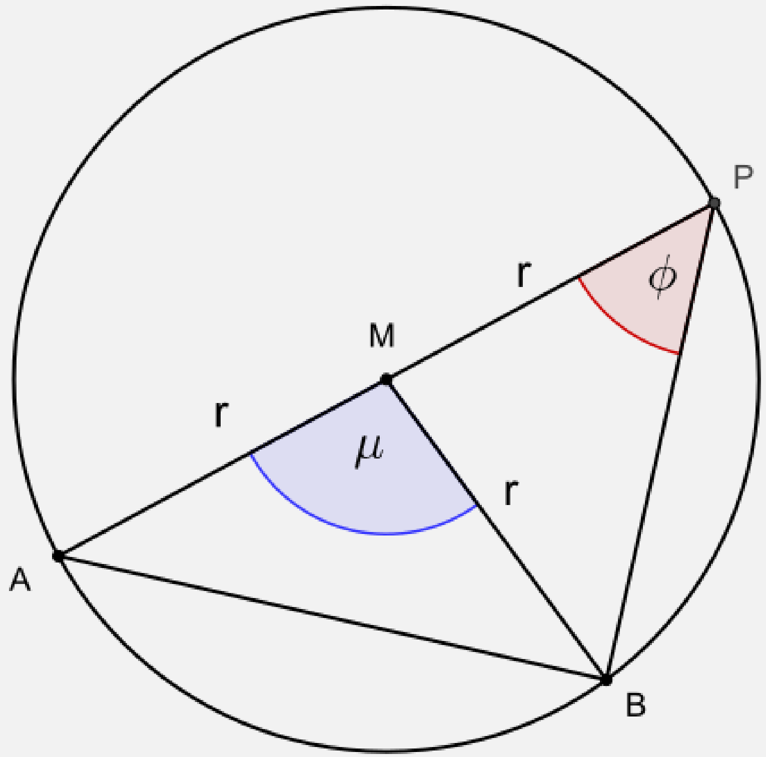
- $2\alpha + \gamma = 180°$
- $\gamma + \delta = 180°$
- $2\alpha = \delta$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

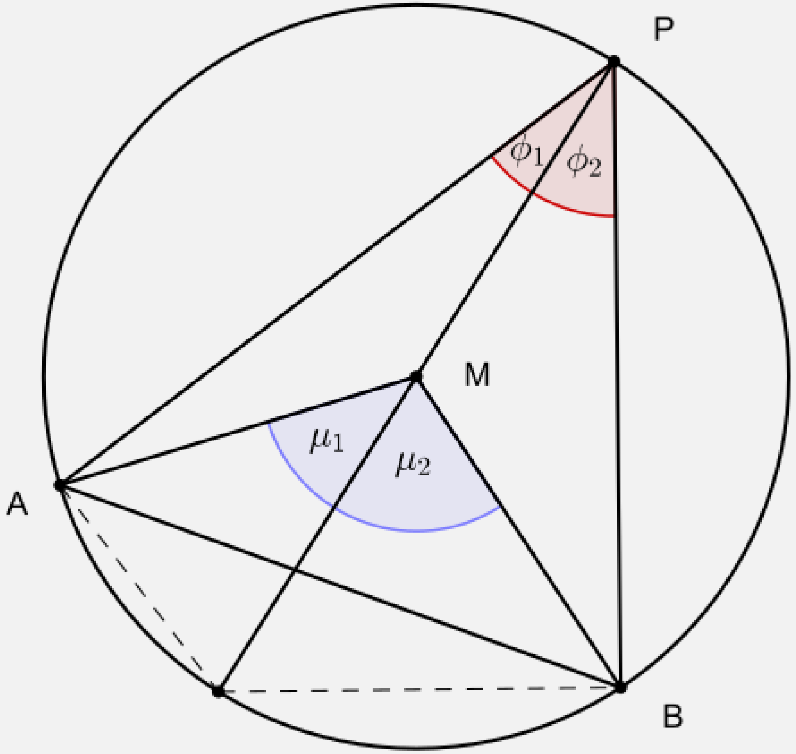




Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

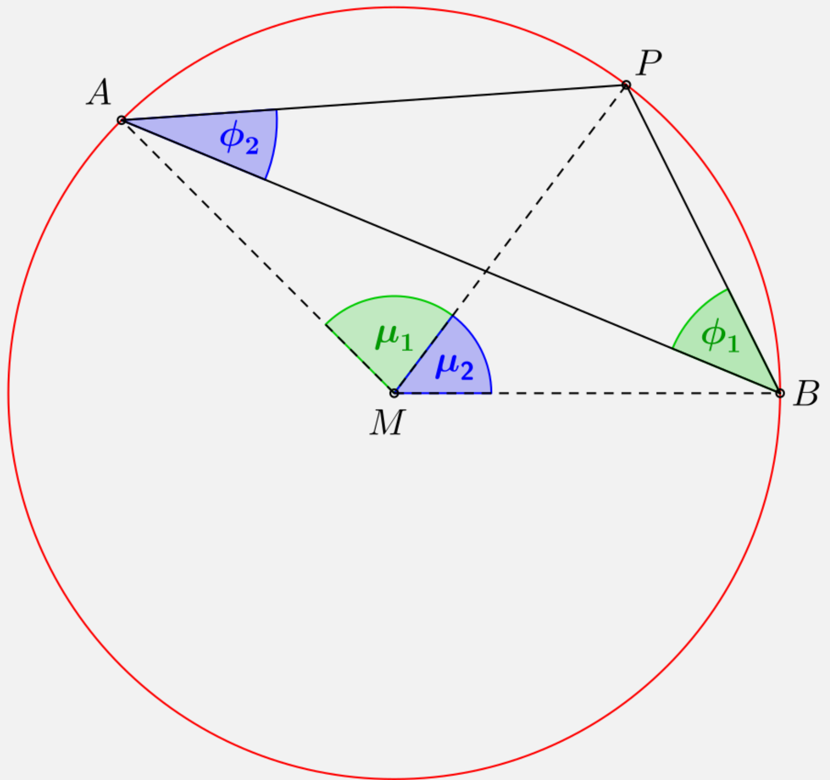




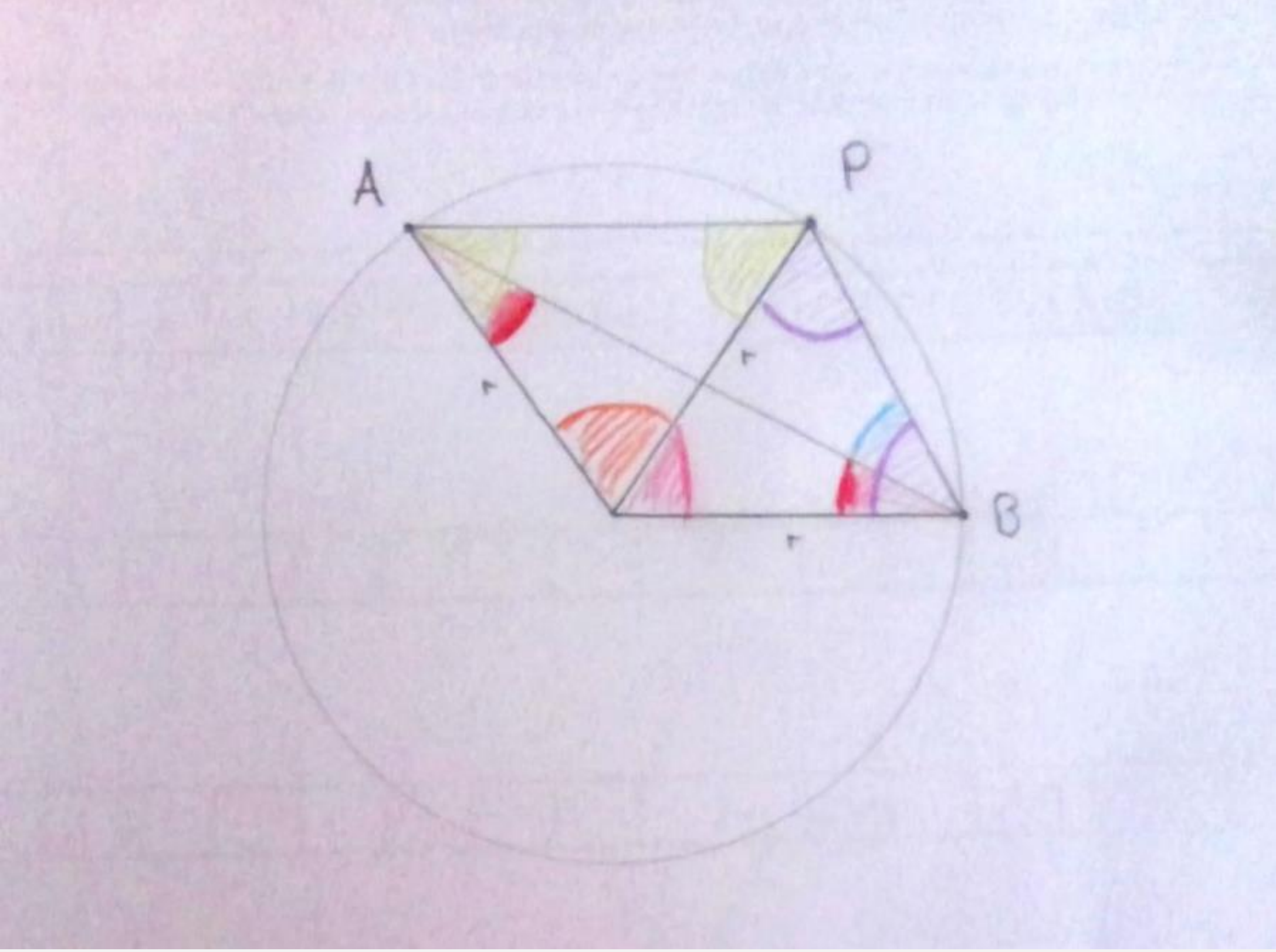
Clemens Weber

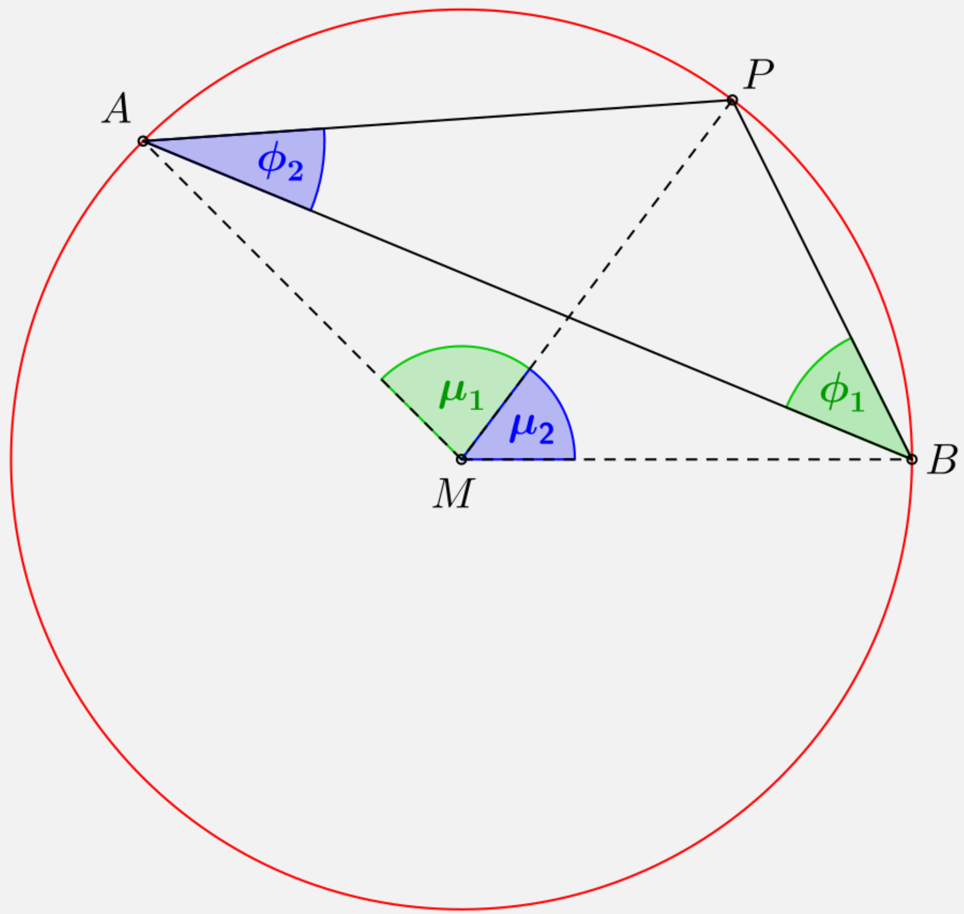
Kreiswinkel-Satz

- Mittelpunktswinkel eines Kreisbogens ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen Umfangswinkel.
- $\mu_1 = 2\varphi_1$
- $\mu_2 = 2\varphi_2$

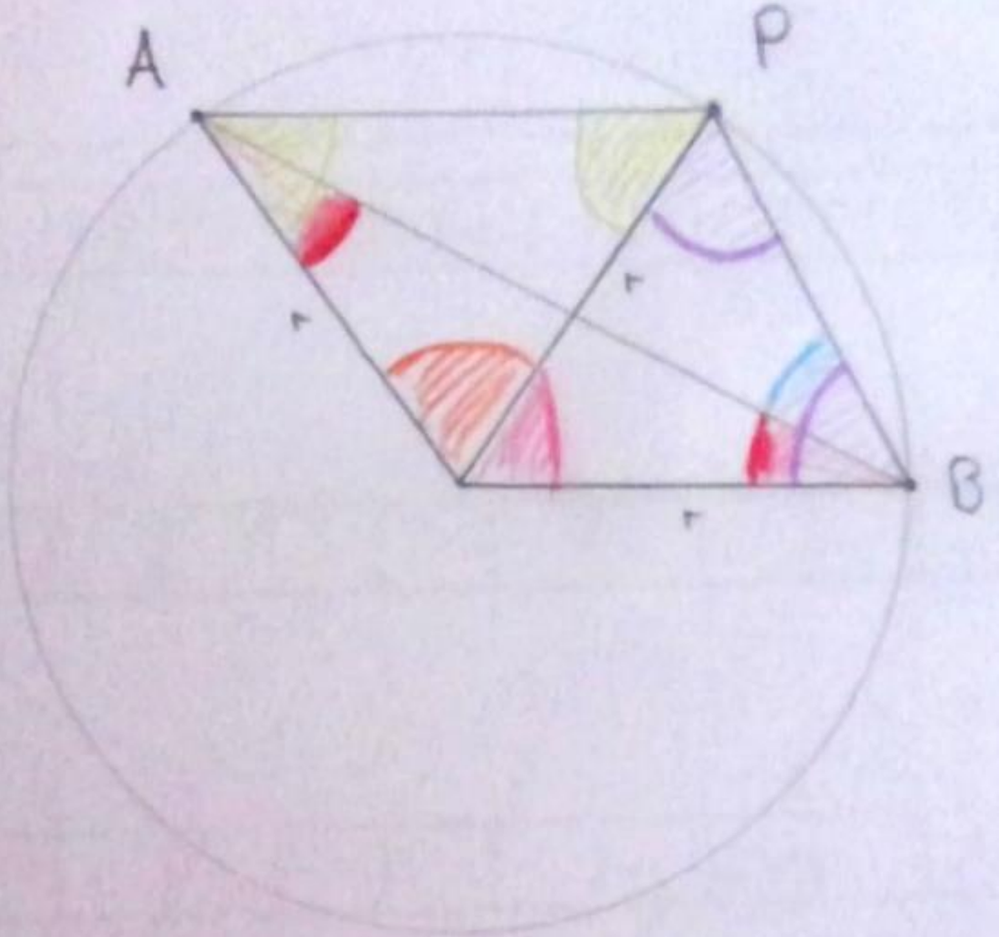


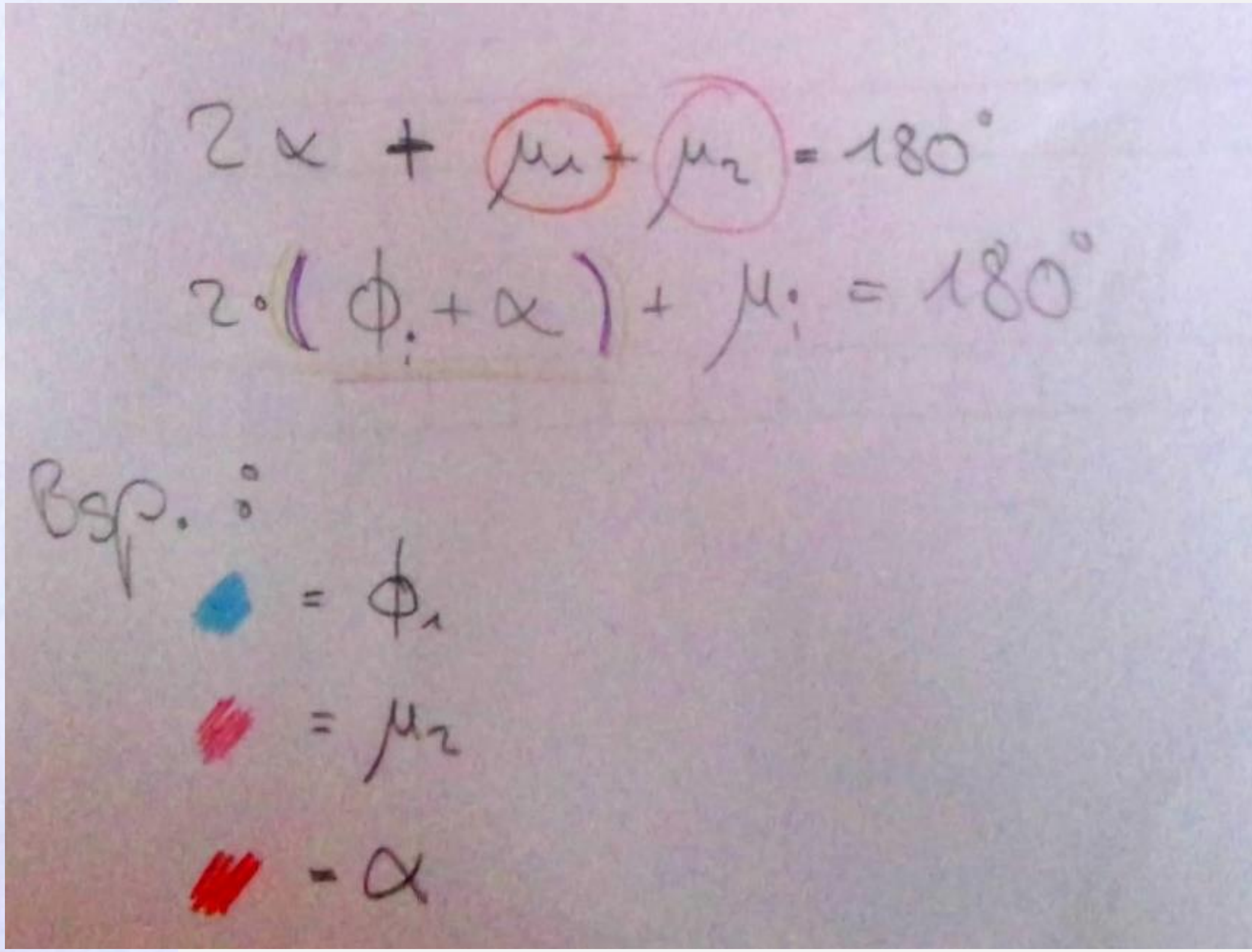
Kreiswinkel-Satz





Kreiswinkel-Satz





Clemens Weber

Sehnen-Tangenten-Satz

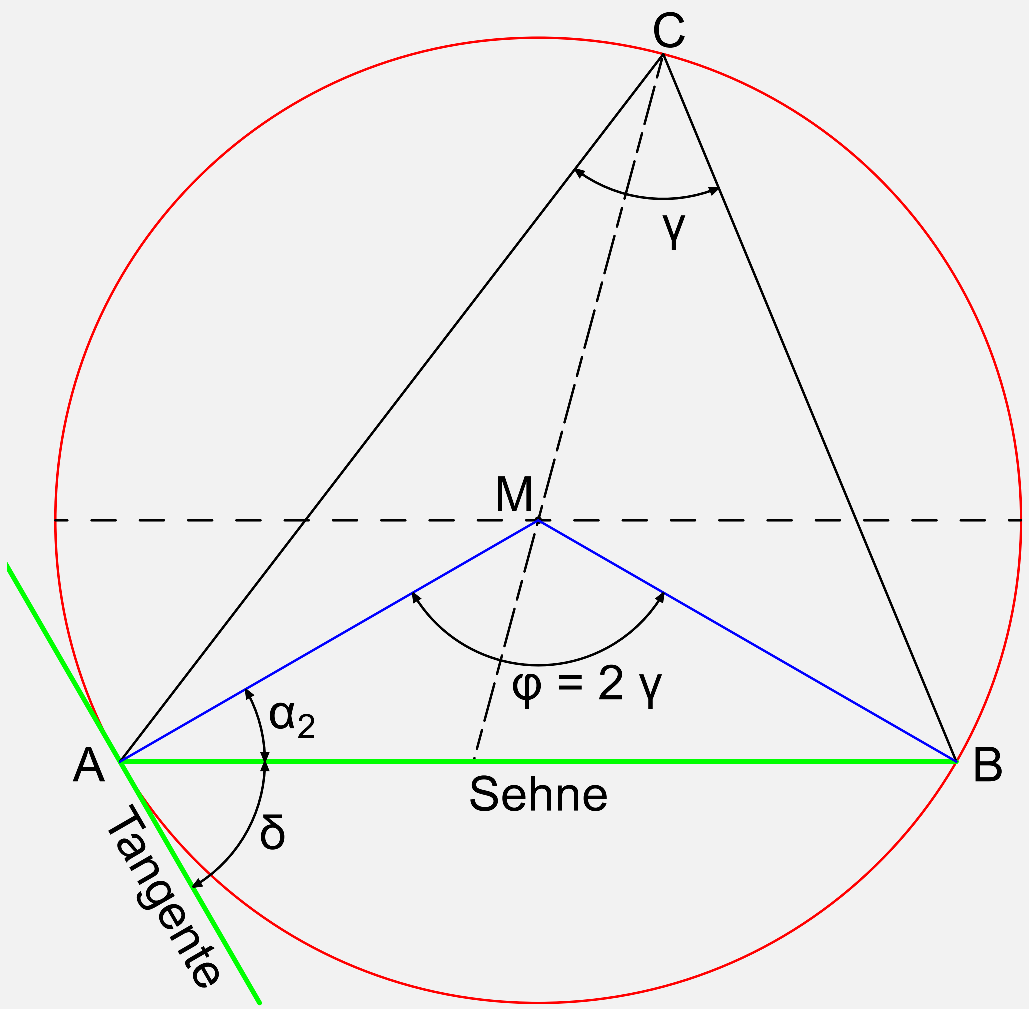
Sehnentangentenwinkelsatz:

Da $\triangle ABM$ gleichschenklig ist gilt:

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$$

Zusammen mit $\alpha_2 + \delta = 90^\circ$ folgt:

$$\delta = 90^\circ - \alpha_2 = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$$



Clemens Weber

Sehnen-Tangenten-Satz

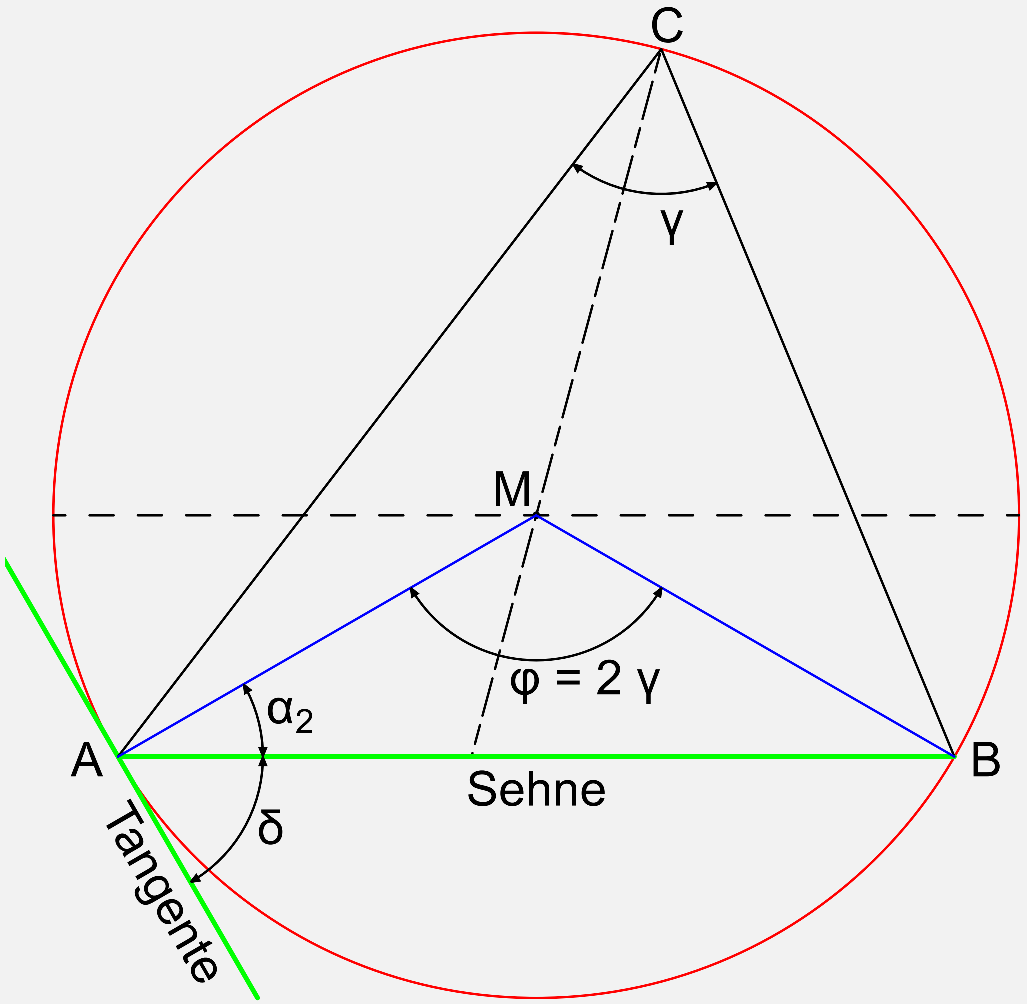
Sehnentangentenwinkelsatz:

Da $\triangle ABM$ gleichschenklig ist gilt:

$$\alpha_2 = \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma$$

Zusammen mit $\alpha_2 + \delta = 90^\circ$ folgt:

$$\delta = 90^\circ - \alpha_2 = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$$



Übungsaufgaben:

- https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck

- https://www.maths2mind.com/schluesselwoerter/graph-einer-funktion

Ziel der Veranstaltung:

Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das Studienkolleg :)

Aus den letzten Vorlesungen

E-Funktion Exponential Funktion

- Natürliche e-Funktion
  - $e = 2.7182 \ldots \ldots$

Besondere Eigenschaft:

Steigung = Wert der Fkt

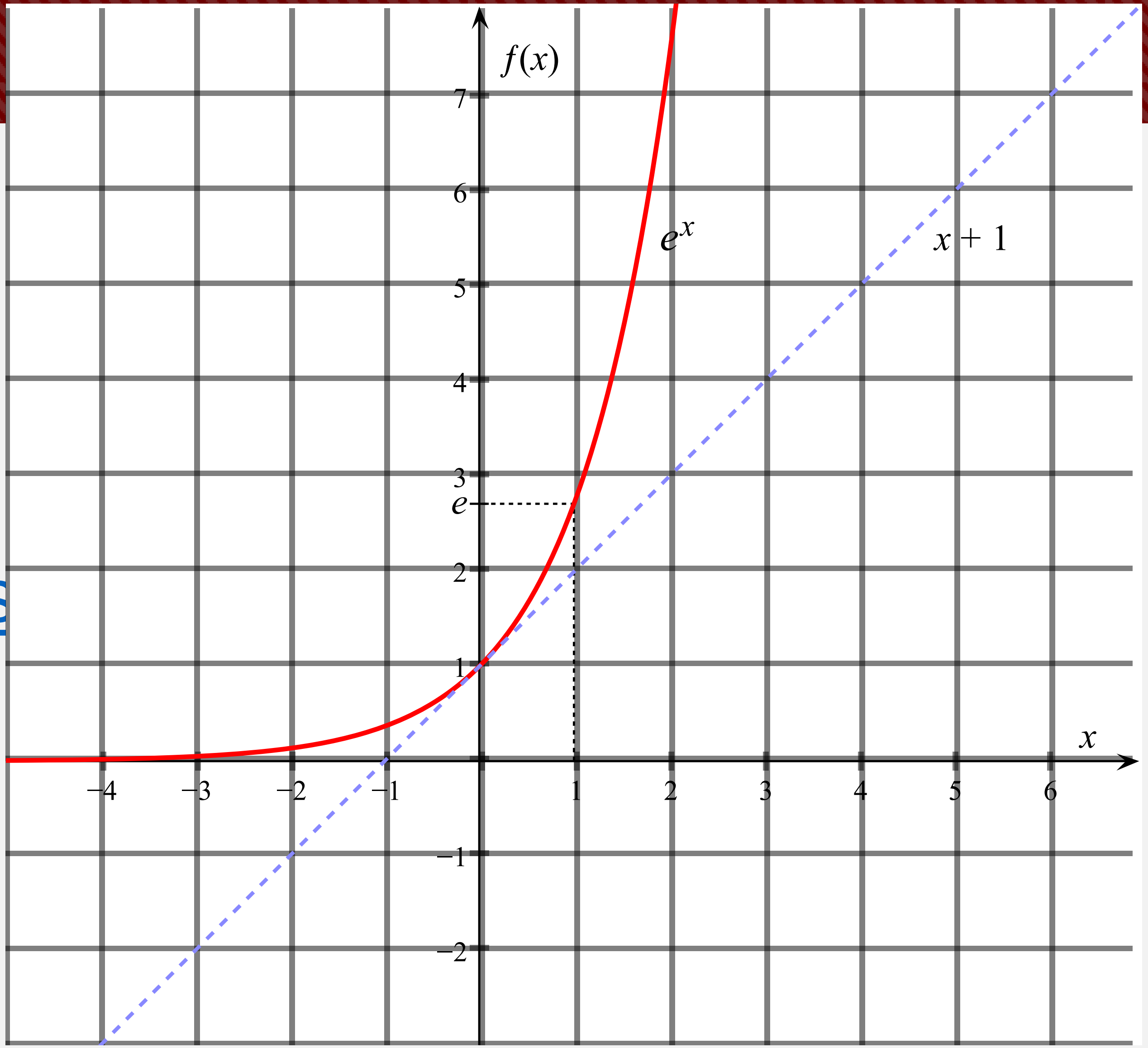
An jedem Punkt!

e-Funktion Erklärung und Beis

Natürliche Logarithmus: $\ln(x)$

$$\ln(e^{x}) = x = e^{\ln(x)}$$

$$b^{x} = (e^{\ln(b)})^{x} = e^{\ln(b)*x}$$



Logarithmus Gesetze

8.1 Formeln für Logarithmen:

$$\boxed{b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y}$$

$$\left(y \in IR^+ \; und \; b \in IR^+ ohne \; \{1\}\right)$$

z. B. $0{,}5^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{0,5} 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 0{,}5}$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a$; $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$;

Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x$; $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$;
($e = 2{,}71828\ldots$ heißt Eulersche Zahl)

Logarithmus Rechengesetze

Rechengesetze für Logarithmen $(u, v > 0)$

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n \cdot \log_b u \quad ,$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^n = n$$

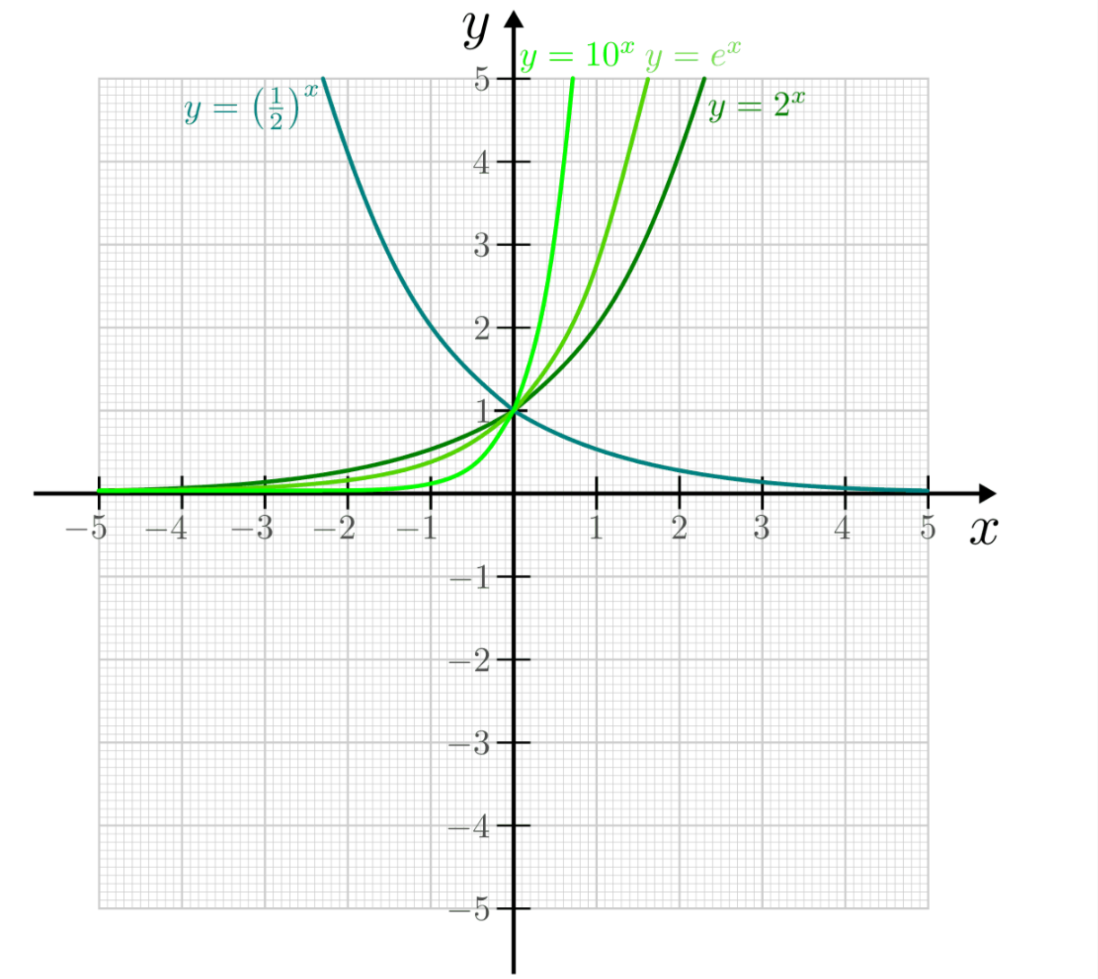
$$b^{\log_b n} = n$$

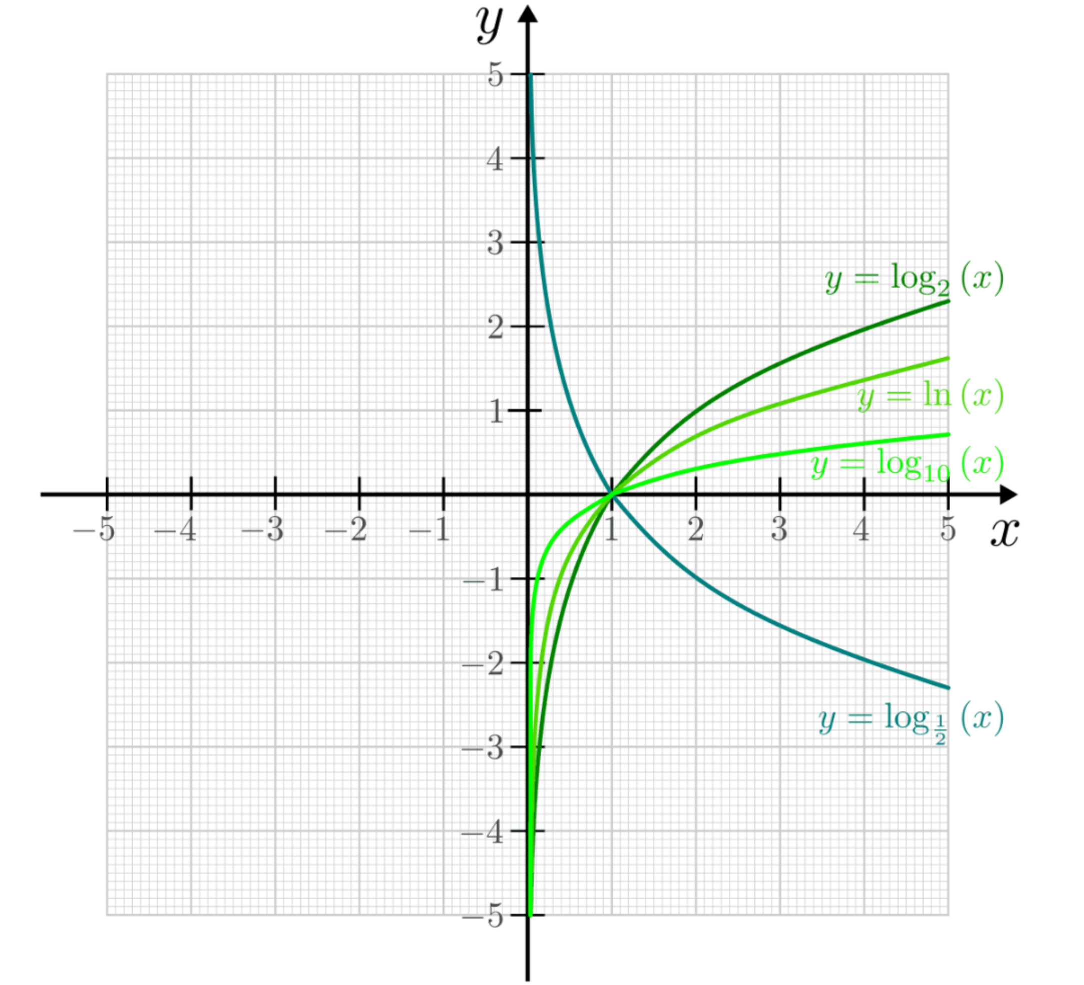
$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$ die Basisumrechnungsformel

$(a > 0 \; und \; b, c \in IR \; ohne \; \{1\})$

Clemens Weber

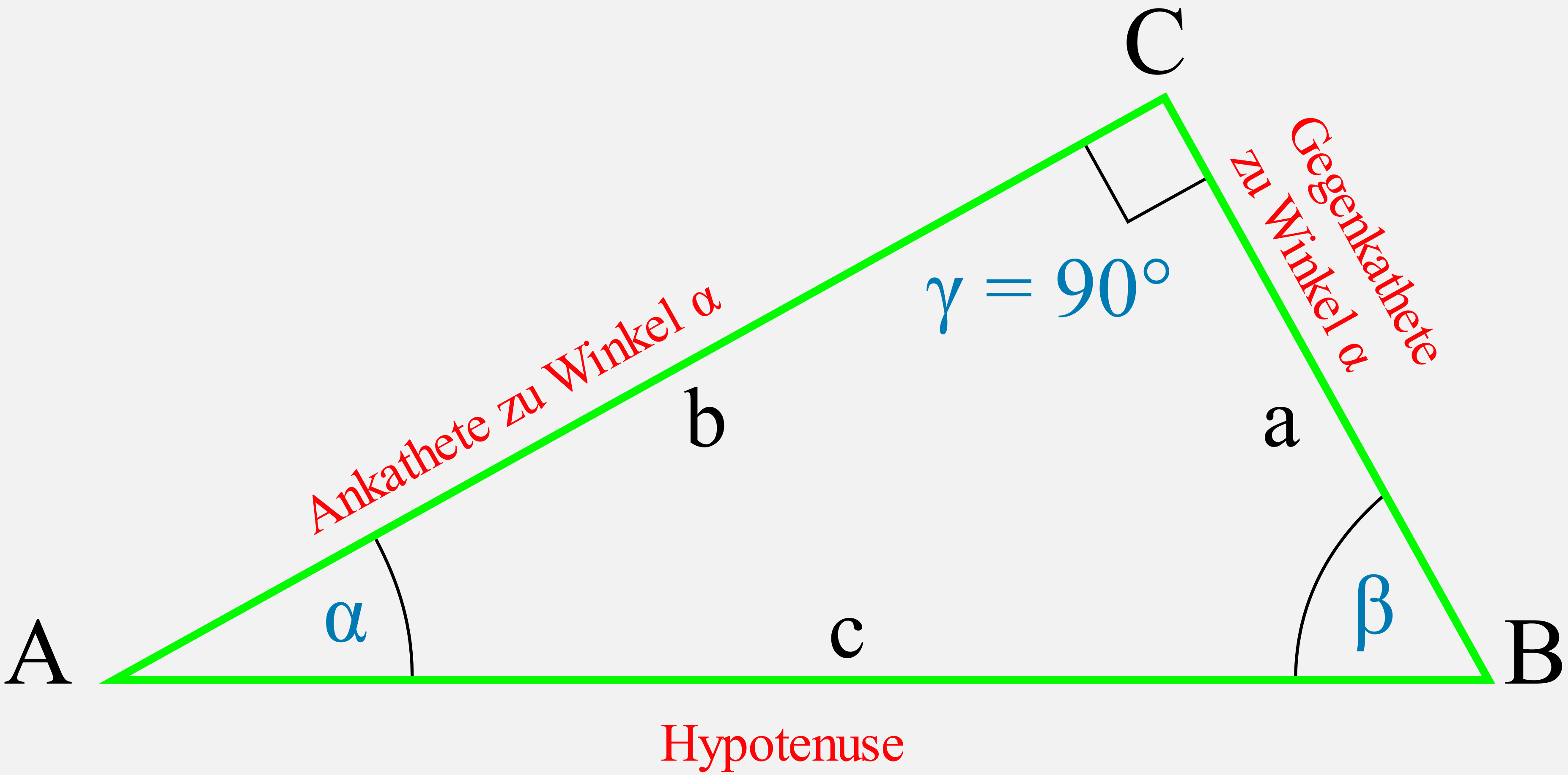
Logarithmus als Umkerhfunktion der Exponentialfunktion





Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen



Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(alpha) = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Cosinus }(alpha) = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Tangens }(alpha) = \tan(\alpha) = \frac{Cos(\alpha)}{Sin(\alpha)} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

Summe aller Winkel: a+β + $\gamma = 180\ °$

C

Gegenkathete zu Winkel α

$\gamma = 90°$

Ankathete zu Winkel α

b

a

A

α

c

β

B

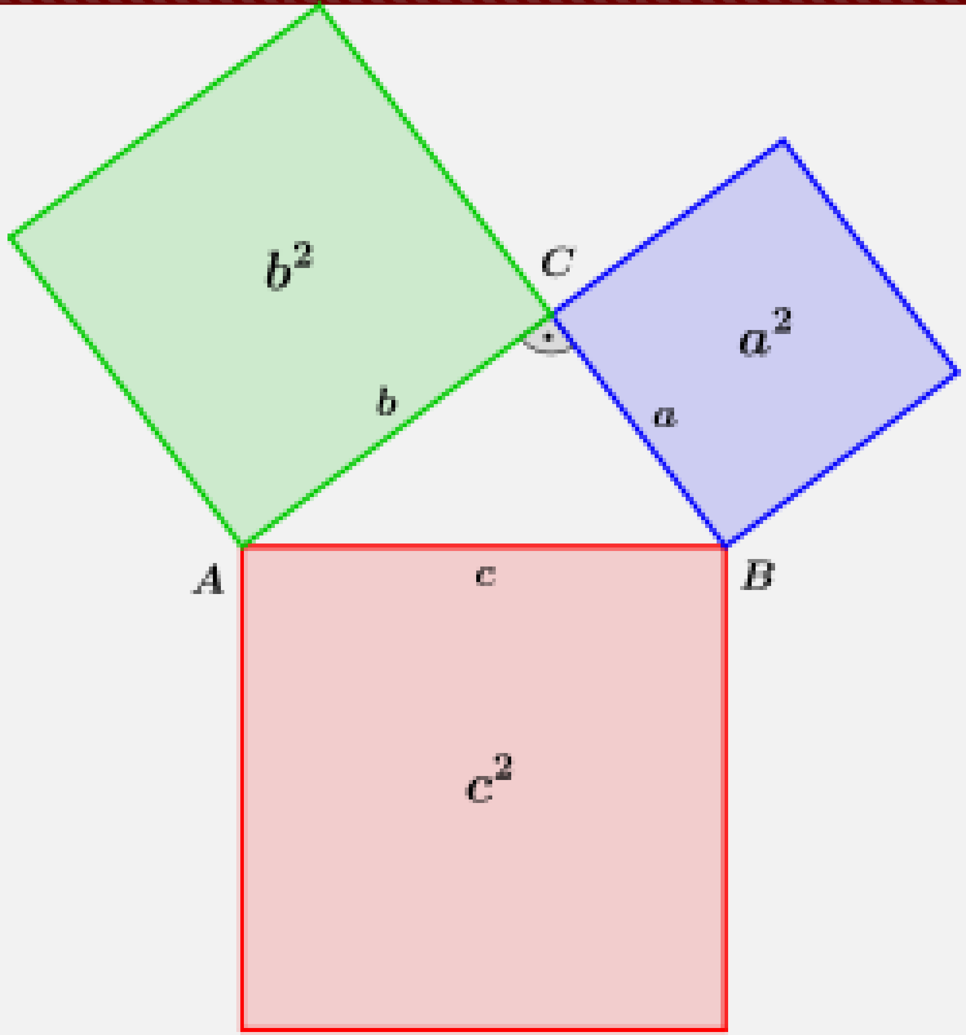
Hypotenuse

Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit Rechtem Winkel (90 Grad)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$



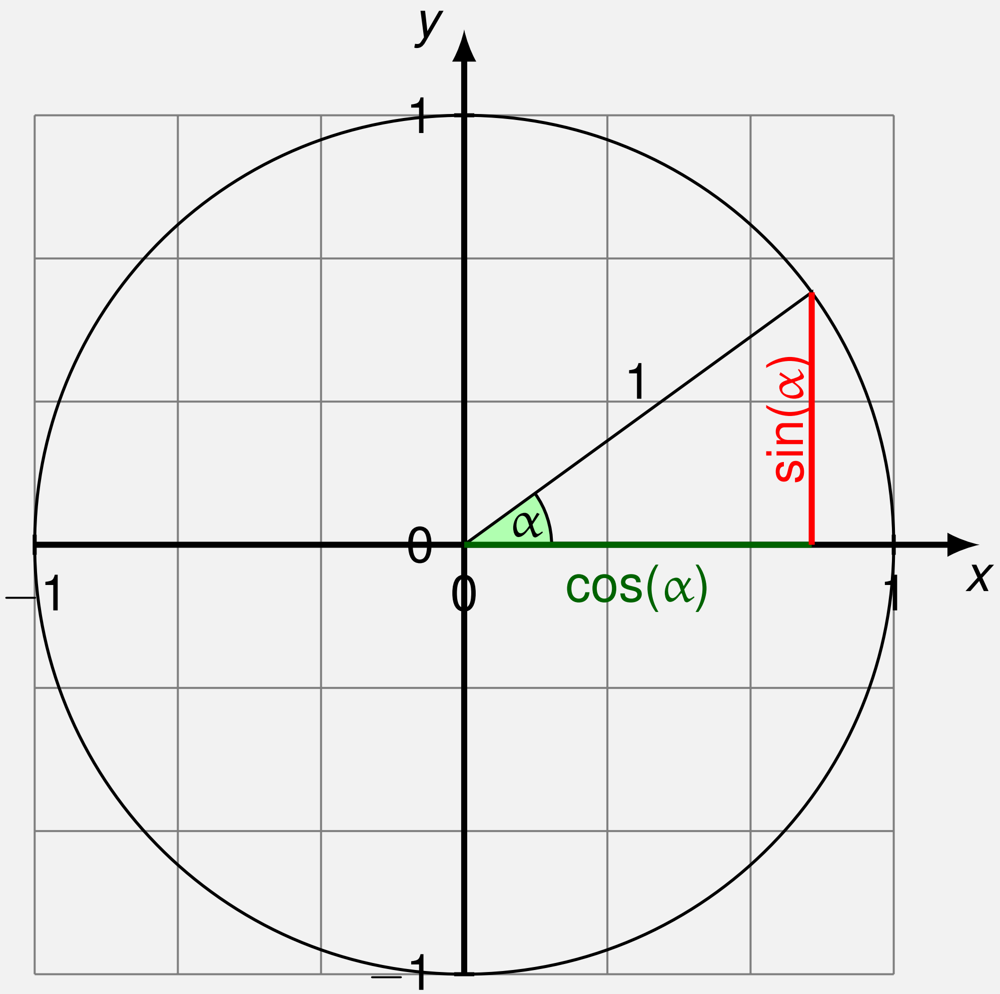
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Annimation:

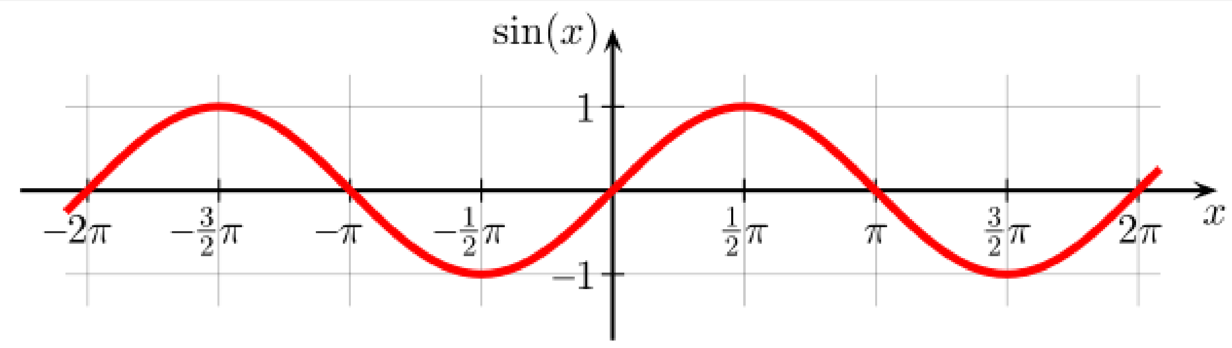
https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo

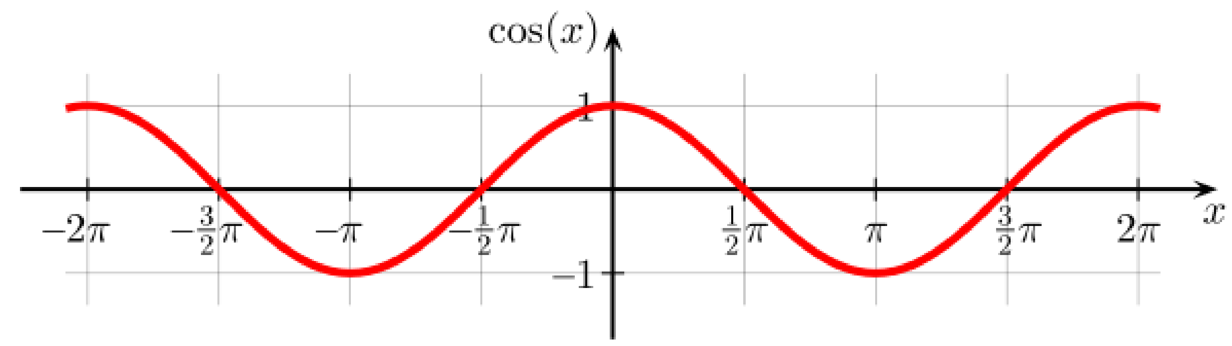


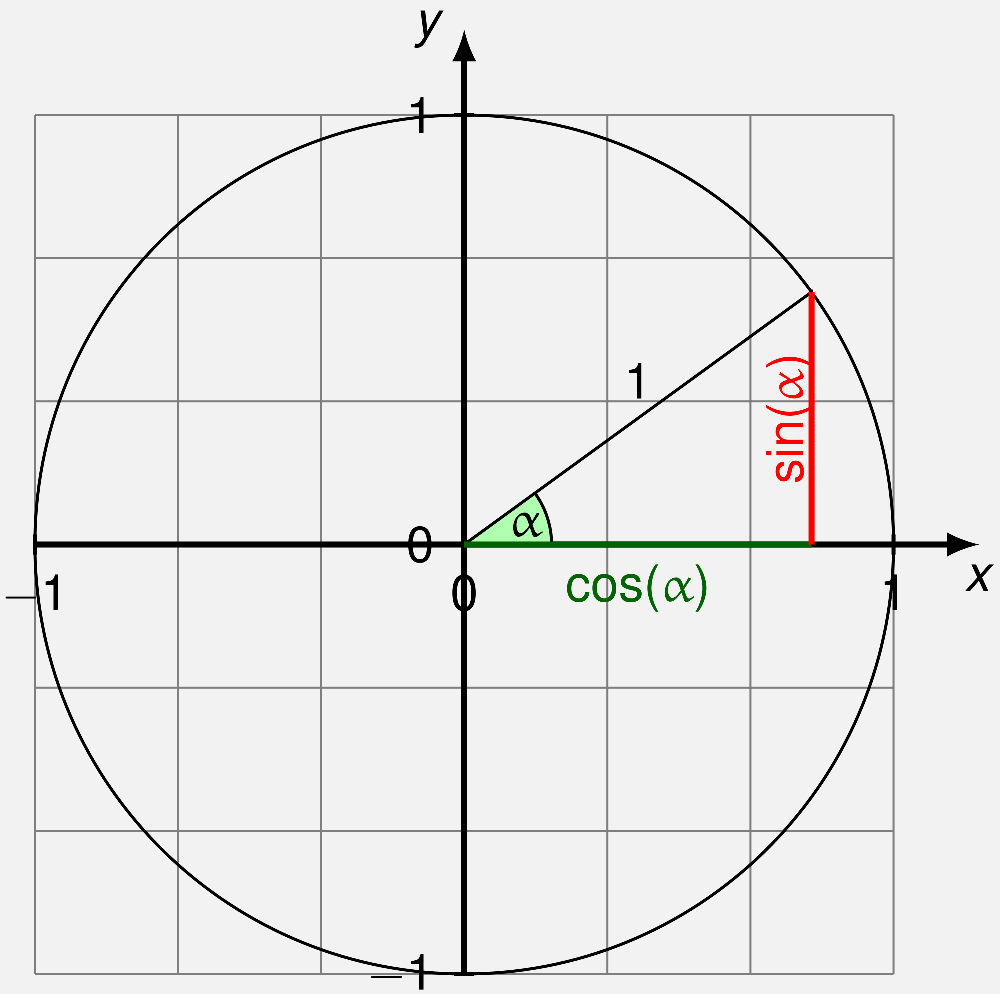
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(x) + Cos^2(x) = 1$$

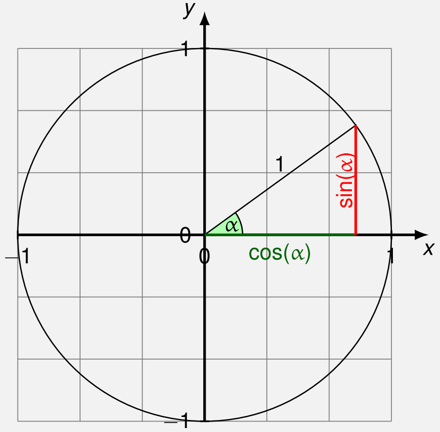






Clemens Weber

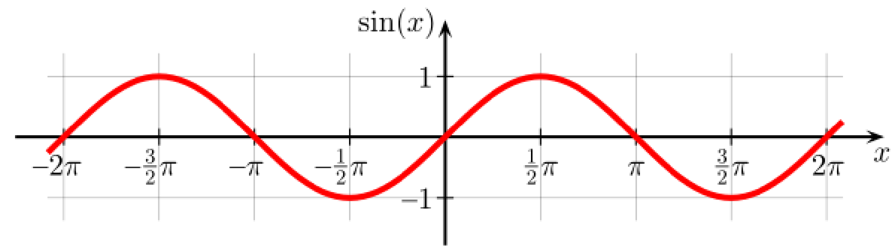
Rechtwinklige Dreiecke

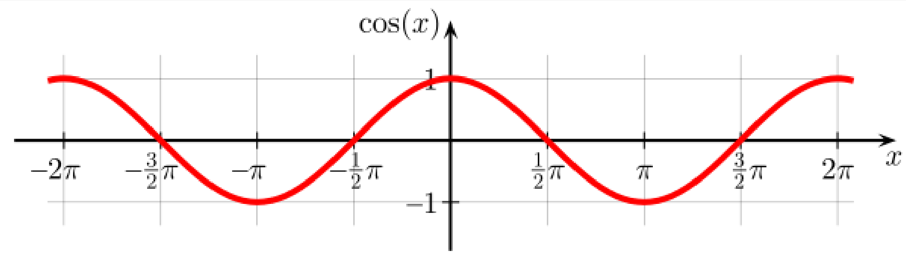


$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Wertetabelle :

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin a = y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos a = x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



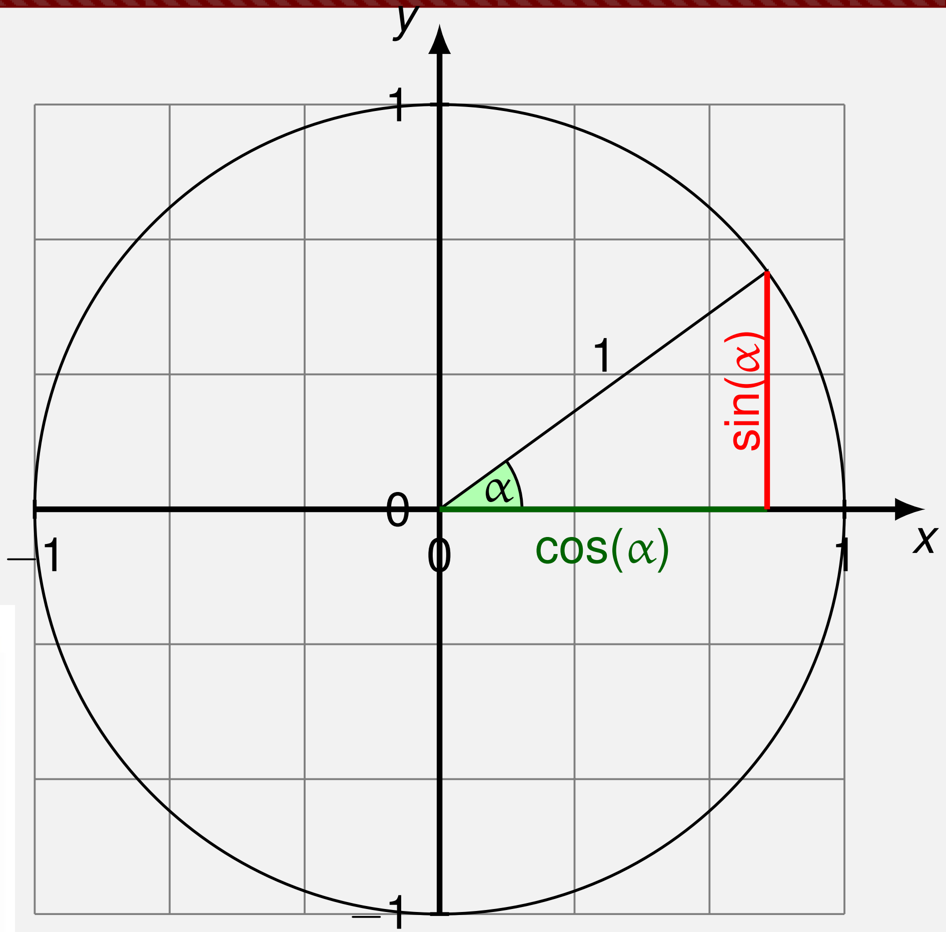


Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Winkel in Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin(**a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(**a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Ziel der Veranstaltung:

Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das Studienkolleg :)

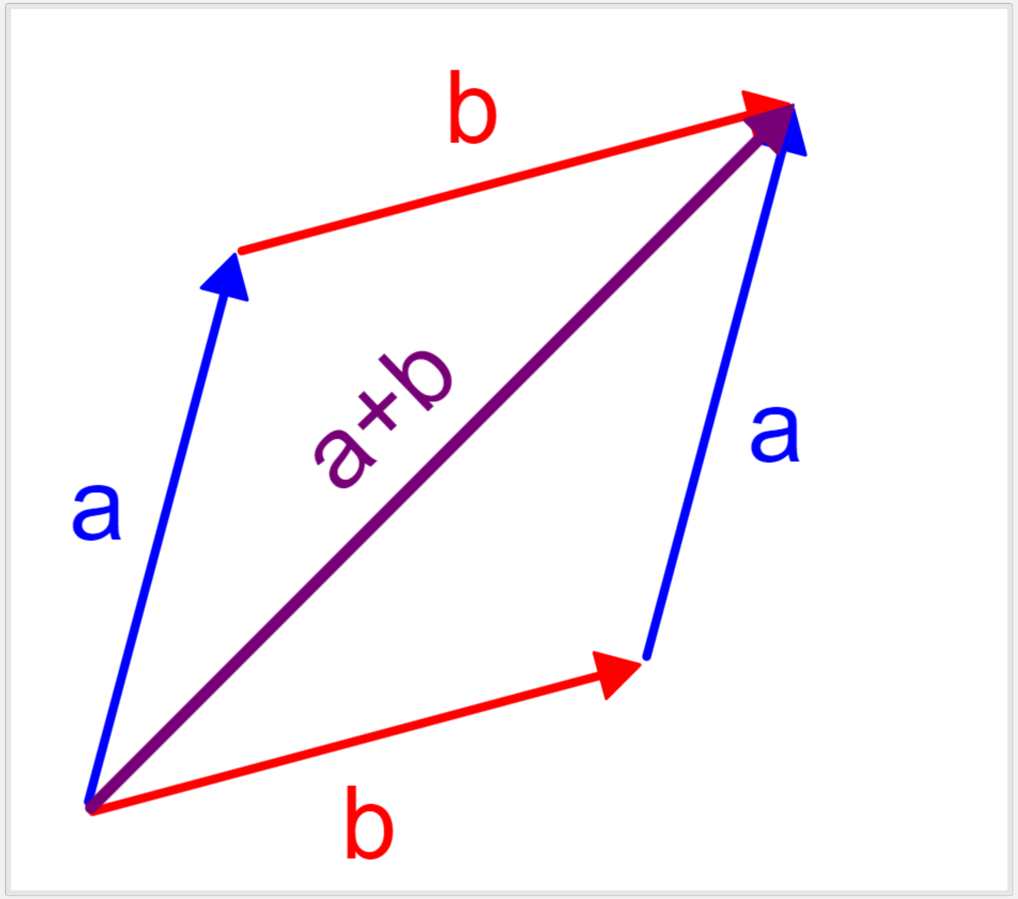
Clemens Weber

Mathe Grundlagen

- **Kommutativ Gesetz**

$$a + b = b + a$$

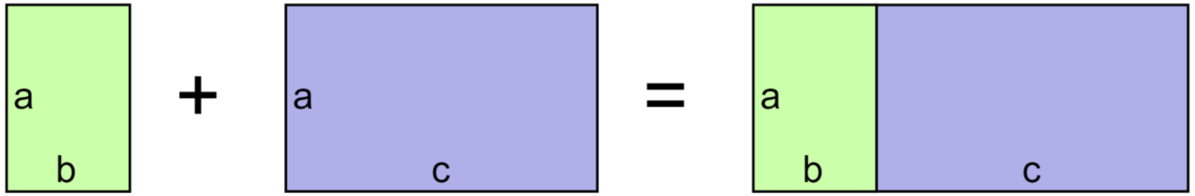
$$a * b = b * a = ba$$



Mathe Grundlagen

- **Distributiv Gesetz**
- $a(b+c) = ab + ac$
- $(b+c)/a = b/a + c/a$

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$



ab + ac = a(b+c)

Binomische Formeln

Binomische Formeln: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

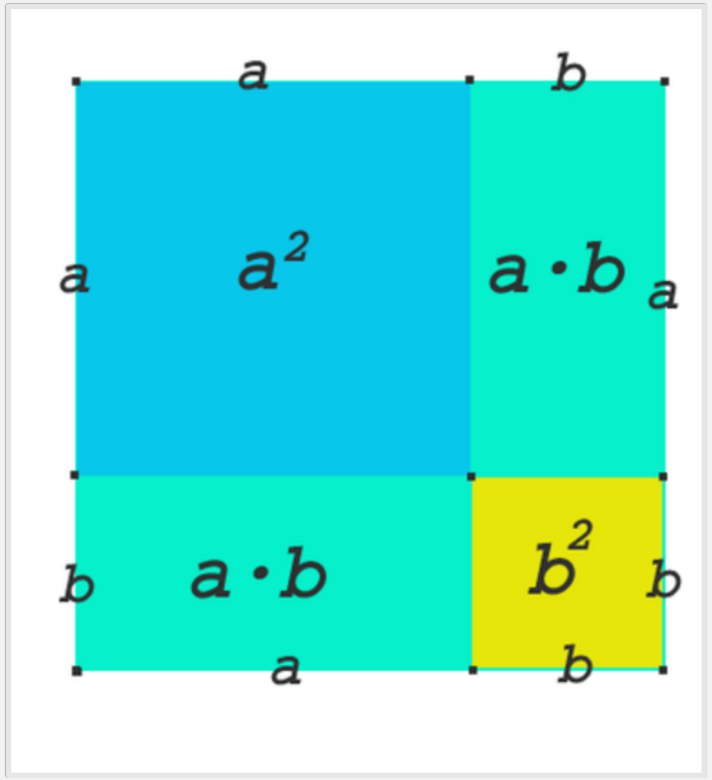
Dritter Ordnung:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Mathe Grundlagen

Erste Binomische Formel

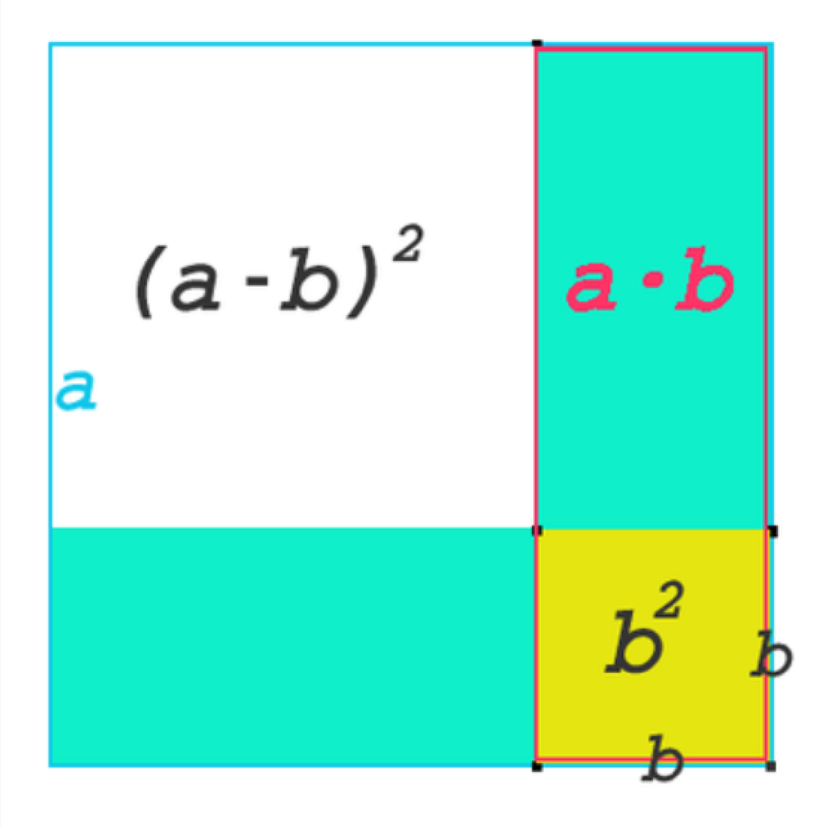
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Zweite Binomische Formel

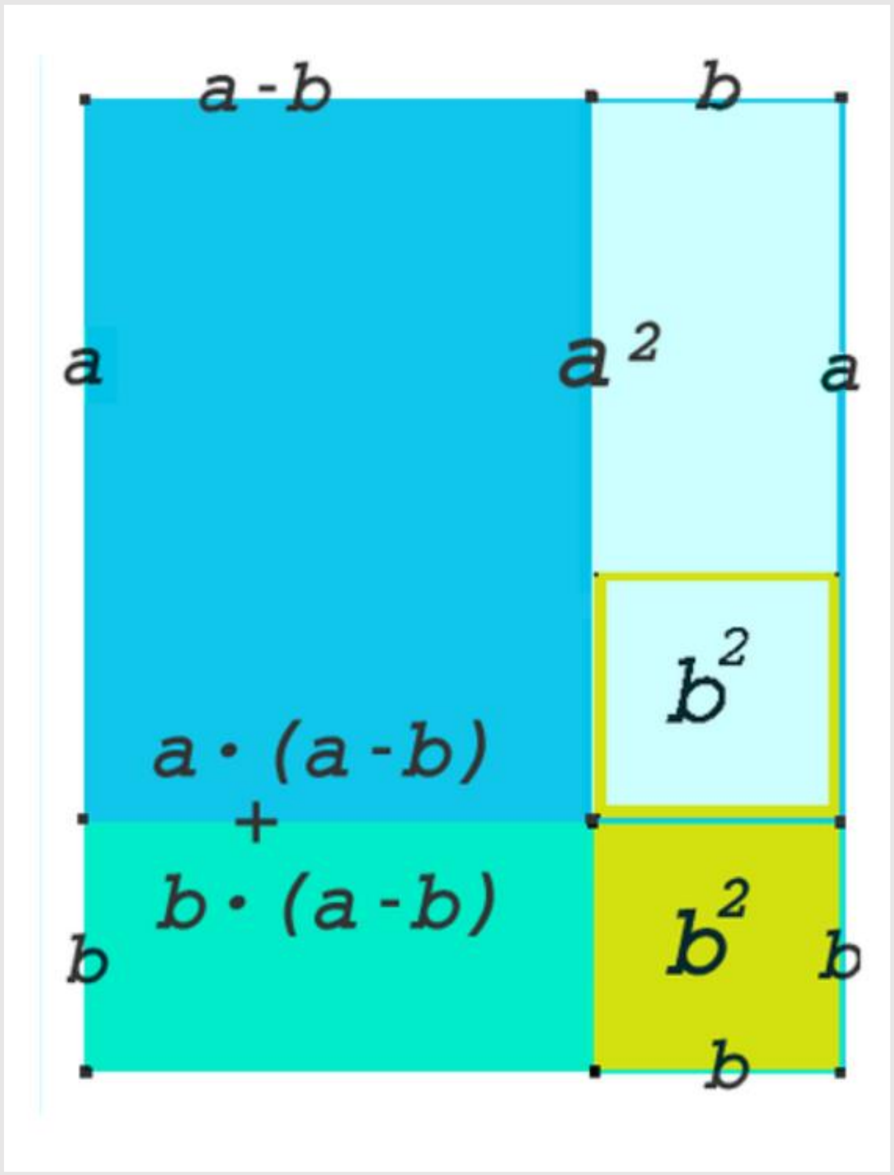
$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Dritte Binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$



Clemens Weber

Kopfrechen Tricks

Trick mit den Binomischen Formel:

$$37^2 = (30+7)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$$

der

$$37^2 = (40-3)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$$

Kopfrechen Tricks

Addition und Subtraktion der Wurzel:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

Clemens Weber

Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Auswendig lernen!