Vortragender:
Clemens Weber

Vorlesung 2

Vom 04.12.2023

Vorbereitung zur Aufnahme auf das Studienkolleg

Clemens Weber

Themen-Gebiete Gesamt

- Vereinfachung von Bruchtermen
- Polynomdivision
- Wurzelgleichungen - Ungleichungen
- Exponentialgleichungen & Logarithmusgleichungen
- Trigonometrischen Funktionen
- Erkennen von Funktionsgraphen
- Geometrie ; vor allem Satzgruppe des Pythagoras, Strahlensätze, Kreisberechnungen, Flächen- und Volumenberechnungen

Organisation

- Unterricht am Montag & Mittwoch von 16.00 bis 17.30 Uhr
- Alle Materialien werden Online zur Verfügung gestellt
- GitHub
- Übungsaufgaben jede Woche Mittwoch
- Lösung Vorstellen und Besprechen am Montag

https://github.com/ClemWeber/ASL-MatheKurs

Clemens Weber

Vorlesung 2

Umfang:

- Aufgaben aus Woche1 (Potenzgesetze, Nullstellen Quad. Fkt.)
- Feedback Runde
- Gleichungen & Ungleichungen
- Definition & Lösungsmenge
- Exponential & Logarithmus Funktionen
- Trigonometrie (Sinus & Cosinus)

Clemens Weber

Aufgaben der ersten Woche

- Aufgaben Woche 1:
- Potenzgesetze AB
- Nullstellen (quad. Fkt.)
- Parabelformen
- Extra AB

Feedback

Zu viel/wenig?

Zu leicht/schwer?

Welche Aufgabe konnte ich nicht lösen?

Feedback

Tempo zu schnell/langsam?

Mathe Vokabeln?

Was wünscht ihr euch? (Basics?)

Clemens Weber

Lösungsmenge von Gleichungen

- Werte von x die die Gleichung erfüllen.

- Beispiele Gleichungen:

$x = 5$
$x^2 = 4$
$4x + 17 = 1$
$(x-4)(x+5) = 0$
$x^2 = -2$

Beispiele Ungleichungen:
$x^2 - 4 \leq 4$
$(x-2)^2 \leq 8$

Clemens Weber

Lösungsmenge von Gleichungen

- Werte von x die die Gleichung erfüllen.

- Beispiele Gleichungen:

$x = 5$
$x^2 = 4$
$4x + 17 = 1$
$(x-4)(x+5) = 0$
$x^2 = -2$

Beispiele Ungleichungen:
$x^2 - 4 \leq 4$
$(x-2)^2 \leq 8$

Lösungsmenge von Gleichungen

- Lösungsmenge L = Werte von x die die Gleichung erfüllen.
- Beispiele Gleichungen:

$x = 5$ L={5}

$x^2 = 4$ L = {-2; 2}

$4x + 17 = 1$ L = {-4}

$(x-4)(x+5) = 0$ L = {-5; 4 }

$x^2 = -2$ L = {} Leere Menge (keine Reelle Lösung L = { $i\sqrt{2}$ })

Beispiele Ungleichungen:

$x^2 - 4 \geq 4$ L = {[- ∞ ;2 $\sqrt{2}$];[2$\sqrt{2}$; ∞]}

$(x-2)^2 \geq 0$ L = {R} alle Reellen Zahlen L = {-∞, +∞}

Gleichungssysteme

Mehr als 2 Gleichungen die zusammen gehören:

Was ist die Lösungsmenge?

$x + 4y = 4 \quad \& \quad 7x + 6y = -5$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \quad \& \quad \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y = 1$$

Gleichungssysteme

Mehr als 2 Gleichungen die zusammen gehören:

Was ist die Lösungsmenge?

$x + 4y = 4 \quad \& \quad 7x + 6y = -5$

L={-2 ; 3/2}={Menge aller x; Menge aller y}
Welche die Gleichung Lösen

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \quad \& \quad \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y = 1$

L ={10; 12}

Clemens Weber

Exponential Funktionen & Logarithmus

Beispiel :

$$2^x = 8$$

$$2^x = 0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

$$10^x = 0.001 = \frac{1}{1000}$$

Clemens Weber

Der Logarithmus

Beispiel :

$2^x = 8$

$\log_2 8 = x = 3$

$2^x = 0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

$\log_2 \frac{1}{8} = x = -3$

$10^x = 0.001 = \frac{1}{1000}$

$\log_{10} 0.001 = \lg 0.001 = -3$

Logarithmus Gesetze

8.1 Formeln für Logarithmen:

$$\boxed{b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y}$$

$$\left(y \in IR^+ \ und\ b \in IR^+ ohne\ \{1\}\right)$$

z. B. $0{,}5^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{0,5} 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 0{,}5}$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a;\quad \lg 1 = 0;\quad \lg 10 = 1;\quad \lg 100 = 2;$

Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x;\quad \ln 1 = 0;\quad \ln e = 1;$
($e = 2{,}71828\ldots$ heißt Eulersche Zahl)

Logarithmus Rechengesetze

Rechengesetze für Logarithmen $(u, v > 0)$

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^n = n \cdot \log_b u \quad ,$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^n = n$$

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$ die Basisumrechnungsformel

$(a > 0 \; und \; b, c \in IR \; ohne \; \{1\})$

Logarithmus & Exponentialfunktion

8.1 Formeln für Logarithmen:

$$\boxed{b^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b y}$$

$$\left(y \in IR^+ \ und\ b \in IR^+ ohne\ \{1\}\right)$$

z. B. $0{,}5^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{0,5} 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 0{,}5}$

Der dekadische Logarithmus: $\log_{10} a =: \lg a; \quad \lg 1 = 0; \quad \lg 10 = 1; \quad \lg 100 = 2;$

Der natürliche Logarithmus: $\log_e x =: \ln x; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln e = 1;$
($e = 2{,}71828\ldots$ heißt Eulersche Zahl)

Clemens Weber

Logarithmus & Exponentialfunktion

https://www.grund-wissen.de/mathematik/analysis/elementare-funktionen/exponentialfunktionen-und-logarithmusfunktionen.html

Bakterien verdoppeln sich jeder stunde (Zeit = x), anfangs waren es 300.

Anzahl Bakterien = $300 \ * 2^x$

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Er fragt: Wie viel Zeit ist vergangen um eine Popolation von 3200 bakterien zu haben?

$$\log_2\left(\frac{3200}{300}\right) = x \ stunden$$

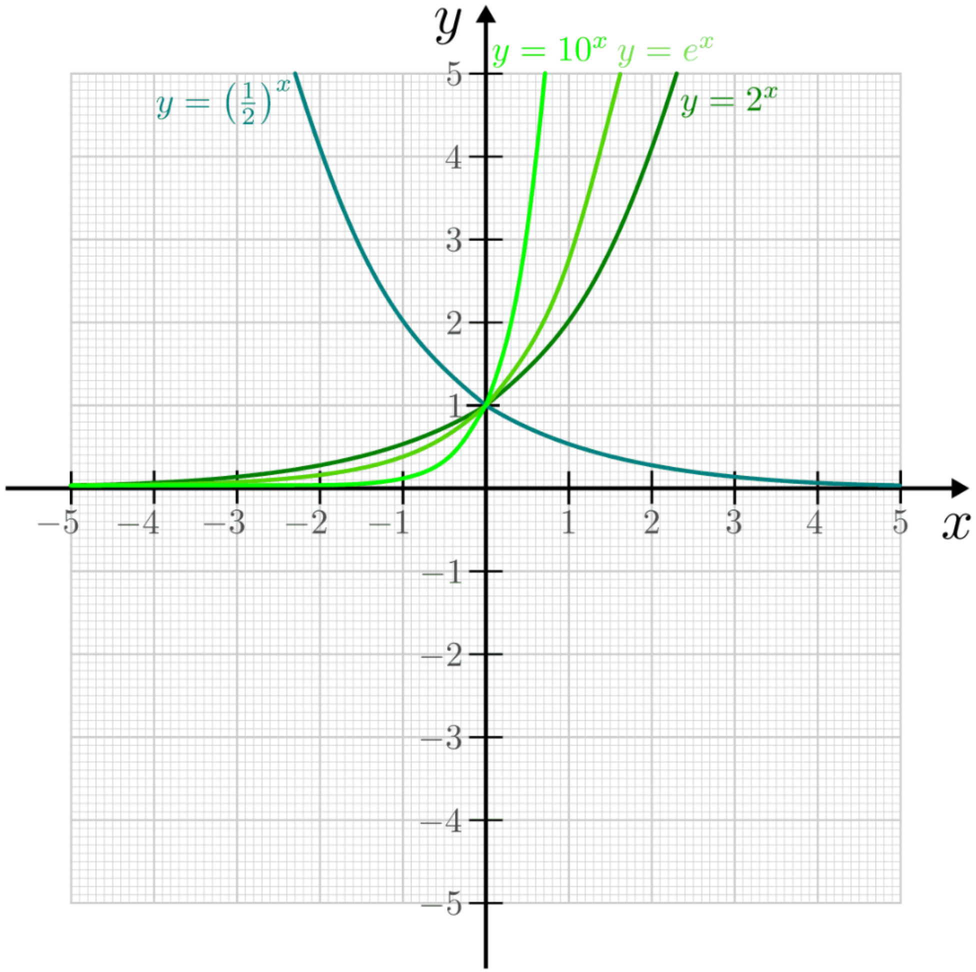
Warum ist der Logarithmus nur für positive Basis definiert?

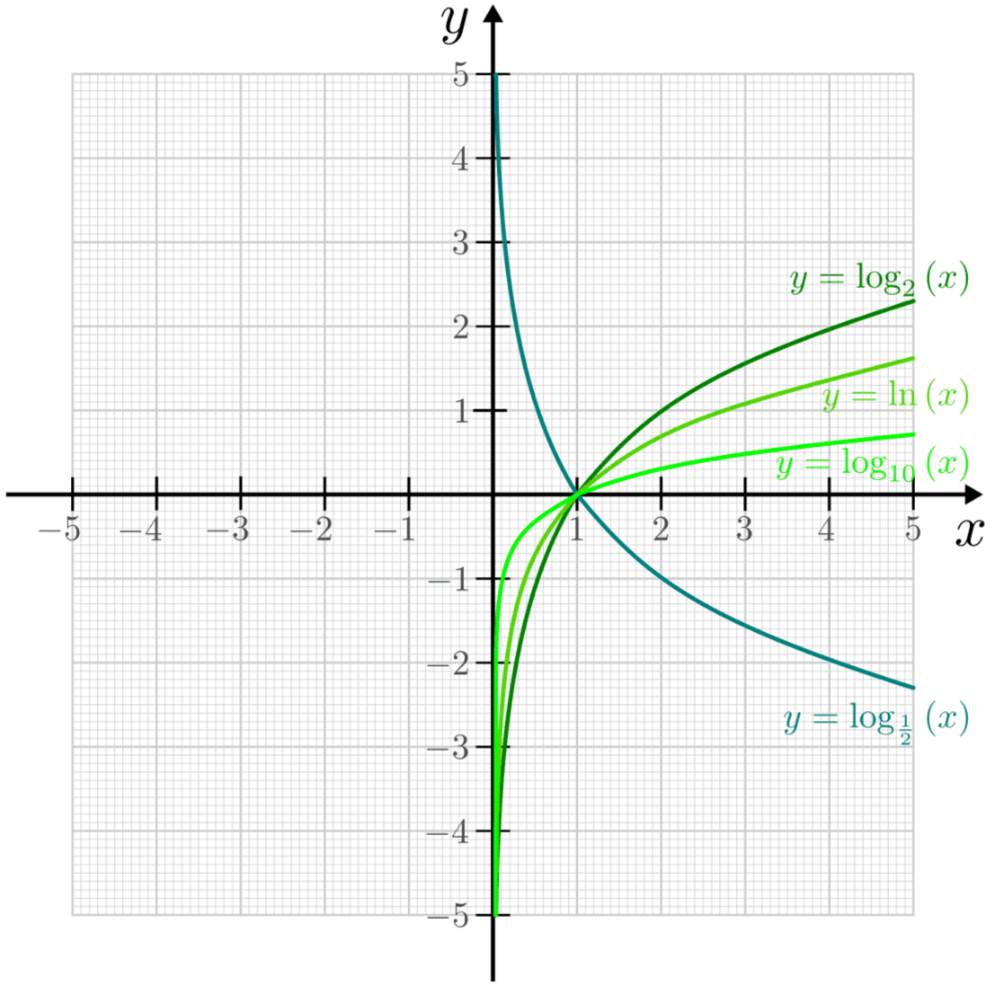
Intuition:

Population, Länge, Radioaktivität : etwas was wachsen kann (größer oder kleiner werden kann), lässt sich nur mit einem positiven Wert beschreiben.

Clemens Weber

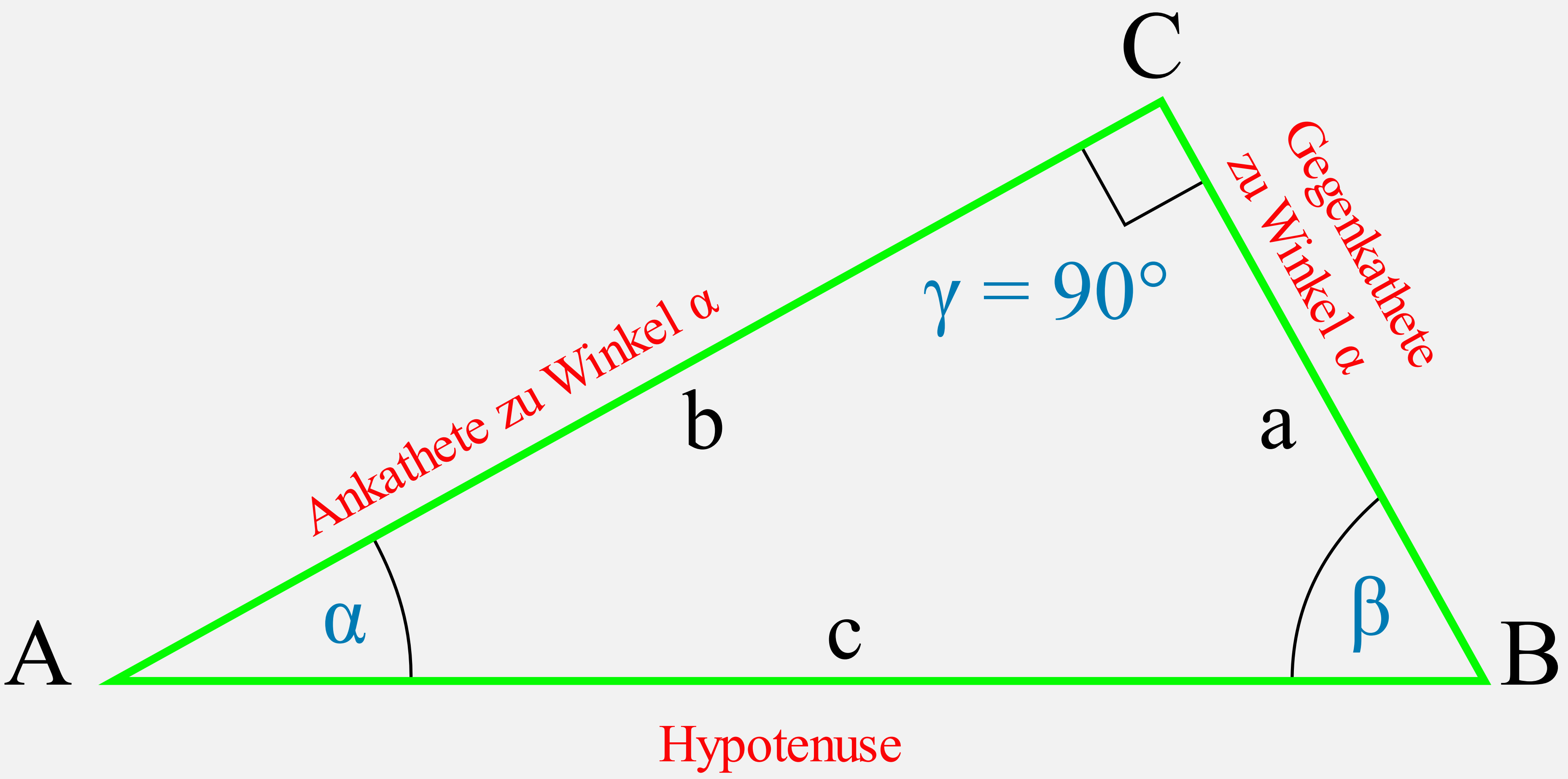
Logarithmus als Umkerhfunktion der Exponentialfunktion





Clemens Weber

Trigonometrische Funktionen



Trigonometrische Funktionen

- Längste Seite = Hypotenuse
- liegt gegenüber des größten Winkels

Hier: c & γ

$$\text{Sinus}(alpha) = \sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Cosinus}\ (alpha) = \cos(\alpha) = \frac{Ankathete\ von\ alpha}{Hypotenuse}$$

$$\text{Tangens}\ (alpha) = \tan(\alpha) = \frac{Cos(\alpha)}{Sin(\alpha)} = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$$

Summe aller Winkel: $\alpha + \beta + \gamma = 180\ °$

C

Gegenkathete zu Winkel α

$\gamma = 90°$

Ankathete zu Winkel α

b

a

A

α

c

β

B

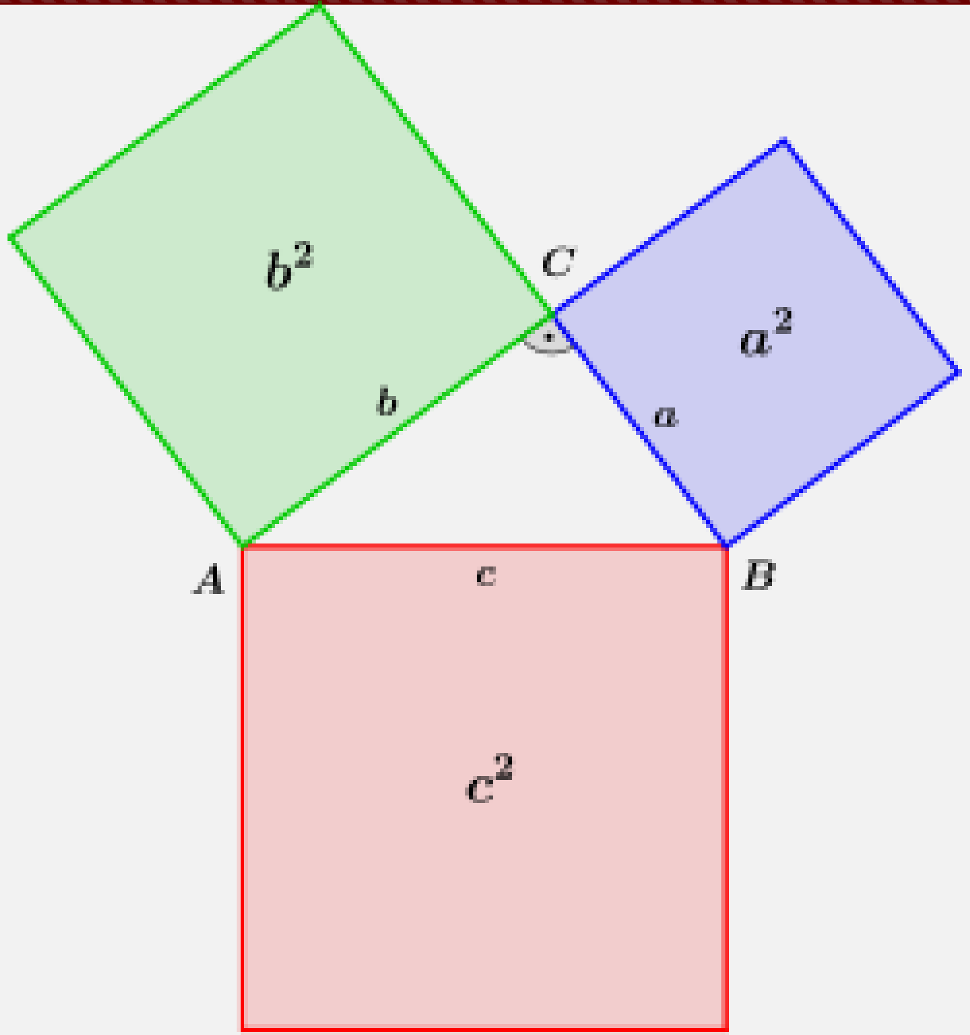
Hypotenuse

Rechtwinklige Dreiecke

Satz des Pythagoras für Dreiecke mit Rechtem Winkel (90 Grad)

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$



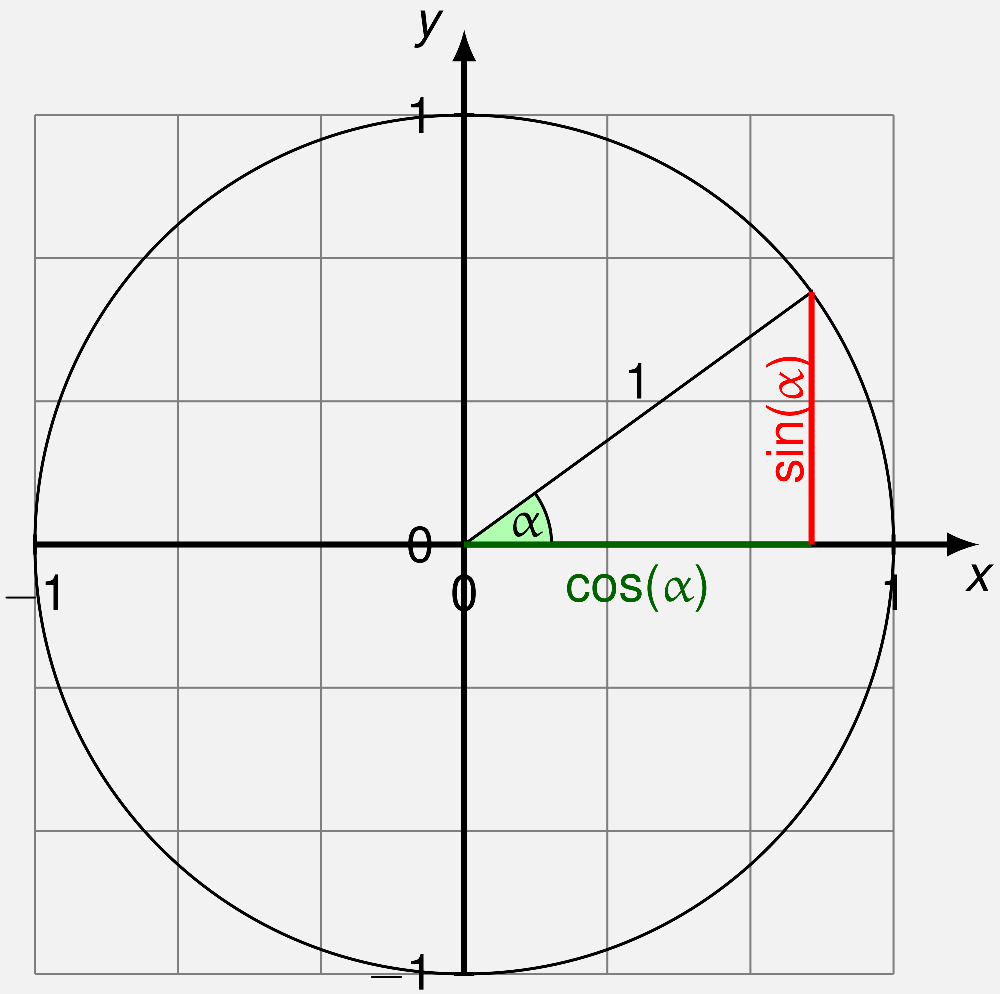
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) + \mathrm{Cos}^2(a) = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Annimation:

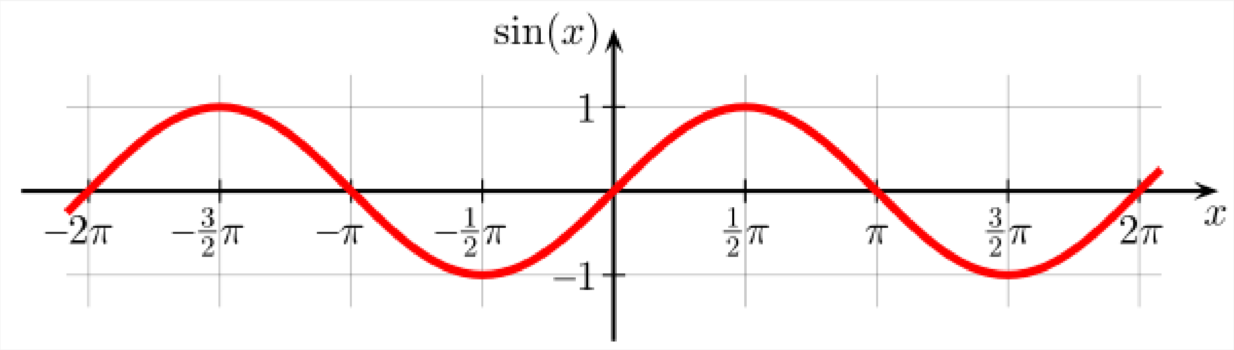
https://www.youtube.com/watch?v=w-hXOYZ2gpo

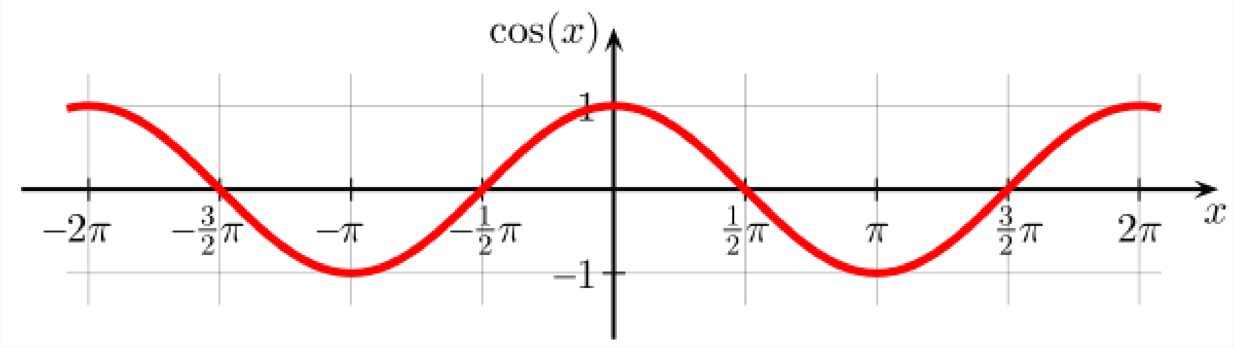


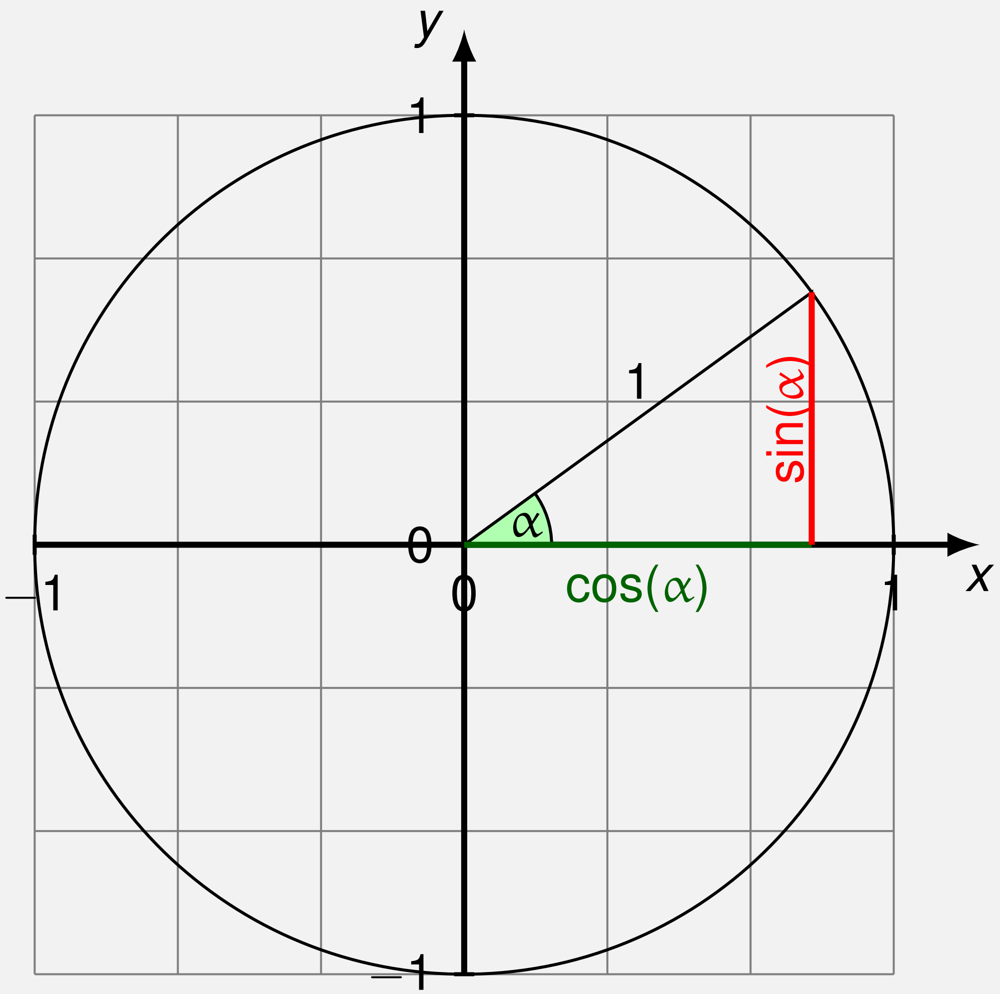
Clemens Weber

Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(x) + Cos^2(x) = 1$$



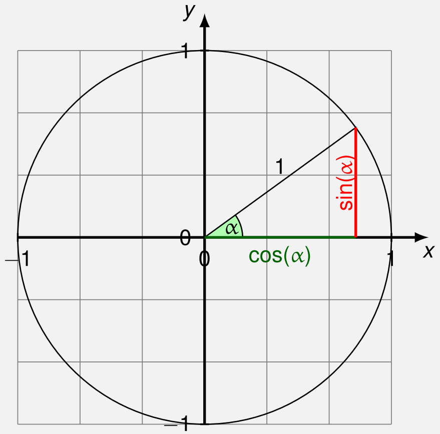




Clemens Weber

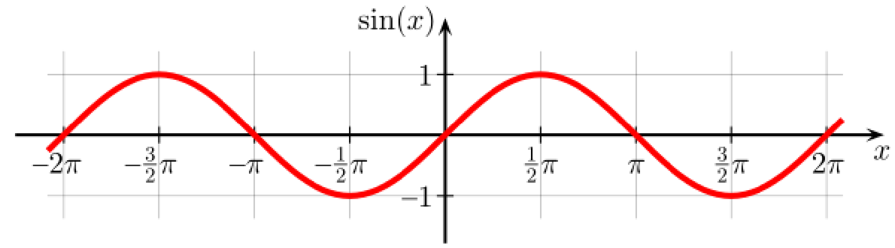
Rechtwinklige Dreiecke

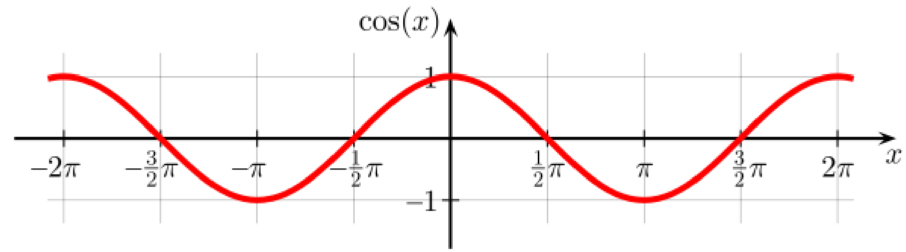
$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$



Wertetabelle :

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin **a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos **a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



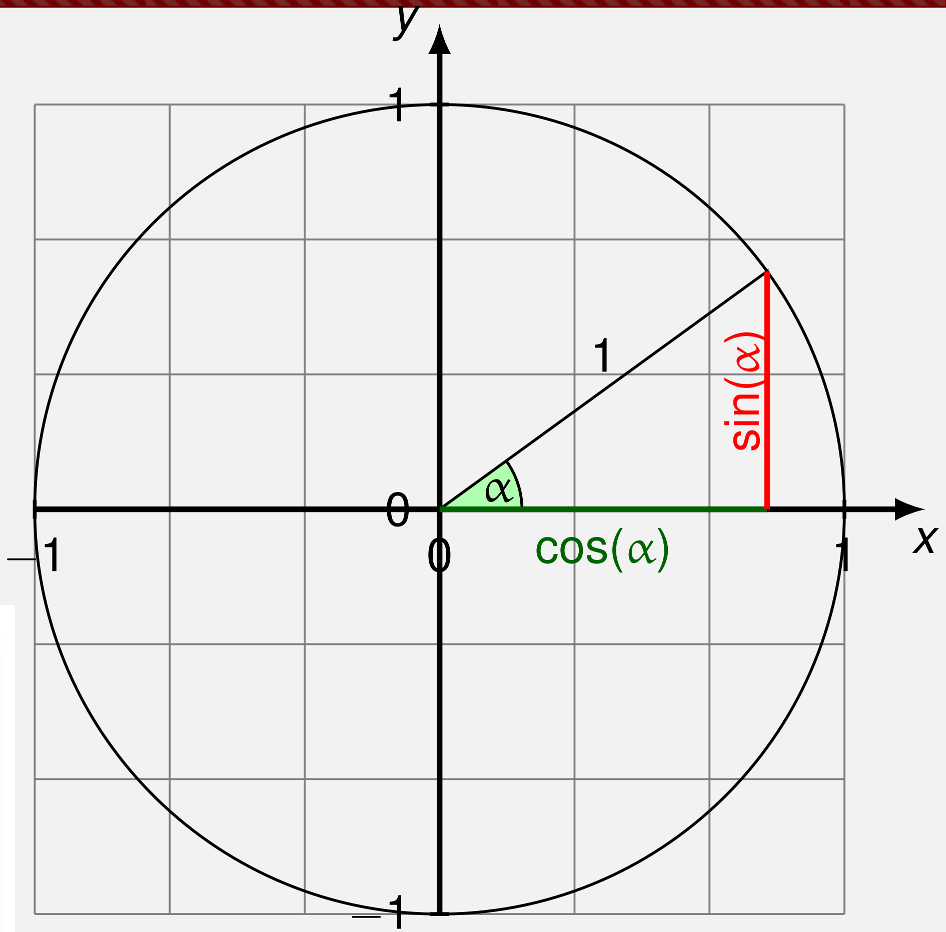


Rechtwinklige Dreiecke

$$Sin^2(a) = 1 - Cos^2(a)$$

Winkel in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Winkel in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin(**a = y**	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(**a = x**	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Ziel der Veranstaltung:

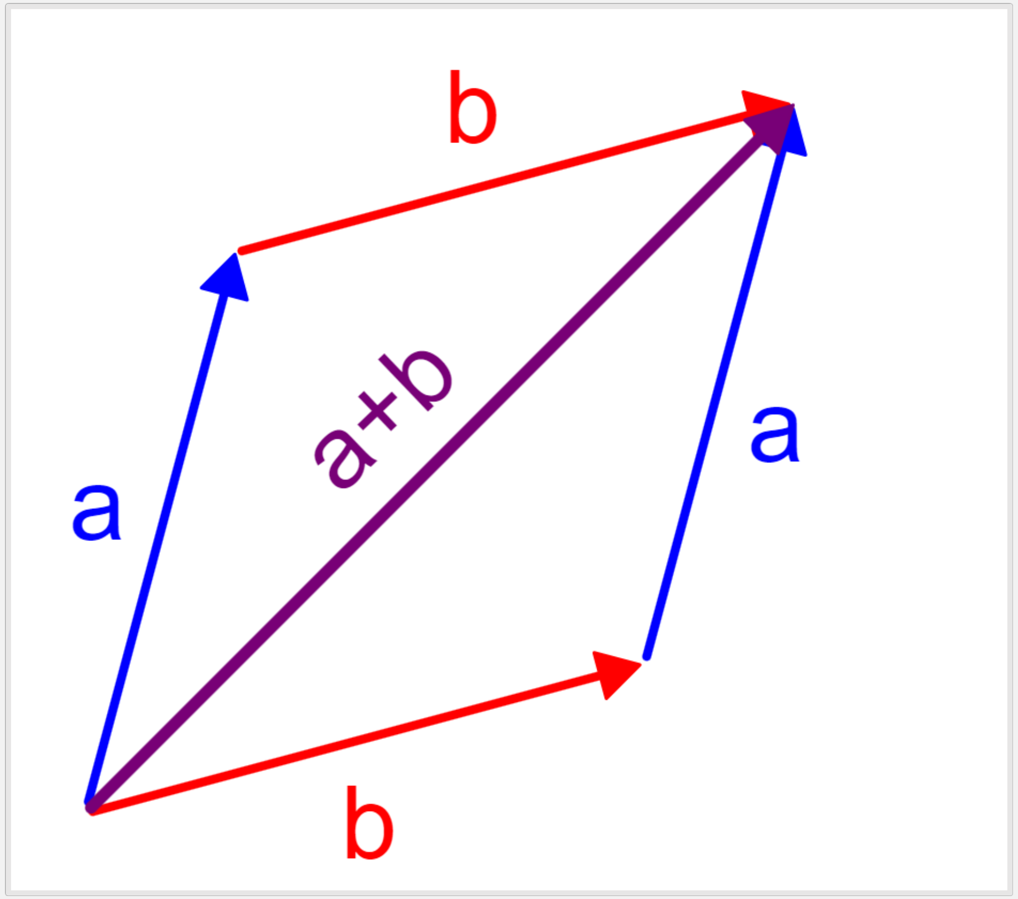
Ihr besteht ALLE den Aufnahmetest für das Studienkolleg :)

Mathe Grundlagen

- **Kommutativ Gesetz**

$$a + b = b + a$$

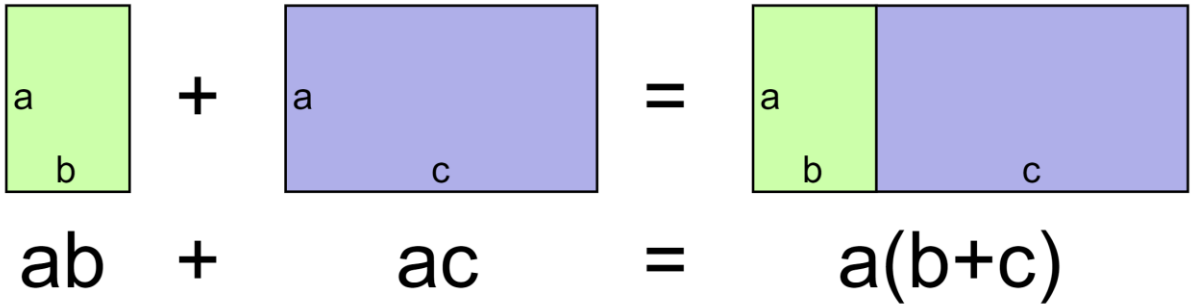
$$a * b = b * a = ba$$



Mathe Grundlagen

- **Distributiv Gesetz**
- $a(b+c) = ab + ac$
- $(b+c)/a = b/a + c/a$

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$



Clemens Weber

Binomische Formeln

Binomische Formeln:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

Dritter Ordnung:

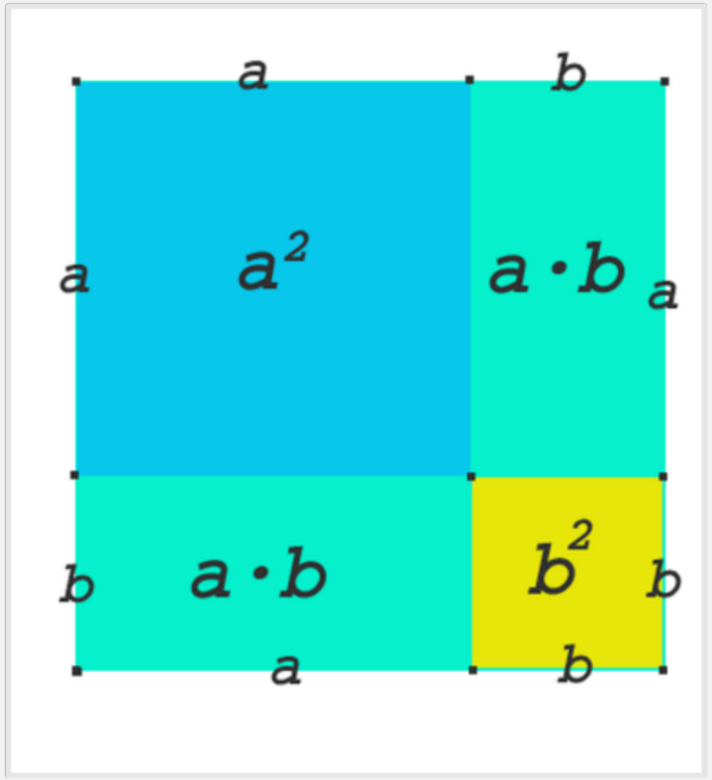
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Mathe Grundlagen

Erste Binomische Formel

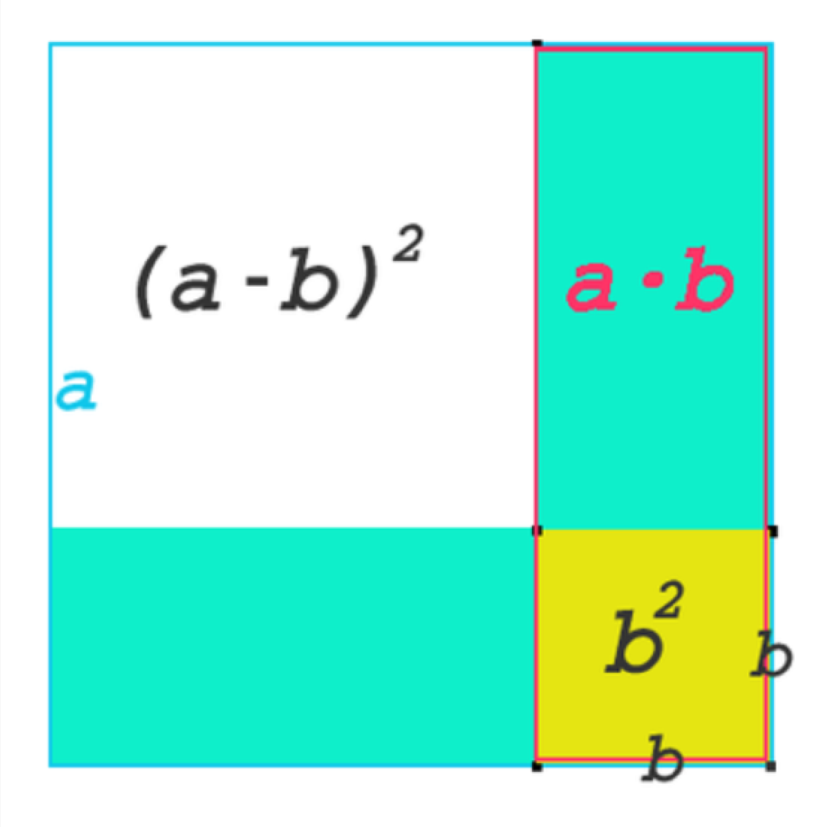
$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Zweite Binomische Formel

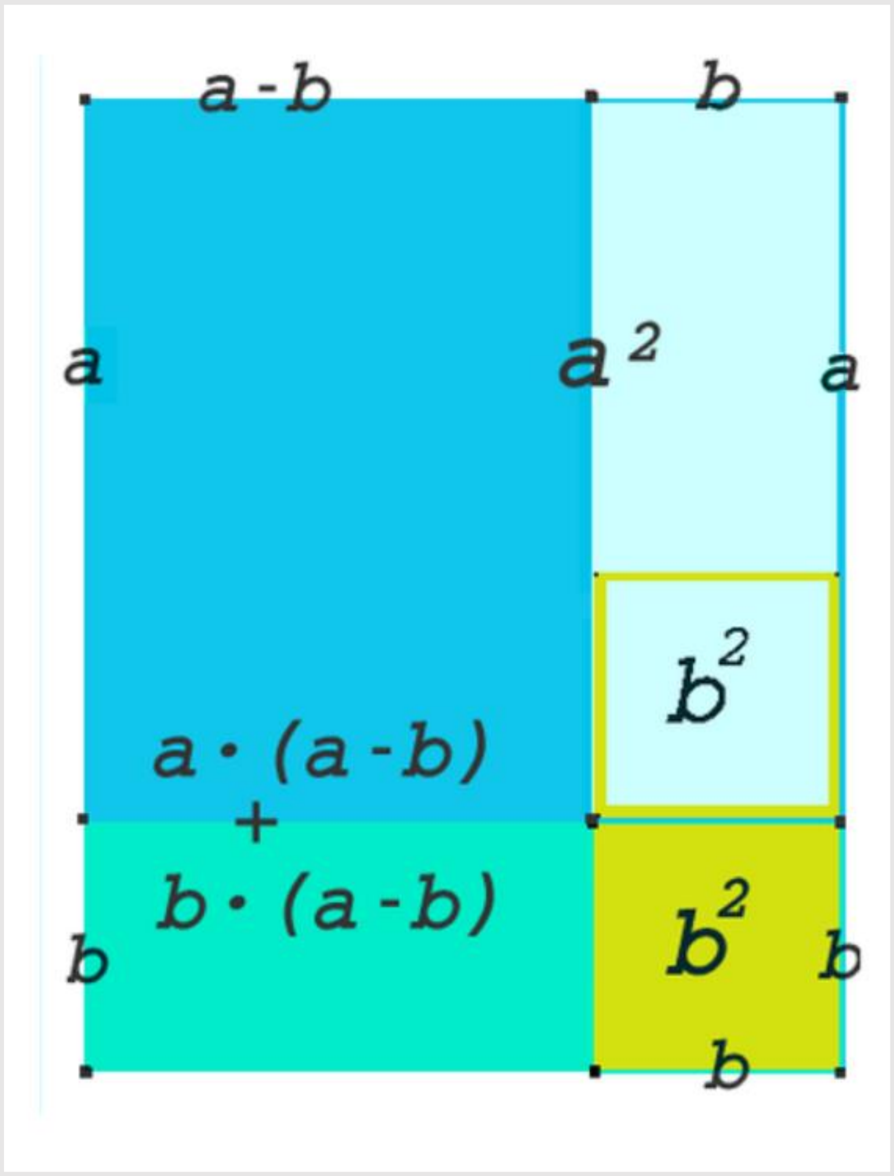
$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Mathe Grundlagen

Dritte Binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$



Kopfrechen Tricks

Trick mit den Binomischen Formel:

$$37^2 = (30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$$

der

$$37^2 = (40 - 3)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$$

Kopfrechen Tricks

Addition und Subtraktion der Wurzel:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

Clemens Weber

Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Auswendig lernen!