Proseminar Spieltheorie

Zwei Personen Nullsummenspiele I

Tobias Ludes

27. April 2006

1. Nullsummenspiele

1.1 **Definition:** Ein Spiel Γ heißt **Nullsummenspiel**, wenn an jedem Baumendpunkt die Auszahlungsfunktion $(p_1, \ldots, p_n)$ die Beziehung $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$ erfüllt.
Ein Nullsummenspiel ist also im Allgemeinen ein abgeschlossenes System, d.h. der Gewinn eines Spielers muss gleich dem Verlust der anderen Spieler sein.

Nullsummenspiele sind zum Beispiel Poker, Lohnverhandlungen oder ein Elfmeterschießen.

Aufgrund der in der Definition angegebenen Beziehung lässt sich bei einem Nullsummenspiel jede Komponente durch die Übrigen Berechnen. Bei einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel genügt es deshalb nur die erste Komponente der Auszahlungsfunktion anzugeben, die man dann einfach Auszahlung nennt. Unter der **Auszahlung** versteht man also den Betrag, den Spieler 1 von Spieler 2 erhält.
Ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel unterscheidet sich von anderen Spielen dadurch, dass es nicht nötig ist zu Verhandeln, denn was der eine Spieler gewinnt verliert der Andere.

1.2 **Satz**:
In einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel seien (σ_1, σ_2) und (τ_1, τ_2) zwei Equilibriumspaare (Gleichgewichtspaare). Dann sind

(i) (σ_1, τ_2) und (τ_1, σ_2) auch Equilibriumspaare, und es gilt

(ii) $\pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\sigma_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2)$.

Beweis:

(σ_1, σ_2) ist ein Equilibrium. Deswegen ist

$$\pi(\sigma_1,\sigma_2) \geq \pi(\tau_1,\sigma_2).$$

Andererseits ist (τ_1, τ_2) ein Equilibrium, deswegen ist

$$\pi_2(\tau_1,\sigma_2) \leq \pi_2(\tau_1,\tau_2)$$

und weil

$$\pi_2(x,y) = -\pi_1(x,y) = -\pi(x,y)$$

gilt, ist

$$\pi(\tau_1,\sigma_2) \geq \pi(\tau_1,\tau_2).$$

Daraus folgt:

$$\pi(\sigma_1,\sigma_2) \geq \pi(\tau_1,\sigma_2) \geq \pi(\tau_1,\tau_2)$$

aber analog auch:

$$\pi(\tau_1,\tau_2) \geq \pi(\sigma_1,\tau_2) \geq \pi(\sigma_1,\sigma_2).$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt Behauptung (ii).

Für beliebiges $\hat{\sigma}_1$ gilt nun:

$$\pi(\hat{\sigma}_1, \sigma_2) \leq \pi(\sigma_1, \sigma_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2)$$

und für beliebiges $\hat{\sigma}_2$:

$$\pi(\tau_1, \hat{\sigma}_2) \geq \pi(\tau_1, \tau_2) = \pi(\tau_1, \sigma_2).$$

Also ist (τ_1,σ_2) ein Equilibrium, und analog auch (σ_1,τ_2).

1.3 **Bemerkung**: Dieser Satz gilt im Allgemeinen nicht für andere Spiele.

2. Die Normalform

Die Normalform eines endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspiels reduziert sich auf eine Matrix A, in der die Zeilenanzahl mit der Anzahl der Strategien von Spieler 1, und die Spaltenanzahl mit der Anzahl der Strategien von Spieler 2 übereinstimmt. Das Element a_{ij} der Matrix A gibt nun die erwartete Auszahlung an, wenn Spieler 1 seine i-te Strategie und Spieler 2 seine j-te Strategie wählt.
Offensichtlich ist ein Strategiepaar genau dann ein Equilibrium, wenn das zugehörige Element a_{ij} sowohl das Größte in dieser Spalte, als auch das Kleinste in dieser Zeile ist. Wenn ein solches Element existiert nennt man es **Sattelpunkt**.

2.1 **Beispiele:**
(a) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & \boldsymbol{2} & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eines Spieles hat einen Sattelpunkt in der zweiten Zeile und zweiten Spalte.
(b) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eines Spieles hat keinen Sattelpunkt.
(c) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & \boldsymbol{-6} & 3 & \boldsymbol{-6} \\ 0 & -7 & 8 & -8 \\ 3 & -9 & 5 & -7 \\ 4 & \boldsymbol{-6} & 0 & \boldsymbol{-6} \end{pmatrix}$$

eines Spieles hat an den vier Stellen, an denen der Wert ‚-6' steht einen Sattelpunkt.
An diesem Beispiel kann man sich auch Satz 1.2 verdeutlichen, die Auszahlung ist also insbesondere an jedem Sattelpunkt derselben Matrix die gleiche.

Wie oben gesehen gibt a_{ij} den Betrag an, den Spieler 1 von Spieler 2 erhält. Also wird Spieler 1 versuchen a_{ij} zu maximieren, während Spieler 2 versucht a_{ij} zu minimieren. Leider weiß aber niemand sicher welche Strategie der Gegner wählen wird, obwohl dieses Wissen normalerweise sehr wichtig ist für die Wahl der eigenen Strategie.
Im Beispiel 2.1.a wählt Spieler 1 sicherlich Strategie 1 oder 2, wenn Spieler 2 dies allerdings ahnt, dann wählt er Strategie 2; also wählt Spieler 1 am Besten Strategie 2. Sollte Spieler 2 dies nun ahnen, so sollte Spieler 1 dennoch bei seiner Strategie bleiben. Die Geheimhaltung der Strategie ist deshalb bei diesem Spiel nicht so wichtig wie z.B. bei dem Spiel „Kopf oder Zahl". Der Grund dafür ist natürlich der Sattelpunkt.

3. Gemischte Strategien

Die vorangegangenen Untersuchungen verraten uns zwar wie man Spiele mit Sattelpunkt spielt, aber für die große Mehrheit der Spiele, die keinen Sattelpunkt besitzen, geben sie keine Hinweise welche Strategie die Beste ist.
Angenommen, wir spielen ein Spiel ohne Sattelpunkte, wie zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir können natürlich nicht vorhersagen wie das Spiel verlaufen wird. Nun nehmen wir jedoch an dass unser Gegner nicht nur unberechenbar, sondern auch allwissend ist, d.h. er weiß genau für welche Strategie wir uns entscheiden. In diesem Fall, sollten wir Spieler 1 sein, werden wir sicherlich unsere erste Strategie wählen, mit welcher wir nicht weniger als zwei Einheiten gewinnen können, wohingegen wir mit unserer zweiten Strategie nur eine Einheit gewinnen würden. Dieser sichere Gewinn von mindestens zwei Einheiten ist unser Mindestgewinn und wir bezeichnen ihn mit v'_I:

$$v'_I = \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\}. \tag{3.1}$$

Wenn wir Spieler 2 wären, sollten wir unter denselben Vorraussetzungen unsere zweite Strategie wählen, bei welcher wir einen Höchstverlust von drei Einheiten haben. Dieser Höchstverlust wird mit v'_{II} bezeichnet:

$$v'_{II} = \min_j \left\{ \max_i a_{ij} \right\}. \tag{3.2}$$

Wir haben also in Matrixspielen immer einen Mindestgewinn und einen Höchstverlust. Es ist klar, dass der Mindestgewinn von Spieler 1 niemals den Höchstverlust von Spieler 2 überschreiten kann. Man kann leicht zeigen, dass die folgende Beziehung tatsächlich gilt:

$$v'_I \leq v'_{II}. \tag{3.3}$$

Wenn Gleichheit in (3.3) vorliegt, existiert ein Sattelpunkt, wenn Ungleichheit gilt, ist dies ein Spiel ohne Sattelpunkte. Für solch ein Spiel können wir nicht vorhersagen was passieren wird, aber wir können folgendes behaupten: *Spieler 1 sollte nicht weniger als v'_1 gewinnen; Spieler 2 sollte nicht mehr als v'_{II} verlieren.*
In einem Spiel ohne Sattelpunkte können wir, wenn unserem Gegner unsere Strategie bekannt ist, maximal auf den Mindestgewinn bzw. Höchstverlust hoffen. Wenn wir mehr gewinnen wollen, dann erreichen wir dies nur dadurch, dass unserem Gegner unsere Strategie unbekannt bleibt, was allerdings schwierig ist, wenn wir unsere Strategie nach rationalen Gesichtspunkten wählen. Denn niemand hindert unseren Gegner daran, unsere Überlegungen nachzuvollziehen. Wir müssten also unsere Strategie unlogisch wählen, wofür wir allerdings unsere bisherigen Untersuchungen nicht bräuchten.
Die Lösung dieses Problems besteht darin unsere Strategie zufällig auszuwählen, aber das Wahrscheinlichkeitsschema rational auszuwählen.
Das ist die Grundidee der gemischten Strategien.

3.1 **Definition:** Eine gemischte Strategie für einen Spieler ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge seiner reinen Strategien.
Wenn der Spieler nur eine endliche Anzahl m von reinen Strategien zur Verfügung hat, ist eine gemischte Strategie ein m-dimensionaler Vektor $x = (x_1, \ldots, x_m)$, welcher folgende Bedingungen erfüllt:

$$x_i \geq 0, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \tag{3.5}$$

Wir bezeichnen die Menge aller gemischten Strategien für Spieler 1 mit *X*, bzw. mit *Y* für Spieler 2.

Angenommen Spieler 1 und 2 spielen ein Matrixspiel A. Wenn Spieler 1 die gemischte Strategie x und Spieler 2 die gemischte Strategie y wählt, dann ist die **erwartete Auszahlung**

$$A(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \tag{3.6}$$

oder in Matrixschreibweise

$$A(x,y) = xAy^T. \tag{3.7}$$

Sollte Spieler 2 erkennen welche Strategie Spieler 1 gewählt hat, wird er y sicher so wählen, dass $A(x,y)$ minimiert wird, d.h. der erwartete Minimalgewinn von Spieler 1, vorausgesetzt er benutzt x, ist

$$v(x) = \min_{y\in Y} xAy^T\ . \tag{3.8}$$

Man kann also xAy^T als gewichtetes Mittel der erwarteten Auszahlungen für Spieler 1 betrachten, wenn er x gegen die reinen Strategien von Spieler 2 einsetzt. Deswegen wird das Minimum in (3.8) durch eine reine Strategie j angenommen:

$$v(x) = \min_{j} xA_{.j} \tag{3.9}$$

(wobei $A_{.j}$ die j-te Spalte der Matrix A ist).
Spieler 1 sollte daher x so wählen, dass $v(x)$ maximiert wird, d.h. um

$$v_I = \max_{x\in X}\min_{j} xA_{.j} \tag{3.10}$$

zu erhalten. (Maximum existiert, weil X kompakt und $v(x)$ stetig). Solch ein x heißt **Maximin-Strategie** von Spieler 1.
Analog erhält Spieler 2, wenn er y wählt, den erwarteten Höchstverlust

$$v(y) = \max_{i} A_{i.}\, y^T \tag{3.11}$$

(wobei $A_{i.}$ die i-te Zeile von A ist) und er sollte y so wählen, dass er

$$v_{II} = \min_{y\in Y}\max_{i} A_{i.}\, y^T \tag{3.12}$$

erhält. Solch ein y heißt **Minimax-Strategie** von Spieler 2.
Wir erhalten also die beiden Zahlen v_I und v_{II}, die wir passend die **Werte des Spiels** für Spieler 1 und 2 nennen.

4. Das Minimax-Theorem

Wie man leicht erkennen kann gilt für jede Funktion $F(x,y)$ die auf dem Kartesischen Produkt $X \times Y$ definiert ist

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(x,y) \tag{4.1}$$

Daher gilt auch

$$v_I \le v_{II}.$$

Bei dieser Ungleichung gilt im Vergleich zu (3.3) nicht nur in speziellen Fällen Gleichheit, wie wir im folgenden Satz sehen werden.
4.1 **Satz (Das Minimax-Theorem):** $v_I = v_{II}$.
Das Minimax-Theorem ist wohl der wichtigste Satz der Spieltheorie. Wir beweisen ihn nach von Neumann und Morgenstern und beginnen mit zwei Lemmata.

4.2 **Lemma:**
Sei B eine abgeschlossene konvexe Menge von Punkten in einem n-dimensionalen Euklidischen Raum, und sei $x = (x_1,\ldots,x_n)$ ein Punkt außerhalb von B. Dann existieren Zahlen $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_{n+1} \tag{4.2}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i > p_{n+1}, \text{ für alle } y \in B. \tag{4.3}$$

(Geometrisch bedeutet das, dass wir eine Hyperebene durch x legen können, sodass B komplett „oberhalb“ dieser Ebene liegt.)

Beweis:

Sei z der Punkt in B, welcher minimalen Abstand von x hat. (So ein Punkt existiert weil B abgeschlossen ist.) Wir setzten nun

$$p_i = z_i - x_i \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Klar, (4.2) ist erfüllt. Wir müssen also noch (4.3) zeigen.
Weiter gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i z_i = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

und daher

$$\sum p_i z_i - p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2 > 0.$$

Deswegen folgt:

$$\sum p_i z_i > p_{n+1}. \tag{**}$$

Wir nehmen nun an, dass ein $y \in B$ existiert, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \le p_{n+1}. \tag{*}$$

Weil B konvex, ist die Verbindungsstrecke zwischen y und z ganz in B enthalten, d.h. für alle $0 \le r \le 1$, $w_r = ry + (1-r)z \in B$. Das Quadrat des Abstandes ist also gegeben durch

$$\rho^2(x, w_r) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - ry_i - (1-r)z_i)^2.$$

Folglich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p^2}{\partial r} &= 2\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)(x_i - ry_i - (1-r)z_i) \\ &= 2\sum (z_i - x_i) y_i - 2\sum (z_i - x_i) z_i + 2\sum r(z_i - y_i)^2 \\ &= 2\sum p_i y_i - 2\sum p_i z_i + 2r\sum (z_i - y_i)^2\end{aligned}$$

Für $r = 0$ (d.h. $w_r = z$) gilt:

$$\left.\frac{\partial p^2}{\partial r}\right|_{r=0} = 2\sum p_i y_i - 2\sum p_i z_i.$$

Aber der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung ist nach der Annahme (*) kleiner oder gleich 2 p_{n+1}, während der zweite Term nach (**) größer ist als 2 p_{n+1}. Deshalb,

$$\left.\frac{\partial p^2}{\partial r}\right|_{r=0} < 0.$$

Für r hinreichend nahe bei Null folgt:

$$\rho(x, w_r) < \rho(x, z).$$

Aber dies widerspricht der Wahl von z. Deswegen muss (4.3) für alle $y \in B$ gelten.■

4.3 **Lemma:**

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) Der Punkt 0 (im m-dimensionalen Raum) ist in der konvexen Hülle der $m + n$ Punkte

$$a_1 = (a_{11},\ldots,a_{m1}),$$
$$\vdots$$
$$a_n = (a_{1n},\ldots,a_{mn})$$

und

$$e_1 = (1,0,\ldots,0),$$
$$e_2 = (0,1,0,\ldots,0),$$
$$\vdots$$
$$e_m = (0,0,\ldots,1).$$

(ii) Es existieren Zahlen $x_1,\ldots,x_m$, sodass

$$x_i > 0\,,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i > 0 \quad \text{für } j = 1,\ldots,n.$$

Beweis:

Wir nehmen an (i) gilt nicht. Nach Lemma 4.2 existieren Zahlen $p_1,\ldots,p_{m+1}$ sodass

$$\sum_{j=1}^{m} 0 \cdot p_j = p_{m+1}$$

(d.h. $p_{m+1} = 0$) und

$$\sum_{j=1}^{m} p_j y_j > 0$$

für alle y in der konvexen Menge gilt. Das gilt natürlich auch speziell wenn y einer der $m + n$ Vektoren a_i, e_j ist. Deshalb

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i > 0 \quad \text{für alle } j,$$
$$p_i > 0 \quad \text{für alle } i.$$

Weil $p_i > 0$, folgt dass $\sum p_i > 0$ und wir können

$$x_i = p_i \big/ \sum p_i$$

setzen. Deshalb

$$\sum a_{ij}x_i > 0\,,$$
$$x_i > 0\,,$$
$$\sum x_i = 1\,.$$

Mit diesen beiden Lemma können wir nun unseren Satz beweisen:

Beweis des Minimax-Theorems:

Sei A ein Matrixspiel. Nach Lemma 4.3 gilt entweder (i) oder (ii).

Wenn (i) gilt, ist 0 eine konvexe Linearkombination der $m + n$ Vektoren. Es existieren also $s_1,\ldots,s_{m+n}$ sodass

$$\sum_{j=1}^{n} s_j a_{ij} + s_{n+i} = 0, \qquad i = 1,\dots,m,$$

$$s_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, m + n,$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1.$$

Wären nun die ersten n Zahlen $s_1,\dots,s_n$ alle gleich Null, würde folgen dass 0 eine konvexe Linearkombination der m Einheitsvektoren $e_1,\dots,e_m$ wäre, was natürlich wegen der linearen Unabhängigkeit nicht möglich ist. Deswegen ist mindestens eine der Zahlen $s_1,\dots,s_n$ positiv und damit auch $\sum_{j=1}^{n} s_j > 0$. Wir können also wieder

$$y_j = s_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} s_j$$

setzen, und erhalten dann

$$y_j \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = -s_{n+i} \Big/ \sum_{j=1}^{n} s_j \leq 0 \qquad \text{für alle } i.$$

Deshalb ist $v(y) \leq 0$, und $v_{\mathrm{II}} \leq 0$.

Gilt andererseits (ii), dann ist $v(x) > 0$ und damit $v_{\mathrm{I}} > 0$.

Daher wissen wir, dass es unmöglich ist, dass $v_{\mathrm{I}} \leq 0 < v_{\mathrm{II}}$. Wir verändern nun das Spiel A, indem wir es durch $B = (b_{ij})$ ersetzen, wobei

$$b_{ij} = a_{ij} + k.$$

Klar, für jedes x, y gilt:

$$xBy^{\mathrm{T}} = xAy^{\mathrm{T}} + k.$$

Deswegen,

$$v_{\mathrm{I}}(B) = v_{\mathrm{I}}(A) + k,$$
$$v_{\mathrm{II}}(B) = v_{\mathrm{II}}(A) + k.$$

Weil aber

$$v_{\mathrm{I}}(B) < 0 < v_{\mathrm{II}}(B),$$

nicht gelten kann (s.o.), gilt auch nicht

$$v_{\mathrm{I}}(A) < -k < v_{\mathrm{II}}(A).$$

k war aber beliebig und somit kann $v_{\mathrm{I}} < v_{\mathrm{II}}$ nicht gelten. Wir haben aber schon gesehen, dass $v_{\mathrm{I}} \leq v_{\mathrm{II}}$. Also gilt

$$v_{\mathrm{I}} = v_{\mathrm{II}}.$$ ■

Wenn wir also mit gemischten Strategien spielen, ist der Mindestgewinn von Spieler 1 gleich dem Höchstverlust von Spieler 2. Dieser gemeinsame Wert v wird **Wert** des Spiels genannt. Man sieht, dass eine Strategie x welche

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq v, \quad j = 1,\dots,n \tag{4.4}$$

erfüllt, **optimal** für Spieler 1 in dem Sinn ist, dass es keine Strategie gibt, die für ihn eine höhere Erwartung gegen alle Strategien von Spieler 2 hat.

Umgekehrt, wenn y

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, \quad i = 1,\dots,m \tag{4.5}$$

erfüllt, dann ist y **optimal** im gleichen Sinn. Es gilt nun also

$$xAy^{\mathrm{T}} = v.$$

Wenn nämlich die linke Seite in der Gleichung kleiner wäre, würde dies Bedingung (4.4) verletzen; wenn sie größer wäre, würde dies Bedingung (4.5) verletzen.
Die optimalen Strategien *x* und *y* sind deswegen auch gegenseitig und gegenüber jeder anderen optimalen Strategie optimal. Wir nennen daher jedes Paar (*x*,*y*) von optimalen Strategien eine Lösung des Spiels.
Der folgende Satz (eine etwas schärfere Form des Minimax-Theorems) wird später noch nützlich sein:

4.4 **Satz**:

In einem $m \times n$ Matrixspiel hat entweder Spieler 2 eine optimale Strategie *y* mit $y_n > 0$, oder Spieler 1 hat eine optimale Strategie *x* mit $\sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i > v$.

Um 4.4 zu beweisen, definieren wir zuerst:

4.5 **Definition:**

Seien $r^k = (r_1^k, ..., r_n^k)$, $k = 1,\dots,p$, p n-dimensionale Vektoren. Dann versteht man unter dem von $r^1, ..., r^p$ erzeugten konvexen Kegel die Menge aller Vektoren *x*, sodass

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k r^k$$

für nicht-negative $\lambda_1, ..., \lambda_p$ gilt.

Man kann leicht zeigen, dass ein solcher Kegel tatsächlich konvex ist.

4.6 **Lemma** (Farkas):

$r^k = (r_1^k, ..., r_n^k)$, $k = 1,\dots,p,p + 1$, seien n-dimensionale Vektoren sodass für alle $(q_1, ..., q_n)$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^k \geq 0 , \quad k = 1,\dots,p, \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^{p+1} \geq 0 \tag{4.7}$$

gilt. Dann ist r^{p+1} im von $r^1, ..., r^p$ erzeugten konvexen Kegel *C* enthalten.

Beweis:

Annahme $r^{p+1} \notin C$. Nach Lemma 4.2 existieren Zahlen $q_1, ..., q_{n+1}$ sodass

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^{p+1} = q_{n+1}$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} q_j s_j > q_{n+1} \quad \text{für alle } s \in C .$$

Weil $0 \in C$, ist $q_{n+1} < 0$. Wir nehmen weiter an, dass $\sum_{j=1}^{n} q_j s_j$ für ein $s \in C$ negativ ist.

Für jede positive Zahl *α*, ist $\alpha s \in C$. Aber für genügend große *α* ist $\sum q_j \alpha s_j = \alpha \sum q_j s_j < q_{n+1}$. Folglich

$$\sum_{j=1}^{n} q_j s_j \geq 0 \quad \text{für alle } s \in C ,$$

aber außerdem

$$\sum_{j=1}^{n} q_j r_j^{p+1} = q_{n+1} < 0 .$$

Also speziell auch für $s = r = r^1,\dots,r^p$. Wenn also die Schlussfolgerung von 4.6 falsch ist, dann sind es die Vorraussetzungen auch.

Beweis von 4.4:

Wir nehmen zuerst an dass $v(A) = 0$. Betrachte die $m + n$ m-dimensionalen Vektoren

$$e_1 = (1,0,\dots,0),$$
$$e_2 = (0,1,\dots,0),$$
$$\vdots$$
$$e_m = (0,0,\dots,1),$$
$$a_1 = (a_{11},\dots,a_{m1}),$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = (a_{1,n-1}, a_{2,n-1},\dots,a_{m,n-1}),$$
$$-a_n = (-a_{1n},-a_{2n},\dots,-a_{mn})$$

Entweder ist $-a_n$ in dem konvexen Kegel C, der durch die anderen $m + n - 1$ Punkte erzeugt wird, enthalten oder nicht. Annahme $-a_n \in C$. Dann existieren nicht-negative Zahlen $\mu_1,\dots,\mu_m,\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ sodass

$$-a_{in} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j e_{ij} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_{ij} \quad \text{für alle i,}$$

d.h. also

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_{ij} + a_{in} = -\mu_i \le 0 \quad \text{für alle i.}$$

Wir setzen nun

$$y_j = \frac{\lambda_j}{1+\sum \lambda_i}, \qquad j = 1,\dots,n-1,$$
$$y_n = \frac{1}{1+\sum \lambda_i}.$$

Klar, $y = (y_1,\dots,y_n)$ ist eine optimale Strategie für Spieler 2, sodass $y_n > 0$.

Nehmen wir nun andererseits an $-a_n \notin C$. Es existieren also Zahlen $q_1,\dots,q_m$ sodass

$$\sum_{i=1}^{m} q_i e_{ij} \ge 0 \qquad \text{für alle } j = 1,\dots,m, \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij} \ge 0 \qquad \text{für } j = 1,\dots,n-1, \tag{4.9}$$

und

$$\sum_{i=1}^{m} q_i(-a_{in}) < 0. \tag{4.10}$$

Nach (4.8) $q_i \ge 0$, und nach (4.10) sind nicht alle q_i gleich Null. Wir können also

$$x_i = q_i \Big/ \sum_{j=1}^{m} q_j, \quad i = 1,\dots,m,$$

setzen und aus (4.9) und (4.10) folgt direkt, dass x eine optimale Strategie für Spieler 1 ist, sodass $\sum x_i a_{in} > 0$.

Angenommen $v(A) = k \ne 0$. Wir konstruieren eine Matrix $B = (b_{ij})$ wobei $b_{ij} = a_{ij} - k$ und erhalten durch dieselben Schritte wie im Beweis von Satz 4.1 die Behauptung. ■

5. Aufgaben

5.1 Gib für die folgenden Matrizen v'_I und v'_{II} an, und entscheide ob ein Spiel mit Sattelpunkt vorliegt.

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

5.2 Gewerkschaft und Arbeitgebervertretung verhandeln über einen neuen Tarifvertrag. Die Verhandlungen sind an einem toten Punkt angekommen, an denen die Arbeitgeber ein letztes Angebot über einen Zuwachs von 1,30 € pro Stunde unterbreiten und die Gewerkschaften eine Lohnforderung über einen Zuwachs von 1,80 € pro Stunde fordern.
Die Schiedsstelle fordert nun beide Seiten auf, ihr einen realistischen Vorschlag zwischen 1,30 € und 1,80 € über den Lohnzuwachs (auf 10 Cent gerundet) zu machen. Aus der Vergangenheit ist bekannt, dass die Schiedsstelle den Vorschlag derjenigen Partei akzeptiert, welche am meisten von der ursprünglichen Forderung abgewichen ist. Sind beide Parteien gleich weit von ihrem ursprünglichen Vorschlag abgewichen oder beharren darauf, wird der Mittelwert davon gebildet (was also einen Lohnzuwachs von 1,55 € pro Stunde bedeuten würde).

(a) Formuliere das Problem als Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel. (D.h. wer sind die beiden Spieler, was ist in diesem Fall die Auszahlung, wie sieht die Matrix des Spiels aus?)
(b) Welchen Vorschlag werden beide Seiten unterbreiten, wenn sie eine Minimax-Strategie bzw. Maximin-Strategie verfolgen?