Complexité & graphes : TD2

Université de Tours

Département informatique de Blois

NP : réduction et complétude

*
* *

Préambule

Soient deux problèmes P_1 et P_2 définis sur les alphabets respectifs Σ_1 et Σ_2. On dit que P_1 est polynomialement réductible à P_2 (noté $P_1 \leq_p P_2$) si et seulement s'il existe une fonction de transformation $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, calculable en temps polynomiale telle que pour toute instance positive $I \in P_1$, on a $f(I) \in P_2$ et réciproquement. Plus formellement, on note :

$$P_1 \leq_p P_2 \Leftrightarrow (\exists f : \Sigma_1 \to \Sigma_2 \text{ polynomiale}, \forall I \in \Sigma_1 | I \in P_1 \Leftrightarrow f(I) \in P_2)$$

Problème 1

Le problème Subset-Sum (somme de sous-ensemble) se définit comme suit :

- *Instance* : Un couple (E, S) tel que :
  - Un ensemble[1] $E = \{e_1, ..., e_n\}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \in \mathbb{N}$
  - Une valeur cible $S \in \mathbb{N}$.
- *Question* : Existe t-il un sous-ensemble $E' \subseteq E$ tel que $S = \sum\limits_{e \in E'} e$?

On supposera (voir exercice n°4 pour le démontrer) que ce problème est NP-complet.

Partie 1

Le problème du sac à dos (Knapsack) se définit comme suit :

- *Instance* : Un triplet de la forme $(O, P_{\max}, V_{\min})$ tel que :
  - Un ensemble $O = \{o_1, ..., o_n\}$ d'objets où $\forall i \in [\![1, n]\!], o_i = (p_i, v_i) \in \mathbb{N}^2$. La valeur p_i désigne le poids de l'objet o_i et v_i sa valeur.
  - Une capacité maximale $P_{\max}$ du sac à dos (le poids maximal pouvant être supporté).
  - Une valeur minimale $V_{\min}$ du sac à dos (la valeur minimale des objets devant être transportés).
- *Question* : Peut-on choisir un sous-ensemble $O' \subseteq O$ d'objets tel que : $\begin{cases} \sum\limits_{o \in O'} \pi_1(o) \leq P_{\max} \\ \sum\limits_{o \in O'} \pi_2(o) \geq V_{\min} \end{cases}$?

  Où π_k désigne la projection sur la k-ème coordonnée d'un vecteur.

  On a donc $\pi_1(o_i) = p_i$ et $\pi_2(o_i) = v_i$.

[1] On pourra plus largement considérer E comme un multi-ensemble, c'est-à-dire un ensemble contenant possiblement des doublons. (ex : $E = \{1, 2, 3, 2\}$)

1. Soit la fonction de transformation $g(E,S) = (O^g, P^g_{\max}, V^g_{\min})$ qui transforme une instance de Subset-Sum en une instance de Knapsack telle que :

   - $O^g = \{(e_1,1),(e_2,1),...,(e_n,1)\}$
   - $P^g_{\max} = S$
   - $V^g_{\min} = n$

   Montrer que g n'est pas valide pour montrer la réduction polynomiale de Subset-Sum à Knapsack.

2. Soit la fonction de tranformation f suivante :

   $$f(E,S) = (O^f, P^f_{\max}, V^f_{\min})$$

   où :

   - $O^f = \{(e_1,e_1),(e_2,e_2),...,(e_n,e_n)\}$ désigne l'ensemble d'objets issus de la fonction de transformation f.
   - $P^f_{\max} = S$ désigne la capacité maximale du sac selon la fonction de transformation f.
   - $V^f_{\min} = S$ désigne la valeur minimale du sac selon la fonction de transformation f.

   (a) Soit l'instance de Subset-Sum suivante ($E = \{1,2,3,4\}, S = 5$). Montrer que l'instance $(E,S) \in$ Subset-Sum et que $f(E,S) \in$ Knapsack.

   (b) Montrer que Knapsack est dans NP.

   (c) En utilisant la fonction de transformation f, démontrer que Subset-Sum $\leq_p$ Knapsack. Conclure que Knapsack est NP-complet

Partie 2

Le problème de partition (Part) se définit comme suit :

- *Instance* : Un ensemble $R = \{r_1,...,r_n\}$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!], r_i \in \mathbb{N}$.
- *Question* : Existe-t-il une partition R_1, R_2 de R telle que : $\sum_{r\in R_1} r = \sum_{r \in R_2} r$.

  On rappelle que R_1 et R_2 forment une partition de R si et seulement si $R_1, R_2 \subseteq R$ et que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ et $R_1 \cup R_2 = R$.

1. Soit la fonction de transformation $h(E,S) = R^h$ telle que $R^h = E \cup \{S\}$ qui transforme une instance de Subset-Sum en une instance de Part.

   Montrer que h n'est pas valide pour montrer la réduction polynomiale de Subset-Sum à Part.

2. Déterminer une fonction de transformation t et un exemple d'instance (E,S) tels que $(E,S) \notin$ Subset-Sum mais que $t(E,S) \in$ Part.

3. Montrer que Part est dans NP.

4. On pose la fonction f de transformation suivante :

$$f(E,S) = R^f$$

où : $R^f = E \cup \{S+K, 2K-S\}$ avec $K = \sum_{e \in E} e$ la somme des éléments de E.

Montrer que Part $\leq_p$ Subset-Sum. Conclure que Part est NP-complet.

Problème 2

Le problème Hamiltonian Circuit (HC) se définit comme suit :

- *Instance* : Un graphe non orienté $G = (N, A)$ où :
  - N est un ensemble de noeuds.
  - $A \subseteq N^2$ un ensemble d'arcs. On notera que, dans un graphe non orienté, $\forall (x,y) \in A$, on a aussi $(y,x) \in A$.
- *Question* : Existe-t-il un circuit hamiltonien dans G ?

  On rappelle qu'un circuit hamiltonien ϕ est un chemin qui part d'un noeud n_1, qui passe par tous les autres sommets de G une et une unique fois, puis revient en n_1.

  Ce problème est NP-complet (voir Exercice 3).

Le problème TSP (Traveling Salesman Problem) ou *Problème du voyageur de commerce* se définit comme suit :

- *Instance* : Un couple (G, D) où :
  - $G = (N, N^2, \omega)$ est un graphe complet (dont tous les noeuds sont reliés ensemble) et où $\omega : N^2 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de coût sur les arcs (par exemple la distance entre deux villes).
  - $D \in \mathbb{R}^+$, un seuil de voyage.
- *Question* : Existe-t-il un circuit hamiltonien ϕ dans G dont la distance de voyage n'excède pas D, c'est-à-dire tel que $\sum_{i=1}^{|N|} \omega(\phi_i, \phi_{i+1}) \leq D$? (Problème de décision)[2]

  On note ϕ_i le i-ème sommet visité dans le circuit hamiltonien.

On pose f de la manière suivante : On crée une instance de TSP à partir des entrées de HC telle que :

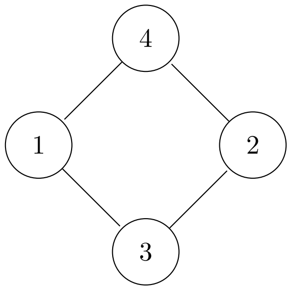
$$f(G) = (G^f, D^f)$$

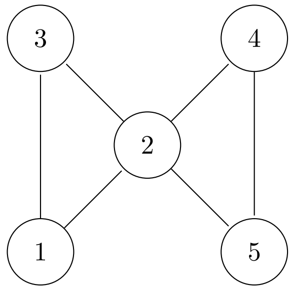
où :

- $G^f = (N, N^2, \omega^f)$ où N est l'ensemble des noeuds de G.
- $\omega^f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in A \\ 1 & \text{si } (x,y) \notin A \end{cases}$.
- $D^f = 0$.

[2]Parfois il s'agit de déterminer le circuit qui minimise le coût (Problème d'optimisation).

1. On considère le graphe G_1 (à gauche) et G_2 (à droite) suivants en instance de HC :





   (a) Dessiner les graphes correspondant à $f(G_1)$ et $f(G_2)$.

   (b) Montrer que $G_1 \in$ HC et que $f(G_1) \in$ TSP.

   (c) Montrer que $G_2 \notin$ TSP et que $f(G_2) \notin$ TSP.

2. Montrer que HC $\leq_p$ TSP.

3. En déduire que TSP est NP-complet.

Problème 3

Le problème DHC (Directed Hamiltonian Circuit) se définit comme suit :

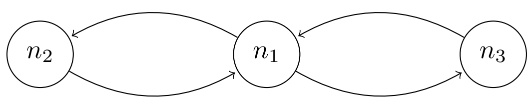
- *Instance* : Un graphe orienté $G = (N, A)$ où :
  - N est un ensemble de noeuds.
  - $A \subseteq N^2$ un ensemble d'arcs.
- *Question* : Existe-t-il un circuit hamiltonien ϕ dans G ?

1. Montrer que HC $\leq_p$ DHC en notant que HC est un cas particulier de DHC.

2. On souhaite montrer à présent que DHC $\leq_p$ HC.

   (a) Soit la fonction de tranformation $g(G) = G^g$ telle que $G^g = (N^g, A^g)$ avec :
   - $N^g = \bigcup_{n \in N} \left\{n^{(1)}, n^{(2)}\right\}$, c'est-à-dire que pour tout noeud $n \in N$ de G, on crée un ensemble de deux noeuds associés $n^{(1)}, n^{(2)}$.
   - $A^g = \bigcup_{n \in N} \left\{\left\{n^{(1)}, n^{(2)}\right\}\right\} \cup \bigcup_{(n_i, n_j) \in A} \left\{\left\{n_i^{(2)}, n_j^{(1)}\right\}\right\}$. on relie tous les noeuds $n^{(1)}, n^{(2)}$ de façon non dirigée et, pour les arcs qui existaient dans G entre n_i et n_j de la forme (n_i, n_j), on relie les noeuds $n_i^{(2)}$ et $n_j^{(1)}$ de façon non dirigée.

   On considère également le graphe G suivant en instance de DHC :



   i. Dessiner le graphe $g(G)$ résultant de la fonction de tranformation pour le graphe G ci-dessus.

   ii. Montrer que la transformation g qui transforme une instance de DHC en une instance de HC n'est pas valide pour montrer la réduction polynomiale de DHC à HC. En particulier, on montrera que $G \notin$ DHC mais que $g(G) \in$ HC.

(b) Soit la fonction de tranformation $f(G) = G^f$ telle que $G^f = (N^f, A^f)$ avec :

- $N^f = \bigcup\limits_{n \in N} \{n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}\}$, c'est-à-dire que pour tout noeud $n \in N$ de G, on crée un ensemble de trois noeuds associés $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$.
- $A^f = \bigcup\limits_{n \in N} \{\{n^{(1)}, n^{(2)}\}, \{n^{(2)}, n^{(3)}\}\} \cup \bigcup\limits_{(n_i, n_j) \in A} \left\{\left\{n_i^{(3)}, n_j^{(1)}\right\}\right\}$, on relie tous les noeuds $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$ de façon non dirigée et, pour les arcs qui existaient dans G entre n_i et n_j de la forme (n_i, n_j), on relie les noeuds $n_i^{(3)}$ et $n_j^{(1)}$ de façon non dirigée.

Montrer que $G \notin$ DHC et que $f(G) \notin$ HC.

(c) Grâce à la fonction f précédente, montrer que DHC $\leq_p$ HC.

(d) En déduire que HC $\equiv_p$ DHC.

Problème 4 (Partiel 2020)

On rappelle la définition du problème Partition (Part) :

- *Instance* : $R = \{r_1, ..., r_n\}$, un ensemble fini de nombres tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], r_i \in \mathbb{N}$.
- *Question* : Existe t-il une partition (R_1, R_2) de R telle que $\sum\limits_{r \in R_1} r = \sum\limits_{r \in R_2} r$?

Dans la suite, on suppose que Part est NP-complet. On définit le problème Bin-Packing (BP) de la façon suivante :

- *Instance* : Un triplet (B, k, c) tel que $B = \{b_1, ..., b_n\}$ et deux entiers $k > 1$ et $c \geq 0$.
- *Question* : Existe t-il une partition de B en k sous-ensembles $(B_1, ..., B_k)$ telle que $\forall i \in [\![1, k]\!], \sum\limits_{b \in B_i} b \geq c$.

On va réduire polynômialement Part à BP, c'est-à-dire, on cherche à montrer que :

$$\exists f : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ polynomiale}, \forall R \in 2^{\mathbb{N}} | R \in \text{PART} \Leftrightarrow f(R) \in \text{BP}$$

1. Montrer que la transformation $g(R) = (R, 2, 0)$ qui transforme une instance de Part en une instance de BP n'est pas valide pour montrer la réduction polynomiale de PART à BP.
2. On pose $R = \{1, 3, 8, 0, 6, 10, 4\}$. Montrer qu'ici $R \in$ PART et que $f(R) = \left(R, 2, \frac{1}{2} \sum\limits_{r \in R} r\right) \in$ BP .
3. En utilisant la fonction de transformation f précédente, démontrer que Part $\leq_p$ BP. En déduire que BP est NP-complet.