MATHÉMATIQUES I

Définitions

Si f est une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on notera, pour $p \geq 1$, $f^p = f \circ f .. \circ f$ p fois, fonction définie sur le sous-domaine de Ω défini par $\{x \in \Omega | \ f(x) \in \Omega, \ f^2(x) \in \Omega, \ldots, f^{p-1}(x) \in \Omega\}$. On appelle p-cycle de f un ensemble de p éléments $\{x_0, \ldots x_{p-1}\} \subset \Omega$ tel que $f(x_0) = x_1$ $, \ldots, f(x_{p-2}) = x_{p-1}, f(x_{p-1}) = x_0$. On appelle multiplicateur du cycle la quantité

$$(f^p)'(x_0) = f'(x_0) f'(x_1) \ldots f'(x_{p-1}).$$

Un point $x \in \Omega$ est dit p-périodique s'il est élément d'un p-cycle ; un point 1 - périodique est encore appelé point fixe. Le multiplicateur d'un point périodique x_0 est alors le multiplicateur du cycle le contenant, qui n'est autre que le multiplicateur de x_0 comme point fixe de f^p. Le cycle (ou le point p-périodique) sera dit attractif, super attractif, indifférent ou répulsif suivant que la valeur absolue de son multiplicateur est strictement inférieure à 1, égale à 0, égale à 1 ou strictement supérieure à 1.

On pourra être amené à utiliser un théorème de fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$.

On pourra alors admettre le résultat suivant :

Théorème : *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1, *et* (x_0, y_0) *un point de* Ω, *tels que*

$$F(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe ε, $\eta > 0$ tels que si on pose $I =]x_0 - \varepsilon, \ x_0 + \varepsilon[$, $J =]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$, l'ouvert $V = I \times J$ est inclus dans Ω et il existe une fonction g : $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ de classe C^1 telle que :

$$\forall (x, y) \in V, F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Le thème général du problème est l'étude globale de la méthode de Newton appliquée aux polynômes.

Filière MP

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale non constante et $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$. Si $x \in \Omega$, on définit $N_P(x)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P avec l'axe des x.

I.A - Montrer que :

$$\forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

I.B -

I.B.1) Si $x \in \Omega$, calculer $N'_P(x)$.

I.B.2) Soit a un nombre réel.

Montrer que si $P(a) = 0$, $P'(a) \neq 0$ alors a est un point fixe super attractif de N_P. Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P montrer que N_P peut se prolonger par continuité en a qui devient un point fixe attractif de N_P de multiplicateur $1 - 1/p$.

Si $x \in \Omega$, on dira que la suite de Newton de x par P est bien définie si l'on peut définir une suite (x_n) telle que $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega \text{ et } x_{n+1} = N_P(x_n).$$

Dans ce cas, cette suite (x_n) sera la suite de Newton de x par P.

I.C - Montrer que si la suite de Newton de x par P est bien définie et converge vers $a \in \mathbb{R}$ alors $P(a) = 0$.

I.D - Soit réciproquement $a \in \mathbb{R}$ un zéro de P.

I.D.1) Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que si $|y - a| < \varepsilon$ alors la suite de Newton de y par P est bien définie et converge vers a.

On appelle $I(a)$ le plus grand intervalle contenant a et formé de points dont la suite de Newton par P converge vers a.

I.D.2) Montrer que c'est un intervalle ouvert ; on l'appelle le bassin immédiat de a.

I.E -

I.E.1) On suppose que P a au moins deux racines réelles. Soit a^- le plus petit zéro de P ; on suppose que ξ, le plus petit zéro de P' vérifie $\xi > a^-$ et que P'' ne s'annule pas sur $]-\infty, \xi[$. Montrer que le bassin immédiat de a^- est égal à $]-\infty, \xi[$.

I.E.2) On suppose que le bassin immédiat du zéro a de P est de la forme $]\alpha, \beta[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Montrer successivement que $N_P(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$, que $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$, et enfin que $N_P(\alpha) = \beta$, $N_P(\beta) = \alpha$. Ce 2 - cycle peut-il être attractif ?

I.F - Les hypothèses de la question I.E.2 étant toujours vérifiées, montrer que le bassin immédiat de a contient un zéro de P''.

I.G - On suppose P de degré $d \geq 2$ possédant d zéros distincts. Montrer que N_P attire tout zéro de P'' vers un zéro de P.

Partie II - Étude algébrique

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré d (on note $\mathrm{d}°(P) = d$). Dans cette partie la dérivation est à prendre au sens de la dérivation formelle des polynômes ou plus généralement des fractions rationnelles et N_P est la fraction rationnelle

$$N_P(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}.$$

II.A - Montrer que si P a d zéros distincts alors $R = N_P$ vérifie

$$(*) \quad \begin{cases} R = \dfrac{Q}{S},\ Q, S \in \mathbb{C}[X],\ PGCD(Q, S) = 1,\ \mathrm{d}°(Q) = d,\ \mathrm{d}°(S) = d-1 \\ \text{et } R \text{ possède } d \text{ points fixes super attractifs} \end{cases}$$

(Un point fixe super attractif de R est un point $z \in \mathbb{C}$ tel que $R(z) = z$, $R'(z) = 0$).

II.B - Soit réciproquement R une fraction rationnelle vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré d, possédant d zéros distincts, tel que $R = N_P$.

II.C - Deux fractions rationnelles f, g sont dites semblables s'il existe une similitude $T(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) telle que si D, D' désignent les domaines de définition de f, g (c'est-à-dire le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des pôles) alors $T(D) = D'$ et

$$\forall z \in D',\ f(z) = T^{-1} \circ g \circ T(z).$$

Si $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ et si $T(z) = az + b$ montrer que $N_{P \circ T}$ est semblable à N_P.

II.D - Déterminer N_P pour $P(X) = X^2$, $P(X) = X^2 - 1$: montrer que si P est un polynôme de degré 2 alors N_P est semblable à $z \mapsto \frac{z}{2}$ ou bien à $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$.

II.E - Pour $m \in \mathbb{C}$ on définit

$$P_m(z) = z^3 + (m-1)z - m = (z-1)(z^2 + z + m), N_m(z) = N_{P_m}(z)$$

Montrer que si P est un polynôme de degré 3 alors soit N_P est semblable à $z \mapsto \frac{2z}{3}$ soit il existe $m \in \mathbb{C}$ tel que N_P est semblable à N_m.

II.F - Quel est l'intérêt des résultats des deux questions précédentes pour l'étude des suites de Newton par les polynômes de degré ≤ 3 ?

Partie III - Étude analytique du cas cubique réel

Dans cette partie on suppose $m \in \mathbb{R}$, on garde les notations du II.E et on s'intéresse au comportement des suites de Newton des nombres réels par P_m.

III.A -

III.A.1) Montrer que P_m a trois zéros (complexes) distincts si et seulement si $m \neq -2$, $m \neq 1/4$.

III.A.2) On suppose $m > 1$: montrer que la suite de Newton de tout réel x par P_m est définie et converge vers un réel à préciser.

III.B -

III.B.1) Montrer que si $m' < 1/4$, $m' \neq -2$ alors $P_{m'}$ possède trois zéros réels distincts, soient :

$$1, a_{m'} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m'}}{2}, b_{m'} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m'}}{2}.$$

Si de plus $m' < 0$, montrer qu'il existe $m \in]0, 1/4[$ tel que $N_{m'}$ soit semblable à N_m.

III.B.2) On supposera désormais dans cette partie que $m \in [0, 1/4[$. P_m possède alors trois zéros réels distincts, soient :

$$1, a_m = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}, b_m = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}.$$

III.B.3) On pose $x_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1-m}{3}}$ et on désigne par $]\alpha(m), \beta(m)[$ le bassin immédiat de a_m. Montrer que la fonction $x \mapsto |N'_m(x)|$ est strictement décroissante sur $]x_0^-, a_m[$ et strictement croissante sur $]0, x_0^+[$.

III.B.4) Montrer que la fonction $M_m = N_m \circ N_m$ est définie sur un intervalle $]x_1^-, x_1^+[\subset]x_0^-, x_0^+[$ où $N_m(x_1^-) = x_0^+$, $N_m(x_1^+) = x_0^-$.

On désigne par ξ^-, ξ^+ le plus petit et le plus grand zéro de M'_m. Montrer que la fonction M'_m est strictement décroissante sur $]x_1^-, \xi^-[$ et strictement croissante sur $]\xi^+, x_1^+[$.

III.B.5) Montrer que l'intervalle $[\xi^-, \xi^+]$ est inclus dans le bassin immédiat de a_m.

III.B.6) Déduire de III.B.4 et III.B.5 que $\{\alpha(m), \beta(m)\}$ est le seul 2 - cycle de N_m.

III.B.7) Montrer que $\alpha(0) = -\beta(0)$ et en déduire que $\alpha(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

III.B.8) On pose $F(m, x) = M_m(x) - x$. Si u est un réel, un développement limité à l'ordre 1 de la fonction

$$m \mapsto F\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + um\right)$$

peut être obtenu grâce à un logiciel de calcul formel. On trouve :

$$\left(35u + \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2}\right)m + o(m).$$

En déduire, avec toutes les justifications nécessaires, un développement limité à l'ordre 1 de α en 0.

III.C -

III.C.1) Montrer qu'il existe une et une seule valeur m_0 de $m \in \mathbb{R}$ telle que 0 soit 2-périodique pour N_m. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de m_0 en indiquant l'algorithme utilisé.

III.C.2) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|m - m_0| < \eta$ alors N_m admet un cycle attractif d'ordre 2 qui attire 0.

••• FIN •••

Soient a et b tels que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $]a, b[$.

f est dite absolument monotone (en abrégé AM) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

f est dite complètement monotone (en abrégé CM) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b[, (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Partie I -

I.A - Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg sont AM. Qu'en est-il pour les fonctions CM ?

I.B - Si f est une fonction AM sur $]a,b[$, montrer par récurrence que e^f l'est aussi.

I.C - Soient $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]-b, -a[\to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(-x)$. Montrer que f est AM sur $]a,b[$ si, et seulement si, g est CM sur $]-b,-a[$.

I.D -

I.D.1) Vérifier que la fonction $-\ln$ est CM sur $]0, 1[$.

I.D.2) Montrer que $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est AM sur $]0, 1[$.

I.D.3) Montrer que la fonction arcsin est AM sur $]0, 1[$.

I.D.4) Montrer que la fonction tan est AM sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

I.E -

I.E.1) On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R}$ et f est AM sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda = \lim_{a^+} f.$$

On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$. Montrer que f est dérivable à droite en a, et que f' est continue à droite en a.

I.E.2) Plus généralement, montrer que f est indéfiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles. Le même phénomène se produit-il en b ?

I.F - On suppose dans cette question $0 \leq a < b < +\infty$.

On note $C_{a,b}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'une fonction f de $C_{a,b}$ est dite positive si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Une application $\mu : C_{a,b} \to \mathbb{R}$ est appelée forme linéaire positive si elle est linéaire et si, de plus, on a :

$$\forall f \in C_{a,\,b},\ f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0.$$

Soit μ une forme linéaire positive et e_x la fonction définie par $e_x(t) = e^{-xt}$ si $t \in [a,b]$. On pose $\tilde{\mu}(x) = \mu(e_x)$.

I.F.1) Soit $f \in C_{a,b}$, montrer que $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$.

I.F.2) Montrer que : $\forall f \in C_{a,\,b}$, $\mu(f) \leq \mu(f_0)\|f\|_\infty$ où $f_0(x) = 1$ et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

I.F.3) Montrer que $\tilde{\mu}$ est positive, décroissante et continue sur $[a,b]$.

I.F.4) On note $e_{n,x}$ la fonction définie par : $e_{n,\,x}(t) = t^n e^{-xt}$ si $t \in [a,b]$. Montrer que $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \mu(e_{n,\,x})$ est dérivable sur $[a,b]$, décroissante et que : $\varphi'(x) = -\mu(e_{n+1,\,x})$.

On pourra justifier et utiliser le résultat suivant, vrai pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq e^{-u} - 1 + u \leq e^{|u|}u^2/2.$$

I.F.5) Montrer que $\tilde{\mu}$ est indéfiniment dérivable sur $[a,b]$ et que : $\tilde{\mu}^{(n)}(x) = (-1)^n \mu(e_{n,\,x})$. En déduire que $\tilde{\mu}$ est CM.

I.F.6) Proposer deux exemples de formes linéaires non nulles positives μ_1, μ_2 ; calculer $\tilde{\mu}_1$ et $\tilde{\mu}_2$.

Partie II -

On suppose dans cette partie que : $-\infty < a < 0 < b \leq +\infty$. On utilisera librement la formule de Taylor avec reste intégrale.

II.A - Soit f une fonction AM sur $]a,b[$ et

$$R_n(f,x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

II.A.1) Prouver que, pour n fixé, la fonction $x \mapsto R_n(f,x)/x^n$ est croissante sur $]0,b[$ et possède une limite nulle quand x tend vers 0.

II.A.2) Montrer que la série

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

converge pour $x \in [0,b[$. Soit $g(x)$ sa somme, montrer que $g \leq f$.

II.A.3) Déduire de II.A.1 et II.A.2 que : $g = f$ sur $[0,b[$.

On pourra prendre $0 < x < y < b$ et montrer que

$$0 \leq R_n(f,x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y) .$$

II.A.4) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 .

On pourra poser $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $h_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon f(-x)$ si $|x| < r$ et $r = \min(b, -a)$.

II.B - En suivant les indications de la question I.E, on prolonge f en a . Montrer que pour tout $x \in [a,b[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} .$$

II.C - Montrer que si f s'annule en $x_0 \in]a,b[$, alors f est nulle. Donner l'ensemble des fonctions f AM sur $]a,b[$ telles que, pour un $p \in \mathbb{N}$ fixé, $f^{(p)}$ possède un zéro dans $]a,b[$.

Partie III -

On suppose dans cette partie que $-\infty < a < b < +\infty$.

Étant donné $h \in \mathbb{R}^{+*}$, on définit sur l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle les applications T_h , Δ_h et I par :

$$T_h(f)(x) = f(x+h) , \Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x) \text{ et}$$

$$I(f)(x) = \Delta_h^0(f)(x) = f(x) .$$

Plus généralement, on peut définir les opérateurs aux différences finies successifs : $\Delta_h^{n+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^n$.

III.A - On suppose f définie sur $]a,b[$. Quel est l'ensemble de définition de $\Delta_h^n(f)$?

III.B - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x+kh) \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

III.C - On suppose f définie et AM sur $]a,b[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^n(f) \geq 0$.

On pourra poser $X(h) = \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ et exprimer $X'(h)$ en fonction de $\Delta_h^n(f')(x+h)$.

III.D - On considère les fonctions f totalement monotones (TM) c'est-à-dire, définies sur $]a,b[$, de classe C^∞ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall h \in \left]0,(b-a)/n\right[\,,\ \forall x \in [a, b-nh[\,,\ \Delta_h^n(f)(x) \geq 0\,.$$

III.D.1) Montrer qu'une fonction TM est positive et croissante.

III.D.2) On pose

$$S_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{k^j}{j!}$$

pour $j \in \mathbb{N}$ et $\psi(t) = (e^t - 1)^n$. Déduire du calcul des dérivées successives de ψ en 0 que S_j vaut 0 si $j < n$ et que S_n vaut 1.

III.D.3) Montrer que toute fonction TM est AM.

••• FIN •••

Dans tout le problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact, c'est-à-dire s'annulant chacune à l'extérieur d'un segment de $\mathbb{R}$.

Pour $i, j \in \mathbb{Z}$, $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

Les questions II.B, II.C et II.D sont relativement indépendantes.

Partie I - Les B -splines uniformes

I.A -

I.A.1) Pour $f \in E$, on définit la transformée de Fourier de f

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

a) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si $\widehat{f} = 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt = 0 .$$

En déduire, à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, que $f = 0$.

I.A.2) Pour $f \in E$, on définit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) .$$

a) Montrer que $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant 1 pour période. Calculer ses coefficients de Fourier, sous forme exponentielle.

b) En déduire, dans le cas où la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(2n\pi)$$

est absolument convergente, la formule suivante dite de Poisson

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(2n\pi)e^{2in\pi x} .$$

I.B - On définit la suite de fonctions réelles $(N_m)_{m \geq 1}$ par $N_1 = \chi_{[0,1[}$ et

$$\forall m \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, N_m(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t)dt$$

où $\chi_{[0,1[}$ désigne la fonction caractéristique de $[0,1[$. Elle vaut 1 sur $[0,1[$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash[0,1[$.

I.B.1)

a) Représenter N_2.

b) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, N_m est une fonction strictement positive sur $]0, m[$, de classe C^{m-1} par morceaux sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle $]k, k+1[\subset]0, m[$ d'extrémités entières est un polynôme de degré au plus $m-1$. Montrer que, pour tout $m \geq 2$, N_m est de classe C^{m-2}.

c) Établir la propriété de symétrie

$$\forall m \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right).$$

I.B.2)

a) Montrer que

$$\forall m \geq 2, \forall t \neq 0, \widehat{N_m}(t) = \left(\frac{1 - e^{-it}}{it}\right)^m.$$

Donner la valeur de $\widehat{N_m}(0)$.

b) Établir, à l'aide de la formule de Poisson, la relation suivante dite partition de l'unité

$$\forall m \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} N_m(x-k) = 1.$$

En déduire que

$$\forall m \geq 2, \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(x) dx = 1.$$

c) En comparant les transformées de Fourier, établir que

$$\forall m \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^{m} C_m^k N_m(2x-k).$$

I.B.3) On se propose d'étudier la convergence de la suite N_m sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer que la fonction N_m est croissante sur $[0, m/2]$ pour tout $m \geq 1$.

b) On admet que si $f \in E$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{ixt} dx.$$

Pour tout $m \geq 2$, exprimer $N_m(m/2)$ au moyen de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt.$$

Calculer

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^1 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt .$$

En déduire la limite de $N_m(m/2)$ lorsque $m \to +\infty$.

c) Étudier la convergence uniforme de la suite N_m sur $\mathbb{R}^+$.

Partie II - Équation d'échelle

On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt .$$

On note $\| \ \|$ la norme associée.

Soit $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels, **tous nuls sauf un nombre fini**. On dit que $\phi \in E$, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = 1$$

est une **fonction d'échelle** pour c lorsqu'elle vérifie une **équation d'échelle**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(2x - k) \qquad (E_c)$$

À chaque équation d'échelle (E_c), est associé le polynôme trigonométrique

$$P_c(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} .$$

Pour une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel p, on note $\phi(. - p)$ la fonction translatée $x \quad \phi(x - p)$.

II.A - Dans cette question, ϕ est une fonction d'échelle solution de (E_c).

II.A.1)

a) Montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = 2 .$$

b) Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\phi(. - p)$ est une fonction d'échelle.

II.A.2) Établir l'équivalence suivante

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k c_{k-2p} = 2\delta_{0p} \Leftrightarrow |P_c(\xi)|^2 + |P_c(\xi + \pi)|^2 = 1 .$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que l'équation d'échelle a la propriété (O).

II.A.3) Établir que si la famille $\{\phi(. - p) | p \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale alors (E_c) a la propriété (O). Calculer P_c pour les équations d'échelles vérifiées par les fonctions N_m à la question I.B.2-c. Indiquer celles ayant la propriété (O).

On se propose d'étudier, dans les questions suivantes, différentes approches des fonctions d'échelles.

II.B -

II.B.1) Soit $\phi \in E$ vérifiant l'équation d'échelle (E_c). Montrer que la transformée de Fourier de ϕ vérifie

$$\widehat{\phi}(\xi) = P_c\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

En déduire que

$$\widehat{\phi}(\xi) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{j=1}^{n} P_c\left(\frac{\xi}{2^j}\right).$$

II.B.2) Un exemple : soit $m \geq 2$ et la famille c définie par $c_k = 2^{1-m} C_m^k$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$ et 0 ailleurs. Établir que

$$\forall n \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R} \backslash 2^{n+1}\pi\mathbb{Z}, \quad \prod_{j=1}^{n} P_c\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{2^n\left(1 - e^{-\frac{i\xi}{2^n}}\right)}\right)^m.$$

En déduire que si ϕ vérifie l'équation d'échelle (E_c) alors $\phi = N_m$.

II.C - Soit (E_c) une équation d'échelle écrite, pour simplifier,

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \phi(2x - k) \text{ avec } m \geq 2,$$

et telle que le polynôme trigonométrique associé P_c vérifie $P_c(\pi) = 0$,

On désigne par $D = \left\{\frac{k}{2^j} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\right\}$ l'ensemble, dense dans $\mathbb{R}$, des nombres dyadiques.

II.C.1) Vérifier que la connaissance de $\phi(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ permet d'obtenir $\phi(x)$ pour $x \in D$.

II.C.2) On se propose de rechercher des fonctions ϕ vérifiant (E_c) et s'annulant à l'extérieur de $[0, m[$. On note

$$V = \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(1) \\ \vdots \\ \phi(m-1) \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que V est solution de l'équation linéaire $V = MV$ où $M = (M_{i,j})_{0 \le i,j \le m-1} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est une matrice dont on précisera les coefficients.

b) En utilisant la valeur de $P_c(\pi)$, vérifier que la somme des termes de chacune des colonnes de M est constante.

c) En déduire que 1 est valeur propre de M.

d) Établir l'existence de fonctions $\phi \neq 0$, définies sur D, s'annulant sur $D \backslash [0, m[$ et solution de (E_c).

II.C.3) Soit (Ec) l'équation d'échelle de la question II.B.2.

a) Établir que $\forall k = 0, 1, \ldots, m-2, N_m^{(k)}(1) > 0$.

b) En déduire, en considérant les dérivations successives de (E_c) vérifiée par N_m que M a pour spectre :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{ \frac{1}{2^k} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, m-1 \right\}.$$

c) Donner la dimension de l'espace propre $E_M(1)$ relatif à 1 et retrouver ainsi que N_m est la seule solution continue de l'équation d'échelle (E_c), nulle à l'extérieur de $[0, m[$.

II.D - Dans cette partie, on admet que les propriétés vues dans les parties I et II pour l'ensemble E s'appliquent à l'espace vectoriel F des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact continues par morceaux et continues à droite. Soit (E_c) une équation d'échelle ayant la propriété (O).

On définit une suite de fonctions $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ par la récurrence :

$$\phi_0(0) = \chi_{[0,1[} \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}), (\forall j \in \mathbb{N}), \quad \phi_{j+1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_j(2x - k).$$

II.D.1) Qu'obtient-on pour $c_0 = c_1 = 1$ et les autres c_k nuls ?

On suppose désormais qu'il existe une fonction continue ϕ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|\phi - \phi_n\| = 0.$$

II.D.2) Montrer que ϕ vérifie l'équation d'échelle (E_c).

II.D.3) Montrer que ϕ_n est à support compact pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que ϕ est à support compact.

II.D.4) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad \langle \phi_n, \phi_n(. - p) \rangle = \delta_{0,p}.$$

En déduire que la famille $\{\phi(. - p) | p \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormale.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Pour tout entier naturel non nul n, on notera P_n le polynôme de Taylor d'ordre n de l'exponentielle au point 0 :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

On notera : $[\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,n}]$ un système de racines complexes de P_n. On remarquera qu'en posant

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n,k} = \dfrac{\lambda_{n,k}}{n}$,

le système $[z_{n,k}]_{1 \leq k \leq n}$ est un système de racines du polynôme

$$\Pi_n = P_n(nX). \qquad (1)$$

Le but de ce problème est d'établir les deux résultats suivants, auxquels on donnera un sens précis et dont la preuve fera l'objet des parties II et III du problème, qu'on peut conjecturer à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

Lorsque $n \to \infty$, les nombres complexes $\xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}$ tendent à "s'accumuler" sur le cercle de centre 0 et de rayon $1/e$.

Les nombres complexes $\xi_{n,k}$ tendent à se répartir "régulièrement" sur le cercle précédent. Dans la dernière partie on applique ce résultat à l'obtention d'un équivalent du nombre de racines de P_n dont la partie réelle est positive.

Enfin quelques rappels dont la preuve n'est pas demandée.

1- Une suite extraite (ou sous suite) d'une suite (z_n) de nombres complexes est une suite de la forme (z_{p_n}) où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers [*on pourra noter* p_n, $p(n)$ *si l'on préfère*].

2- De toute suite bornée de nombres réels ou complexes on peut extraire une suite convergente.

3- (Convergence dominée pour les séries) Soit $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, une suite double de nombres complexes. On suppose qu'existe une suite (v_k) de réels positifs telle que :
Pour tout couple (n, k), $|u_{n,k}| \leq v_k$.
Pour tout entier k, la suite n a $u_{n,k}$ admet une limite l_k.
La série de terme général v_k converge.

Filière MP

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la série

$\sum_{k \geq 0} u_{n,k}$ converge et la série $\sum_{k \geq 0} l_k$ converge

et l'on a : $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} l_k$

Les trois premières parties sont indépendantes entre elles sauf les questions II.E.3 et III.C.1.

Partie I - Étude d'une courbe plane

I.A - Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Déterminer, en fonction de ρ et de θ une forme trigonométrique du nombre complexe $\xi = ze^{-z}$.

I.B - Démontrer que la fonction u, définie sur $]0, 1]$ par :

$$u(t) = \frac{1 + \ln t}{t}$$

est un homéomorphisme croissant de $]0, 1]$ sur $]-\infty, 1]$ dont la fonction réciproque est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

I.C - En déduire l'existence d'une fonction θ a $r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel θ, $r(\theta) \in]0, 1]$ et :

$$r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} = \frac{1}{e}$$

I.D - Exprimer de manière simple $r(0)$, $r(\pi/2)$. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près, en justifiant l'algorithme utilisé, de la constante $r(\pi)$.

I.E - Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire ; démontrer qu'elle est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ et que, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \sin\theta}{r\cos\theta - 1}$$

I.F - Donner un équivalent simple en h de la fonction v définie par $h \mapsto v(h) = 1 - u(1-h)$ lorsque $h \to 0$ par valeurs supérieures (u est défini au I.B). Grâce à une expression de $1 - \cos\theta$ à l'aide de $u(r(\theta))$, en déduire que, lorsque $\theta \to 0$ par valeurs supérieures :

$$r(\theta) = 1 - \theta + o(\theta)$$

Prouver que $\theta \mapsto r(\theta)$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

I.G - Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct ; dessiner sommairement la courbe Γ dont une équation polaire est $\rho = r(\theta)$. Quelle est l'image de Γ par la transformation complexe $z \mapsto ze^{-z}$?

Partie II - Étude des modules des racines

n désigne toujours un entier naturel non nul.

II.A - Prouver que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, les $\lambda_{n,k}$ sont deux à deux distincts. Il en est donc de même des $z_{n,k}$.

II.B - Pour p entier naturel, on pose :

$$q_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \dfrac{n!}{n^p (n-p)!} = \displaystyle\prod_{j=0}^{p-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) & \text{si } 1 \le p \le n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

On considère le polynôme Q_n défini par :

$$Q_n(X) = \frac{n!}{n^n} X^n \Pi_n\left(\frac{1}{X}\right)$$

où Π_n a été défini par la formule (1). Montrer que

$$Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} q_{n,p}\, X^p = \sum_{p=0}^{\infty} q_{n,p}\, X^p$$

Exprimer les racines de Q_n à l'aide des $z_{n,k}$.

II.C -

II.C.1) Soit r un réel tel que $0 < r < 1$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| \le r$:

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| \le \sum_{p=0}^{\infty} (1 - q_{n,p}) r^p$$

Déterminer :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{|z| \le r} \left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right|$$

II.C.2) En déduire que, pour n assez grand, toute racine z de Q_n satisfait $|z| > r$ puis que pour tout $R > 1$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n > N$, on ait :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ |z_{n,k}| < R$$

II.D - On considère une suite (z_p) de nombres complexes qui converge vers un complexe z tel que $|z| \le 1$.

II.D.1) Déterminer la limite de la suite $(z_p e^{-z_p})$ si $Re(z) = 1$.

II.D.2) On suppose $Re(z) \ne 1$, déterminer la limite des suites de terme général :

$$\alpha_p = \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t} dt \text{ et } \beta_p = \left(\frac{p^p}{p!}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

puis la limite de la suite de terme général :

$$\left| \frac{p^p}{p!} \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t} dt \right|^{\frac{1}{p+1}}$$

II.E - Comportement asymptotique des $|\xi_{n,k}|$

II.E.1) Soit z une racine complexe du polynôme Π_p. Prouver la relation :

$${}^{-z} = (ze^{-z})^{p+1} \frac{p^p}{p!} \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{zt} dt \qquad (2)$$

(*on pourra utiliser une formule de Taylor*)

II.E.2) Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels et (z_{p_n}) une suite de complexes telle que, pour chaque entier n, z_{p_n} soit une racine de Π_{p_n}. On suppose de plus que cette suite converge vers un nombre complexe z. Montrer que $|z| \le 1$ et en déduire, à l'aide de la formule (2), que $|ze^{-z}| = \dfrac{1}{e}$.

II.E.3) Démontrer qu'en posant $\xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}$:

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le k \le n} \left| |\xi_{n,k}| - \frac{1}{e} \right| = 0$$

(*on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente*).

Partie III - Répartition des arguments

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, non nul :

$$s_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^{p}$$

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^{p} \text{ (toujours avec } \xi_{n,k} = z_{n,k} e^{-z_{n,k}}\text{)}$$

On note $\rho_{n,k}$ le module de $\xi_{n,k}$ et $\phi_{n,k} \in \mathbb{R}$ l'un quelconque de ses arguments, de sorte que :

$$\xi_{n,k} = \rho_{n,k} e^{i\phi_{n,k}}$$

Enfin on rappelle que le polynôme Q_n et les $q_{n,p}$ ont été définis à la question II.B.

III.A - Démontrer, que la fonction f_n de la variable réelle x :

$$x \mapsto -\frac{Q'_n(x)}{Q_n(x)}$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et que :

$$f_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} s_{n,p+1} x^p$$

III.B - Majoration des $S_{n,p}$

III.B.1) Établir, pour $n \geq 1$, et $p \geq 0$, la relation :

$$-(p+1)q_{n,p+1} = \sum_{i=0}^{p} q_{n,i}\, s_{n,p+1-i}$$

III.B.2) Calculer $s_{n,1}$. Prouver, par récurrence sur l'entier p, que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$:

$$|s_{n,p}| \leq 3^p$$

en déduire :

$$|S_{n,p}| \leq 3^p e^{3p}$$

III.C - Équirépartition des $\phi_{n,k}$

III.C.1) Soit $p \in \mathbb{Z}$ non nul. Prouver que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} = 0$$

III.C.2) En déduire que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi$$

Partie IV - Étude des racines de partie réelle positive

IV.A - Notons $r_{n,k}$ le module de $z_{n,k}$ et $\theta_{n,k}$ son argument tel que $-\pi \le \theta_{n,k} < \pi$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{1 \le k \le n} \left| r_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \right| \right)$$

(on pourra raisonner comme à la question II.E.3).

Comment interpréter ce résultat qualitativement ?

IV.B - Déduire de la question III.C.2 et de la précédente que, si f est une fonction 2π-périodique, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f[\theta_{n,k} - r(\theta_{n,k}) \sin\theta_{n,k}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi$$

IV.C - On note N_n le nombres de racines de P_n dont la partie réelle est positive. Démontrer que lorsque $n \to \infty$:

$$N_n \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e\pi} \right) n$$

••• FIN •••

Mathématiques I

Préliminaires et objectif du problème

On rappelle que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué par les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

On munit l'algèbre $C([-1, 1], \mathbb{C})$ des fonctions à valeurs complexes continues sur le segment $[-1, 1]$ de la norme $\| \|_\infty$ de la convergence uniforme, définie par

$$(\forall f \in C([-1, 1], \mathbb{C})), \quad \| f \|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \quad .$$

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est identifié à la fonction polynomiale qu'il induit sur $[-1, 1]$.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

- On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ elle est dominée par la suite $(n^{-k})_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire si

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ (\exists M_k \in \mathbb{R}_+) \ (\forall n \in \mathbb{N}^*), \ \lambda_n \le \frac{M_k}{n^k} .$$

On note $\mathcal{E}_\infty$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

  - $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
  - la suite $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

- On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle si, pour un certain réel $r \in \ ]0, 1[$, elle est dominée par la suite géométrique $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire si

$$(\exists r \in \ ]0, 1[\ ), (\exists M \in \mathbb{R}_+), (\forall n \in \mathbb{N}), \ \lambda_n \le M r^n$$

On note $\mathcal{E}_{\exp}$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1, 1], \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

  - $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
  - la suite $(\|f - Q_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

Filière MP

Remarque : Une suite à décroissance rapide (resp. exponentielle) converge vers 0 mais n'est pas forcément décroissante.

L'objectif du problème est de montrer, en utilisant les propriétés des polynômes de Tchebychev établies en Partie I, que les fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$ sont exactement les fonctions de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et de relier les fonctions f de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$ aux fonctions f dont la série de Taylor

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

en tout point $a \in [-1,1]$ converge vers $f(x)$ sur un voisinage de a.

a) Vérifier que si une suite est à décroissance exponentielle alors elle est à décroissance rapide.

b) Vérifier que les ensembles $\mathcal{E}_\infty$ et $\mathcal{E}_{\exp}$ sont des sous-espaces vectoriels de $C([-1, 1], \mathbb{C})$. Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre ces deux sous-espaces ?

c)

i) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ dont toutes les dérivées sont bornées sur $[-1, 1]$ par un même réel M. Montrer que $f \in \mathcal{E}_{\exp}$.

ii) Donner des exemples de fonctions de $\mathcal{E}_{\exp}$.

Partie I - Polynômes de Tchebychev

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose : $(\forall x \in [-1, 1])$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

I.A - Premières propriétés des T_n

I.A.1) Montrer que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers. Le polynôme associé est encore noté T_n et s'appelle le $n-$ième polynôme de Tchebychev.

I.A.2) Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

I.A.3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

I.A.4) En déduire la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n.

I.A.5) Écrire un algorithme pour calculer $T_n(X)$.

On pourra employer le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé ou un langage naturel non ambigu.

I.A.6) Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a : $T_n(\cos t) = \cos nt$.

I.B - Calcul de normes

I.B.1) Calculer $\|T_n\|_\infty$.

I.B.2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad (\forall u \in \mathbb{R}), |\sin nu| \leq n|\sin u|$.

I.B.3) En déduire que $\|T'_n\|_\infty = n^2$.

I.C - Encadrement de $T_n(x)$ sur $[1, +\infty[$

I.C.1) Montrer que

$$(\forall r \in \mathbb{R}^*),\ T_n\left(\frac{r + r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

I.C.2) Soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.

b) En déduire que $1 \leq T_n(x) \leq \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$.

I.D - Équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n

I.D.1) En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

I.D.2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Déduire de la question I.D.1 que

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\,\frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

Partie II - Application des polynômes de Tchebychev à la majoration des polynômes et de leurs dérivées

On introduit la subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ du segment $[-1, 1]$ définie par :

$$\forall j \in [0, n],\ a_j = \cos\left[\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi\right].$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [0, n]$ on appelle $E_i = [0, n] \setminus \{i\}$ l'ensemble des entiers naturels autres que i qui sont inférieurs ou égaux à n.

Enfin, pour tout $i \in [0, n]$ on note

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \in E_i} (X - a_j)}{\prod_{j \in E_i} (a_i - a_j)}$$

le i-ème polynôme élémentaire de Lagrange associé à la subdivision σ.

II.A - Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

II.A.1) Résoudre sur $[-1, 1]$ l'équation $|T_n(x)| = 1$ et calculer $T'_n(a_j)$ pour $j = n$, pour $j = 0$ puis pour $j \in [1, n-1]$.

II.A.2) Montrer que

$$T_n(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i(X) .$$

II.A.3) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| .$$

II.A.4) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que

$$(\forall x \in [1, +\infty[)\ ,\ |P(x)| \le \|P\|_\infty \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n .$$

II.B - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[1, +\infty[$

II.B.1) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n])\ ,\ T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left|L_i^{(k)}(x)\right| .$$

II.B.2) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$(\forall k \in [1, n])\ ,\ (\forall x \in [1, +\infty[)\ ,\ \left|P^{(k)}(x)\right| \le \|P\|_\infty T_n^{(k)}(x) .$$

II.C - Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[-1, 1]$

Soit $P \in \mathbb{C}_n(X)$. On considère un entier $k \in [1, n]$.

II.C.1) On pose

$$(\forall \lambda \in [-1, 1])\ ,\ P_\lambda(X) = P\left(\frac{\lambda + \varepsilon}{2} X + \frac{\lambda - \varepsilon}{2}\right) \text{ avec}$$

$\varepsilon = 1$ si $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1, 0[$.

Montrer que :

$$\left|P_\lambda^{(k)}(1)\right| = \left(\frac{|\lambda| + 1}{2}\right)^k \left|P^{(k)}(\lambda)\right| .$$

II.C.2) En déduire que $\left\|P^{(k)}\right\|_\infty \le 2^k T_n^{(k)}(1) \|P\|_\infty$.

II.C.3) Montrer que :

$$\left\|P^{(k)}\right\|_\infty \le 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|P\|_\infty$$

et que, si $k = 1$, on a la majoration plus fine $\|P'\|_\infty \le 2n^2 \|P\|_\infty$.

Partie III - Détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On note $C_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On munit $C_{2\pi}$ de deux normes, la norme quadratique N_2 définie pour $\varphi \in C_{2\pi}$, par

$$N_2(\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$ induite par le produit scalaire hermitien :

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi(t)}\psi(t)dt$$

et la norme N_∞ de la convergence uniforme définie par

$$N_\infty(\varphi) = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |\varphi(t)| .$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ on pose $e_k : t \mapsto e^{ikt}$. On rappelle que la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien $(C_{2\pi}, N_2)$ et que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le $k-$ième coefficient de Fourier d'une fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est le complexe

$$c_k(\varphi) = (e_k|\ \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-ikt}dt .$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note τ_n le sous-espace vectoriel de $C_{2\pi}$ engendré par les fonctions e_k où $k \in [-n, n]$:

$$\tau_n = \text{vect}(e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n) \ ;\ \dim(\tau_n) = 2n + 1 .$$

Soit $\varphi \in C_{2\pi}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\varphi)e_k$$ le $n-$ième polynôme trigonométrique de Fourier de φ.

III.A - Propriétés liées aux normes N_2 et N_∞

III.A.1) On suppose que la série

$$\sum_{n \geq 1}(|c_n(\varphi)| + |c_{-n}(\varphi)|)$$ converge.

Montrer que la suite $(S_n(\varphi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

III.A.2) Soit $\varphi \in C_{2\pi}$ muni de la norme quadratique N_2. On rappelle que $S_n(\varphi)$ est la projection orthogonale de φ sur τ_n. En déduire que :

$$(\forall \omega \in \tau_n \setminus \{S_n(\varphi)\})\ ,\ N_2(\varphi - \omega) > N_2(\varphi - S_n(\varphi)) .$$

III.A.3) On suppose que la fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, avec $p \geq 1$. Montrer que :

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^*)\ ,\ |c_k(\varphi)| \leq \frac{N_\infty(\varphi^{(p)})}{|k|^p} .$$

III.B - Étude d'une application linéaire

On rappelle que $C([-1,1],\mathbb{C})$ est muni de la norme $\|\ \|_\infty$. On note L l'application linéaire qui à toute fonction f de $C([-1,1],\mathbb{C})$, associe la fonction Lf de $C_{2\pi}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}\quad Lf(t) = f(\cos t)$.

Montrer que L est injective et calculer la norme subordonnée $|||L|||_\infty$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_∞ puis la norme subordonnée $|||L|||_2$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_2.

III.C - Propriétés liées aux coefficients de Fourier d'une fonction *Lf*

Dans cette section on considère une fonction f fixée dans $C([-1,1],\mathbb{C})$.

III.C.1) Vérifier que $c_{-k}(Lf) = c_k(Lf)$.

III.C.2) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$(\forall k \geq 2),\ |c_k(Lf)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f - Q_{k-1}\|_\infty .$$

III.C.3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$(\forall x \in [-1,1]),\ U_n(f)(x) = S_n(Lf)(\arccos x).$$

Montrer que :

$$U_n(f) = c_0(Lf) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)T_k .$$

III.C.4) On suppose que la série $\sum_{k\geq 1}|c_k(Lf)|$ converge. Montrer que :

$$\|f - U_n(f)\|_\infty \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty}|c_k(Lf)| .$$

III.D - Développement en série de Tchebychev d'une fonction f de $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$.

III.D.1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.D.2) Montrer que :

$$(\forall x \in [-1,1]),\ f(x) = c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n(x)$$

et que la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$.

III.D.3) En déduire que f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1, 1]),\ f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)$$

III.E - Achèvement de la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_\infty$

On suppose dans cette question que f est une fonction de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.

III.E.1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

III.E.2) En déduire que $f \in \mathcal{E}_\infty$.

Partie IV - Étude de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$

IV.A - Caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$

IV.A.1) Soit f une fonction de $C([-1, 1], \mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$.

b) La suite $(|c_n(Lf)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

IV.B - Développement en série de Tchebychev d'une fonction f de $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$. Il existe donc un réel $r \in]0, 1[$ tel que :

$$(\exists M \in \mathbb{R}_+),\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ |c_n(Lf)| \le Mr^n .$$

IV.B.1) Justifier le fait que :

$$(\forall x \in [-1, 1]),\ f(x) = c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n(x),$$

que la série de fonctions converge normalement sur $[-1, 1]$, que f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et que :

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1, 1]),\ f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x).$$

IV.B.2) En déduire que

$$(\forall k \in \mathbb{N}),\ \|f^{(k)}\|_\infty \le \frac{2M}{1-r} \cdot \frac{k!}{[\lambda(r)]^k},\ \text{avec } \lambda(r) = \frac{(1-r)^2}{4r}.$$

IV.C - Développement en série de Taylor au voisinage de tout point $a \in [-1, 1]$ d'une fonction f de $\mathcal{E}_{\mathrm{exp}}$

On conserve les mêmes hypothèses qu'à la question précédente pour f. Soit un point $a \in [-1, 1]$.

Montrer que la série de Taylor :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

de f au point a converge vers $f(x)$ sur le voisinage $[-1, 1] \cap]a - \lambda(r), a + \lambda(r)[$ du point a.

IV.D - Inclusion stricte entre $\mathcal{E}_{\exp}$ et $\mathcal{E}_\infty$

Montrer que la fonction f définie par

$$(\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}),\ f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ et } f(0) = 0$$

appartient à $\mathcal{E}_\infty$ mais n'appartient pas à $\mathcal{E}_{\exp}$.

IV.E - Réciproque partielle concernant la détermination de l'ensemble $\mathcal{E}_{\exp}$

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes développable en série entière sur un intervalle ouvert $]-\rho, \rho[$, avec $\rho > 1$. Montrer que la restriction de f au segment $[-1, 1]$ appartient à $\mathcal{E}_{\exp}$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème I désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où f est une application continue définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

On verra que l'espace des solutions contient une solution f_1 ayant un comportement particulier en $+\infty$.

Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général. Les Parties IV à VI envisagent diverses propriétés de la fonction f et sont largement indépendantes.

Les symboles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les corps des nombres réels et des nombres complexes.

Partie I - Étude d'un premier exemple

I.A - Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \qquad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

I.B - On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos x = 0 \,, \; x \in \mathbb{R}$$

Déterminer une fonction Y_0 bornée et une fonction g telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x) \text{, où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin x = 0$.

I.C - Soit Π le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Filière MP

où α et β sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit f_1 par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$$

I.C.1) Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de Φ étant considérée comme évidente, donner la matrice de Φ dans la base de Π constituée des fonctions *cosinus* et *sinus*.

I.C.2) On munit Π de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Déterminer une constante $k > 0$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait

$$\|f_1\|_\infty \le k \|f\|_\infty$$

Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur Π et déterminer la valeur de cette limite.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0 .$$

II.A - Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0+\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.

II.B - Pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m(x_m) = y_m$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative.

II.B.1) Déterminer l'ensemble $\mathscr{H}$ des points m tels que $Y'_m(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathscr{I}$ des m tels que $Y''_m(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$.

II.B.2) Quelle est la place de la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{I}$?
(on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$).

II.B.3) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathscr{H}$, $\mathscr{I}$, $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\lambda_1}$, $\mathscr{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

Partie III - La transformation Φ

On suppose maintenant que I est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, a pouvant être égal à $-\infty$.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f \;\middle|\; \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions f négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (α dépendant de f).

III.A - Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$

Étant donné $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$E_f : y' - y + f(x) = 0$

III.B - Montrer que E_f admet une unique solution $f_1 \in \mathcal{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt .$$

On définit l'application Φ: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $\Phi(f) = f_1$; elle est évidemment linéaire.

III.C - Soit Φ^n la composée n fois de Φ avec elle-même. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de I,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément vers une constante sur tout compact de I,

(iii) la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout compact de I.

III.D - Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u} du$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties).

III.E - L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

Partie IV - Fonctions bornées

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. $\mathcal{B}$ étant un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (défini au III), l'application Φ est définie sur $\mathcal{B}$.

IV.A - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution bornée f_1.

IV.B - On munit $\mathcal{B}$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$$

L'application Φ est-elle continue pour cette norme ?

IV.C - Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_0$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en $+\infty$, $\mathcal{K}$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$.

Montrer que ces sous-espaces sont stables par Φ.

IV.D - Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout $f \in \mathcal{L}$, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que f a une limite en $+\infty$).

IV.E - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une injection de $\mathcal{B}$ dans le sous-espace des fonctions bornées de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle dans l'image de Φ ? Préciser l'image de Φ.

Partie V - Fonctions périodiques

Soit $\mathscr{P}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.

V.A - Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution périodique f_1.
Cette fonction f_1 est-elle somme de sa série de Fourier ?

V.B - Quel lien a-t-on entre les coefficients de Fourier complexes $c_k(f)$ et $c_k(f_1)$?

V.C - Soit $\mathscr{P}_0$ le sous-espace des $f \in \mathscr{P}$ dont la valeur moyenne

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

est nulle et $\mathscr{K}$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{P}$.
Montrer que pour tout $f \in \mathscr{P}$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une constante que l'on précisera.

V.D - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une bijection de $\mathscr{P}$ sur le sous-espace $\mathscr{P}_1$ des fonctions 2π-périodiques de classe C^1.

V.E - On considère sur $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_1$ les normes N_1 et N_2 suivantes :

$$N_1(f) = \int_0^{2\pi}|f(t)|dt\,,\; N_2(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt}$$

Les applications Φ et Φ^{-1} sont-elles continues pour la norme N_1 ? Même question pour la norme N_2.

Partie VI - Fonctions polynomiales

Soit d un entier naturel et $\mathscr{FP}_d$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

VI.A - Soit une famille $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ de $d+1$ nombres réels distincts. Pour tout $f \in \mathscr{FP}_d$, on pose

$$N_\xi(f) = \sup_{0 \le i \le d} |f(\xi_i)|$$

Montrer que c'est une norme sur $\mathscr{FP}_d$.

VI.B - Soit une suite de fonctions polynomiales de $\mathscr{F}\mathscr{P}_d$

$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \ldots + a_{0,n}$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

(iii) il existe $d+1$ nombres réels distincts $\xi_0, \ldots, \xi_d$ tels que, pour tout indice $0 \le i \le d$, la suite $(f_n(\xi_i))$ converge.

(iv) chacune des $d+1$ suites numériques $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $0 \le i \le d$,converge.

VI.C - Pour tout $f \in \mathscr{F}\mathscr{P}_d$, montrer que l'équation différentielle E_f a une unique solution $f_1 = \Phi(f)$ dans $\mathscr{F}\mathscr{P}_d$.

On note encore $\Phi : f \mapsto f_1$; Φ est considéré ici comme un endomorphisme de $\mathscr{F}\mathscr{P}_d$.

VI.D - Pour f fonction polynomiale de degré d, on forme la suite de fonctions polynomiales (f_n) où $f_n = \Phi^n(f)$. Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Avertissement

Les trois parties sont indépendantes. Le résultat final de la Partie I fournit une valeur particulière de la fonction F étudiée dans les parties II et III.

Partie I - Calcul de la somme d'une série

I.A -

I.A.1) Calculer, sous forme trigonométrique réelle, les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulle en 0 et π, et égale à 1 sur $]0,\pi[$. Pour tout entier $n \geq 0$, expliciter la somme partielle de Fourier $S_n f$ de f.

I.A.2) Que peut-on dire de la suite de fonctions $(S_n f)$? En déduire la valeur de

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

I.A.3) Calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

I.B -

I.B.1) Préciser le domaine d'existence dans $\mathbb{R}$ de

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

Exprimer $L(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

I.B.2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx.$$

I.B.3) En déduire la valeur de

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}.$$

Filière MP

I.B.4) Exprimer

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$$

en fonction de S_1 et S_2. En déduire la valeur de S_3.

* * *

Dans toute la suite, on utilise les notations qui suivent :

- Pour tout réel $t > 0$, $\ln t$ désigne le logarithme népérien de t.
- Si t est un réel strictement positif et si $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est un complexe, on note $t^z = \exp(z \ln t)$.
- On définit la fonction $p :]0,1[\to \mathbb{R}$ par
$$p(t) = \frac{\ln t \cdot \ln(1-t)}{t}.$$

Pour tout z complexe tel que la fonction $t \mapsto t^{-z}p(t)$ est intégrable sur $]0, 1[$, on pose

$$F(z) = \int_0^1 t^{-z} p(t)dt.$$

On définit ainsi une fonction F de la variable complexe z ; on notera encore, par extension, F la fonction de deux variables réelles associée.
Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = F(x + iy)$.

Le but du problème est d'étudier la fonction F.

Partie II - Étude locale de F

II.A - Montrer que le domaine de définition de F est $\Omega = \{z/z \in \mathbb{C}, Re(z) < 1\}$. On pose $I = \Omega \cap \mathbb{R} =]-\infty, 1[$.

II.B - Déterminer la limite de $F(z)$ quand la partie réelle de z tend vers $-\infty$.

II.C -

II.C.1) Déterminer la limite de $F(x)$ quand le réel $x \in I$ tend vers 1.

II.C.2) Pour tout $x \in I$, on pose

$$G(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| dt \text{ . Calculer } G(x).$$

II.C.3) Prouver que la limite de $F(x) - G(x)$, quand $x \in I$ tend vers 1, existe et est finie.

II.C.4) En déduire la limite de $\dfrac{F(x)}{G(x)}$ quand $x \in I$ tend vers 1.

II.D - Montrer que la restriction de F à I est C^{∞}. Pour tout $x \in I$, donner l'expression de la dérivée k–ième $F^{(k)}(x)$ sous forme intégrale.

II.E -

II.E.1) Établir que F est de classe C^{∞} sur Ω. Si k et l sont deux entiers ≥ 0 et si $z \in \Omega$, exprimer la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{k+l} F}{\partial x^k \partial y^l}(z) \text{ sous la forme d'une intégrale.}$$

II.E.2) Comparer $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

II.E.3) Évaluer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

II.F -

II.F.1) Soient $z \in \Omega$ et (z_n) une suite de points de Ω, distincts de z, qui converge vers z. Prouver l'existence de

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z}.$$

On pourra utiliser la continuité de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et de $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, ainsi que le résultat de II.E.2.

On observera que cette limite ne dépend que de z, et non de la suite (z_n).

Par la suite, on note $DF(z)$ cette limite.

On définit ainsi une application $DF : \Omega \to \mathbb{C}$.

II.F.2) Pour tout entier $k \geq 2$, démontrer l'existence de l'application $D^k F = D(D^{k-1} F) : \Omega \to \mathbb{C}$. On convient que $D^1 F = DF$.

II.G -

II.G.1) Pour tout réel $t > 0$, développer en série entière de u la fonction $u \in \mathbb{C} \to t^{-u}$. Préciser le rayon de convergence.

II.G.2) Établir qu'au voisinage de 0,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ où } c_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 (-\ln t)^k p(t) dt . \tag{1}$$

II.G.3) Quel est le rayon de convergence R de la série entière (1) ?

II.H -

II.H.1) Déterminer un équivalent de c_k quand $k \to \infty$.

II.H.2) Quelle est la nature de la série (1) quand $|z| = R$?

Partie III - Développements en série

III.A -

III.A.1) Développer en série entière de $t \in \mathbb{R}$ la fonction

$t \to \dfrac{\ln(1-t)}{t}$. Préciser le rayon de convergence.

III.A.2) Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $z \in \Omega$, calculer

$$u_n(z) = \int_0^1 t^{n-z} \ln t \, dt .$$

III.A.3) Démontrer que $F(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-z)^2}$.

III.B -

III.B.1) Pour tout $x \in I$, exprimer

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u) du$$

sous forme d'une série ne faisant plus intervenir d'intégrale. Préciser $\phi(0)$.

III.B.2) Déterminer un équivalent de $\phi(x)$ quand $x \in I$ tend vers 1.

III.C -

III.C.1) Si $y \in \mathbb{R}$, on pose $H(y) = F(iy)$. Les fonctions $|H|$ et $|H|^2$ sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}$? Préciser la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(y) dy .$$

III.C.2) Pour quelles valeurs des réels α et β, la somme

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{m, n \geq 1} (mn)^{-\alpha}(m+n)^{-\beta} \text{ est-elle finie ?}$$

III.C.3) Si

$$K_{m, n} = \int_{-\infty}^{\infty} (y + im)^{-2}(y - in)^{-2} dy ,$$

où m et n sont des entiers ≥ 1, calculer $K_{m, n}$. En déduire la valeur de

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(y)|^2 dy \text{ sous la forme } S(\alpha, \beta) .$$

III.D -

III.D.1) Démontrer que la série de fonctions obtenue en III.A.3 converge sur un domaine $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}$ que l'on précisera. On note encore F le prolongement de F à $\tilde{\Omega}$. Prouver que F est de classe C^{∞} sur $\tilde{\Omega}$.

III.D.2) Soient p un réel, n_0 un entier > 0, z et z' deux complexes dont les parties réelles sont majorées par n_0. Pour tout entier $n > n_0$, majorer $\left|(z'-n)^{-p} - (z-n)^{-p}\right|$ en fonction de n, n_0, p et $|z' - z|$.

III.D.3) Avec les notations de II.F.1 et II.F.2, pour tout entier $k \geq 1$ et tout $z \in \tilde{\Omega}$, établir l'existence de $D^k F(z)$ qu'on exprimera sous forme de somme d'une série.

III.E -

III.E.1) Pour tout entier $k \geq 0$, évaluer c_k, défini en II.G.2, sous forme de somme d'une série numérique.

III.E.2) Retrouver, à l'aide du III.E.1, le résultat obtenu en II.H.1.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

On étudie certaines classes de fonctions appartenant à l'ensemble $\mathscr{B}$ des fonctions bornées et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est muni de la norme uniforme définie par

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$$

Pour tout ω appartenant à $\mathbb{R}$, on note e_ω la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule : $e_\omega(t) = e^{i\omega t}$.

On note U la fonction définie par $U(t) = 1$ si $t > 0$, $= 0$ sinon. Tous les sous-espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On notera x^* la conjuguée complexe de x, c'est-à-dire la fonction : $t \mapsto \overline{x(t)}$.

Partie I -

Soit x une fonction appartenant à $\mathscr{B}$. On appelle moyenne de x, s'il existe, le nombre

$$M(x) = \lim_{T \to \infty} M_T(x) \text{ avec } M_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad (1)$$

On dira alors que la fonction x est *moyennable*.

I.A -

I.A.1) Montrer que M_T est une forme linéaire sur $\mathscr{B}$, que l'ensemble des fonctions moyennables $\mathscr{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$, et que M est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_1$. On notera de façon équivalente Mx ou $M(x)$ cette moyenne.

I.A.2) Vérifier que M_T et M sont lipchitziennes pour $\|.\|_\infty$.

I.B - Montrer que la moyenne est invariante par translation : si $\tau \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathscr{M}_1$ on pose $x_\tau(t) = x(t-\tau)$, alors x_τ est moyennable et $Mx = Mx_\tau$.

I.C -

I.C.1) Soit x une fonction de $\mathscr{B}$ de période P ($P > 0$). Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+P} x(t)dt = \int_0^P x(t)dt$. En déduire que x est moyennable, et que $M(x)$ est égale à la moyenne sur n'importe quel intervalle de longueur P.

Filière MP

I.C.2) En particulier montrer que $M(e_\omega) = 0$ pour ω réel non nul, et $M(e_0) = 1$.

I.C.3) Montrer que si $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = c$, alors x est moyennable et $M(x) = c$.

I.C.4) Soit x_0 la fonction définie par $x_0(t) = U(t)e^{i\ln(t+1)}$. Vérifier que $x_0 \in \mathscr{B}$, calculer $M_T(x_0)$. Examiner le comportement de $M_T(x_0)$ lorsque $T \to \infty$, et en déduire que x_0 n'est pas moyennable.

I.D - La fonction x est dite *de carré moyennable* si $T \mapsto M_T|x|^2$ admet une limite lorsque T tend vers $+\infty$. Cette limite est appelée moyenne quadratique de x :

$$M|x|^2 = \lim_{T \to \infty} M_T(|x|^2) \tag{2}$$

On notera $\mathscr{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{B}$ de carré moyennable.

I.D.1) Montrer que toute fonction qui tend vers 0 à l'infini est aussi de moyenne quadratique nulle.

I.D.2) Pour $x, y \in \mathscr{M}_2$, donner une majoration de $\left|M_T(|x|^2) - M_T(|y|^2)\right|$ et $\left|M|x|^2 - M|y|^2\right|$ en fonction de $\|x\|_\infty$, $\|y\|_\infty$, $\|x-y\|_\infty$.

I.D.3) Montrer, à l'aide de x_0 et U, que $\mathscr{M}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

I.E - On dira que deux fonctions, x, y de $\mathscr{M}_2$ sont *comparables* si existe

$$<x, y> = M(xy^*) = \lim_{T \to \infty} M_T(xy^*) \tag{3}$$

I.E.1) Si E est un espace vectoriel inclus dans $\mathscr{M}_2$, montrer que deux fonctions $x, y \in E$ sont comparables (développer $|x+y|^2$ et $|x+iy|^2$). Il en résulte que sur E, $(x, y) \mapsto <x, y>$ est un « pseudo-produit scalaire » (il est linéaire à gauche, semi-linéaire à droite, positif, mais pas strictement). On a en particulier

$$M|x+y|^2 = M|x|^2 + M|y|^2 + 2Re <x, y> \tag{4}$$

I.E.2) On dira que deux fonctions $x, y \in \mathscr{M}_2$, sont *orthogonales* si $<x, y> = 0$. Que vaut alors $M|x+y|^2$?

I.E.3) Écrire l'inégalité de Schwarz (on ne demande pas de la démontrer).

I.F - Soit P un réel strictement positif. Montrer que l'ensemble des fonctions P-périodiques de $\mathscr{B}$ est un espace vectoriel de fonctions de carré moyennable et comparables.

I.G - Soit

$$\mathscr{P} = \{x : x(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\omega_k t} \quad N \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, \omega_k \in \mathbb{R} \text{ distincts} \}$$

l'ensemble des polynômes trigonométriques (élargi par rapport à celui utilisé dans les séries de Fourier : ici les fréquences sont quelconques).

Montrer que $\mathscr{P}$ est stable par produit de fonctions, et que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{P}$.

En particulier, pour $x = \sum_{k=1}^{N} c_k e_{\omega_k}$, établir que $M|x|^2 = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2$.

I.H - Soit une suite $x_n \in \mathscr{M}_1$ qui converge uniformément vers $x \in \mathscr{B}$.

I.H.1) Montrer l'existence de $m = \lim_{n \to \infty} M(x_n)$ (utiliser I.A.2).

I.H.2) En déduire que $x \in \mathscr{M}_1$ et $M(x) = m$ (pour $\epsilon > 0$, on choisira n tel que $\|x - x_n\|_\infty < \epsilon$ et $|m - M(x_n)| < \epsilon$).

I.I - Soit une suite $x_n \in \mathscr{M}_2$ qui converge uniformément vers $x \in \mathscr{B}$.

I.I.1) Montrer que $K = \sup \{\|x_n\|_\infty, \|x\|_\infty (n \in \mathbb{N})\} < +\infty$.

I.I.2) Montrer que $\lim_{n \to \infty} M|x_n|^2 = m_2$ existe.

I.I.3) En suivant la méthode du I.H.2), en déduire que $x \in \mathscr{M}_2$ et $M|x|^2 = m_2$.

Partie II -

On appelle $\mathscr{Q}$ l'ensemble des limites uniformes sur $\mathbb{R}$ de suites de fonctions appartenant à $\mathscr{P}$.

II.A - Montrer les propriétés suivantes :

II.A.1) $\mathscr{Q}$ est un espace vectoriel inclus dans $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$, et fermé pour $\|.\|_\infty$.

II.A.2) Toutes les fonctions de $\mathscr{Q}$ sont comparables, et continues.

II.A.3) Si $x \in \mathscr{Q}$, alors $\forall \tau \in \mathbb{R} \qquad x_\tau \in \mathscr{Q}$.

II.A.4) Si $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty$ et $\omega_k \in \mathbb{R}$, la série de fonctions

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_{\omega_k} \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathcal{Q}.$$

II.A.5) $\mathcal{Q}$ est stable par produit des fonctions.

II.A.6) Soit $x, x \in \mathcal{Q}$, à valeurs réelles, et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que $y \circ x \in \mathcal{Q}$ (le montrer d'abord lorsque y est une fonction polynomiale à coefficients complexes).

II.B - Les *coefficients de Fourier-Bohr* de $x \in \mathcal{Q}$ sont définis, pour une fréquence $\omega \in \mathbb{R}$, par $c(\omega) = \langle x, e_\omega \rangle$.

Si P_n est une suite de $\mathcal{P}$ convergeant uniformément vers x, la réunion Ω des fréquences présentes dans chacun des P_n est un ensemble fini ou dénombrable que l'on énumère donc selon le cas $\Omega = \{\omega_k,\ 0 \le k \le m\}$ ou $\Omega = \{\omega_k, k \in \mathbb{N}\}$ .On pose

$$P_n = \sum_k c_{n,k}\, e_{\omega_k} \text{ et } d(n) = \max\{k : c_{n,k} \neq 0\}, \text{ « degré » de } P_n.$$

Montrer que pour tout réel $\omega, c(\omega)$ existe et vaut $c(\omega) = \lim_{n \to \infty} \langle P_n, e_\omega \rangle$. En déduire que :

$$\text{si } \omega \notin \Omega \text{ alors } c(\omega) = 0, \text{ et pour tout } k,\ c(\omega_k) = c_k = \lim_{n \to \infty} c_{n,k}.$$

II.C - Si Ω est fini, montrer que

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k e^{i\omega_k t}. \text{ En déduire la formule de Parseval : } M|x|^2 = \sum_{k=0}^{m} |c_k|^2.$$

II.D - On se propose d'établir la formule de Parseval dans le cas où Ω est infini. On construit la suite n_j définie par $n_0 = 0$, $n_k = \min(n : d(n) > d(n_{k-1}))$. Soit $q_k(t) = P_{n_k}(t)$, on a donc $d_k = d(n_k)$ suite strictement croissante vers $+\infty$ (le fait que la suite n_j existe est admis).

II.D.1) On pose

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} c_k e_{\omega_k}. \text{ Calculer } M|x - S_N|^2 \text{ et en déduire que } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \le M|x|^2.$$

II.D.2) Pour tout $k \geq 0$, montrer que $x - S_{d_k}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel E_k engendré par les e_{ω_j} où $0 \leq j \leq d_k$. En déduire que

$$M|x - q_k|^2 \geq M|x - S_{d_k}|^2 = M|x|^2 - \sum_{j=0}^{d_k} |c_j|^2$$

II.D.3) Déduire alors de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de P_n vers x que

$$\lim_{k \to \infty} M|x - q_k|^2 = 0$$

En conclure que

$$\lim_{n \to \infty} M|x - S_n|^2 = 0 \,,\; M|x|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \qquad (5)$$

Partie III -

Pour une fonction $x \in \mathscr{B}$, la *fonction de corrélation* de x est définie (si cela existe) par

$$\tau \in \mathbb{R} \quad \gamma_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \lim_{T \to \infty} M_T(x x^*_\tau) \qquad (6)$$

où $*$ est la conjugaison complexe.

On appellera *fonction stationnaire* une fonction x pour laquelle $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $\gamma_x(\tau)$ existe.

III.A - Montrer qu'une fonction stationnaire appartient à $\mathscr{M}_2$.

III.B - Montrer que $|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)$, et que $\gamma_x(-\tau) = \gamma_x(\tau)^*$.

III.C - Si x est stationnaire, montrer qu'il en est de même de $y = e_\omega x$ et que, pour tout τ appartenant à $\mathbb{R}$, on a $\gamma_y(\tau) = \gamma_x(\tau) e^{i\omega\tau}$.

III.D -

III.D.1) Si x appartient à $\mathscr{Q}$, montrer que x est stationnaire. On note $\{\omega_k, c_k\}$ ses fréquences et coefficients de Fourier-Bohr, et S_n le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k e_{\omega_k}$$

III.D.2) Pour tout $\tau, \tau \in \mathbb{R}$, calculer $\gamma_{S_n}(\tau)$.

III.D.3) Montrer que γ_x est la somme de la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e_{\omega_k}$$

normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que γ_x appartient à $\mathscr{Q}$ (on majorera $|\gamma_x(\tau) - \gamma_{S_n}(\tau)|$ en fonction de $M|x - S_n|^2$).

III.E - Soit x une fonction $1-$périodique de $\mathscr{B}$.

III.E.1) Montrer qu'elle est stationnaire, et que γ_x est aussi $1-$périodique.

III.E.2) On note

$$a_k = \int_0^1 x(t)e^{-2i\pi kt}dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

les coefficients de Fourier complexes de x. Montrer que les coefficients de Fourier de γ_x sont $c_k = |a_k|^2$.

III.F - Soit $E(t)$ la partie entière de t et $F(t) = t - E(t)$ sa partie fractionnaire. La fonction x_1 définie par $x_1(t) = e^{-2i\pi aF(t)}$ où a est un réel irrationnel, est une fonction $1-$périodique de $\mathscr{B}$, de coefficients de Fourier complexes a_k.

III.F.1) Calculer les a_k. Que vaut

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \ ?$$

III.F.2) Calculer $\gamma_{x_1}(\tau)$ pour $\tau \in [0, 1[$ et vérifier que γ_{x_1} est continue sur $\mathbb{R}$.

III.F.3) En déduire que $\gamma_{x_1} \in \mathscr{Q}$. Calculer

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2(a+k)^2}.$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations et objectifs du problème

- On rappelle qu'une ellipse d'un plan affine euclidien, de demi-axes a et b $(a > b > 0)$, notée $(E_{a,b})$ admet, dans un certain repère orthonormé, une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = a\ \cos t \\ y = b\ \sin t \end{cases} \tag{1}$$

(t décrit un segment de longueur 2π).

- $\mathscr{C}_{2\pi}$ désigne le $\boldsymbol{C}$- espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π- périodiques, à valeurs complexes. On munit cet espace du produit scalaire défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt\,.$$

- Pour $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ on rappelle les expressions des coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques de f, utiles dans le problème :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-kit}dt\,,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\,.$$

- **Dans tout le problème** r désignera un nombre réel **appartenant à l'intervalle ouvert** $]0,1[$ et f_r l'élément de $\mathscr{C}_{2\pi}$ défini par : $t \mapsto \left|1 - re^{it}\right|$

On désignera aussi par $\mathscr{S}_r$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$$

et $\mathscr{B}_r$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}_r$ constitué des suites (a_n) telles que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ soit au moins égal à 1.

- Dans tout le problème $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sera la suite réelle définie par :

$$\alpha_n = \frac{-\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(Les candidats qui le préfèrent pourront aussi noter C_{2n}^n le coefficient binomial).

- La partie entière du réel x est notée $[x]$.

Filière MP

- L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation $\sqrt{z}$ ne sera prise en considération que lorsque z est un nombre réel positif.
- L'objectif du problème est l'étude de quelques problèmes asymptotiques relatifs à la longueur, notée $L(a, b)$, de l'ellipse $(E_{a,b})$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Préciser sur un dessin la signification géométrique du paramètre t intervenant dans le paramétrage (1).

I.B - Prouver rapidement que $\mathcal{S}_r$ et $\mathcal{B}_r$ sont des $\boldsymbol{R}$- espaces vectoriels et préciser la dimension de $\mathcal{S}_r$.

I.C - Donner **sans démonstration** l'énoncé précis du théorème de Parseval relatif à un élément $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ (les coefficients de Fourier intervenant dans la formule seront les coefficients exponentiels).

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$, prouver, en justifiant d'abord la convergence absolue de la série, la formule :

$$(f|g) = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)).$$

I.D - Soit n un entier naturel. Exprimer $a_n(f_r)$ à l'aide de $c_n(f_r)$.

I.E - Soient a et b deux réels vérifiant $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Exprimer, en fonction de a, b et de constantes, le réel $\dfrac{L(a,b)}{a_0(f_r)}$.

Partie II - .Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))$

II.A - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\alpha_n z^n$. On notera $f(z)$ sa somme dans le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon R.

II.B - Soit x un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]-R, R[$. Donner une relation entre $(1-x)f'(x)$ et $f(x)$. En déduire une expression simple de la restriction de f à l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

II.C - On choisit maintenant un complexe z tel que $|z| < R$. Déterminer une expression très simple de $f(z)^2$.

II.D - Prouver, pour $r \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, la relation : $\left|f(re^{it})\right|^2 = f_r(t)$.

II.E - Soit n un entier naturel. En utilisant la question I.C et la précédente, prouver l'égalité :

$$\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} \frac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} r^{2[x]} dx .$$

En déduire la limite de cette suite quand l'entier n tend vers l'infini.

II.F - Prouver que, quand $n \to \infty$:

$$a_n(f_r) \sim \frac{\sqrt{1-r^2}\, r^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} .$$

En quoi ce résultat corrobore-t-il votre cours sur les séries de Fourier ?

Partie III - Approximation de $L(a, b)$

III.A - Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_r. En déduire que la suite $(a_n(f_r))$ appartient à $\mathscr{B}_r$.

III.B - Pour tout réel $r \in]0,1[$, on définit deux suites $(A_n(r))_{n \geq 0}$ et $(B_n(r))_{n \geq 0}$ par :

$$A_0(r) = 1 , \; B_0(r) = 0 , A_1(r) = -\frac{2}{r}(1+r^2) , \; B_1(r) = 1$$

et les relations de récurrence, valables pour $n \geq 2$:

$$A_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} A_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) A_{n-2}(r)$$

$$B_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} B_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) B_{n-2}(r)$$

on définit également, pour $n \geq 1$, la matrice $M_n(r)$ par :

$$M_n(r) = \begin{pmatrix} A_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} A_{n-1}(r) \\ B_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} B_{n-1}(r) \end{pmatrix} .$$

Pour alléger la rédaction, les candidats pourront remplacer, chaque fois que cela leur paraîtra utile, les expressions $A_n(r)$, $B_n(r)$, $M_n(r)$, par A_n, B_n, M_n .

Pour $n \geq 1$, déterminer une matrice T_n, dont les coefficients dépendent de n et r, telle que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ appartenant à $\mathcal{S}_r$ on ait :

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Écrire, dans le langage de calcul formel de votre choix, des fonctions prenant en argument l'entier n et retournant a_n, A_n, B_n ; a_0, a_1 et r seront considérés comme des variables globales. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $M_n = M_{n-1}T_n$.

En déduire le produit matriciel $M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ indépendamment de n

III.C - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'existent une suite (ε_n) tendant vers 0, un réel l, un réel $k \in]0, 1[$ et un entier N vérifiant :

$$\forall n > N, |u_n - l| \leq k|u_{n-1} - l| + \varepsilon_n$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$.

III.D - Prouver que :

$$\lim_{n \to \infty} A_n a_n(f_r) = \frac{a_0(f_r)}{1 - r^2}$$

Que dire de la suite de terme général $B_n a_n(f_r)$ lorsque n tend vers l'infini ?

III.E - Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.
À l'aide des questions II.E et III.D, démontrer que la suite (l_n) définie par :

$$\begin{cases} l_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2} \\ l_1 = l_0(1+r^2) \\ l_n = (1+r^2)l_{n-1} - \dfrac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}l_{n-2} \end{cases}$$

converge vers $L(a, b)$.

Partie IV - Étude de $\mathscr{S}_r$ et de $\mathscr{B}_r$

IV.A - Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathscr{S}_r$. Prouver l'égalité :

$$a_1 A_n - a_0 B_n = a_{n+1} \det M_n$$

IV.B - Calculer $\det T_n$ puis $\det M_n$. Donner un équivalent de $\det M_n$.

IV.C - Préciser la dimension et une base de $\mathscr{B}_r$. Soit (a_n) un élément de $\mathscr{S}_r$ qui n'appartient pas à $\mathscr{B}_r$. Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \to \infty$.

••• FIN •••

Mathématiques I

MP **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n| \leqslant M|u_n|$$

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$.

I.A.2) En déduire la nature de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3) Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) En utilisant l'encadrement de la question **I.A.1**, montrer que $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) En déduire que

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va donner une méthode plus rapide.

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A – Nombres de Bernoulli

II.A.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe C^∞ sur I, la fonction g définie sur I par $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $a_p = -\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$. En déduire que $|a_p| \leqslant 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3) *a)* Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

c) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Calculer a_4.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B – Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette **question II.B**, on fixe un entier naturel non nul p et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.

II.B.1) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant A k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2) En déduire le développement asymptotique du reste

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$, donnée par

$$\widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big)$$

II.B.3) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$: $\widetilde{S}_{100,4}(3) = 1{,}202056903159594277\ldots$ tandis que $S(3)$ vaut $1{,}202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry). La méthode de la partie **II** semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\Big(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$. C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A – Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

$$A_0 = 1,\ A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad \text{(III.1)}$$

Les polynômes $B_n = n! A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les **conditions III.1** ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(X) = c_0 \frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2} \frac{X^2}{2!} + c_{n-1} X + c_n$$

puis que, si $n \geqslant 1$,

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) Montrer que la série $\sum_n A_n(t) z^n$ converge pour tout réel $t \in [-1, 1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$.

Sous ces conditions, on pose $f(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) z^n$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f(t,z)$. En déduire que, si $|z| < 1$ et $z \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t) z^n = \frac{z e^{tz}}{e^z - 1}.$$

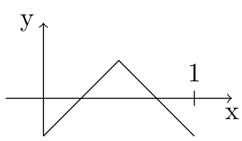
c) Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 2\pi$, on a $\dfrac{z e^{z/2}}{e^z - 1} + \dfrac{z}{e^z - 1} = 2 \dfrac{z/2}{e^{z/2} - 1}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.

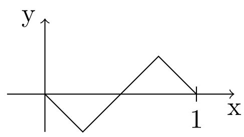
III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0,1]$.

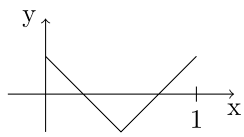
a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0,1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



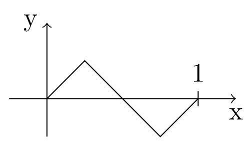
$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$



$n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$

En d'autres termes, pour $n \geqslant 2$, on a :

1. Si $n \equiv 2 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Si $n \equiv 0 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
3. Si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
4. Si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, montrer que $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) Soit f une fonction complexe de classe C^∞ sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \Big[A_j(t) f^{(j)}(t)\Big]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\, dt$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(0) + f'(1)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} \Big(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

III.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geqslant n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

où on a posé $A^*_j(t) = A_j(t - [t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\left| \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leqslant \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$$

III.B.3) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du **II.B.2**, le terme $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale.

IV Compléments sur l'erreur

Dans cette partie, on fixe un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)\, x^{\alpha-1}}$.

IV.A – Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0,1]$.
En remarquant $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$, montrer que

- si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t) dt \geqslant 0$;
- si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $\displaystyle\int_0^1 A_n(t) g(t) dt \leqslant 0$.

IV.A.2) En reprenant les notations de **II.B.2**, montrer que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$

$$\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$$

et que

$$\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$$

En déduire que l'erreur $\left| S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) \right|$ est majorée par $\left| a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n) \right|$.

IV.A.3) Dans cette question, on reprend le cas de **II.B.3**. Sachant que $6! a_6 = \dfrac{1}{42}$, retrouver que l'erreur $|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)|$ est majorée par une expression de l'ordre de 10^{-17}.

IV.B – Séries de Fourier

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ et tout réel x, on pose $\widetilde{A}_p(x) = A_p\left(\dfrac{x}{2\pi} - \left[\dfrac{x}{2\pi}\right]\right)$.

IV.B.1) Montrer que $\widetilde{A}_p$ est 2π-périodique et continue par morceaux.

IV.B.2) À l'aide de la question **III.B.1**, déterminer les coefficients de Fourier de $\widetilde{A}_p$:

$$\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(t) e^{-inx} dx$$

IV.B.3) Étudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$.

IV.B.4) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, en déduire que $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1} \dfrac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$.

IV.C – Comportement de l'erreur

IV.C.1) Montrer que, pour tous entiers n, $p \geqslant 1$

$$\left| \frac{a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p} f^{(2p)}(n)} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1) S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$$

IV.C.2) Que dire de l'approximation de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ lorsque, n étant fixé, p tend vers $+\infty$? Pour le calcul numérique de $S(\alpha)$, comment doit-on choisir n et p ?

• • • FIN • • •

Mathématiques 1

MP **2012**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Notations

On note :

$C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à support compact si son support est un compact de $\mathbb{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ ;} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \text{ ;} \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0. \end{cases}$$

I Produit de convolution

Soit f, $g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A – Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$;

b) f, $g \in L^2(\mathbb{R})$.

I.A.2) Soient f, $g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $f * g = g * f$.

I.A.3) Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

I.B – Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbb{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

I.B.2) Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.

I.B.3) Pour tout réel α, montrer que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

I.B.4) En déduire que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas où f est à support compact.

I.B.5) Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.

I.C – *Continuité, dérivabilité, séries de Fourier*

I.C.1) On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f * g$ est continue.

b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.C.3) Dans cette **question I.C.3**, on suppose que g est continue, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux.

a) Énoncer sans démonstration le théorème sur les séries de Fourier applicable aux fonctions continues, 2π-périodiques et de classe C^1 par morceaux.

b) Montrer que $f * g$ est 2π-périodique et est somme de sa série de Fourier. Expliciter les coefficients de Fourier de $f * g$ à l'aide des coefficients de Fourier de g et d'intégrales faisant intervenir f.

I.D – *Approximation de l'unité*

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

I.D.1) Montrer que la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.3) Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{\left(1-t^2\right)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

b) Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

c) En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = f$?

II Transformée de Fourier

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t.$$

II.A – Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\hat{f}$ appartient à $C_b(\mathbb{R})$.

II.B – *Transformée de Fourier d'un produit de convolution*

Soit $f,\, g \in L^1(\mathbb{R})$.

II.B.1) On suppose que g est bornée.

a) Montrer que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f * g$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g$.

b) Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

II.B.2) Un contre-exemple

Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g(0)$ ne soit pas défini.

II.C* – *Sinus cardinal

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction k_n par

$$\begin{cases} k_n(x) = 1 - \dfrac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leqslant n\,; \\ k_n(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.C.1) Exprimer la transformée de Fourier $\hat{k}_n(x)$ à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0\,; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

II.C.2) Justifier que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

On admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = \pi$. On pose $K_n = \dfrac{1}{2\pi}\hat{k}_n$.

II.C.3) Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

II.D* – *Inversion de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} k_n(x)\hat{f}(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x.$$

II.D.1) Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, montrer que $I_n(t) = (f * K_n)(t)$.

II.D.2) En déduire, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x.$$

III Convolution et codimension finie

Dans cette partie, on suppose que $g \in C_b(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $L^1(\mathbb{R})$ du sous-espace vectoriel

$$N_g = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f * g = 0\}.$$

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \mathrm{Vect}\,(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbb{R}}$$

où, comme au **I.B**, on note $T_\alpha(g)$ la fonction $x \mapsto g(x-\alpha)$.

III.A – À toute fonction g de $C(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-t)\mathrm{d}t.$$

Soit $(g_1, \dots, g_p)$ une famille d'éléments de $C_b(\mathbb{R})$.

III.A.1) Montrer que la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_p})$ est libre.

III.A.2) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de formes linéaires sur E. On note

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f_n).$$

Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace dual E^* (on commencera par le cas où ce rang est fini).

III.A.3) Montrer que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g.

III.A.4)

a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $C_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.B – Hypothèse A

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur $\mathbb{R}$.

III.B.1) Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A, alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III.B.2) En déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.C – Cas général

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.C.1) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et des fonctions $m_1, \ldots, m_n$ d'une variable réelle telles que, pour tout réel α,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g).$$

III.C.2) Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p, de $C(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et pour tout réel x, on note $e_x(f) = f(x)$.

a) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$ soit une base de l'espace dual F^*.

b) Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille d'éléments de F, montrer que $\mathrm{Det}(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est non nul si et seulement si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base de F.

III.C.3) En appliquant la question **III.C.2**) à V_g, montrer que si g est de classe C^k alors les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^k.

III.C.4) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r * g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la **question I.D.3**).

III.C.5) Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r * g}$ est égale à celle de V_g.

III.C.6) En déduire que les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe C^∞.

III.C.7) Déterminer l'ensemble des fonctions $g \in C_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$.

• • • FIN • • •

On considère $\mathbb{R}^2$ comme plan affine euclidien, muni de son repère canonique orthonormal $(O;\vec{I},\vec{J})$. On considérera, en II.B, $\mathbb{R}^3$ comme espace affine euclidien, muni de son repère canonique orthonormal $(O;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$. On donne enfin un scalaire $p>0$.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I -

Dans cette partie, on désire établir, en vue de II et III des propriétés de certaines familles de droites D_t. Les réponses aux questions de I.A ne sont pas nécessaires pour la suite du problème. La propriété essentielle, qui pourra être admise si nécessaire, est obtenue en I.B.2.

Soit un intervalle I, ni vide ni réduit à un point. On donne, pour chaque $i\in\{1,2,3\}$, un polynôme à coefficients réels de la forme $P_i(t) = a_i t^2 + b_i t + c_i$, et on considère la famille $\{D_t, t\in I\}$ de parties de $\mathbb{R}^2$ d'équation $P_1(t)x + P_2(t)y + P_3(t) = 0$.

I.A -

I.A.1) Soit la propriété (H_1) : pour tout t dans I, D_t est une droite. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les polynômes $P_i(t)$ pour qu'il en soit ainsi. (H_1) sera supposée vérifiée pour la suite.

I.A.2) Soit la propriété (H_2) : P_1 et P_2 sont non proportionnels. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les droites D_t pour qu'il en soit ainsi.

I.A.3) Soit la propriété (H_3) : P_1, P_2 et P_3 forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les droites D_t pour qu'il en soit ainsi.

I.B - On appelle, pour t réel, $M(t)$ la matrice réelle $(3,3)$ dont la i–ème ligne, pour $i\in\{1,2,3\}$ est

$$(P_1^{(i-1)}(t), P_2^{(i-1)}(t), P_3^{(i-1)}(t))$$

I.B.1) Trouver, pour t réel, une matrice $M_1(t)$ telle que $M(t) = M_1(t)\times M_2$ où

$$M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

En déduire $\det(M(t))$ en fonction de $\det(M_2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction $t \longmapsto M(t)$ et équivalant à H_3. Pour la suite, on supposera H_3 également satisfaite.

I.B.2) Pour $t \in I$, on considère le système (S_t) :

$$S_t \begin{cases} P_1(t)x + P_2(t)y + P_3(t) = 0 \\ P_1'(t)x + P_2'(t)y + P_3'(t) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe un ensemble fini F tel que pour $t \in I - F$, (S_t) ait une solution unique. On suppose désormais que $F \cap I = \varnothing$.

b) Montrer qu'il existe trois polynômes réels A_1, A_2, δ de degré ≤ 2 tels que pour $t \in I$, l'unique solution de (S_t) soit

$$\left(x(t) = \frac{A_1(t)}{\delta(t)} \quad , \quad y(t) = \frac{A_2(t)}{\delta(t)}\right).$$

Montrer que l'arc $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in I$ est de classe C^∞.

c) En écrivant en particulier que, pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t))$ vérifie (S_t), étudier successivement :

- la régularité de l'arc γ,
- la tangente à γ en un point régulier $\gamma(t)$, à l'aide de la droite D_t.

d) L'arc γ peut-il être inclus dans une droite ? Montrer que l'arc γ est inclus dans la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$(b_1x + b_2y + b_3)^2 - 4(a_1x + a_2y + a_3)(c_1x + c_2y + c_3) = 0 \qquad (1)$$

e) Que peut-on conclure à partir de (1), quant à la nature de γ ?

Partie II -

II.A - Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M_t = O + t\vec{I} - p\vec{J}$.

II.A.1) Soit D_t la droite passant par M_t et orthogonale à la droite OM_t. Donner une équation de D_t sous la forme $a(t)X + pY + b(t) = 0$.

II.A.2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $N \in \mathbb{R}^2$ par lesquels passent deux droites D_{t_0} et D_{t_1} distinctes. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $t_0 \times t_1$ pour que ces deux droites soient orthogonales. Quel est l'ensemble $\mathcal{E}'$ des points N par lesquels passent deux droites orthogonales de la famille D_t ?

II.A.3) Montrer que les droites D_t sont les tangentes à une parabole P dont on donnera une équation cartésienne. Que représente $\mathcal{E}'$ pour P ?

II.B - Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $D_{t,\alpha}$ la droite passant par $M_t(t, -p, 0)$ et dirigée par

$$\overrightarrow{U_{t,\alpha}} = p\vec{I} + t(\vec{J} - \operatorname{cotan}\alpha \vec{K})$$

On note

$$K_{t,\alpha} = M_t + \frac{t}{p}\overrightarrow{U_{t,\alpha}}$$

II.B.1) Donner un scalaire β tel que, pour tout couple (t,α),

$$\frac{\partial \overrightarrow{OK_{t,\alpha}}}{\partial t} = \beta \overrightarrow{U_{t,\alpha}}$$

Pour $\alpha \in]0,\pi[$ fixé, on note T_α la courbe paramétrée $t \longmapsto K_{t,\alpha}$, $t \in \mathbb{R}$. Que représente $D_{t,\alpha}$ pour T_α ?

II.B.2) Quelle est la projection orthogonale de T_α sur le plan Oxy ? Montrer que T_α est dans un plan Π_α contenant la droite Δ d'équations $(y = -p \ , \ z = 0)$.

II.B.3) On note F_α la projection orthogonale de O sur Π_α et D_α la droite déduite de Δ par l'homothétie de centre F_α et de rapport 2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,\pi[$ donnés, exprimer les distances

$$\left\| \overrightarrow{F_\alpha K_{t,\alpha}} \right\|$$

et

$$d(K_{t,\alpha}, D_\alpha)$$

Conclure quant à la nature des courbes T_α. Comment l'expliquer grâce à II.A ? (On remarquera que $\langle \overrightarrow{OM_t}, \overrightarrow{U_{t,\alpha}} \rangle = 0$).

II.B.4) Quel est l'ensemble des points F_α, pour $\alpha \in]0,\pi[$? Quelle est la surface engendrée par les droites D_α ? Comment $D_\alpha \cap Oyz$ se déduit-elle de F_α ?

Partie III -

III.A - Pour $t \in \mathbb{R}$, on appelle C_t le cercle d'équation

$$X^2 + Y^2 - 2ptX - p(t^2 - 1)Y = 0$$

On appelle Ω_t le centre de C_t ; calculer les distances $d(O,\Omega_t)$ et $d(\Omega_t,\Delta)$. En déduire la position relative de C_t par rapport à Δ d'équations ($y = -p$, $z = 0$). Discuter soigneusement le nombre de cercles C_t passant par un point $A \in \mathbb{R}^2$.

III.B - Soit t et u deux réels distincts ; on pose $\Sigma = t + u$ et $\Pi = t \times u$.

III.B.1) Donner une relation (R) entre Σ et Π équivalant à $\overrightarrow{O\Omega_t} \perp \overrightarrow{O\Omega_u}$.

III.B.2) Trouver deux scalaires A et B tels que (Σ,Π) vérifie (R) si et seulement si

$$\exists \omega \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ tel que } \Sigma = 2\sqrt{2}\tan\omega \text{, } \Pi = A + \frac{B}{\cos\omega}$$

III.C -

III.C.1) Trouver une fonction Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'une équation de la droite $\Omega_t\Omega_u$ soit, pour $t \neq u$, de la forme $\Sigma X - 2(Y - p) = \Phi(\Pi,p)$.

III.C.2) Soit E l'ellipse d'équation $2X^2 + (Y-p)^2 = 2p^2$; préciser le centre et les foyers de E ; donner une équation polaire de E.

III.C.3) En introduisant

$$T = \tan\frac{\omega}{2},$$

montrer que la droite $\Omega_t\Omega_u$ est tangente à E lorsque (Σ,Π) vérifie (R).

III.C.4) Pour un tel couple, calculer la distance $\|\overrightarrow{GM}\|$, où G est le point $(0, 2p)$ et M le symétrique de O par rapport à la droite $\Omega_t\Omega_u$.

III.C.5) Quel est l'ensemble des points M du plan par lesquels passent deux cercles C_t et C_u orthogonaux ? (On dit que deux cercles ni vides ni réduits à des points sont orthogonaux s'ils sont sécants et si les tangentes à ces cercles en un point d'intersection quelconque sont orthogonales.)

••• FIN •••

Les quatre parties du problème proposé sont consacrées à la description géométrique, dans des situations variées, de l'ensemble des produits des éléments de deux parties d'une algèbre sur $\mathbb{R}$.

Notation : Lorsque E et F sont des parties d'une $\mathbb{R}$-algèbre A, EF désigne l'ensemble des produits d'un élément de E et d'un élément de F, soit :

$$EF = \{x \in A \mid \exists (y,z) \in E \times F ; x = yz\}$$

où yz désigne le produit de y par z pour la multiplication d'anneau de A.

Rappelons une définition : si $X \subset \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}$, on dit que X est étoilé par rapport à u si pour tout $x \in X$, le segment $[u,x] = \{tu + (1-t)x\}_{t \in [0,1]}$ est inclus dans X. Si X est étoilé par rapport à l'un des ses points, on dit que X est étoilé.

Partie I -

Dans cette partie, la $\mathbb{R}$-algèbre A est $\mathbb{C}$ identifiée à un plan d'origine O.

Soit (L_1) l'ensemble des complexes de la forme $z = \cos\theta\, e^{i\theta}$, (L_2) celui des complexes de la forme $z = t \cos\psi\, e^{i\psi}$, où θ, ψ décrivent $\mathbb{R}$ et t l'intervalle $[0,1]$.

I.A - Soit $\Pi = L_1 L_1$. Quelle est l'intersection de Π avec une demi-droite d'origine O du plan ? Caractériser Π soigneusement et le représenter graphiquement.

I.B - Comment $L_1 L_2$ se déduit-il de Π ? $L_1 L_2$ est-il convexe ? étoilé ?

Partie II -

Dans cette partie la $\mathbb{R}$-algèbre est $M_n(\mathbb{R})$:

Ici $n \in \mathbb{N}^*$, $E = S_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$, F est la partie de E constituée des matrices symétriques définies positives, soit

$$F = \{M \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, {}^tXMX > 0\}$$

et G désigne l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$.

II.A - Pour chacun des ensembles E, F, G, décider s'il est convexe ou non et le démontrer.

II.B - Montrer que si $S \in F$, il existe une matrice $S' \in F$ telle que $S = S'^2$.

II.C - En déduire que si $A \in E$ et $S \in F$, AS est semblable à $S'AS'$ où $S' \in F$ et $S'^2 = S$.

II.D - Montrer l'égalité $EF = G$; on pourra utiliser II.C ainsi que l'égalité suivante, valable pour D et P d'ordre n, avec P inversible : $PDP^{-1} = (PD\,{}^tP)({}^tP^{-1}P^{-1})$.

II.E - G est-il connexe par arcs ?

Remarque : il n'est pas nécessaire dans cette question, d'appliquer ce qui précède, cela peut néanmoins se révéler suffisant.

Partie III -

Dans cette partie, la $\mathbb{R}$-algèbre est $\mathbb{C}$.

III.A - Montrer que toute partie étoilée de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs.

III.B -

a) Caractériser, pour $(a, z, z') \in \mathbb{C}^3$, l'ensemble $[0, a][z, z']$.

b) Démontrer que la réunion d'une famille de parties de $\mathbb{C}$, étoilées par rapport à 0, reste étoilée par rapport à 0 (voir le rappel de définition).

III.C - Démontrer que si $E \subset \mathbb{C}$ est étoilée par rapport à 0 et si $F \subset \mathbb{C}$ est étoilée, EF est étoilée par rapport à 0.

Partie IV -

Dans cette partie, la $\mathbb{R}$-algèbre est $\mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}^n$ (avec $n = 2$ ou 3) est muni du produit "canonique" : $(a_1,a_2)(b_1,b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ lorsque $n = 2$ et $(a_1,a_2,a_3)(b_1,b_2,b_3) = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$ lorsque $n = 3$. On ne demande pas de vérifier que $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$– espace vectoriel et de ce produit est une algèbre.

Comme les points de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ ainsi que les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sont repérés par des n-uplets, cela permet de calculer des produits à l'aide des formules ci-dessus ; pour des raisons de cohérence, cf IV.A.1, IV.B.2 et IV.B.3, on conviendra que le produit de deux points est un point et que le produit d'un point (ou d'un vecteur) par un vecteur est un vecteur.

IV.A -

IV.A.1) Soit $D = (a; \vec{u})$ et $D' = (b; \vec{v})$ deux droites dans le plan P, avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls. Montrer que : $DD' = \{ab + \lambda b\vec{u} + \mu a\vec{v} + \lambda\mu\vec{u}\vec{v} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

IV.A.2) On suppose que $b\vec{u}$ et $a\vec{v}$ sont indépendants ; soit alors le repère affine $r = (ab; b\vec{u}, a\vec{v})$; montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que DD' soit paramétré dans r par : $(\lambda, \mu) \quad (X = \lambda + \alpha\lambda\mu, Y = \mu + \beta\lambda\mu)$. (1)

IV.A.3) Supposons α et β non nuls : on pose $\Lambda = 2\beta\lambda + 1$, $M = 2\alpha\mu + 1$. Déterminer $\Lambda - M$ et ΛM en fonction de X, Y, α et β. En déduire que DD' est l'ensemble défini par une inégalité du type $\phi(X,Y) \geq 0$. Conclure quant à la nature de DD'.

IV.A.4) Étudier le cas $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.

IV.A.5) Étudier le cas $\alpha = \beta = 0$. Que dire alors de D et D' ?

IV.B - La suite de ce problème a désormais pour cadre $\mathbb{R}^3$, muni du repère affine canonique $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et de sa structure euclidienne orientée canonique.

Soit $D = (a;\vec{u})$ et $D' = (b;\vec{v})$ deux droites dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls.

IV.B.1) Que dire de DD' si D passe par l'origine ? DD' est-il alors convexe ? étoilé ?

IV.B.2) On suppose que $(b\vec{u},a\vec{v},\vec{u}\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

a) Donner une représentation paramétrique de DD' dans le repère $r = (ab;\,b\vec{u},\,a\vec{v},\,\vec{u}\vec{v})$ analogue à celle de (1). En déduire une représentation de DD' de la forme $Z = \psi(X,Y)$.

b) On vérifie facilement, et on n'en demande pas la démonstration, que, quitte à remplacer a (respectivement b) par un certain a' (respectivement b') sur D (respectivement D'), on peut supposer que $b\vec{u}$ et $a\vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{u}\,\vec{v}$.

Soit un autre repère $r' = (ab;\,\vec{I},\,\vec{J},\,\vec{K})$, orthonormé celui-là, tel que $\vec{I}$ et $\vec{J}$ soient dans $\mathrm{Vect}(b\vec{u},\,a\vec{v})$. De quelle forme sont les formules de passage entre les coordonnées X, Y, Z d'un point relativement à r et X', Y', Z' relativement à r' ? Montrer que DD' a dans r' une équation de la forme :

$$Z' = AX'^2 + 2BX'Y' + CY'^2 \qquad (2)$$

c) Montrer que les droites $(ab;\,b\vec{u})$ et $(ab;\,a\vec{v})$ sont incluses dans DD'. Quelle forme d'équation obtient-on dans (2) si on choisit $\vec{I}$, $\vec{J}$ portés par les bissectrices de ces deux droites ? Un tel choix est-il possible ? Quelle est la nature de DD' ?

IV.B.3) On dira désormais que le couple (D,D') est dégénéré si $(b\vec{u},\,a\vec{v},\vec{u}\vec{v})$ est lié.

On suppose que (D,D'), est dégénéré mais que $(b\vec{u},\,a\vec{v})$ est libre. Déduire de IV.A la nature de DD'.

IV.C - On s'intéresse ici au cas de dégénérescence du couple (D,D').

IV.C.1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, montrer qu'une condition suffisante de dégénérescence est que $\overrightarrow{Ob}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{Oa}$ à $\vec{v}$.

IV.C.2) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls donnés, on cherche le lieu (L) des points $a = (x,y,z)$ tels que le couple (D,D') où $D = (a;\,\vec{u})$ et $D' = (a;\,\vec{v})$ soit dégénéré.

a) Montrer que (L) a une équation de la forme ${}^tXMX = 0$, avec M symétrique de taille 3×3 que l'on calculera. Exprimer $\det M$ à l'aide notamment des composantes de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ et du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

b) Lorsque $\det M$ est non nul, utiliser les théorèmes de réduction pour montrer que (L) est un cône contenant O. Indiquer cinq droites particulières incluses dans (L). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ pour que la droite $(O; \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit aussi incluse dans (L).

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\vec{u}, \vec{v})$ pour que $\det M \neq 0$.

d) Lorsque $\det M = 0$, quelle est la nature de (L) ?

IV.C.3) On s'intéresse ici aux ensembles (L') définis par une équation de la forme $q'(X) = {}^tXM'X = 0$, où M' est une matrice symétrique 3×3 de trace nulle.

a) À quelle condition la forme quadratique q' est-elle positive ?

b) Que dire de (L') lorsque $\mathrm{rg} M' \leq 1$? lorsque $\mathrm{rg} M' = 2$?

c) On suppose $\mathrm{rg} M' = 3$. Montrer que (L') n'est pas réduit à l'origine. Soit X dans $(L') \backslash \{O\}$ et $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormale telle que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{OX}$. De quelle forme est la matrice de q' dans la base C ? Montrer que l'intersection de (L') et du plan $(O; \vec{v}, \vec{w})$ est la réunion de deux droites orthogonales. Montrer qu'il existe une infinité de bases orthonormales C' telles que la matrice de q' dans C' ait ses trois coefficients diagonaux nuls.

d) On suppose que l'on a deux vecteurs indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que (L') contienne les droites $(O; \vec{u})$ et $(O; \vec{w})$, où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ telle que $\vec{u}_1$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\vec{w}_1$ à $\mathrm{Vect}\ (\vec{w})$. Que dire de la matrice de q' relativement à une telle base ? En considérant l'intersection de (L') et du plan $(O; \vec{u}_1, \vec{v}_1)$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que (L') contienne aussi $(O; \vec{v})$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

On se propose dans ce problème d'étudier une méthode de calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Notations : On désigne par $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, par $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques, par $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n et par $O_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales directes (i.e. dont le déterminant vaut 1).

On désigne par $diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ la matrice diagonale d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que la matrice A de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ a pour coefficient $a_{i,j}$ en i-ème ligne et j-ème colonne. Dans ce cas, la transposée de A sera notée ${}^tA$ et la trace de A définie par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Liens entre les parties du problème : La partie I sert dans tout le problème. La partie II traite d'un cas particulier que l'on aura intérêt à traiter soigneusement avant de poursuivre. La partie IV est indépendante de ce qui précède et sert dans V.D - .

Partie I - Une norme sur $Mat(n, \mathbb{R})$

I.A - Montrer que pour tout couple de matrices carrées (A, B),

$(\ Tr(AB)) = Tr(BA)$.

I.B - Montrer que l'application

$\phi\ : Mat(n, \mathbb{R}) \times Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par : $\phi(A, B) = Tr(A\,{}^tB)$

Filière MP

est un produit scalaire ; calculer en particulier $\phi(A, A)$. On note $\| \ \|$ la norme associée à ϕ. Exprimer $\|A\|^2$ en fonction des $(a_{i,j})$.

I.C - Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de $Mat(n, \mathbb{R})$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

En déduire la norme de l'application $Tr : Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (norme subordonnée à la norme $\| \ \|$).

I.D - Soit Ω un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice A, $\|\Omega A\| = \|A\|$. Prouver que si A est une matrice symétrique, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est elle-même symétrique et que l'on a, en notant $(b_{i,j})$ les coefficients de B :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 .$$

Partie II - Diagonalisation pour $n = 2$

Soient A une matrice de $S_2(\mathbb{R})$, et Ω une matrice de $O_2^+(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

On pose $B = {}^t\Omega A \Omega = (b_{i,j})$.

II.A - Calculer les termes de la matrice B.

II.B - Montrer que

$$\sum_{i=1}^{2} b_{i,i}^2 + 2b_{2,1}^2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}^2 + 2a_{2,1}^2 .$$

II.C - On suppose ici que $a_{1,2} \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, et un seul, tel que $b_{2,1} = 0$ (penser à distinguer deux cas).

Définir la fonction F qui, à une matrice symétrique non diagonale de $S_2(\mathbb{R})$, associe le réel θ ainsi défini.

II.D - Montrer que pour ce choix de θ, la matrice B est diagonale et que $b_{1,1}$ et $b_{2,2}$ sont les valeurs propres de A.

II.E - On donne

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\theta = F(A)$ puis la matrice B. En déduire les éléments propres de A.

Partie III - Quelques résultats généraux

On définit, pour θ réel, p et q entiers donnés (avec $p < q$), une matrice $\Omega = (\omega_{i,j})$ de $Mat(\mathbb{R}, n)$ en posant :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta) & \dots & \sin(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\sin(\theta) & \dots & \cos(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

où $\omega_{p,p} = \omega_{q,q} = \cos(\theta)$, $\omega_{p,q} = \sin(\theta)$ et $\omega_{q,p} = -\sin(\theta)$.
On considère $A = (a_{i,j})$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t\Omega A \Omega$.

III.A - Justifier que $B = (b_{i,j})$ est symétrique et que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

III.B - Calcul des coefficients de B

III.B.1) Soit $M = (m_{i,j}) = A\Omega$. Exprimer, en fonction de θ et des coefficients de A, les coefficients $m_{i,j}$, $m_{i,p}$ et $m_{i,q}$ lorsque j est un élément de $[1, n]$ distinct de p et de q, i est quelconque dans $[1, n]$.

III.B.2) Exprimer, en fonction des coefficients de A et de θ les coefficients $b_{i,j}$, puis $b_{i,p}$, $b_{i,q}$ pour i, j tous deux différents de p et de q, ainsi que $b_{p,q}$, $b_{p,p}$ et $b_{q,q}$.

III.B.3) Donner une relation simple entre les matrices.

$$\begin{bmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{bmatrix}.$$

En déduire que

$$b_{p,p}^2 + b_{q,q}^2 + 2b_{p,q}^2 = a_{p,p}^2 + a_{q,q}^2 + 2a_{p,q}^2 .$$

III.B.4) On suppose que $a_{p,q}$ est non nul, montrer qu'il existe un réel $\theta_{p,q}$ appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ et un seul, tel que $b_{p,q} = 0$.

Partie IV - Suites dans espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé, de dimension finie, dont la norme est notée $\| \|$.

IV.A - On se propose de montrer le résultat suivant : une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace normé $(E, \| \|)$ telle que :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, (1)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérences, (2)

$\lim\limits_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, (3)

est convergente.

On considère donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3) et M un entier strictement supérieur à 1 ; on note a_μ pour $1 \le \mu \le M$, les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.A.1) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} , \forall k \in \mathbb{N} , k \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_k \in \bigcup_{\mu = 1}^{M} B(a_\mu, \varepsilon) ,$$

où $B(a_\mu, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre a_μ et de rayon ε.

IV.A.2) En déduire, par un choix judicieux de ε, qu'il existe $\mu \in [1, M]$ et un entier n_0 tels que : $k \ge n_0 \Rightarrow x_k \in B(a_\mu, \varepsilon)$, et conclure.

Partie V - Méthode de Jacobi : une suite de matrices convergeant vers une diagonalisée de A

Soit A un élément de $S_n(\mathbb{R})$. On note $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ses valeurs propres, éventuellement répétées avec leur multiplicité.

On définit par récurrence une suite de matrices $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$ en posant $A_0 = A$, et $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ où Ω_k est construite de la façon suivante :

si A_k est diagonale, Ω_k est la matrice unité,

sinon la matrice Ω_k est définie comme dans la partie III, en choisissant :

(1) deux entiers p et q tels que $p < q$ et $a_{p,q}^{(k)} = \sup\limits_{i \neq j} \left|a_{i,j}^{(k)}\right|$

(2) $\theta = \theta_k$, dans $\left]-\frac{\pi}{4},\ 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $\operatorname{cotan}(2\theta_k) = \dfrac{a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)}}{2a_{p,q}^{(k)}}$.

On observera que p et q dépendent de k et on pourra noter, si le besoin s'en fait sentir, $p = p_k$ et $q = q_k$.

V.A - Donner une conséquence du choix de θ_k pour la matrice A_{k+1}.

V.B - On pose $A_k = D_k + B_k$ avec $D_k = diag(a_{i,i}^{k})$ et $\varepsilon_k = \|B_k\|^2$, la norme étant définie comme dans la partie I.

V.B.1) Montrer que $\varepsilon_k \leq n(n-1)\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.2) Montrer, en utilisant la question III.B.3, que $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.3) En déduire que

$$\varepsilon_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k \text{, puis que } \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0 .$$

Que peut-on dire de la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(Mat(\mathbb{R}, n), \|\ \|)$?

V.C - On veut montrer que la suite des matrices diagonales $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence dans $E = (Mat(\mathbb{R}, n), \|\ \|)$, qui sont toutes des matrices de la forme $diag(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ où la suite finie $(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ est obtenue par permutation des valeurs propres de A. Pour cela considérons une suite extraite que nous noterons $(D_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une matrice Δ dans l'espace E ($(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'entiers naturels strictement croissante).

V.C.1) Montrer que la limite Δ est une matrice diagonale.

V.C.2) Montrer que A et Δ ont le même polynôme caractéristique.

V.C.3) Conclure.

V.D - Convergence de la méthode

V.D.1) Montrer que la suite (D_k) est bornée et que $\lim_{k \to \infty} (D_{k+1} - D_k) = 0$.

V.D.2) Montrer que les suites (D_k) et (A_k) convergent dans $(Mat(\mathrm{IR}, n), \| \, \|)$ et dire en quoi l'algorithme ainsi défini permet d'obtenir une valeur approchée des valeurs propres de A.

Partie VI - Étude d'un exemple pour $n = 3$

On donne ici

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$, et on définit la suite A_k comme dans V - .

VI.A - Déterminer θ_0 puis Ω_0. Donner les valeurs rationnelles des coefficients $(a_{i,j}^{(1)})$.

VI.B - Calculer de la même façon θ_1, Ω_1 et les coefficients $(a_{i,j}^{(2)})$ de A_2.

VI.C - Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Observation ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est d'établir quelques propriétés des cônes et coniques dans le cadre de la théorie des formes quadratiques.

Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$. Si E est un espace vectoriel réel, on désigne par $Q(E)$ l'espace vectoriel réel des formes quadratiques définies sur E. Si $q \in Q(E)$, on désigne par C_q *le cône isotrope de* q, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $q(x) = 0$.

Les parties sont largement indépendantes et de difficulté croissante. La résolution des questions préliminaires **A** et **B** n'est pas indispensable pour la suite du problème.

Question préliminaire A.

Soit E_2 un plan vectoriel réel et $q \in Q(E_2) - \{0\}$; en vue de décrire C_q on introduit une base $B = (i,j)$ de E_2 et on désigne par

$$M = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

la matrice de q relativement à B.

Quelle est la signature de q ? Montrer que C_q est réduit à $\{0\}$ ou est la réunion d'un ensemble fini de droites, dont on précisera le cardinal. On utilisera pour toute cette question une décomposition de Gauss et la discussion portera entre autres sur le signe de $rt - s^2$.

Partie I - Cônes contenant cinq vecteurs donnés

On rapporte l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique < .,.> à sa base orthonormale canonique $B_c = (i, j, k)$ et on considère deux vecteurs e et e' de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c'), avec $abca'b'c' \neq 0$. On note $Q_{e,e'}$ l'ensemble des formes quadratiques $q \in Q(\mathbb{R}^3)$ telles que C_q contienne i, j, k, e et e' ; $Q_{e,e'}$ est un sous-espace vectoriel de $Q(\mathbb{R}^3)$ (on ne demande pas de le vérifier).

I.A - Soit $q \in Q(\mathbb{R}^3)$; donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la matrice de q relativement à B_c pour que C_q contienne i ; en déduire que C_q contient i, j et k si, et seulement si, il existe α, β, γ réels tels que :

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q(X) = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy. \tag{1}$$

Filière MP

I.B - On désigne par l et l' les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ qui à un triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$ associent respectivement : $l(\tau) = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab$ et $l'(\tau) = \alpha b'c' + \beta c'a' + \gamma a'b'$.

I.B.1) Donner une relation entre le rang de la famille (l, l') et la dimension de $Q_{e,e'}$.

I.B.2) Lorsque cette dimension vaut 1, montrer que tous les éléments non nuls de $Q_{e,e'}$ ont le même cône isotrope.

I.B.3) À l'aide de $\mathrm{Vect}(e, e')$, interpréter la condition (2) suivante :

$$(bc' - b'c)(ca' - c'a)(ab' - a'b) \neq 0 \tag{2}$$

On suppose (2) vérifiée. Déterminer une base de $Q_{e,e'}$. Déterminer le rang des formes quadratiques non nulles de $Q_{e,e'}$. Montrer que les éléments de $Q_{e,e'}$ ont une signature différente de $(3,0)$. Quelles sont les valeurs possibles de cette signature ?

Dans la suite on sera amené à envisager des propriétés affines de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments seront alors considérés comme des points. En particulier le point O sera le vecteur $(0, 0, 0)$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par P_0 et P_1 les plans d'équations respectives $x + y + z = 0$ et $x + y + z = 1$ et,
pour tout triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on désigne par q_τ la forme quadratique qui à $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy$.

Partie II - Nature d'une section conique

Question préliminaire B

Déterminer les éléments communs aux cônes isotropes de toutes les formes quadratiques du type q_τ.

On fixe maintenant, pour toute la partie II , le triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$ non nul et on désigne pour simplifier par C_τ le cône isotrope de q_τ.

II.A - Étude de $C_\tau \cap P_0$

Justifier l'existence d'une base $B_0 = (I, J)$ de P_0 qui soit une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et telle que la restriction $q_\tau|_{P_0}$ ait dans B_0 une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{bmatrix}$$

Discuter selon α' et β' la nature de $C_\tau \cap P_0$.

II.B - Étude de $C_\tau \cap P_1$

II.B.1) Soit B_0 comme en II.A, et $B = (I, J, K)$ qui la complète en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, les coordonnées du point courant M de $\mathbb{R}^3$ seront désignées par X, Y et Z.

a) Montrer que, relativement au repère $(O ; B)$, P_1 a une équation de la forme $Z = z_0$ où z_0 prend l'une ou l'autre de deux valeurs que l'on précisera.

b) De quelle forme est la matrice de q_τ relativement à B ? En conclure que si $(\alpha', \beta') = (0, 0)$, alors $\mathrm{rg}(q_\tau) \leq 2$. En déduire que $(\alpha', \beta') = (0, 0) \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 0$.

On supposera désormais que $\alpha\beta\gamma \neq 0$, de sorte que $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$.

c) Montrer que, relativement au repère $(O ; B)$, $C_\tau \cap P_1$ est définie par un système du type :

$$\begin{cases} \alpha' X^2 + \beta' Y^2 + \gamma' X + \delta' Y + \varepsilon' = 0 \\ Z = z_0 \end{cases}$$

En déduire que $C_\tau \cap P_1$ est une conique dont on précisera le genre en fonction de α' et β'.

II.B.2) Mettre en relation le genre de $C_\tau \cap P_1$ et la nature de $C_\tau \cap P_0$.

Partie III - Sections circulaires d'un cône

Soient a, b, c des scalaires non nuls, Π_0 et Π_1 les plans d'équations respectives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$

Soit τ un triplet non nul et q_τ la forme quadratique qui lui est associée ; C_τ en désigne le cône isotrope ; q_0 désigne enfin l'application carré scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$.

III.A - Montrer que si $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ vérifient

$$\frac{\alpha bc}{b^2 + c^2} = \frac{\beta ac}{a^2 + c^2} = \frac{\gamma ab}{a^2 + b^2} \tag{3}$$

il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $l \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ q_\tau(M) - \lambda q_0(M) = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \cdot l(M)$$

Dans ce cas, montrer que $C_\tau \cap \Pi_1$ est inclus dans une sphère. En conclure que $C_\tau \cap \Pi_1$ est un cercle. Que représente-t-il pour les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$?

On admettra que les relations (3) constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $C_\tau \cap \Pi_1$ soit un cercle.

III.B - Montrer que pour tout point $M(x, y, z) \in \Pi_1$, il existe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $x' + y' + z' = 1$ et que M soit le barycentre de A, B et C affectés des masses respectives x', y' et z'. Si τ est tel que $C_\tau \cap \Pi_1$ soit un cercle, donner une expression simple de $q_\tau(x, y, z)$ à l'aide de λ, x', y', z' et des carrés des distances $\|BC\|^2$, $\|CA\|^2$, $\|AB\|^2$.

Partie IV - Couple foyer — directrice d'une conique

Dans cette partie, on note pour simplifier C_0 le cône d'équation $yz + zx + xy = 0$. Pour la suite, a désigne un réel donné.

IV.A - Soit Ω_a le point de coordonnées (a, a, a). Montrer qu'il existe un réel $d_a \geq 0$ tel que, pour tout $M \in C_0 \backslash \{O\}$, la distance de Ω_a à la droite (OM) soit égale à d_a. En déduire la nature de C_0.

IV.B - On suppose désormais $a \neq 0$. Soit P_a le plan d'équation $x + y + z = a$; comment se déduit-il de P_1 ? Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par Φ_λ l'application qui à M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ associe $(x + y + z - a)^2 + \lambda(yz + zx + xy)$.

Montrer que pour un unique $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi_{\lambda_0}(M) = 0$ est l'équation d'une sphère Σ_a. En donner le centre et le rayon et la situer par rapport à C_0.

IV.C -

IV.C.1) Soit Π un plan non parallèle à P_a ; montrer qu'il existe une droite D incluse dans Π et un scalaire μ tels que :

$$\forall M(x, y, z) \in \Pi,\ (x + y + z - a)^2 = \mu(d(M, D))^2$$

où $d(M, D)$ désigne la distance de M à D.

Indication : on pourra s'intéresser à la relation $x + y + z - a = 0$; un croquis pourra être utile.

IV.C.2) On suppose, de plus, que Π est tangent à Σ_a en un point F. Pour tout $M \in \Pi$, exprimer $\Phi_{\lambda_0}(M)$ à l'aide de $\|FM\|$.

IV.D - Conclure de ce qui précède que $C_0 \cap \Pi$ est une conique de foyer F et de directrice D. Faire un croquis d'ensemble sans nécessairement chercher à représenter le repère canonique.

Partie V - Centre d'une conique

Dans cette partie, on considère $q \in Q(\mathbb{R}^3)$, dont on désigne par f la forme polaire.

V.A - Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et soit $s \in L(\mathbb{R}^3)$ la symétrie qui à $X = X' + X''$, où $(X', X'') \in E' \times E''$, associe $s(X) = X' - X''$. Pour $(X', X'') \in E' \times E''$, exprimer $q(X' + X'') - q(X' - X'')$ à l'aide de f. En déduire que :

$$\left[\forall X \in \mathbb{R}^3, q(s(X)) = q(X)\right] \Leftrightarrow \forall (X', X'') \in E' \times E'', f(X', X'') = 0 \qquad (4)$$

On suppose q non dégénérée ; on ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité de u automorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ f(X, Y) = \langle u(X), Y \rangle .$$

V.B - Si V est un élément non nul de $\mathbb{R}^3$, on pose $H = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \middle| \langle V, X \rangle = 0\right\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; montrer que :

$$\left[\forall (X,Y) \in F \times H,\ f(X, Y) = 0\right] \Leftrightarrow u(F) \subset \mathrm{Vect}(V)$$

V.C - En déduire que l'hyperplan H possède un supplémentaire F vérifiant :

$$\forall (X,Y) \in F \times H, f(X, Y) = 0 ,$$

si et seulement si $\langle u^{-1}(V), V \rangle \neq 0$. Montrer que F est alors unique et en donner une description.

On choisit maintenant $V = (1, 1, 1)$, de sorte que $H = P_0$. Soit $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$, avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$; on choisit $q = q_\tau$, on lui associe u comme ci-dessus et on appelle M la matrice de q relativement à la base canonique.

V.D - Déterminer la comatrice de M. Montrer que :

$$\langle u^{-1}(V), V \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \qquad (5)$$

V.E - Si $\langle u^{-1}(V), V \rangle \neq 0$, on définit F comme ci-dessus, puis s à partir de la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus P_0$. Décomposer alors un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ ainsi que son image $s(X)$ sur la somme directe $F \oplus P_0$. En déduire que

s laisse stable P_1. En déduire que $C_q \cap P_1$ possède un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

V.F - On suppose au contraire que $< u^{-1}(V), V > = 0$.

V.F.1) Quelle est la nature de $C_q \cap P_1$? On pourra utiliser II.B.2.

V.F.2) On définit une base orthonormale $B = (I, J, K)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que J soit colinéaire à $u^{-1}(V)$ et K directement colinéaire à V. Étudier soigneusement la forme de la matrice de q relativement à B et retrouver la nature de $C_q \cap P_1$. Que représente la direction de J pour cette conique ?

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le texte, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et n est un entier strictement positif. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et on désigne par $E_n(I)$ l'ensemble des applications de classe C^1 de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $M \in E_n(I)$, M' désigne la dérivée de M. Parmi les éléments de $E_n(I)$, on s'intéresse en particulier à ceux qui vérifient l'une ou l'autre des propriétés qui suivent :

$$(P1)\ :\ \forall (x, y) \in I^2,\ M(x)M(y) = M(y)M(x)$$

$$(P2)\ :\ \forall x \in I,\ M'(x)M(x) = M(x)M'(x)$$

On adopte les notations suivantes : I_n désigne la matrice identité d'ordre n, $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel des vecteurs-colonnes à n lignes, $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales réelles d'ordre n et $SO_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices orthogonales réelles d'ordre n et de déterminant $+1$; si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $M_{[i,j]}$ le coefficient de M en position (i, j) lorsque $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$. Enfin, on dit d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *stricte* si elle a les coefficients diagonaux tous nuls et d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *scalaire* si elle est proportionnelle à l'identité ($M = \lambda I_n$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Enfin, on rappelle que, si M est élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$t \mapsto \exp(tM) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^k$$

est un élément de $E_n(\mathbb{R})$ dont la dérivée est

$$t \mapsto M\exp(tM) = \exp(tM)M\ .$$

Partie I - Exemples élémentaires

I.A - .

I.A.1) Montrer que tout élément de $E_n(I)$ vérifiant $(P1)$ vérifie $(P2)$.

Filière MP

I.A.2) Démontrer que si M est une application élément de $E_n(I)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $M^k : x \mapsto M(x)^k$ est élément de $E_n(I)$; calculer sa dérivée.

I.A.3) Démontrer que si M est une application élément de $E_n(I)$, telle que pour tout $x \in I$ la matrice $M(x)$ est inversible, alors l'application $M^{-1} : x \mapsto M(x)^{-1}$ est élément de $E_n(I)$; calculer sa dérivée.

I.B - Dans la suite de la Partie I, on prend $n = 2$.

Un élément M de $E_2(I)$ s'écrit pour $x \in I$:

$$M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}.$$

I.B.1) On suppose dans cette question que M vérifie $(P2)$ et que la fonction b ne s'annule pas. Que dire des fonctions

$$\frac{c}{b} \text{ et } \frac{d-a}{b} \text{ ?}$$

Montrer, en l'explicitant, qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in I$, $M(x) \in \mathrm{Vect}\{I_2, A\}$. Montrer que l'application M vérifie aussi $(P1)$.

I.B.2) Soit A une matrice non scalaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que (X, AX) soit une base de $\mathbb{R}^2$. On suppose X ainsi choisi. Si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe donc $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $BX = uX + vAX$.

Montrer que, si la matrice B commute avec A, elle s'écrit $B = uI_2 + vA$.

I.B.3) On suppose dans cette question que M vérifie $(P2)$ et que $M(x)$ n'est scalaire pour aucun x de I.

Montrer qu'il existe un unique couple (u, v) d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$ tel que $M'(x) = u(x)I_2 + v(x)M(x)$ pour tout $x \in I$. Pour $x_0 \in I$ donné, on pose alors $C(x) = M(x)M(x_0) - M(x_0)M(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que C vérifie une équation différentielle matricielle très simple, dans laquelle intervient la fonction v et la résoudre en la ramenant par exemple à des équations différentielles ordinaires. En conclure que M vérifie $(P1)$.

I.B.4) Dans cette question, on s'intéresse à $E_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(P2)$ est vérifiée lorsqu'on choisit pour a, b, c et d les fonctions qui à x réel associent respectivement $1+x^2$, $x|x|$, x^2 et $1-x^2$.

b) Déterminer soigneusement les éléments de $E_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1+x^2 & b(x) \\ c(x) & 1-x^2 \end{pmatrix} \text{ vérifiant } (P2).$$

Pour chaque élément de $E_2(\mathbb{R})$ ainsi trouvé,

- dire s'il vérifie $(P1)$,
- déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par l'ensemble des $M(x)$, noté $\mathrm{Vect}\{M(x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

I.C - Soit M un élément de $E_2(I)$ tel que pour tout $x \in I$, $M(x)$ est la matrice d'une réflexion.

I.C.1) Montrer qu'il existe une application θ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ telle que la première colonne de $M(x)$ soit

$$\begin{pmatrix} \cos\ \theta(x) \\ \sin\ \theta(x) \end{pmatrix} \text{ pour tout } x \in I.$$

I.C.2) À quelle condition, portant sur la fonction θ, M vérifie-t-elle $(P2)$?

On dit d'une application de $I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elle est *de type* $(\mathcal{Q})$ (abréviation pour *quasi-polynomial*) si elle est de la forme

$$(x, M) \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\ P_k(x)\ M^k\ Q_k(x)$$

où sont donnés

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ a_0, \ldots, a_m \text{ de classe } C^0 \text{ de } I \text{ dans } \mathbb{R} \\ P_0, \ldots, P_m, Q_0, \ldots, Q_m \text{ de classe } C^0 \text{ de } I \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

On dira qu'une telle application est *polynomiale* si, de plus, les applications P_k et Q_k sont toutes constantes, égales à I_n.

On admettra alors le théorème $\mathcal{T}$ suivant, qui est une version du théorème de Cauchy-Lipschitz :

a) Si $F : I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de type $(\mathcal{Q})$, et si $(x_0, U_0) \in I \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique solution maximale U de l'équation différentielle matricielle $M'(x) = F(x, M(x))$, définie sur un intervalle J tel que $x_0 \in J \subset I$ vérifiant de plus $U(x_0) = U_0$.

b) Si, en outre, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $F(I \times E) \subset E$ et si $U_0 \in E$, alors $U(x) \in E$ pour tout $x \in J$.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans les questions qui suivent, les hypothèses faites entraînent que les fonctions matricielles solutions d'éventuelles équations différentielles sont définies sur I tout entier et que, partant, le point de vue de la maximalité de ces solutions est accessoire.

Partie II - Étude de cas particuliers

II.A - Soit une équation différentielle matricielle polynomiale de la forme $(\mathcal{E})$:

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) M^{2k+1}(x).$$

Déduire du théorème $\mathcal{T}$ le résultat $(\mathcal{R})$ suivant : si une solution U sur I de $(\mathcal{E})$ est telle que, pour une valeur $x_0 \in I$, $U(x_0)$ est une matrice antisymétrique, alors $U(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in I$. Donner un énoncé plus général concernant une forme analogue d'équation différentielle matricielle, mais de type $(\mathcal{Q})$, pour laquelle le résultat $(\mathcal{R})$ soit conservé.

II.B - Soit une équation différentielle matricielle polynomiale, de la forme

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) M^k(x).$$

Soit M une solution sur I et $x_0 \in I$ tel que le polynôme caractéristique de $M(x_0)$ soit scindé. On choisit alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $T_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $M(x_0) = P T_0 P^{-1}$.

II.B.1) Former une équation différentielle matricielle polynomiale vérifiée par $T : x \mapsto P^{-1} M(x) P$ permettant de montrer que $T(x)$ est triangulaire supérieure pour tout $x \in I$.

II.B.2) On suppose en outre que T_0 est triangulaire stricte. En considérant les fonctions à valeurs réelles $x \mapsto T(x)_{[i,i]}$ avec $1 \le i \le n$, donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction a_0 pour que $T(x)$ soit triangulaire stricte pour tout $x \in I$.

II.B.3) Cette condition étant supposée remplie, on choisit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_0^r = 0$; former une *équation différentielle matricielle de type* $(\mathcal{Q})$ vérifiée par $x \in I \mapsto T^r(x)$ permettant de montrer que l'application T^r est nulle.

II.C -

II.C.1) Soit U solution sur I de l'équation différentielle matricielle

$$M'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) P_k(x)\, M^k(x)\, Q_k(x)\,.$$

On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $U(x_0)$ commute avec toutes les matrices $P_k(x)$ et $Q_k(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que $U(x)$ commute avec $U(x_0)$ pour tout $x \in I$.

II.C.2) Soit U une solution sur I d'une *équation différentielle matricielle polynomiale.* Vérifie-t-elle $(P1)$, vérifie-t-elle $(P2)$? Montrer que $\dim(\mathrm{Vect}\{U(x),\ x \in I\})$ est inférieure ou égale à n.

II.D - Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(M, N) \in E^2 \Rightarrow MN - NM \in E$. En introduisant une équation différentielle matricielle bien choisie, montrer que $\forall (t, M, N) \in I \times E^2$, $\exp(tM) N \exp(-tM) \in E$.

Partie III - Cas des matrices orthogonales

III.A - On s'intéresse à une équation différentielle matricielle de la forme $(\mathcal{E}')$: $M'(x) = a(x)(I_n - M^2(x))$, où a désigne une fonction donnée, de classe C^0 de I dans $\mathbb{R}$.

III.A.1) Si U est une solution sur I de $(\mathcal{E}')$ telle que $(U(x_0))^2 = I_n$ (matrice d'une symétrie) pour un certain $x_0 \in I$, que peut-on dire de la fonction U ?

III.A.2) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'une solution U de $(\mathcal{E}')$ sur I vérifie ${}^tU(x_0) J U(x_0) = J$ pour un $x_0 \in I$. On pose alors $N(x) = {}^tU(x) J U(x)$ pour tout $x \in I$. Former une équation différentielle matricielle de type $(\mathcal{Q})$ vérifiée par $N - J$ et en conclure que $N(x) = J$ pour tout $x \in I$. Si, en outre, J est inversible, montrer que l'application $x \mapsto \det(U(x))$ est constante.

III.B - Dans toute cette section III.B, on choisit $n = 3$. Soit U une matrice élément de $E_3(I)$ à valeurs dans $SO_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(P2)$ et telle que,

$$\forall x \in I, \begin{cases} U(x) \neq I_3 \\ -1 \text{ n'est pas valeur propre de } U(x) \end{cases}.$$

III.B.1)

a) Pour $x_0 \in I$ fixé, on pose $U_0 = U(x_0)$. Montrer qu'il existe un vecteur Z_0 unitaire dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, tel que $U_0 Z_0 = Z_0$.

b) On choisit alors X_0 et Y_0 tels que $B = (X_0, Y_0, Z_0)$ soit une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$, on pose $X = Y_0 + Z_0$ et $C = (X, U_0 X, U_0^2 X)$.

De quelle forme est la matrice dans B de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant U_0 pour matrice dans la base canonique ? Calculer alors $\det_B(C)$ en fonction des coefficients de cette matrice et en déduire que C est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) En conclure qu'il existe trois fonctions u, v, w de I dans $\mathbb{R}$ telles que $U'(x) = u(x) I_3 + v(x) U(x) + w(x) U^2(x)$ pour tout $x \in I$. On admettra que ces trois fonctions sont continues.

d) En exprimant la dérivée de ${}^tUU$ en fonction de u, v, w, ${}^tU + U$, montrer que U est solution d'une équation différentielle matricielle, notée $\mathscr{F}$, de la forme $(\mathscr{E}')$: on exprimera, à l'aide de certaines des fonctions u, v, w, la fonction a correspondante.

III.B.2) Transformer l'équation $(\mathscr{F})$ par le changement de matrice inconnue défini par la formule : $(I_3 + U(x))A(x) = I_3 - U(x)$, en justifiant l'introduction de $A(x)$.

Montrer que A est solution sur I d'une équation différentielle matricielle polynomiale très simple. Résoudre cette équation et en déduire une expression de $U(x)$ pour tout $x \in I$.

III.C - En s'inspirant de III.B.1-d), construire une fonction élément de $E_3(\mathbb{R})$ à valeurs dans $SO_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(P2)$ mais pas $(P1)$.

III.D - Chercher la solution maximale U dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle matricielle $M'(x) = I_2 + M^2(x)$, définie au voisinage de 0 et telle que

$$U(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on montrera que les solutions sont nécessairement de la forme

$$x \in I \mapsto U(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$$

et on cherchera ensuite une équation différentielle vérifiée par $u = b^2 - a^2$, sachant que $u(0) = 1$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et orienté de sorte que la base canonique, notée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, soit orthonormale directe.

On a donc pour tout x, y et z réels : $(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Le produit scalaire sera noté : $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur non nul élément de E, on note $D_{\boldsymbol{u}}$, la droite vectorielle de base $\boldsymbol{u}$, $P_{\boldsymbol{u}}$ le plan vectoriel orthogonal à $D_{\boldsymbol{u}}$ et $S_{\boldsymbol{u}}$ le demi-tour par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ ou encore la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{u}}$ et d'angle de mesure π.

Si θ est un nombre réel, on note R_θ la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ orienté dans le sens du vecteur $\boldsymbol{k}$ et d'angle de mesure θ.

On rappelle qu'une rotation vectorielle de E ayant -1 comme valeur propre est un demi-tour.

On rappelle également l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2,\ \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle^2 \le \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2$$

et l'on admet que dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Pour tout (x, y, z) élément de E, on pose : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et l'on note Q_0 l'ensemble suivant : $Q_0 = \{(x, y, z) \in E |\ q(x, y, z) = 0\}$.

I.A - Une étude de Q_0

I.A.1) Déterminer quelques éléments de symétrie de Q_0

I.A.2) Déterminer et dessiner l'intersection de Q_0 avec le plan $P_{\boldsymbol{j}}$.

I.A.3)

a) Démontrer que pour tout θ réel : $R_\theta(Q_0) \subset Q_0$.

b) En déduire que, pour tout θ réel, Q_0 est invariant par R_θ c'est-à-dire : $R_\theta(Q_0) = Q_0$.

I.A.4) Donner la nature géométrique de Q_0.

Filière MP

I.B - Automorphismes orthogonaux laissant D_u invariant

On note K l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant $D_{\boldsymbol{k}}$, c'est-à-dire : $K = \{\varphi \in O(E) | \ \varphi(D_{\boldsymbol{k}}) = D_{\boldsymbol{k}}\}$

I.B.1) Donner quelques éléments de K.

I.B.2) Soit φ un élément quelconque de K.

a) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

b) Démontrer : $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \{-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\}$.

c) Déterminer l'ensemble K^+ des rotations vectorielles éléments de K.

I.B.3) On pose $K^- = \{-r | r \in K^+\}$. Démontrer que $K = K^+ \bigcup K^-$.

I.C - Automorphismes orthogonaux laissant Q_0 invariant

On note K_0 l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant Q_0, c'est-à-dire : $K_0 = \{\varphi \in O(E) | \ \varphi(Q_0) = Q_0\}$.

I.C.1) Démontrer que K_0 est un sous-groupe de $O(E)$.

I.C.2)

a) Reconnaître, pour tout θ réel, l'endomorphisme $R_\theta \circ S_{\boldsymbol{i}}$.

b) Démontrer : $K^+ \subset K_0$.

c) Démontrer : $K \subset K_0$.

I.C.3) Soit φ un élément quelconque de K_0.

a) Démontrer que pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ élément de Q_0 tel que : $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$, l'on a :

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1 .$$

b) On note $\boldsymbol{u}$ un vecteur quelconque unitaire élément de $P_{\boldsymbol{k}}$.

i) Observer que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k} \in Q_0$, puis démontrer : $\langle \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1$.

ii) En faisant intervenir le vecteur $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}$, en déduire : $\langle \varphi(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{k} \rangle \ \langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$

iii) On suppose $\langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$; démontrer qu'alors $\varphi(\boldsymbol{u})$ est colinéaire à $\boldsymbol{k}$. Est-ce cohérent ?

iv) En déduire : $\varphi(P_{\boldsymbol{k}}) = P_{\boldsymbol{k}}$.

I.C.4) Démontrer que $K_0 = K$.

I.D - Composition et invariance

On pose : $C = \{\varphi \in O(E) |\ q \circ \varphi = q\}$.

I.D.1) Démontrer $C = K$.

I.D.2)

a) Justifier que q est une forme quadratique sur E et donner sa matrice M dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

b) Reconnaître l'endomorphisme σ de matrice M dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

I.D.3) Démontrer que tout élément φ de C commute avec σ c'est-à-dire vérifie $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.

I.D.4) Soit φ un élément de $O(E)$ qui commute avec σ. Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

I.D.5) En déduire $C = \{\varphi \in O(E) |\ \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma\}$.

Partie II - Une généralisation

On note U un endomorphisme symétrique de E et l'on pose pour tout vecteur $\boldsymbol{X}$ de E : $f(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{X} | U(\boldsymbol{X}) \rangle$. Pour tout a réel, on pose ; $F_a = \{\boldsymbol{X} \in E \mid f(\boldsymbol{X}) = a\}$. On veut déterminer les endomorphismes U tels que toutes les surfaces F_a soient de révolution d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ c'est-à-dire tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_a) = F_a \quad (*).$$

II.A - Démontrer que $(*)$ est équivalente à $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta = f$.

II.B - On suppose ici : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$. Démontrer qu'alors $(*)$ est vérifiée.

II.C - On suppose maintenant que $(*)$ est vérifiée et l'on veut démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$.

II.C.1) Déterminer les endomorphismes symétriques V de E tels que :

$$\forall \boldsymbol{X} \in E, \langle \boldsymbol{X} | V(\boldsymbol{X}) \rangle = 0.$$

II.C.2) Démontrer que si V et V' sont des endomorphismes symétriques de E, il en est de même de $V - V'$.

II.C.3) Démontrer que pour tout réel θ l'endomorphisme $R_\theta^{-1} \circ U \circ R_\theta$ est symétrique.

II.C.4) Conclure.

II.D - On suppose que U commute avec toutes les rotations R_θ.

II.D.1) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de U. En déduire : $U(P_{\boldsymbol{k}}) \subset P_{\boldsymbol{k}}$.

II.D.2) Démontrer que la matrice M de U dans la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est du type :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

II.D.3) En déduire que $(*)$ est vérifiée si et seulement si M s'écrit :

$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Que vaut alors $f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) élément de E ?

II.E - Un résultat plus fort

On suppose dans cette section que F_1 est non vide et de révolution d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ c'est-à-dire que U est tel que :

$$\begin{cases} F_1 \neq \varnothing \\ \forall\theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_1) = F_1 \end{cases} \tag{1}$$

et on désigne par $\boldsymbol{X}$ un vecteur quelconque de E.

II.E.1) On suppose $f(\boldsymbol{X}) > 0$; démontrer : $\forall\theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta(\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X})$.

II.E.2) On suppose $f(\boldsymbol{X}) \leq 0$. On considère alors un vecteur $\boldsymbol{X}_1$ élément de F_1 et pour tout réel t, on pose $g(t) = f(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1)$.

a) Démontrer que g est une fonction polynômiale de degré 2 que l'on précisera. En déduire qu'il existe un réel t_0 tel que :

$$\forall t \in [t_0; +\infty[, g(t) > 0 .$$

b) Démontrer pour tout réel θ :

$$\forall t \in [t_0; +\infty[, f(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1) = f \circ R_\theta(\boldsymbol{X} + t\boldsymbol{X}_1) .$$

En déduire que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, f(\boldsymbol{X}) = f \circ R_\theta(\boldsymbol{X}) .$$

II.E.3) En déduire quels sont les endomorphismes symétriques U satisfaisant aux conditions (1) et reconnaître toutes les surfaces F_1 associées.

••• **FIN** •••

MATHÉMATIQUES II

Objectif du problème

Cette introduction est destinée à expliquer le type des résultats obtenus dans le problème. Ce dernier ne commence qu'à partir du I.

Dans la démonstration en 1994 du « dernier théorème » de Fermat par Andrew Wiles, les « courbes elliptiques » jouent un rôle central par le biais de l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan ouvert $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m(z) > 0\}$.

En effet, il se trouve que l'ensemble des courbes elliptiques sur le corps $\mathbb{C}$ est en bijection (à un $\mathbb{C}$-isomorphisme près) avec l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ (à une similitude près), lui même en bijection avec l'ensemble des orbites du demi-plan $\mathcal{H}$ sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$. Ce sont quelques propriétés de ces deux derniers ensembles que nous proposons d'étudier dans ce problème.

Partie I - Matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Dans les parties I, II, III, les lettres a, b, c, d désignent des éléments de $\mathbb{Z}$. On pose :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I.A - Démontrer que l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau.

I.B -

I.B.1) Démontrer que l'ensemble $GL_2(\mathbb{Z})$ des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication, appelé le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

I.B.2) Montrer que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } |ad - bc| = 1 .$$

Filière MP

I.C - On pose

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : ad - bc = 1 \right\} ;$$

I.C.1) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

I.C.2) Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$.

I.C.3) Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.

I.C.4) Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a,b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour qu'il existe une matrice

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$?

I.D - Soient S et T les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ définis par

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Pour chacune des trois matrices T, S et TS, répondre aux questions suivantes :

I.D.1) La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

I.D.2) La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

I.E - On cherche les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

I.E.1) Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser les formes réduites diagonales possibles de A.

I.E.2) En déduire l'ensemble des matrices solutions A.

I.F -

On cherche les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

I.F.1) Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer la trace $Tr(A)$ de A.

I.F.2) Donner la forme générale des matrices solutions A en fonction des trois paramètres a, b, c et d'une relation liant ces trois paramètres.

I.G -

I.G.1) Démontrer que si deux matrices U et V de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

I.G.2) En déduire que les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ solutions de l'équation :

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ à la matrice } S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Partie II - Réseaux de $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{H}$ le demi-plan ouvert défini par $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.

$\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ étant une base de $\mathbb{C}$ considéré comme plan vectoriel réel, on appelle réseau engendré par $\mathcal{B}$ l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta = \{u\alpha + v\beta ; (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Pour simplifier les notations, un réseau sera généralement désigné par la lettre Λ, sans préciser quelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}$ l'engendre.

II.A -

II.A.1) De quelle structure algébrique est doté un réseau Λ ?

II.A.2) Démontrer que tout réseau Λ peut être engendré par une base

$\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{C}$ telle que $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$.

II.A.3) Démontrer que pour tout quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, on a

$$Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad - bc}{|cz+d|^2} Im(z).$$

II.B -

II.B.1) Démontrer que si deux bases $\mathcal{B} = (\omega_1,\omega_2)$ et $\mathcal{B}' = (\omega_1',\omega_2')$ de $\mathbb{C}$ telles que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{H} \text{ et } \frac{\omega'_1}{\omega'_2} \in \mathcal{H}$$

engendrent le même réseau Λ, alors il existe une matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ telle que } \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

II.B.2) Étudier la réciproque.

II.C - On considère un réseau Λ engendré par une base $\mathcal{B} = (\omega_1,\omega_2)$ de $\mathbb{C}$ telle que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathcal{H}$$

Déterminer l'ensemble des couples $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathcal{B}' = (\omega_1',\omega_2')$ avec $\omega'_1 = 3\omega_1 + 5\omega_2$ et $\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$ soit une base de $\mathbb{C}$ engendrant également le réseau Λ.

II.D - Pour tout complexe $\tau \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ on note Λ_τ le réseau engendré par la base $(\tau,1)$ de $\mathbb{C}$. On suppose que $\tau \in \mathcal{H}$. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\tau' \in \mathcal{H}$ vérifie $\Lambda_{\tau'} = \Lambda_\tau$.

Partie III - Similitudes directes de centre O laissant stable un réseau

Si Λ est un réseau et z un nombre complexe, on pose $z\Lambda = \{z\rho\ ;\ (\rho \in \Lambda)\}$.

On dit que deux réseaux Λ et Λ' sont semblables s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda' = \lambda\Lambda$.

III.A -

III.A.1) Démontrer que tout réseau Λ est semblable à un réseau Λ_τ où $\tau \in \mathcal{H}$.

III.A.2) Démontrer que deux réseaux Λ_τ et $\Lambda_{\tau'}$, où $(\tau,\tau') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, sont semblables si et seulement si il existe une matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ telle que } \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

La fin de la partie III montre qu'il existe des similitudes directes de centre O, autres que des homothéties, laissant stable un réseau donné Λ.

III.B - Soit Λ un réseau.

III.B.1) Indiquer, sans faire de démonstration, le lien existant entre l'ensemble $S(\Lambda) = \{z \in \mathbb{C} \ ; z\Lambda \subset \Lambda\}$ et l'ensemble des similitudes directes σ de centre O laissant stable le réseau Λ, c'est-à-dire telles que $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$.

III.B.2) Quel est l'ensemble des homothéties de centre O laissant stable le réseau Λ ? En déduire l'ensemble $S(\Lambda) \cap \mathbb{R}$.

III.B.3) De quelle structure algébrique est doté l'ensemble $S(\Lambda)$?

III.B.4) $\mathscr{B} = (\omega_1, \omega_2)$ étant une base de $\mathbb{C}$, on pose

$\tau = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$. Comparer les ensembles $S\left(\Lambda_{\mathscr{B}}\right)$ et $S(\Lambda_\tau)$.

III.B.5) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre les ensembles $S(\Lambda_\tau)$ et Λ_τ ?

III.C - τ étant un complexe de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, on considère le réseau Λ_τ engendré par la base $(\tau, 1)$ de $\mathbb{C}$.

III.C.1) On suppose que l'ensemble $S(\Lambda_\tau)$ n'est pas réduit à $\mathbb{Z}$. Montrer que τ est alors racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

III.C.2) Réciproquement, on suppose que τ est racine non réelle d'un polynôme $P(X) = uX^2 + vX + w$ du second degré à coefficients u, v, w dans $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $S(\Lambda_\tau)$ n'est pas contenu dans $\mathbb{R}$.

b) Que dire des ensembles $S(\Lambda_\tau)$ et Λ_τ si $u = 1$?

Partie IV - Action du groupe Γ des homographies associées à $SL_2(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble $\mathscr{H}$

Dans cette dernière partie, on étudie l'action de ce groupe Γ sur l'ensemble $\mathscr{H}$. On introduit au IV.D un sous-ensemble fondamental $\mathscr{F}$ de $\mathscr{H}$. On montre aux questions IV.E et IV.F que Γ est engendré par les homographies s et t associées aux matrices S et T introduites au I.D et qu'un système de représentants des orbites de Γ est constitué par les points de $\mathscr{F}$.

À toute matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

de $SL_2(\mathbb{Z})$ on associe l'application $g : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall \tau \in \mathscr{H}, g(\tau) = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$.

IV.A -

IV.A.1) Montrer que l'on a $g(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$. On identifie dorénavant g avec l'application de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ qu'elle induit. Lorsque la matrice A parcourt $SL_2(\mathbb{Z})$, l'application correspondante g de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ décrit un ensemble noté Γ. Dans la suite de cette question on s'intéresse aux propriétés de la surjection

$$\Phi : \begin{cases} SL_2(\mathbb{Z}) \to \Gamma \\ \qquad A \mapsto g \end{cases}$$

IV.A.2) Montrer que $\Phi(A) \circ \Phi(A') = \Phi(AA')$. En déduire que la loi $\circ$ de composition des applications est une loi interne sur Γ.

IV.A.3) Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, montrer que $\Phi(A)$ est une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}$ et que l'on a $[\Phi(A)]^{-1} = \Phi(A^{-1})$. En déduire que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe.

IV.A.4) Montrer que $\left[\Phi(A) = id_{\mathscr{H}}\right] \Leftrightarrow [A = \pm I_2]$.

IV.A.5)

a) Résoudre l'équation $\Phi(A') = \Phi(A)$.

b) En utilisant les matrices S et T définies en I.D, vérifier que le groupe $(\Gamma, \circ)$ n'est pas commutatif.

IV.B -

IV.B.1) Montrer que le cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ a pour équation

$$|z|^2 - (\omega\bar{z} + \bar{\omega}z) + |\omega|^2 = R^2.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante ce cercle est-il inclus dans $\mathscr{H}$?

IV.B.2) On appelle s l'application de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ associée à la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

définie au I.D, c'est-à-dire l'élément $s = \Phi(S)$ de Γ. Déterminer l'image par s d'un cercle $\mathscr{C}(\omega, R)$ inclus dans $\mathscr{H}$.

IV.C -

IV.C.1) Trouver l'image par s d'une droite $\mathscr{D}$ incluse dans $\mathscr{H}$, c'est-à-dire d'une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \beta$, avec $\beta > 0$.

IV.C.2) Trouver l'image par s d'une demi-droite $\mathscr{D}_+$ d'équation

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y > 0 \end{cases}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ incluse dans } \mathscr{H}.$$

IV.D - On introduit le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$, défini par

$$\mathcal{F} = \left\{\tau \in \mathcal{H} : |\tau| \geq 1, |Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

On appelle t l'application de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ associée à la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

définie au I.D, c'est-à-dire l'élément $t = \Phi(T)$ de Γ. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{F}$ et ses images $t(\mathcal{F})$ et $t^{-1}(\mathcal{F})$ par les applications t et t^{-1}.

IV.E - On note G le sous-groupe de Γ engendré par l'ensemble $\{s, t\}$. Soit τ un élément de $\mathcal{H}$.

IV.E.1) Montrer qu'il existe un élément $g_0 \in G$ tel que

$$(\forall g \in G)\ Im(g(\tau)) \leq Im(g_0(\tau)).$$

IV.E.2) On pose alors $\tau' = g_0(\tau)$. Démontrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$|Re(t^m(\tau'))| \leq \frac{1}{2}.$$

IV.E.3) Vérifier que $|t^m(\tau')| \geq 1$ et en conclure que $t^m(\tau') \in \mathcal{F}$.

IV.F - On peut démontrer le résultat suivant, que l'on admettra ici : si $\tau \in \mathcal{F}$ et si pour un élément $g \in \Gamma$, avec $g \neq id_{\mathcal{H}}$, on a $g(\tau) \in \mathcal{F}$ alors τ est un point frontière de $\mathcal{F}$, autrement dit on a

$$Re(\tau) = \pm\frac{1}{2} \text{ ou } |\tau| = 1.$$

En utilisant ce résultat ainsi que ceux de la section IV.E, démontrer que $G = \Gamma$.

Indication : on pourra considérer un point τ intérieur à F (c'est-à-dire $\tau \in \mathring{F}$) et son image $g(\tau)$ par $g \in \Gamma$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Notations : on désigne par K le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Lorsque $K = \mathbb{C}$ et $z \in K$, $|z|$ est le module de z et $i^2 = -1$. Pour les entiers n et $p \geq 1$, on note :

- K^n le K−espace vectoriel des vecteurs $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ avec $z_j \in K$ pour $j = 1, 2, \ldots n$.
- $M_{n,p}(K)$ les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K ; et $M_n(K) = M_{n,n}(K)$.

On identifie K^n et $M_{n,1}(K)$ donc, en calcul matriciel un vecteur s'identifie avec la matrice colonne ayant les mêmes éléments. Pour $A \in M_{n,p}(K)$, on note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$ lorsqu'on veut préciser les éléments de A ; quand le contexte est clair, on écrit simplement $A = (a_{ij})$ ou $A = (A_{ij})$. Pour $x \in K^n$, D_x est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de x. Pour $A \in M_n(K)$, σ_A désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A et $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_A\}$. Pour $A \in M_n(K)$, ${}^tA$ est la transposée de A ; et pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = {}^t\overline{A}$ (c'est-à-dire $A^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$). $S_n(K)$ désigne le sous-ensemble des matrice symétriques de $M_n(K)$. Pour $K = \mathbb{R}$, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont respectivement les sous-ensembles des matrices symétriques positives et définies positives de $S_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice symétrique A est positive (resp. définie positive) lorsque la forme quadratique qu'elle définit ne prend que des valeurs positives (resp. strictement positives) sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Partie I -

I.A - Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $(\|\ \|_\infty)$ soit $\|z\|_\infty = \max_{j=1,\ldots n}|z_j|$.

On définit l'application $A \in M_n(\mathbb{C}) \to N_\infty(A) = \max_{i=1,\ldots n} \sum_{j \in [1, 2, \ldots n]} |a_{ij}|$.

I.A.1) Montrer que $A \to N_\infty(A)$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

I.A.2)

a) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$: $\|A(z)\|_\infty \leq N_\infty(A)\|z\|_\infty$.

Filière MP

b) Montrer l'égalité

$$N_\infty(A) = \max_{z \in (\mathbb{C}^n \backslash \{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} .$$

c) Montrer que $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.

I.A.3) Montrer que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall A \text{ et } B \in M_n(\mathbb{C}),\ N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B) .$$

I.A.4) Soit $Q \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit

$$A \in M_n(\mathbb{C}) \to N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1} A Q) .$$

a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \qquad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A) .$$

I.B -

Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$ donné.
Montrer que l'on peut choisir une matrice diagonale $D_S \in M_n(\mathbb{C})$ avec $S = (s, s^2, s^3, \ldots s^n) \in \mathbb{C}^n$ où s est un réel strictement positif telle que :

$$N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon .$$

Étant donnés $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que

$$N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon .$$

I.C - En déduire l'équivalence $\lim_{k \to \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Partie II -

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ fixée ; pour $i \in [1, 2, \ldots n]$ on pose : $L_i = \sum_{j \in [1, 2, \ldots n] j \neq i} |a_{ij}|$
$C_i = \sum_{j \in [1, 2, \ldots n] j \neq i} |a_{ji}|$.

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) \text{ et } D_i(A) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a_{ii}| \leq L_i\} .$$

$$G_C(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D'_i(A) \text{ et } D'_i(A) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a_{ii}| \leq C_i\} .$$

On désigne par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

II.A -

II.A.1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix} .$$

Représenter dans le plan complexe $G_L(A)$ et $G_C(A)$.

II.A.2) On se propose de montrer l'inclusion $\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

a) Soit $M = (m)_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ a une solution non nulle.

Montrer que

$$\exists p \in [1, 2, \ldots n] \qquad |m_{pp}| \leq L_p .$$

b) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \sigma_A$. Utiliser II.A.2-a) et montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

c) Conclure en justifiant l'inclusion $\sigma_A \subset G_C(A)$.

II.A.3) On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ a une valeur propre μ sur le bord de $G_L(A)$ [1] et soit x un vecteur propre associé à μ.

a) Montrer que si pour $k \in [1, 2, \ldots n]$ on a $|x_k| = \|x\|_\infty$, alors $\mu \in C_k(A)$.

b) On suppose de plus que $a_{ij} \neq 0 \forall (i, j)$. Montrer que $\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} C_j(A)$.

---

1. Un point z appartient au bord de $G_L(A)$ si et seulement si $z \in G_L(A)$ et $|z - a_{ii}| \geq L_i \quad i = 1, 2, \ldots n$.

II.A.4) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On note $p > 0$ lorsque $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ et $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \ldots n$. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et D_p matrice diagonale avec $p > 0$. Déterminer $G_L(D^{-1}AD)$.

II.A.5)

a) Déduire de II.A.2) et II.A.4) l'inégalité

$$\rho(A) \leq inf_{p>0}\left(\max_{i=1,2,\ldots n}\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{ij}|\right).$$

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par II.A.5)-a est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$.

ii) Donner une valeur approchée de $\rho(A)$ (on pourra utiliser la calculatrice).

II.B - Applications

II.B.1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [1, 2, \ldots n] \qquad |a_{ii}| > L_i.$$

On dit que A est strictement diagonale dominante (SDD).

a) Montrer que si A est SDD alors A est inversible.

b) Si A est SDD et si de plus $\forall i$ a_{ii} est réel et strictement négatif, montrer que pour tout $\lambda \in \sigma_A$, $Re(\lambda) < 0$.

c) Si A est une matrice réelle symétrique et SDD, énoncer une condition suffisante pour qu'elle soit définie, positive.

II.B.2) Soit B diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante $\kappa_\infty(B)$ telle que

$$\forall E \in M_n(\mathbb{C}), \ \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E}, \exists \lambda_i \in \sigma_B \ |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \kappa_\infty(B) N_\infty(E).$$

Partie III -

Cette partie est indépendante de la Partie II, à l'exception de III.B.3.

III.A - Préliminaire

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$- espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients complexes. Soit $t \to P_t$ une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$:

$$P_t(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X^{n-j}$$

où les n applications $t \to c_j(t)$ sont des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

On note Z_t l'ensemble des racines de P_t qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

III.A.1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1] \qquad Z_t \subset D(0,R).$$

III.A.2) Soit t_0 fixé et $X_0 \in Z_{t_0}$. Montrer que la proposition (P) suivante est vraie

$$(P) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \left|t - t_0\right| < \eta, \exists X_t \in Z_t, \left|X_t - X_0\right| < \varepsilon.$$

On pourra raisonner par l'absurde et écrire la proposition (non (P)).

III.B -

III.B.1) Exhiber une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ pour laquelle $D_1(A)$ (notation Partie II) ne contient pas de valeurs propres de A.

III.B.2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $G_L(A)$ défini dans II. On se propose de prouver la propriété suivante :

si $\forall j = 2, 3, \ldots n$, $D_1(A) \cap D_j(A) = \varnothing$, le disque $D_1(A)$ contient au moins une valeur propre de A.

On suppose donc que, $\forall j = 2, 3, \ldots, n$, $D_1(A) \cap D_j(A) = \varnothing$.

On écrit $A = D + B$ où D est diagonale et $B = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j$ et $b_{ii} = 0$.

On définit l'application : $t \in [0,1] \to A(t) = D + tB \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $G_L(A(t)) \subset G_L(A)$.

b) Soit $E = \{t \in [0,1] \mid \exists \lambda_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)\}$.

i) Montrer que $E \neq \varnothing$.

ii) Montrer la propriété $\forall t \in E,\ \exists \eta > 0$, $]t - \eta, t + \eta\,[\cap [0, 1] \subset E$.

iii) Soit $k \to (t_k)_{k = 1, 2, \ldots}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $a \in [0,1]$; montrer que $a \in E$.

On admettra que les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans $[0, 1]$ sont $\varnothing$ et $[0, 1]$.

iv) En déduire que $E = [0,1]$. Conclure.

III.B.3) Déduire de la Partie II et de la Partie III des propriétés du spectre de la matrice A définie dans la question II.A.1)

Partie IV - (indépendante de II et III)

Rappels : sur $M_n(\mathbb{C})$ on définit le produit hermitien et la norme associée ou norme de Frobenius N_2 :

Pour A et $B \in M_n(\mathbb{C})$, $<A, B> = Tr(AB^*)$ et

$$N_2(A) = \sqrt{<A, A>} = \sqrt{\sum_{i, j = 1, 2, \ldots n} |a_{ij}|^2} .$$

IV.A -

IV.A.1) Vérifier que N_2 est bien une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

Étant donnés A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, on définit leur H−produit noté $A \times_H B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$ par $(A \times_H B)_{ij} = a_{ij} b_{ij} (i = 1, 2, \ldots n \quad j = 1, 2, \ldots p)$.

IV.A.2)

a) Si A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, et si $D \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Delta \in M_p(\mathbb{C})$ sont des matrices diagonales, établir les égalités :

$$D(A \times_H B)\Delta = (DA\Delta) \times_H B = (DA) \times_H (B\Delta) .$$

Donner deux égalités semblables pour $D(A \times_H B)\Delta$.

b) Soient A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, établir l'égalité : $(AD_x {}^tB)_{ii} = [(A \times_H B)x]_i$

c) Si A et $B \in M_{n, p}(\mathbb{C})$, $y \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^p$ montrer que

$$y^*(A \times_H B)x = Tr(D_y^* A D_x {}^tB) .$$

On pourra introduire la matrice colonne $e = {}^t(1, 1, \ldots 1)$, utiliser les questions a) et b) en remarquant que $D_y e = y$

d) En déduire que $x^*(A \times_H \overline{B})x = <D_x^* A D_x, B>$.

IV.B - Dans la suite on suppose $K = \mathbb{R}$, toutes les matrices sont à coefficients réels.

IV.B.1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $T \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$. Que peut-on dire de T si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

IV.B.2) Soient A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $A \times_H B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Que peut-on dire si A et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

IV.B.3) On se propose d'obtenir un encadrement des valeurs propres de $A \times_H B$ quand A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

a) On désigne par $\lambda_{\min}(A)$ (resp. $\lambda_{\min}(B)$) la plus petite valeur propre de A (resp. B) et par $\lambda_{\max}(A)$ (resp. $\lambda_{\max}(B)$) la plus grande.

Montrer que les matrices $B - \lambda_{\min}(B)I_n$ et $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b) Soit $\lambda(A \times_H B)$ une valeur propre de $(A \times_H B)$ et x un vecteur propre pour cette valeur propre ($\|x\|_2 = 1$). Évaluer ${}^tx(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)x$ et en déduire

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(B) \,.\, (\min_i \ a_{ii})$$

c) Montrer que $a_{ii} \geq \lambda_{\min}(A)$ et en déduire la minoration

$$\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) .$$

d) Établir de même la majoration

$$\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B) .$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et, de manière usuelle, tout polynôme est identifié à sa fonction polynôme associée.

Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour un P de $\mathbb{R}[X]$, on considère, de manière usuelle, les dérivées successives de P : $P^{(0)} = P$, et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = [P^{(n)}]'$.

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, un entier naturel n et un réel a, on définit le polynôme de Taylor d'ordre n de P en a par :

$$T_{n,a}(P)(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i .$$

Soit une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et de classe C^n. On rappelle qu'elle admet, en tout point a de cet intervalle, un unique développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + o[(x-a)^n] .$$

La fonction polynôme

$$\left[x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right]$$

est appelée partie régulière de ce développement limité.

Dans la troisième partie, on note $\mathscr{E}_2$ le plan affine euclidien usuel muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans la dernière partie, on note $\mathscr{E}_3$ l'espace affine euclidien usuel de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, encore noté $\mathscr{R}_0$, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les éléments de $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ seront indifféremment appelés vecteurs ou points selon l'interprétation que l'on en a.

Filière MP

Si M est barycentre du système pondéré $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ non nul, on a :

$$M = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right).$$

Chaque point M de $\mathscr{E}_2$ (ou de $\mathscr{E}_3$) est identifié à la famille de ses coordonnées (x,y) (ou (x, y, z)) dans le repère $\mathscr{R}_0$, ce qui est contenu dans la notation $M(x, y)$ (ou $M(x, y, z)$). De même chaque vecteur $\vec{u}$ est identifié à la famille de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}_0$ du repère $\mathscr{R}_0$.

Dans la première partie, on étudie une famille de polynômes.

Ces polynômes interviennent ensuite dans les trois parties qui suivent dans trois situations différentes.

Si la troisième partie utilise un résultat de la deuxième, pour le reste les trois dernières parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie I - Une fonction polynomiale

Un calcul simple qui n'est pas demandé ici (intégrations par parties successives par exemple) donne pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$I_m = \int_0^1 t^m (1-t)^m dt = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Pour tout m entier naturel *non nul*, on considère la fonction polynomiale L_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_m(x) = \frac{1}{I_m}\int_0^x t^m (1-t)^m dt.$$

I.A -

I.A.1) Donner une expression développée de $L_m(x)$ pour $m = 1$ et pour $m = 2$.

I.A.2) Calculer $L_m(x) + L_m(1-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Préciser $L_m(\frac{1}{2})$.

On vérifie que L_m est à coefficients entiers. Nous l'admettrons.

I.B -

I.B.1) Étudier suivant m l'existence ainsi que l'ordre de multiplicité des éventuelles racines de L_m et de L'_m dans l'intervalle $[0,1]$.

I.B.2) En considérant le signe de $L''_m(x)$, étudier la monotonie de l'application

$$\left[x \mapsto \frac{L_m(x)}{x}\right] \text{ sur l'intervalle } \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

I.B.3) Donner une allure de la courbe représentative de L_m sur $[0,1]$. On précisera les points à tangente horizontale, on montrera l'existence d'un centre de symétrie et on précisera la convexité.

I.C - Les résultats de cette question seront utilisés dans la dernière partie.

I.C.1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x,y) \in [0,1]^2 \\ L'_m(x) = L'_m(y) \end{cases}$$

I.C.2) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in [0,1]^3 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ L'_m(\alpha) = L'_m(\beta) = L'_m(\gamma) \end{cases}$$

I.C.3) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in [0,1]^4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ L'_m(\alpha_1) = L'_m(\alpha_2) = L'_m(\alpha_3) = L'_m(\alpha_4) \end{cases}$$

Partie II - Les polynômes de Taylor

Dans cette partie, m est un entier naturel non nul et n est un entier tel que $n > 3m$.

II.A -

On rappelle et on admet que, pour tout a de $\mathbb{R}$, la famille $((X-a)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Vérifier que l'application $[P \mapsto T_{n,a}(P)]$ définit un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

Préciser son image, vérifier que son noyau est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et en donner un générateur.

II.B - Pour (R,S) de $(\mathbb{R}_m[X])^2$, déterminer les polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 du polynôme :

$$U(X) = R(X)L_m(1-X) + S(X)L_m(X).$$

II.C - Pour P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note respectivement P_0 et P_1 ses polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 et on pose :

$$[\Phi(P)](X) = P_0(X)L_m(1-X) + P_1(X)L_m(X).$$

II.C.1) Montrer que l'application $[P \mapsto \Phi(P)]$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.C.2) Préciser les dimensions des sous-espaces propres de cette application et donner pour chacun une base.

Partie III - Un raccord

III.A -

III.A.1)

À l'aide de la première partie, déterminer un polynôme Q_1 tel que :

$$\deg(Q_1) \le 3,\ Q_1(-1) = 0,\ Q_1(1) = 1, \text{ et } Q'_1(-1) = Q'_1(1) = 0.$$

Existe-t-il d'autres polynômes remplissant ces cinq conditions ?

III.A.2) Déterminer de même, sans en donner la forme développée, un polynôme Q_2 tel que :

$$\begin{cases} \deg(Q_2) \le 5 \\ Q_2(-1) = 0, Q_2(1) = 1 \\ Q'_2(-1) = Q'_2(1) = Q''_2(-1) = Q''_2(1) = 0 \end{cases}$$

III.B - Soient $g_1 : t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ de classe C^1 sur $]-\infty, -1]$, paramétrage d'un arc γ_1 et $g_2 : t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, paramétrage d'un arc γ_2.

Si h_1 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_1 en -1 et h_2 la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_2 en 1, on pose :

$$x_3(t) = Q_1(-t)h_1(t) + Q_1(t)h_2(t).$$

De même, si k_1 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de y_1 en -1 et si k_2 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de y_2 en 1, on pose :

$$y_3(t) = Q_1(-t)k_1(t) + Q_1(t)k_2(t).$$

On obtient ainsi une fonction vectorielle $g_3 = (x_3, y_3)$ et on considère γ, raccord de γ_1 et γ_2, l'arc paramétré par g avec :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } t \in]-\infty, -1[\\ g_3(t) & \text{si } t \in [-1, 1] \\ g_2(t) & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Montrer brièvement en s'appuyant sur une étude faite dans la deuxième partie que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.C - Étude d'un exemple

Ici a est un réel strictement positif et on prend :

$$\begin{cases} g_1(t) = (-1 + a(t+1), 1 - a(t+1)) \\ g_2(t) = (1 + a(t-1), 1 + a(t-1)) \end{cases}$$

III.C.1) Représenter sur un même dessin les arcs γ_1 et γ_2.

III.C.2) Donner l'expression développée de la fonction g_3 (on ne demande pas sa représentation graphique).

III.C.3) Montrer que pour $a > 3$, le raccord coupe l'axe des ordonnées en deux points distincts que l'on précisera.

Partie IV - Une animation

On note $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

On considère un ensemble de quatre points $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $\mathscr{E}_3$ non coplanaires, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plan affine qui les contienne tous les quatre. On a ainsi un tétraèdre non aplati $A_1A_2A_3A_4$.

On note (x_i, y_i, z_i) le triplet des coordonnées du point A_i pour $i \in I$.

IV.A -

IV.A.1) Soit i dans I. Justifier l'existence d'un (u_i, v_i, w_i, h_i) de $\mathbb{R}^4$ avec $(u_i, v_i, w_i) \neq (0, 0, 0)$ tel que si l'on pose pour $M(x, y, z)$ de $\mathscr{E}_3$,

$$g_i(M) = u_i x + v_i y + w_i z + h_i \text{, on ait : } \forall j \in I \text{, } g_i(A_j) = \delta_{i,j}.$$

(où de manière usuelle, $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et vaut 0 sinon).

On admet l'unicité du quadruplet (u_i, v_i, w_i, h_i) pour tout i dans I.

IV.A.2) Pour i dans I on considère φ_i la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{, } \varphi_i(x, y, z) = u_i x + v_i y + w_i z.$$

Quel est le rang de la famille $(\varphi_i)_{1 \le i \le 4}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout i dans I et tout $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}_3$, on pose : $G_i(M) = L_m(g_i(M))$.

On considère alors :

$$g = \sum_{i=1}^{4} g_i \text{ et } G = \sum_{i=1}^{4} G_i .$$

On appelle Ω l'isobarycentre de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

On note $\Delta = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E}_3 \,|\, \forall i \in I, 0 \le g_i(M) \le 1\}$

IV.B -

IV.B.1) Préciser $g(A_i)$ pour i dans I et en déduire g.

IV.B.2) Vérifier que tout point M de $\mathcal{E}_3$ est le barycentre du système pondéré $(A_i, g_i(M))_{1 \le i \le 4}$.

IV.B.3) Déterminer α de $\mathbb{R}$ tel que pour tout point M de toute arête $[A_i, A_j]$ avec $(i,j) \in I^2$, $i \ne j$ on ait $G(M) = \alpha$.

IV.C -

IV.C.1) Montrer que Δ est un compact de $\mathcal{E}_3$.

IV.C.2) Montrer que sur chaque face du tétraèdre, G admet un maximum et un minimum. On précisera la valeur de ces extremums, ainsi que les points où ils sont atteints.

On pourra partir du fait que le compact triangulaire limité par trois points non alignés d'un plan est l'ensemble des barycentres à poids positifs des sommets du triangle et que l'on peut toujours supposer que la somme des poids est égal à 1.

IV.C.3) Calculer $G(\Omega)$ et déterminer la différentielle de G en Ω.

IV.C.4) Déterminer les points M de Δ en lesquels la différentielle de G est nulle.

On pourra montrer que la nullité de la différentielle de G en un point M *implique une relation linéaire portant sur les* φ_i *et on utilisera dans ce cas le résultat de IV.A.2.*

IV.C.5) Montrer que la fonction G admet sur Δ un maximum et un minimum et déterminer ces extremums $G_{\min}$ et $G_{\max}$ de G sur Δ ainsi que les points où ils sont atteints.

IV.D - On prend $A_1(1, -1, -1)$, $A_2(-1, 1, -1)$, $A_3(-1, -1, 1)$ et $A_4(1, 1, 1)$.

Pour $m = 1$, on obtient, après un calcul qui n'est pas demandé :

$$G(x, y, z) = \frac{1}{8}[3(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz) + 5].$$

On appelle Σ la surface d'équation $G(x, y, z) = 1$.

On considère $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ la boule fermée de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ et l'on note $S(O, \sqrt{3})$ sa frontière, la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

On admet que pour tout point $M(x, y, z)$ de $S(O, \sqrt{3})$, on a $|xyz| \leq 1$. (Ceci peut se démontrer en utilisant les coordonnées sphériques de M).

IV.D.1) Déterminer les points non réguliers de Σ.

IV.D.2) Montrer que pour tout $P(a, b, c)$ de $S(O, \sqrt{3})$, il existe un et un seul point du segment $[OP]$ qui appartienne à Σ.

On pourra étudier la fonction $h(t) = G(ta, tb, tc)$ *sur* $[0,1]$.

IV.D.3) Qu'en déduit-on pour l'intersection Σ' de Σ avec $\overline{B}(O, \sqrt{3})$? On précisera les points de contact de cette intersection avec le tétraèdre ainsi qu'avec la sphère $S(O, \sqrt{3})$.

IV.D.4) Préciser les sections de Σ et de $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ par le plan médiateur de $[A_3, A_4]$, d'équation $x + y = 0$. Les représenter sur une même figure.

IV.D.5) Décrire l'animation que donne la vue des surfaces de niveau :

$S_\alpha = \{(M \in \Delta) / G(M) = \alpha\}$ lorsque α varie de $G_{\min}$ à $G_{\max}$.

On précisera la position de ces surfaces par rapport au tétraèdre.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.
- On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Partie I -

I.A - On fixe une application φ de E^2 dans $\mathbb{K}$. On suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha\varphi(y, z)$ et $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$.

I.A.1) Pour tout élément x de E, on note $h(x)$ l'application de E dans E telle que $\forall y \in E$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$.

a) Montrer que, pour tout x de E, $h(x)$ est élément du dual de E, noté E^*.

b) Montrer que h est une application linéaire de E dans E^*.

I.A.2) Si A est une partie de E, on note $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A \ \varphi(x, a) = 0\}$. Montrer que $A^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera $A^{\perp}$ au lieu de $A^{\perp\varphi}$.

I.A.3) On dit que φ est non dégénérée si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.
Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme.

I.A.4) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On note $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e.

a) Montrer que la matrice de h dans les bases e et e^* est :

$$\mathrm{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de φ dans la base e et notée $\mathrm{mat}(\varphi, e)$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de x et y dans la base e.

Montrer que $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$ où $\Omega = \mathrm{mat}(\varphi, e)$ et où ${}^tX$ désigne la matrice ligne obtenue en transposant X.

Filière MP

I.B - Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on note q_φ l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in E$, $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$. On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ. On note $Q(E)$ l'ensemble des q_φ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$.

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E, notée φ, telle que $q = q_\varphi$. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q. On dira que q est non dégénérée si et seulement si φ est non dégénérée. Si e est une base de E, on notera $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(\varphi, e)$. On l'appellera la matrice de q dans la base e.

I.B.2) Soit q une forme quadratique sur E. Soit E' un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et soit q' une forme quadratique sur E'.
On appelle isométrie de (E, q) dans (E', q') tout isomorphisme f de E dans E' vérifiant : pour tout $x \in E$, $q'(f(x)) = q(x)$. On dira que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de (E, q) dans (E', q').
Montrer que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\mathrm{mat}(q, e) = \mathrm{mat}(q', e')$.

I.B.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \ldots, c_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$.

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}$, on pose $q_p(x) = 2\sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}$.

a) Montrer que q_p est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{2p}$ et calculer $\mathrm{mat}(q_p, c)$.

b) On appelle *espace de Artin (ou espace artinien)* de dimension $2p$ tout couple (F, q), où F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$, et où q est une forme quadratique sur F telle que (F, q) et $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sont isométriques.
Montrer que dans ce cas, q est non dégénérée.
Lorsque $p = 1$, on dit que (F, q) est un plan artinien.

c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que $(\mathbb{C}^{2p}, q)$ est un espace de Artin.

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, : \text{on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2 .$$

Montrer que $(\mathbb{R}^{2p}, q')$ est un espace de Artin.

e) Si (F, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F de dimension p tel que la restriction de q à G est identiquement nulle.

Partie II -

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, et on note q sa forme quadratique.

II.A -

II.A.1) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note encore $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e. Soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. On note F l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_p$.

a) Montrer que $F^\perp$ est l'image réciproque par h de $\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)$, où h est définie au I.A.1.

b) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

c) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note φ_F la restriction de φ à F^2. On dira que F est singulier si et seulement si φ_F est dégénérée.
Montrer que F est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $E = F \oplus F^\perp$;
- $F^\perp$ est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(x,y) \in F \times G$, $\varphi(x, y) = 0$.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et non singuliers, montrer que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B - Soit q' une seconde forme quadratique sur E dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée φ'. Comme au I.A.1, on note, pour tout $(x,y) \in E^2$, $h(x)(y) = \varphi(x,y)$ et $h'(x)(y) = \varphi'(x,y)$.

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On dit que e est q-orthogonale si et seulement si, pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

II.B.1) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q'(x,y) = 2xy$.

Déterminer une base q-orthogonale et une base q'-orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et pour q' définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que e est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.
Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est un vecteur propre de $h^{-1} \circ h'$.

II.B.4) On suppose que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres distinctes.
Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q'.

II.C -

II.C.1) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et tel que $x \neq 0$.

On se propose de démontrer qu'il existe un plan $\Pi \subset E$ contenant x et tel que $(\Pi, q_{/\Pi})$ soit un plan artinien (où $q_{/\Pi}$ désigne la restriction de l'application q au plan Π).

a) Démontrer qu'il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose $y = z - \dfrac{q(z)}{2}x$. Calculer $q(y)$.

c) Conclure.

II.C.2) Soit F un sous-espace vectoriel singulier de E. On suppose que $(e_1, \ldots, e_s)$ est une base de $F \cap F^\perp$. On note G un supplémentaire de $F \cap F^\perp$ dans F.

a) Montrer que G est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de $F \cap F^\perp$ (en commençant par $\dim(F \cap F^\perp) = 1$, puis $\dim(F \cap F^\perp) > 1$) qu'il existe s plans $P_1, \ldots, P_s$ de E tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

1) Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $(P_i, q/_{P_i})$ est un plan artinien contenant e_i

2) Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, s\}^2$ avec $i \neq j$, P_i est orthogonal à P_j.

3) Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, P_i est orthogonal à G.

II.C.3) Montrer que $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ est non singulier.
On dira que $\bar{F}$ est un complété non singulier de F.

II.C.4) Montrer que si $q/_F = 0$, alors $\dim(F) \leq \dfrac{n}{2}$.

II.C.5) On suppose que $n = 2p$. Montrer que (E,q) est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p tel que $q/_F = 0$.

Partie III -

On note $O(E, q)$ l'ensemble des isométries de (E, q) dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant :

pour tout $x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$.

III.A -

III.A.1) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si, pour tout $(x,y) \in E^2$: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in O(E, q)$, alors $f(F^{\perp}) = (f(F))^{\perp}$.

b) Soit e une base de E. Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$(x,y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ en fonction de $\mathrm{mat}(f, e)$ et de $\mathrm{mat}(\varphi, e)$.

c) Posons $M = \mathrm{mat}(f, e)$ et $\Omega = \mathrm{mat}(\varphi, e)$.

Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si $\Omega = {}^t M \Omega M$.

d) Montrer que si $f \in O(E, q)$, alors $\det(f) \in \{1, -1\}$. On notera :

$$O^{+}(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = 1\} \text{ et } O^{-}(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = -1\}.$$

III.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

a) Montrer que $s \in O(E, q)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux (pour φ).

b) En déduire que les symétries de $O(E, q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, où F est un sous-espace non singulier de E.

c) Lorsque H est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon H la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^{\perp}$. Montrer que toute réflexion de E est un élément de $O^{-}(E, q)$.

d) Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $q(x) = q(y)$ et $q(x - y) \neq 0$.

On note s la réflexion selon $H = \{x - y\}^{\perp}$. Montrer que $s(x) = y$.

III.B -

III.B.1) Supposons que E est un espace artinien de dimension $2p$ et que F est un sous-espace de E de dimension p tel que $q/_F = 0$.

Si $f \in O(E, q)$ avec $f(F) = F$, montrer que $f \in O^{+}(E, q)$.

III.B.2) Soit F un sous-espace de E tel que $\overline{F} = E$ (où $\overline{F}$ est un complété non singulier de F). Montrer que si $f \in O(E, q)$ avec $f/_F = \mathrm{Id}_F$ (où Id_F est l'application identité de F dans F), alors $f \in O^{+}(E, q)$.

III.B.3) Soit $f \in O(E,q)$. On suppose que pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on a $f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x) - x) = 0$.
On se propose de démontrer que $f \in O^{+}(E,q)$ et que E est un espace de Artin.

a) Montrer que $\dim(E) \geq 3$.

b) On note $V = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q/_V = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Notons $H = \{x\}^{\perp}$. Montrer que $q/_H$ n'est pas identiquement nulle.
En déduire qu'il existe $y \in E$ tel que $q(x+y) = q(x-y) = q(y) \neq 0$.

d) On note $U = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Montrer que $q/_U = 0$.

e) Montrer que $U^{\perp} = V = U$.

f) En déduire que E est un espace de Artin et que $f \in O^{+}(E,q)$.

Partie IV -

IV.A - On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si $f \in O(E,q)$, f est la composée d'au plus n réflexions, où $n = \dim(E)$, en convenant que Id_E est la composée de 0 réflexion.»

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque $n = 1$. On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que $n > 1$ et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant E par tout espace vectoriel de dimension $n-1$.

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$.

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(f(x) - x) \neq 0$.

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

IV.B - On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q/_F)$ dans $(F', q/_{F'})$ (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe $g \in O(E,q)$ telle que $g/_F = f$.»

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') = 1$. Soit $x \in F$ avec $x \neq 0$. Posons $y = f(x)$.

a) Montrer que $q(x+y)$ ou $q(x-y)$ est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') > 1$.

a) Montrer qu'il existe F_1 et F_2 non singuliers, tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, avec $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$.

b) Supposons qu'il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g/_{F_1} = f/_{F_1}$. Notons $F'_1 = f(F_1)$. Montrer que $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ et que $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$.

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q/_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h/_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})/_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe $k \in O(E, q)$ telle que $k/_F = f$.

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.

••• FIN •••

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2011

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

- $[\![1;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geqslant 0 \quad (\text{respectivement } {}^tXAX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.

La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.

La troisième partie introduit les matrices de Hilbert et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la **partie IV**.

I Caractérisation des matrices symétriques définies positives

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.A.1) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

I.A.2) Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

I.B – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1;n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A, constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A.

Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A^{(i)}) > 0.$$

I.B.1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

I.B.2) Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.

I.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

a) Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.

b) En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que ${}^tXAX < 0$.

c) Conclure.

I.C – Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in [\![1;n]\!],\ \det(A^{(i)}) \geqslant 0\ ?$$

I.D – Écrire une procédure, dans le langage Maple ou Mathematica, qui prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et qui, en utilisant la caractérisation du **I.B**, renvoie « true » si la matrice M est définie positive, et « false » dans le cas contraire.

II Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

II.A – Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

II.B – On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.

Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.

On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n = \dfrac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)}. \end{cases}$$

II.C – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n\rangle = 0$.

Indication : on pourra intégrer par parties.

II.D –

II.D.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)\,du$.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

II.D.2) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

II.E – Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;

ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Justifier l'unicité d'une telle famille.

II.F – Calculer K_0, K_1 et K_2.

III Matrices de Hilbert

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n.

On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

III.A – ***Étude de quelques propriétés de*** H_n

III.A.1) Calculer H_2 et H_3. Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse.

Dans les questions suivantes de **III.A**, on désigne par n un entier naturel non nul.

III.A.2) Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}\,\Delta_n$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

III.A.3) En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).

III.A.4) Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

III.A.5) Démontrer que H_n admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

III.B – Approximation au sens des moindres carrés

On note $C^0([0;1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $C^0([0;1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.

On étend à $C^0([0;1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de la **partie II** en posant

$$\forall f,g \in C^0([0;1],\mathbb{R}), \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$.)

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour toute fonction $f \in C^0([0;1],\mathbb{R})$, on a donc

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

III.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|$$

III.B.2) Montrer que la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

III.B.3) Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III.B.4) Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f, X^i\rangle$.

III.B.5) Déterminer explicitement Π_2 lorsque f est la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

IV.A – Somme des coefficients de H_n^{-1}

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

IV.A.1) Calculer s_1, s_2 et s_3. Conjecturer de manière générale la valeur de s_n en fonction de n.

IV.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0\leqslant p\leqslant n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_0^{(n)} & + & \dfrac{a_1^{(n)}}{2} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{n} & = & 1\\
\dfrac{a_0^{(n)}}{2} & + & \dfrac{a_1^{(n)}}{3} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} & = & 1\\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\
\dfrac{a_0^{(n)}}{n} & + & \dfrac{a_1^{(n)}}{n+1} & + & \cdots & + & \dfrac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} & = & 1
\end{array}\right.$$

b) Montrer que $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par : $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}X + \cdots + a_{n-1}^{(n)}X^{n-1}$.

Dans les questions suivantes de **IV.A**, on désigne par n un entier naturel non nul.

IV.A.3) Montrer que

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle S_n, Q\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

IV.A.4) Exprimer s_n à l'aide de la suite de polynômes $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie à la **question II.E**.

IV.A.5) Pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$, calculer $K_p(1)$.

IV.A.6) Déterminer la valeur de s_n.

IV.B – Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

IV.B.1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2p}{p}$ est un entier pair.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1; n]\!]$, alors $\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}$ est un entier pair.

IV.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'on peut écrire :

$$K_n = \sqrt{2n+1}\,\Lambda_n$$

où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera.
Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?

IV.B.3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $h_{i,i}^{(-1,n)}$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$; on donnera en particulier une expression très simple de $h_{1,1}^{(-1,n)}$ et $h_{n,n}^{(-1,n)}$ en fonction de n.

b) Calculer $h_{i,j}^{(-1,n)}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$; en déduire que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

c) Montrer que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour tout couple $(i,j) \in [\![2; n]\!]^2$.

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

MP **2012**

4 heures Calculatrices autorisées

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

On note σ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui à tout $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n=x_{n+1}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si M est une matrice carrée, on note ${}^tM$ sa transposée et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, et tout $A=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f)=\sum_{k=0}^{p}a_kf^k$ (avec la convention $f^0=\mathrm{Id}$).

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, l'application $A\mapsto A(f)$ est alors un *morphisme d'algèbres* de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Rappelons que cela signifie que, pour tous A, B de $\mathbb{K}[X]$ et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$, on a :
- $(\alpha A+\beta B)(f)=\alpha A(f)+\beta B(f)$;
- si $A=1$, alors $A(f)=\mathrm{Id}$;
- $(AB)(f)=A(f)\circ B(f)=B(f)\circ A(f)$.

Cas particulier (utile dans la suite du problème) :
- Si $E=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f=\sigma$ et $A=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$, alors $A(\sigma)=\sum_{k=0}^{p}a_k\sigma^k$.
- Pour tout x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y=A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n=\sum_{k=0}^{p}a_kx_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire* (en abrégé une SRL) d'ordre $p\geqslant 0$ s'il existe un polynôme $A=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \sum_{k=0}^{p}a_kx_{n+k}=a_px_{n+p}+a_{p-1}x_{n+p-1}+\cdots+a_1x_{n+1}+a_0x_n=0 \tag{I.1}$$

On dit que la **relation I.1** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire *d'ordre p*, dont A est un *polynôme caractéristique*.

L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **I.1** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit, $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ est la réunion des $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ pour tous les polynômes A non nuls dans $\mathbb{K}[X]$).

I.A – Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$.
On rappelle qu'il en résulte deux choses :
- d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal ;
- d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est l'*ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B – Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$?

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.
Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p \geqslant 0$, que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

I.C.2) Déterminer $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geqslant 1$) et en donner une base.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geqslant 1$ et $A = (X-\lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.
On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.
a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.
b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$.

I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)^{m_k}$, où :
- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ sont les racines *non nulles distinctes éventuelles* de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)^{m_k} = 1$;
- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine *éventuelle* de A. Si 0 n'est *pas* racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg A = p$.

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\, \lambda_k^n$$

où, pour tout k de $\{1, \ldots, d\}$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q_k < m_k$.

Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\, \lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

On identifie toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne qui lui correspond.

II.A – Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre *minimal* $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.

II.A.1) Montrer que la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1}) \end{cases}$ est injective.

En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\mathrm{rang}(H_n(x)) = p$.

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B – Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \mathrm{rang}(H_m(x))$.

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$, où $b_0, \dots, b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1 X + b_0$.

II.C – Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+4} = x_{n+3} - 2\,x_{n+1}$$

II.C.1) Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des x_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.

II.C.5) On décide de modifier *uniquement* la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2** et **II.C.3**.

III Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On note $p = [(n+1)/2]$ la partie entière de $(n+1)/2$.

On a donc $n = 2p$ si n est pair, et $n = 2p - 1$ si n est impair.

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

Un élément de $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *ordonné* s'il vérifie si $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hankel* s'il existe $a = (a_0, \dots, a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que pour tous i et j de $\{1, \dots, n\}$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A – Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

On note alors $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le *spectre ordonné* de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?

III.A.2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors le n-uplet $(\lambda, \dots, \lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

III.B – Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0, \dots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On définit deux vecteurs $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\, a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} & \text{si } i \in \{1, \dots, p\} \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1}\, a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} & \text{si } i \in \{p+1, \dots, n\} \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.

III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)\, a_k^2$$

III.B.2) Montrer que $\langle v, w\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\|v\|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

III.B.3) Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \langle v, w\rangle^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant K_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \tag{III.1}$$

III.B.4) Vérifier que si $n = 3$, la **condition III.1** équivaut à : $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geqslant 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$.

III.C – D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on *admet* le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ et $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n+1-i} \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \tag{III.2}$$

Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{1,2p-1} = 1 \qquad b_{2p-1,1} = 1 \qquad b_{p,p} = -2$$

tous les autres coefficients de B étant nuls (on rappelle que p désigne la partie entière de $(n+1)/2$).

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

III.C.2) Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$.
On note $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Établir que

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant 0 \tag{III.3}$$

III.D – Cas $n = 3$

Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois réels vérifiant

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \qquad \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geqslant 0 \qquad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geqslant 0$$

On définit la matrice de Hankel $M = H(a,b,c,b,a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b \geqslant 0$) en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de telle sorte que $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

III.D.3) Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la **condition III.3** dans le cas $n = 3$?
En utilisant un triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$, montrer que pour $n = 3$, la **condition III.1** n'est pas suffisante.

• • • FIN • • •

On rappelle que si Φ et Ψ sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel réel E telles que Ψ s'annule sur le noyau de Φ, alors il existe un réel λ tel que $\Psi = \lambda\Phi$.

Notations et objectifs du problème

- On note E l'espace $C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
- Pour a réel strictement positif, on note :

$$E_a = \left\{ f \in E,\ \int_0^1 f(x)dx = a \right\}.$$

- On considère, dans l'espace physique usuel, un plan vertical $\mathcal{P}$ orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox, Oy), de sorte que l'axe Ox soit dirigé par l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$: on écrit alors $\vec{g} = g\,\vec{i}$ avec $g > 0$. On note A le point de coordonnées $(1, a)$ où $a > 0$. À toute fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$, telle que, $f(0) = 0$ et $f(1) = a$, on associe son graphe (Γ). Un point mobile $M(t)$, lâché du point O sans vitesse initiale et soumis à l'action de la pesanteur, est assujetti à se déplacer sur (Γ). Si T est le temps mis par ce mobile pour parvenir au point A, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$ sont des fonctions de classe C^2 sur $[0, T]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \\ x'(t) > 0 \\ gx(t) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}(t)\right)^2\right] \end{cases} \quad \text{pour } 0 < t \le T$$

On se propose d'étudier le problème du brachistochrone relatif à A : déterminer les courbes (Γ) telles que le temps T soit minimum.

Partie I - Étude d'une courbe paramétrée

On note (C) la courbe du plan $\mathcal{P}$ décrite, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par le point $M(\theta)$ de coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ avec :

$$\begin{cases} x(\theta) = 1 - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\theta - \sin 2\theta \end{cases}.$$

I.A - Préciser des transformations géométriques simples laissant (C) globalement invariante.

I.B - Tracer (C) dans le système d'axes (Ox, Oy) représentés de sorte que l'axe Ox soit vertical et dirigé vers le bas. Calculer la longueur du sous arc de (C) délimité par deux points de rebroussement consécutifs.

I.C - Déterminer, moyennant une orientation convenable des sous arcs réguliers de (C), une fonction vectorielle

$$\theta \longmapsto \overrightarrow{\tau(\theta)} \text{ de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R},$$

telle que, pour tout point $M(\theta)$ régulier de (C), le vecteur $\overrightarrow{\tau(\theta)}$ soit le premier vecteur du repère de Frénet relatif à ce point.

I.D - Déterminer de même, une fonction numérique

$$\theta \longmapsto \alpha(\theta), \text{ de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R},$$

telle, que pour tout θ : $\alpha(\theta) = (\vec{i}, \overrightarrow{\tau(\theta)}) \bmod 2\pi$.

En déduire la valeur du rayon de courbure $R(\theta)$ en un point régulier de (C) relativement aux orientations choisies précédemment.

I.E - Pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on note g_λ la fonction numérique définie sur $[0, 1[$ par :

$$s \longmapsto \frac{\lambda\sqrt{s}}{\sqrt{1-\lambda^2 s}}.$$

I.E.1) Prouver que g_λ est intégrable sur $[0, 1[$. On posera, pour $x \in [0, 1]$:

$$f_\lambda(x) = \int_0^x g_\lambda(s)ds \text{ et on notera } (C_\lambda) \text{ le graphe de } f_\lambda.$$

I.E.2) Sans calculer l'intégrale, démontrer que la fonction : $\lambda \longmapsto f_\lambda(1)$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$.

I.E.3) Dans cette question, on suppose que $0 < \lambda < 1$ et on pose $\lambda = \sin\omega$ avec $\omega \in]0, \pi/2[$. Pour $\theta \in [0, \omega]$ exprimer

$$f_\lambda\left(\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right)$$

en fonction de λ et θ. En conclure que (C_λ) est homothétique à un sous arc de (C). Calculer, en fonction de ω, la valeur de $f_\lambda(1)$.

I.E.4) Préciser la valeur de $f_1(1)$.

Partie II - Étude d'un problème de minimum

II.A - Si $z \in E$, montrer que la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}}$$

est intégrable sur $]0,1]$. On posera dans la suite :

$$U(z) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}}dx.$$

Justifier l'existence de :

$$m(a) = \inf_{z \in E_a} U(z) \text{ et donner un encadrement de } m(a).$$

II.B - Déterminer la limite de $m(a)$ quand a tend vers 0.

II.C - Dans cette question, on cherche une condition nécessaire sur le réel $a > 0$ pour qu'existe $z \in E_a$ vérifiant : $U(z) = m(a)$. On désigne par (a, z) un tel couple dont on suppose l'existence.

II.C.1) Soit $h_0 \in E_0$, démontrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = U(z + th_0) \qquad (1)$$

est de classe C^1.

II.C.2) Exprimer $\phi'(0)$ sous forme d'une intégrale ; en déduire l'existence d'un réel λ, indépendant de h, tel que :

$$\forall h \in E, \int_0^1 \frac{z(x)h(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lambda \int_0^1 h(x)dx.$$

II.C.3) On fixe $x_0 \in]0, 1[$ et $N \in N^*$ tel que

$$\frac{1}{N} < \min(x_0, 1 - x_0).$$

Pour $n > N$, on note h_n l'élément de E défini par :

- $h_n(x) = 0$ pour $|x - x_0| \geq 1/n$.
- h_n est affine sur $[x_0 - 1/n, x_0]$ et sur $[x_0, x_0 + 1/n]$.
- $h_n(x_0) = n$.

Soit $f \in C(]0, 1[, \mathbb{R})$. La fonction $h_n f$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 h_n(x) f(x) dx = f(x_0).$$

II.C.4) Prouver que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\frac{z(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} = \lambda\sqrt{x}.$$

Montrer que $\lambda \in]0, 1[$ et donner l'expression de z sur $[0, 1]$.

II.C.5) Montrer que $0 < a < \pi/2$.

II.D - On se donne réciproquement un réel $a \in]0, \pi/2[$.

II.D.1) Démontrer l'existence d'un unique $\lambda \in]0, 1[$ tel que $a = f_\lambda(1)$.

II.D.2) Montrer que, si $h_0 \in E_0$, la fonction :

$$t \mapsto U(g_\lambda + th_0).$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

II.D.3) Prouver que $U(g_\lambda + h_0) \geq U(g_\lambda)$.

II.D.4) Déduire de ce qui précède que si $a \in]0, \pi/2[$, il existe un unique $z \in E_a$ tel que $U(z) = m(a)$. Donner, en fonction de $\omega \in]0, \pi/2[$, tel que $\sin\omega = \lambda$, les valeurs de a et de $m(a)$.

Partie III - Étude du brachistochrone relatif à A

On considère maintenant le problème du brachistochrone défini dans le préambule dont on reprend les notations. Le réel λ est défini comme dans II.D.1.

III.A - f étant une fonction quelconque de classe C^1 sur $[0, 1]$, exprimer, à l'aide de $U(f')$, le temps mis par le point mobile $M(t)$ décrivant (Γ) pour parvenir au point A.

III.B - En déduire que, si $0 < a < \pi/2$, le problème du brachistochrone a une solution unique (Γ) que l'on précisera et calculer le temps T mis par le mobile, décrivant (Γ) pour parvenir en A.

III.C - Pour $t \in [0, T]$, calculer, en fonction de λ et t, la vitesse numérique v, l'accélération normale γ_N et l'accélération tangentielle γ_T du mobile au point $M(t)$ de (Γ) orientée dans le sens des t croissants $(v \geq 0)$ (on pourra s'aider d'un paramètre judicieux).

••• FIN •••

Les hypothèses des théorèmes utilisés devront être précisées et vérifiées.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction ζ, qui sera définie dans la première partie, et d'établir, pour s réel de l'intervalle $]0,\ 1[$, l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \qquad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

Avec :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$$

On posera, dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul N et pour tout réel $s > 0$:

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\ , \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\ , \quad K_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^s}$$

Partie I - Définition et propriétés de ζ

I.A - Définition de ζ.

Soit $s > 0$, n un entier naturel non nul. Posons :

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{dt}}{t^s}$$

I.A.1) Montrer que :

$$0 \le u_n(s) \le \frac{s}{n^{s+1}}$$

I.A.2) Prouver que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que sa somme, qui sera notée U dans la suite, est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

I.A.3) Prouver que, pour $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite de terme général :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée $\zeta(s)$ que l'on exprimera à l'aide de $U(s)$.

I.A.4) Prouver que la suite de terme général : $H_N(1) - \ln N$ admet une limite strictement positive notée γ dans la suite du problème.

I.B - Autre expression de ζ.

I.B.1) Soit s un réel strictement positif ; prouver que la série de fonctions de la variable réelle s :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur $]0, +\infty[$ une fonction de classe C^1 qui sera notée f dans la suite.

I.B.2) Exprimer $S_{2N}(s)$ à l'aide de $H_{2N}(s)$ et $H_N(s)$. En déduire, si $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$$

I.B.3) En déduire, en décomposant autrement $S_{2N}(s)$ que, pour les mêmes valeurs de s, la suite de terme général

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite qu'on exprimera à l'aide de $\zeta(s)$.

I.C - Calcul approché de valeurs de ζ.

Dans cette question on négligera les erreurs d'arrondi.

I.C.1) Donner un algorithme de calcul approché de $f(s)$ à une précision ε fournie. L'appliquer au calcul de $\zeta(1/2)$ à 10^{-1} près.

I.C.2) Proposer un algorithme de calcul de $S_{2^p}(s)$ fondé sur la relation suivante, dont la vérification n'est pas demandée :

$$H_{4N}(s) = (1 + 2^{-s})H_{2N}(s) - 2^{-s}H_N(s) + \sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

Quels sont ses avantages par rapport à l'algorithme de la question précédente ? Calculer $\zeta(4/3)$ à 10^{-3} près.

I.D - Étude au voisinage de $+\infty$.

Quelle est la limite de f lorsque s tend vers $+\infty$?

I.E - Étude au voisinage de 1.

I.E.1) Montrer que, lorsque s est au voisinage de 1 :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

I.E.2) Prouver, en calculant $f'(1)$ de deux façons, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2$$

Partie II - Calcul de sommes de séries et d'intégrales

Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur le segment $[-\pi, \pi]$, à valeurs complexes. On pose, pour tout entier naturel :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos ntdt$$

On notera ψ la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \psi(x) = \frac{\phi(x) + \phi(-x)}{2}$$

II.A - Exprimer les coefficients de Fourier (en cosinus et sinus) de ψ à l'aide des a_n. Pour $x \in \mathbb{R}$, prouver la convergence de la série de terme général $a_n \cos nx$ et calculer à l'aide de la fonction ϕ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi$$

II.B - Montrer que la série de terme général a_n est absolument convergente.

II.C - Exprimer, à l'aide de $\phi(0)$, $\phi(\pi)$, $\phi(-\pi)$, les deux sommes suivantes

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$$

II.D - En choisissant comme fonction ϕ la fonction $t \quad e^{\lambda t}$ et en donnant au nombre complexe λ des valeurs adéquates, prouver les relations suivantes :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

II.E - Soient $s > 0$ et $x > -1$; prouver l'intégrabilité, sur $]0, +\infty[$ de

$$t \quad \frac{t^{s-1}}{e^t + x}$$

On désignera, dans la suite, par $\Gamma(s)$ la valeur de l'intégrale correspondante pour $x = 0$ (cf préambule).

II.F - Dans cette question x est un réel tel que $|x| < 1$ et s un réel strictement positif.

II.F.1) Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x}\, dt = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^s}$$

II.F.2) En déduire la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}\, dt = \Gamma(s) f(s)$$

II.G - Dans cette question, x et s sont des réels de l'intervalle $]\,0, 1\,[$.

On fixe x et on définit une suite (υ_n) de fonctions définies sur l'intervalle $]\,0, 1\,]$ par :

$$\begin{cases} \upsilon_0(t) = t^{x-1} \\ \upsilon_n(t) = (-1)^n t^{n-1}[t^x - t^{-x}] \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

II.G.1) Calculer $\int_0^1 \upsilon_n(t)dt$. Prouver la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

II.G.2) Soit a un réel strictement positif. Calculer les intégrales :

$$I(a, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2 + t^2}\, dt \quad , \qquad J(a, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \arctan\left(\frac{a}{t}\right) dt\,.$$

Partie III - Équation fonctionnelle de la fonction ζ

III.A - Où l'on obtient (E).

Dans cette question, s vérifie toujours $0 < s < 1$. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\phi_N(x) = \frac{1}{e^x + 1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2}$$

III.A.1) Etablir les inégalités :

$$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{(2N-1)\pi}{x}\right) \leq \phi_N(x) \leq \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{(2N+1)\pi}{x}\right)$$

III.A.2) En déduire l'encadrement :

$$\frac{(2N-1)^s}{2s} - K_N(1-s) \leq \pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)f(s) \leq \frac{(2N+1)^s}{2s} - K_N(1-s)$$

puis l'équation fonctionnelle (E).

III.B - Retour sur l'étude de ζ au voisinage de 0.

III.B.1) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\Gamma'(1) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt$$

On pourra utiliser l'inégalité $(1 - t/n)^n \leq e^{-t}$ *que l'on ne démontrera que si l'on a le temps.*

III.B.2) En utilisant un changement de variable, déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

III.B.3) Trouver un développement limité au premier ordre de ζ au voisinage de 0.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Objet du problème :

Il s'agit de calculer par plusieurs méthodes les intégrales I_n définies dans la partie II.

Notations : $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Partie I -

I.A - Soit f une application de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin xt \, dt = 0$.

I.B - On note $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin nt}{\sin t} dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

I.B.1) Justifier l'existence de J_n.

I.B.2) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

I.B.3) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n et en déduire une expression de J_n en fonction de n.

I.B.4) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$, et en déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

I.B.5) Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

I.C -

I.C.1) Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a \dfrac{\sin nt}{\sin t} \, dt$.

Filière PSI

I.C.2) Soit $a \in \left]0, \pi\right[$. Prouver que l'application f telle que

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ sur } [0, a].$$

On pourra écrire : $f(x) = \dfrac{\dfrac{\sin x - x}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}$, pour $x \in \left]0,a\right]$.

I.C.3) Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin nt}{t}dt - \int_0^a \frac{\sin nt}{\sin t}dt\right) \text{ lorsque } a \in \left]0, \pi\right[.$$

I.C.4) En déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin nt}{t}dt \text{ lorsque } a = \frac{\pi}{2}, \text{ puis } a < \frac{\pi}{2}, \text{ puis } a > \frac{\pi}{2}.$$

I.D - En utilisant les résultats précédents et l'intégrale $\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$, montrer que la fonction $F : X \mapsto \int_0^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ admet $\frac{\pi}{2}$ pour limite lorsque x tend vers en $+\infty$.

On posera $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

I.E - En utilisant $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$, montrer que l'application

$$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right] \text{ n'est pas intégrable sur } \left]0, +\infty\right[.$$

Partie II -

II.A - Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'application

$$\left[t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n\right] \text{ est intégrable sur } \left]0, +\infty\right[. \text{ On pose :}$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt.$$

II.B - Montrer que : $I_1 = I_2$ (I_1 a été définie en I.D).

II.C - Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

II.D - Montrer que : $I_n > 0$ pour $n \geq 1$. (On pourra utiliser une partition judicieuse de l'intervalle d'intégration).

Partie III -

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on considère les applications

$g_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (\sin t)^n$

et $h_{n,k} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h_{n,k} = \dfrac{1}{t^{n-k}} g_n^{(k)}(t)$,

où $g_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de g_n.

III.A - Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, $h_{n,k}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B - Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, la valeur de l'expression

$(n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$ ne dépend pas de k.

III.C - Pour $n \geq 2$, prouver que la fonction $G : X \mapsto \int_0^X h_{n,k}(t)\, dt$ admet en $+\infty$ une limite finie, notée $\int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt$, et que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\int_0^{+\infty} h_{n,n-1}(t) dt = (n-k-1)! \int_0^{+\infty} h_{n,k}(t) dt .$$

III.D - En déduire, pour $n \geq 2$: $I_n = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} g_n^{(n-1)}(t) dt$.

III.E -

III.E.1) Établir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$ les résultats suivants :

$$4^p (\sin t)^{2p} = C_{2p}^p + 2 \sum_{k=1}^{p} (-1)^k C_{2p}^{p-k} \cos(2kt) \qquad (1)$$

$$4^p (\sin t)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p+1}^{p-k} \sin(2k+1)t \qquad (2)$$

III.E.2) En déduire, en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p+1$, une expression de I_n du type $q_n \pi$ où q_n est une somme de nombres rationnels (on pourra faire intervenir I_1 dans les calculs).

Retrouver la valeur de I_2, puis calculer I_3 et I_4.

Partie IV -

IV.A - Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel positif l'existence de l'intégrale :

$$A_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin tx)^n}{t^n(1+t^2)}\, dt .$$

IV.B - Montrer que l'application $[x \mapsto A_n(x)]$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle vérifie, pour tout $n \geq 2$, l'équation différentielle :

$$(E_n) \;:\; y'' - n^2 y = n(n-1)A_{n-2}(x) - n^2 x^{n-1} I_n .$$

IV.C -

IV.C.1) Résoudre l'équation (E_2).

IV.C.2) En déduire une expression de A_2 à l'aide de I_2 (on considérera les valeurs de $A_2(0)$ et $A'_2(0)$).

IV.C.3) Montrer que $A_2(x) = O(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$ et retrouver ainsi la valeur de I_2.

IV.D - Exprimer A'_1 à l'aide de A''_2 et en déduire une expression de A_1.

IV.E - En procédant de manière analogue à IV.C, obtenir A_3 et I_3.

IV.F - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n peut se mettre sous la forme :

$$A_n(x) = e^{-x} Q_n(e^{-x}) + R_n(x) ,$$

où Q_n et R_n sont des fonctions polynômes vérifiant :

le degré de R_n est égal à $n-1$;

le degré de Q_n est égal à n ;

R_n a même parité que $n-1$;

Q_n a même parité que n .

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Définitions et notations

On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et continues dans l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles.

Pour f et g éléments de E, on pose $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, ce qui définit sur E un produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \ \|$ (on rappelle que $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$) et munit E d'une structure d'espace préhilbertien réel.

On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie la condition

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, (\Phi_m|\Phi_n) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Soit Φ une suite orthonormale de E.

1) Si $n \in \mathbb{N}$, on désigne par V_Φ^n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{\Phi_j | 0 \leq j \leq n\}$, par $\prod_\Phi^n$ l'opérateur de projection orthogonale de E sur V_Φ^n et enfin par $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ à V_Φ^n.

2) On désigne par V_Φ le sous-espace vectoriel de E réunion des V_Φ^n

$$V_\Phi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_\Phi^n \ ;$$

par définition V_Φ est égal à l'ensemble des éléments de E qui sont combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille, c'est-à-dire qui s'écrivent sous la forme $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \Phi_{j_i}$, où $j_1, j_2, \ldots, j_p$ sont des entiers distincts et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des coefficients réels.

3) On dit que la suite orthonormale Φ est totale dans E si pour tout élément f de E il existe une suite $(f_n)_{\mathbb{N}}$ d'éléments de V_Φ convergeant vers f.

Filière PSI

Enfin pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\cos(n\pi x) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad ; \qquad S_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)\pi x)$$

et on note $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La partie IV est largement indépendante des trois parties précédentes.

Partie I - Généralités sur les suites orthonormales

I.A - Montrer que C et S sont des suites orthonormales de E.

I.B - Soit Φ une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

I.B.1) Établir la formule $\|f\|^2 = \left\|\prod_\Phi^n(f)\right\|^2 + [d_\Phi^n(f)]^2$.

I.B.2) Calculer

$$\sup_{\|f\| = 1} \left\|\prod_\Phi^n(f)\right\|$$

I.B.3) Expliciter $\prod_\Phi^n(f)$ dans la base $\{\Phi_j | 0 \le j \le n\}$.

En déduire que la série de terme général $(f|\Phi_k)^2$ est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (f|\Phi_k)^2 \le \|f\|^2$$

I.C - On suppose toujours que Φ est une suite orthonormale de E.

I.C.1) Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V_Φ, convergeant dans E et soit $f = \lim_{k \to \infty}(f_k)$.

a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\quad n \ge N \Rightarrow \left\{ f - \prod_\Phi^n(f) = f - f_k + \prod_\Phi^n(f_k - f) \right\}$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^{n}(f) - f \right\| = 0$.

I.C.2) Démontrer alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) Φ est totale dans E.

ii) $\forall f \in E$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \prod_{\Phi}^{n}(f) - f \right\| = 0$.

I.C.3) **On suppose de plus dans cette question seulement** que Φ est totale dans E.
Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ expliciter $\|f\|^2$ et $[d_{\Phi}^{n}(f)]^2$ à l'aide des $(f|\Phi_k)$.

I.D - Étude de la suite C.

I.D.1) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue paire périodique et de période 2 notée $\tilde{f}$ telle que sa restriction à $[0,1]$ soit égale à f.

I.D.2) Montrer alors que la suite C définie dans le préambule est totale dans E. On pourra introduire les coefficient de Fourier de la fonction 2π-périodique h définie par $h(x) = \tilde{f}\left(\frac{x}{\pi}\right)$, la fonction $\tilde{f}$ étant celle de la question précédente.

I.D.3) Exhiber une suite orthonormale de E non totale dans E.

Partie II - Fonctions lipschitziennes

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction f définie dans I et à valeurs réelles est dite lipschitzienne dans I si elle vérifie la condition :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\forall (x,y) \in I^2), \quad |f(x) - f(y) \le C|x-y|$$

On notera $\mathrm{Lip}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies et lipschitziennes dans I.

II.A - Propriétés élémentaires.

II.A.1) Vérifier que $\mathrm{Lip}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I, \mathbb{R})$.

Le produit de deux éléments de $\mathrm{Lip}(I, \mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\mathrm{Lip}(I, \mathbb{R})$?

si $f \in \mathrm{Lip}(I, \mathbb{R})$ justifier l'existence du réel $k(f)$ défini par

$$k(f) = \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \quad | \quad (x,y) \in I^2, x \neq y \right\}$$

Ce réel sera appelé la constante de Lipschitz de f.

II.A.2) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, vérifier que $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $C^0(I,\mathbb{R})$. Exhiber une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ mais non lipschitzienne sur ce même intervalle.

II.B - Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

Montrer que f' est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.

Exprimer dans ce cas la constante de Lipschitz à l'aide de f'.

II.C - Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ qui converge simplement sur I vers une fonction f. On suppose de plus que l'ensemble des $\{k(f_n) | n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Montrer que $f \in \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

II.D - Soit $g \in \mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $k(g) \le 1$.

II.D.1) Montrer qu'il existe $\widehat{g} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :

$$k(\widehat{g}) \le 1 \text{ et } \forall x \in [0,1] \qquad \widehat{g}(x) = g(x)$$

II.D.2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $g_n(x) = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \widehat{g}(t)dt$.

Montrer que g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à dérivée bornée par 1.

Montrer que la suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{g}$.

II.E - Dans les deux dernières questions de cette partie les suites S et C sont celles définies dans le préambule.

Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$.

II.E.1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $(f|C_n)$ en fonction de $(f'|S_{n-1})$.

II.E.2) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \le \frac{1}{\pi^2}\|f'\|^2$$

II.F - Soit $f \in \mathrm{Lip}([0,1],\mathbb{R})$.

II.F.1) Montrer que la série de terme général $n^2(f|C_n)^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(f|C_n)^2 \le \frac{1}{\pi^2}k(f)^2$$

II.F.2) En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_c^{n-1}(f) \le \frac{1}{n\pi}k(f)$.

Partie III - Constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale

L'objectif est de montrer que la suite des constantes de Lipschitz des éléments d'une suite orthonormale de E est toujours minorée par une suite de la forme $(\Gamma n)_{n \in \mathbb{N}}$ où Γ est une constante positive indépendante de la suite choisie dans E.

III.A - Soient $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites orthonormales de E.

Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n + \sum_{j=0}^{m} d_\Phi^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq m + 1$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{2n-1} d_\Phi^{n-1}(\Psi_j)^2 \geq n$$

III.B - On donne maintenant une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormale de E.

On suppose de plus que toutes les fonctions Φ_n sont lipschitziennes dans $[0,1]$.

III.B.1) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{2n-1} k(\Psi_j)^2 \geq \pi^2 n^3$$

III.B.2) Montrer que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ est non bornée.

III.B.3) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} k(\Psi_n) = +\infty$.

III.B.4) Trouver la valeur de $k(C_n)$.

III.B.5) Montrer qu'il existe un réel $\Gamma > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite orthonormale $\Psi = (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ telle que la suite $(k(\Psi_j))_{j \in \mathbb{N}}$ soit une suite croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ k(\Psi_n) \geq \Gamma n$$

Ce résultat est dû à W. Rudin (1952).

Partie IV - Constantes de Lipschitz des polynômes de Legendre

Le but de cette dernière partie est le calcul des constantes de Lipschitz d'une suite orthonormale d'éléments de E constituée de polynômes.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \quad , \quad P_n = U_n^{(n)} \quad , \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n$$

La notation $f^{(n)}$ représente la dérivée n-ième de la fonction f.

On démontre, et on admettra, que l'on a :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

IV.A - Montrer qu'il existe une unique suite de réels tous strictement positifs notée $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $Q = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R},\ Q_n(x) = \alpha_n L_n(2x-1)$$

est une suite orthonormale de E.

Donner la valeur de α_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, la notation Q_n désigne l'élément ainsi calculé.

IV.B -

IV.B.1) Soit $f \in E$ donné. Montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

IV.B.2) Montrer que la suite Q définie ci-dessus est totale dans E.

Pour cela on pourra montrer que la suite $(d_Q^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ en appliquant le théorème de Weierstrass à la fonction $f \in E$ donnée.

IV.B.3) Déterminer toutes les suites orthonormales $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E possédant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n$$

IV.C - Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{R}\,,\ P_n(x) = n! \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

IV.D - Soient $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

La lettre θ désigne une variable réelle.

IV.D.1) Démontrer que si $|x| \leq 1$ alors $L_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^n d\theta$.

On pourra remarquer que

$$x + i\sqrt{1-x^2}\,\cos\theta = \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\quad e^{i\theta}\right)\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x}{2}}\quad e^{-i\theta}\right)$$

IV.D.2) Établir que

$$\max_{x \in [-1,+1]} |L_n(x)| = 1$$

Quelles sont les valeurs de $x \in [-1,+1]$ telles que $|L_n(x)| = 1$?

IV.E -

IV.E.1) En remarquant que $(x^2-1)U'_n(x) = 2nxU_n(x)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

IV.E.2) Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x)$$

IV.F - Calculer enfin la valeur $k(Q_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations et objectifs du problème

Pour toutes les questions géométriques on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère orthonormé naturel. Le but de ce problème est d'étudier quelques caractéristiques du mouvement sur l'axe Ox d'un mobile qui se trouve à l'origine O au temps initial $t = 0$ et au temps $t = 1$ et dont la vitesse initiale est nulle.

- L'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}$. Si (Φ) est une famille finie d'éléments de $\mathscr{C}$, le sous-espace de $\mathscr{C}$ qu'engendre (Φ) est noté $\mathrm{Vect}(\Phi)$.
- La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}$ est notée $\| \ \|_\infty$.
- On note $\langle \ | \ \rangle$ le produit scalaire sur $\mathscr{C}$ défini par :

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

L'orthogonalité entre éléments de $\mathscr{C}$ est toujours relative à ce produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \ \|_2$. L'orthogonal d'un sous-espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{E}^\perp$.

- On désigne par u l'élément de $\mathscr{C}$ défini par $u(t) = \sqrt{3}(1-t)$ et par $\mathscr{H}$ l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}(u)$.
- On appelle *mouvement admissible* toute application ξ de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\xi(0) = \xi'(0) = \xi(1) = 0$$

On note $\mathscr{A}$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ constitué des mouvements admissibles.

On établit d'abord des résultats préliminaires très proches du cours et utiles dans tout le problème. Dans la partie II on calcule la meilleure borne pour la moyenne quadratique de la vitesse en fonction de l'accélération. La partie I fait établir des résultats qui servent dans la fin de la partie II ; on peut admettre ces résultats pour traiter la partie II.

Filière PSI

Dans tout le problème, on note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et e_k l'élément de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\forall t \in [0,1],\, e_k(t) = \sqrt{2}\cos(\omega_k t)$$

On pose, par ailleurs, $\Omega =]0,+\infty[- \{\omega_k |\ k \in \mathbb{N}\}$, complémentaire de $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans $]0,+\infty[$.

Résultats préliminaires

A - Soit $h \in \mathcal{C}$, $h \neq 0$. Justifier l'égalité

$$\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(h) \oplus \mathrm{Vect}(h)^{\perp}$$

et montrer soigneusement que $(\mathrm{Vect}(h)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(h)$.

On note Π_h le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(h)^{\perp}$.

Démontrer que, pour $f \in \mathcal{C}$:

$$\Pi_h(f) = f - \frac{\langle f|h\rangle}{\|h\|_2^2}h$$

B -Montrer que l'application $\xi \mapsto \xi''$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}$ dont l'isomorphisme réciproque est défini par

$$z \mapsto \left(t \mapsto \int_0^t (t-s)z(s)ds\right)$$

Partie I - Comportement asymptotique de racines d'équations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les coefficients de Fourier en sinus et cosinus d'une fonction réelle f, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 4-périodique, donnés par :

$$a_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx \ ; \qquad b_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx\,.$$

I.A - Démontrer que $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}$.

I.B - Pour $f \in \mathcal{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 4-périodique et paire, telle que, pour $t \in]-2, 2]$ on ait :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 1 \\ -f(2-t) & \text{si } t \in]1,2] \end{cases}$$

I.B.1) Donner, sans démonstration, quelques éléments de symétrie du graphe de $\tilde{f}$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

I.B.2) Expliciter, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1}(\tilde{f})$ en fonction $\langle f|e_k\rangle$. Calculer les autres coefficients de Fourier de $\tilde{f}$.

I.B.3) Montrer, en citant précisément les théorèmes utilisés, que, si $f \in \mathcal{C}$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k|f\rangle^2$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \langle f|e_k\rangle e_k \right\|_2 = 0$$

I.B.4) Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et si $f(1) = 0$, alors, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f|e_k\rangle e_k(t)$$

La série de fonctions du second membre converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

I.B.5) En appliquant les résultats des deux questions précédentes aux fonctions u et $t \mapsto \sin(\omega(t-1))$, prouver les relations :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}$$

et, pour $\omega \in \Omega$

$$\tan\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

I.B.6) On note ϕ la fonction définie, pour $\omega \in \Omega$, par :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\omega}[\omega - \tan\omega]$$

Démontrer que, pour $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)} = \phi(\omega)$$

I.C - On pose pour $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\phi_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)}$$

I.C.1) Montrer que, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ϕ_n a une unique racine dans l'intervalle $]\omega_k, \omega_{k+1}[$. On note μ_n la plus petite de ces racines, c'est-à-dire la racine de ϕ_n appartenant à l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

I.C.2) Comparer ϕ_n et ϕ_{n+1} sur $]\omega_0, \omega_1[$. En déduire que la suite $(\mu_n)_{n \geq 2}$ converge en décroissant vers une limite $\mu \in [\omega_0, \omega_1[$.

I.C.3) Montrer que la suite $(\phi - \phi_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]\omega_0, \omega_1[$. En conclure que μ est différent de ω_0 et est l'unique racine de ϕ dans l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

Calculer une valeur approchée de μ à 10^{-6} près en justifiant l'algorithme utilisé.

Partie II - Estimation de la vitesse en moyenne quadratique

On se propose, dans cette partie, d'établir que, si $\xi \in \mathcal{A}$:

$$\|\xi'\|_2 \leq \frac{1}{\mu} \|\xi''\|_2$$

où μ a été défini dans la question I.C.2, et que cette constante $\frac{1}{\mu}$ est la plus petite possible valable quel que soit $\xi \in \mathcal{A}$.

- L'entier naturel n est toujours supposé supérieur ou égal à 2.
- Pour $h \in \mathcal{C}$, la notation Π_h est celle définie dans la question A - des préliminaires.

II.A - Pour $z \in \mathcal{C}$, on note $T(z)$ la fonction y définie sur $[0,1]$ par :

$$y(t) = (1-t)\int_0^t z(s)ds + \int_t^1 (1-s)z(s)ds$$

II.A.1) Montrer que $y = T(z)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} y'' &= -z \\ y(1) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

II.A.2) Prouver que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$ et que, si z_1 et z_2 appartiennent à $\mathscr{C}$,

$$\langle T(z_1)|z_2\rangle = \langle z_1|T(z_2)\rangle$$

II.A.3) Montrer que e_k est un vecteur propre de T pour une valeur propre à préciser en fonction de ω_k. Déduire de la question I.B.3 que, pour tout $z \in \mathscr{C}$:

$$\|T(z)\|_2 \le \frac{4}{\pi^2}\|z\|_2$$

et donner un cas d'égalité avec $z \neq 0$.

II.B - On note u_n la projection orthogonale de u sur $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{H}_n = \mathscr{H} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

II.B.1) Montrer que $\mathscr{H}_n = \mathrm{Vect}(u_n)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

Calculer les coordonnées de u_n dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et préciser la dimension de $\mathscr{H}_n$.

II.B.2) Montrer que $\mathscr{H}_n$ est stable par l'endomorphisme $\Pi_{u_n} \circ T$. On note T_n l'endomorphisme de $\mathscr{H}_n$ induit par $\Pi_{u_n} \circ T$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H}_n, T_n(z) = \Pi_{u_n} \circ T(z)$$

Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de vecteurs de $\mathscr{H}_n$:

$$\langle T_n(z_1)|z_2\rangle = \langle z_1|T_n(z_2)\rangle$$

En déduire que T_n est diagonalisable.

II.B.3) *Calcul des valeurs propres de* T_n.

Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, par ses coordonnées dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$, l'unique vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ tel que :

$$T(z) - \frac{z}{\omega^2} = \frac{u_n}{\sqrt{6}}$$

À quelle condition sur ω, z appartient-il à $\mathscr{H}_n$? En déduire que les valeurs propres de T_n sont les réels de la forme $\frac{1}{\omega^2}$ où ω est un zéro de la fonction ϕ_n définie à la question I.C.

II.B.4) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{H}_n$:

$$\langle z|T(z)\rangle \leq \frac{1}{\mu_n^2}\langle z|z\rangle \qquad (\mu_n \textit{ a été défini à la question I.C.1}).$$

II.C - Soit $z \in \mathscr{H}$. On pose :

$$z_n = \Pi_{u_n}\left(\sum_{k=0}^{n}\langle z|e_k\rangle e_k\right)$$

II.C.1) Montrer que :

$$z_n \in \mathscr{H}_n \,,\ \lim_{n\to\infty}\|z - z_n\|_2 = 0 \,,\ \lim_{n\to\infty}\|T(z) - T(z_n)\|_2 = 0$$

En déduire que

$$\langle z|T(z)\rangle \leq \frac{1}{\mu^2}\langle z|z\rangle$$

II.C.2) Montrer que si C_2 est un réel tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H},\ \langle z|T(z)\rangle \leq C_2\langle z|z\rangle$$

alors $C_2 \geq \dfrac{1}{\mu^2}$.

II.D - Soit $\xi \in \mathscr{A}$. Montrer que $\langle \xi'|\xi'\rangle = \langle \xi''|T(\xi'')\rangle$ et conclure.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations, définitions et rappels

Si $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n. Pour P dans $\mathbb{C}[X]$, soit $T(P)$ le polynôme $P(X+1)$. L'application T ainsi définie est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par T et on note T_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ induit par T.

Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Hilbert, définie par :

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, soient :

$$D_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\},\ \overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \le R\} \text{ et } C_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$$

On convient d'autre part que $D_\infty = \mathbb{C}$. Pour R dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$, soit E_R l'espace vectoriel des fonctions de D_R dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{, où la série entière } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à R. L'espace E_∞ est appelé *espace des fonctions entières.*

On pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\text{si } n \to +\infty, \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Objectif du problème, dépendance des parties

La partie I étudie les polynômes de Hilbert, ce qui permet notamment de déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$. La partie II est complètement indépendante de I. Elle a pour but d'établir quelques propriétés des séries entières utilisées dans la partie III, laquelle montre que toute fonction entière vérifiant une certaine condition asymptotique est un polynôme. Le résultat obtenu est dû à Georg Pólya (1915). La partie III utilise II et la dernière question de I.

Filière PSI

Partie I - Polynômes de Hilbert

Soit n dans $\mathbb{N}$.

I.A - Inversion d'une matrice

I.A.1) Écrire la matrice M_n de T_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.

I.A.2) Vérifier que M_n est inversible ; expliciter M_n^{-1}.

I.B - Propriétés de la suite $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$

I.B.1) Montrer que $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

I.B.2) Si $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $H_i(j)$ montrant que $H_i(j)$ est dans $\mathbb{Z}$. On distinguera les trois cas : $j < 0$, $0 \leq j \leq i - 1$ et $j \geq i$.

I.C - Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose P sur $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ en :

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i .$$

I.C.1) Vérifier l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

où ${}^t M_n$ est la transposée de la matrice M_n.

I.C.2) Établir :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\},\ a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j) .$$

Si $i \geq n+1$, que vaut $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$?

I.C.3) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $P(i) \in \mathbb{Z}$,

b) $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $a_i \in \mathbb{Z}$,

c) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

En particulier les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.

I.D - Description des suites de la forme $(P(j))_{j \in \mathbb{N}}$ où P est un polynôme.

Soit $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $u_j = P(j)$,

b)

$$\forall i \in \mathbb{N},\ i \geq n+1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_j = 0\,.$$

Partie II - Quelques propriétés des séries entières

Dans toute cette partie, on fixe : R dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, f dans E_R, ω dans D_R et r dans $]|\omega|, R[$. Pour z dans D_R on écrit donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{, où la série entière } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à R.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $f^{(k)}$ la fonction définie pour $z \in D_R$ par :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

(on sait que cette série entière a même rayon de convergence que la série entière initiale).

II.A - Représentation intégrale de $f(\omega)$ à partir des valeurs de f sur C_r

II.A.1) Si $p \in \mathbb{N}$, prouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt}dt = 2\pi a_p r^p\,.$$

II.A.2) Montrer :

$$f(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi}\,.$$

Indication : on pourra partir de :

$$\frac{re^{it}}{re^{it}-\omega} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p .$$

II.B - Principe du maximum

II.B.1) Justifier la définition de $M_f(r) = \mathrm{Max}\{|f(z)|, z \in C_r\}$.

II.B.2) Montrer : $|f(\omega)| \leq \dfrac{r}{r-|\omega|} M_f(r)$.

II.B.3) Montrer : $|f(\omega)| \leq M_f(r)$.

Indication : si $p \in \mathbb{N}^*$, on pourra appliquer, avec justification, le résultat de II.B.2 à f^p puis faire tendre p vers $+\infty$.

II.C - Division de $f(z)-f(\omega)$ par $z-\omega$ pour f dans E_R

II.C.1) Si $j \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de la série de terme général $a_n \omega^{n-1-j}$ pour $n \geq j+1$. On pose :

$$b_j = \sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1-j} .$$

II.C.2) Montrer que, lorsque $j \to +\infty$, $b_j = O\left(\frac{1}{r^j}\right)$.

II.C.3) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j$ est supérieur ou égal à R. Pour $z \in D_R$, on pose :

$$g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^j .$$

Vérifier : $\forall z \in D_R$, $(z-\omega)g(z) = f(z)-f(\omega)$.

II.D - Minoration de $M_f(r)$ à l'aide des zéros de f

On suppose que $p \in \mathbb{N}^*$, que f s'annule en p points distincts $z_1, \ldots, z_p$ de $\overline{D_r}\backslash\{0\}$.

II.D.1) Montrer qu'il existe F dans E_R telle que :

$$\forall z \in D_R,\ F(z) \times \prod_{j=1}^{p} (z-z_j) = f(z) \times \prod_{j=1}^{p} (r^2 - \overline{z_j} z) .$$

II.D.2) Si $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $z \in C_r\backslash\{z_j\}$ que vaut

$$\left|\frac{r^2-\overline{z_j}z}{z-z_j}\right| ?$$

II.D.3) En appliquant II.B.3 à F au point $\omega = 0$, montrer :

$$M_f(r) \times \left| \prod_{j=1}^{p} z_j \right| \geq |f(0)| r^p .$$

II.D.4) On suppose $f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver :

$$M_f(r) \times \left| \prod_{j=1}^{p} z_j \right| \geq \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} r^{p+k} .$$

II.E - Étude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb{N}$

On suppose que $R = +\infty$, $c \in \,]0, e[$, f est nulle sur $\mathbb{N}$ et que lorsque $r \to \infty$, $M_f(r) = O(c^r)$.

Montrer que $f = 0$.

Indication : on supposera par l'absurde $f \neq 0$, on appliquera II.D.4 avec $k = \mathrm{Min}\{i \in \mathbb{N}, f^{(i)}(0) \neq 0\}$, $r = p$, $z_1 = 1, \ldots, z_p = p$, et on fera tendre p vers $+\infty$.

Partie III - Théorème de Pólya

Soit f dans E_∞.

III.A - Majoration de $\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(k) \right|$

Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et r un réel tel que $r > n$.

III.A.1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{n!}{X(X-1)\ldots(X-n)} .$$

III.A.2) À l'aide de II.A.2, prouver :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)\ldots(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) .$$

III.A.3) Montrer :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \right| \leq \frac{n! M_f(r)}{(r-1)\ldots(r-n)} .$$

III.B - Preuve du théorème

On suppose ici

a) $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$,

b) Lorsque $r \to +\infty$, $M_f(r) = o\left(\dfrac{2^r}{\sqrt{r}}\right)$.

On va démontrer que f est polynomiale (théorème de Pólya).

N.B. L'exemple de $f(z) = 2^z$ montre que la condition asymptotique (b) n'est pas loin d'être optimale.

III.B.1) En appliquant III.A.3 à $r = 2n+1$, prouver qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(k) = 0 .$$

III.B.2) À l'aide de I.D) et II.E), prouver le résultat désiré.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème on identifie les polynômes et les fonctions polynômes correspondantes.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On pose

$$I_p(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} t^p dt .$$

On ne cherchera pas à calculer I_0.

Partie I -

I.A - Déterminer le développement en série entière de x de la fonction

$$x \mapsto (1+x^2)\, e^{x^2} .$$

I.B - On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' - xy = (1+x^2)\, e^{x^2/2} .$$

I.B.1) Donner la solution générale de l'équation (E).

On désigne par f la solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

I.B.2) Donner l'expression de f. Montrer que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur réelle de x, notée α.

I.B.3) On se propose de calculer une valeur approchée de α par la méthode de Newton.

a) Déterminer préalablement un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ de longueur $0{,}1$ contenant α. Rappeler le principe de la méthode de Newton et expliquer comment on peut l'appliquer à partir de l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$.

b) Écrire un algorithme, mettant en œuvre la méthode de Newton, permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-6} près. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé.

c) Déterminer par l'algorithme mis en place une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Filière PSI

Partie II -

II.A -

II.A.1) Calculer I_1.

II.A.2) Trouver une relation entre I_p et I_{p-2}, pour $p \geq 2$.

II.B -

II.B.1) Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante λ_k et un polynôme A_k tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-x^2/2} A_k(x)\,.$$

II.B.2) Déterminer λ_k et A_k.

II.C -

II.C.1) Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante μ_k et un polynôme B_k tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-x^2/2} B_k(x)\,.$$

II.C.2) Déterminer μ_k et le degré de B_k.

II.D -

II.D.1) Si le degré de P est égal à n, que peut-on dire du degré du polynôme : $1 + P'(X) - xP(X)$?

II.D.2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $I_0(x) + P(x)\, e^{-x^2/2}$ soit une constante.

Partie III -

Soit ϕ l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)\,.$$

III.A -

III.A.1) Montrer que ϕ est une application linéaire sur E.

III.A.2) Déterminer le noyau de ϕ.

III.A.3) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

III.A.4) Expliciter $\phi^{-1}(g) = \{f \in E \mid \phi(f) = g\}$ à l'aide d'une constante C et de

$$\int_0^x e^{-t^2/2} g(t)dt.$$

III.B -

III.B.1) Quelle est l'image de f par $\phi \circ \phi$?

III.B.2) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

III.C - On pose par convention $\phi^1 = \phi$ et, plus généralement, on définit, pour tout n entier, $n \geq 2$, ϕ^n par :

$$\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi = \phi \circ \phi^{n-1}.$$

III.C.1) Résoudre $\phi^2(f) = 0$.

III.C.2) Résoudre $\phi^n(f) = 0$.

Partie IV -

Soit ϕ_0 l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi_0(P) = \phi(P).$$

IV.A - ϕ_0 est-elle injective ? surjective ?

IV.B -

IV.B.1) Montrer que pour tout n entier naturel, $X^{2n+1} \in \phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.B.2) En déduire que tout polynôme impair appartient à $\phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.C - Pour tout q, entier strictement positif, on définit le polynôme Q_q :

$$Q_q(X) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}.$$

IV.C.1) Déterminer un polynôme P tel que $Q_q = \phi_0(P)$.

On désigne par $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\{Q_q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$.

IV.C.2) Montrer que pour tout entier naturel non nul q, le polynôme $X^{2q} - \mu_q$ est élément de $\mathscr{P}$.

On pourra remarquer que : $\dfrac{Q_k(X)}{\mu_k} = \dfrac{X^{2k}}{\mu_k} - \dfrac{X^{2k-2}}{\mu_{k-1}}$.

IV.C.3) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots)$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe.

IV.C.4) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi_0) = \mathrm{Vect}(X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots) \oplus \mathscr{P}$.

Partie V -

On considère l'équation différentielle :

$$(1) \quad y' - xy = (1 + x^2)\, e^{x^2}$$

et on définit la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt .$$

V.A - Donner la solution générale de l'équation (1) (l'expression de cette solution utilise la fonction H).

V.B - Déterminer une fonction g, impaire, développable en série entière et solution de l'équation (1). Quel est le rayon de convergence de son développement en série entière ?

V.C - À l'aide des questions précédentes calculer :

$$\int_0^x (1 + t^2) e^{t^2/2} dt .$$

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations, définitions

Si I est un intervalle, F une application de I dans I, n un élément de $\mathbb{N}^*$, on pose $F^n = F \circ \ldots \circ F$ (composé de n fois F) ; on convient que $F^0 = Id_I$. Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F une application de I dans J, on dit que F est un C^1-difféomorphisme de I sur J si et seulement si F est une bijection de classe C^1 de I sur J dont la réciproque est elle aussi de classe C^1. On rappelle que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que F soit de classe C^1, que la dérivée F' de F ne s'annule pas sur I, et que $F(I) = J$.

On désignera par $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[0, r]$ avec $r > 0$ et f une application de classe C^∞ de I dans lui-même vérifiant :

i) $f(0) = 0$,

ii) $\forall x \in I \backslash \{0\}$, $f(x) < x$,

iii) $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$.

Si (I, f) et (J, g) sont dans $\mathcal{E}$, on dit que (I, f) et (J, g) sont *conjugués* si, et seulement si, existent deux réels r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $[0, r] \subset I$, $[0, r'] \subset J$ et un C^1-difféomorphisme croissant h de $[0, r]$ sur $[0, r']$ tel que :

$$\forall y \in [0, r'],\ g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y).$$

Enfin, si λ est dans $]0, 1]$, $\mathcal{E}_\lambda$ désigne l'ensemble des couples (I, f) éléments de $\mathcal{E}$ tels que $f'(0) = \lambda$.

Objectif du problème

Le but du problème est de prouver que si λ est dans $]0, 1]$, alors deux éléments quelconques de $\mathcal{E}_\lambda$ sont conjugués puis d'étudier le problème de la conjugaison dans $\mathcal{E}_1$.

Dépendance des parties

Le résultat du I.D est utilisé dans les parties II et III. Les parties II et III sont formellement indépendantes, mais certaines questions de la partie III se traitent sur le modèle de questions de la partie II ; elles sont explicitement signalées dans l'énoncé.

Filière PSI

Partie I - Préliminaires

I.A - Soit (I, f) et (I, g) deux éléments conjugués de $\mathcal{E}$. Montrer que $f'(0) = g'(0)$.

I.B - Soit f une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}$.

I.B.1) Montrer que $f'(0)$ est dans $]0, 1]$.

I.B.2) Montrer que la suite de fonctions $(f^n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

I.B.3) Montrer que cette convergence est uniforme.

I.C - Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général $a_n = u_n - 1$ converge absolument et on pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k .$$

En considérant la série de terme général $(\ln P_{n+1} - \ln P_n)$, montrer que la suite (P_n) converge vers un réel strictement positif.

I.D - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\phi_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que la série de fonctions de terme général $\psi_n = \phi_n - 1$ converge normalement sur I. On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n} \phi_k .$$

Montrer que la suite de fonctions $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Partie II - Conjugaison d'éléments de $\mathcal{E}$ localement contractants

Soient λ dans $]0, 1[$ et f une application de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}_\lambda$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{f^n}{\lambda^n}.$$

Soit enfin h_λ l'application de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], h_\lambda(x) = \lambda x.$$

II.A - Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n \circ f - h_\lambda \circ u_{n+1}$.

II.B -

II.B.1) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon < 1$ et $(\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda$.

II.B.2) Montrer qu'il existe a dans $]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [0, a], f(x) \le (\lambda + \varepsilon)x.$$

II.C -

II.C.1) Montrer qu'il existe $C \ge 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - \lambda x| \le Cx^2.$$

II.C.2) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \ge n_0, \forall x \in [0, 1], f^n(x) \in [0, a].$$

II.C.3) Pour $n \ge n_0$ et $x \in [0, 1]$, majorer $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$ et prouver que la suite de fonctions $(u_n)_{n \ge 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Sa limite sera notée u.

II.D -

II.D.1) Montrer que la série de fonctions de terme général

$$\frac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 \text{ converge normalement sur } [0, 1].$$

II.D.2) En déduire que u est un C^1-difféomorphisme de $[0, 1]$ sur son image.

II.E - Conclure que $([0, 1], f)$ et $([0, 1], h_\lambda)$ sont conjugués.

Partie III - Conjugaison des éléments de $\mathcal{E}$ tangents à l'identité

On note $\mathcal{E}_1^*$ l'ensemble des éléments (I, f) de $\mathcal{E}_1$ tels que l'ensemble $\{k \in N^*, f^{(k+1)}(0) \neq 0\}$ soit non vide. Pour (I, f) dans $\mathcal{E}_1^*$, on note $\nu(f) = \min\{k \in N^*, f^{(k+1)}(0) \neq 0\}$. La formule de Taylor-Young donne alors :

$$\text{quand } x \to 0,\ f(x) = x - ax^{\nu(f)+1} + o(x^{\nu(f)+1}) \text{ avec } a = \frac{-f^{(\nu(f)+1)}(0)}{(\nu(f)+1)\,!}.$$

III.A -

III.A.1) Pour q dans $\mathbb{N}^*$, soit θ_q la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1],\ \theta_q(x) = \frac{x}{(1+x^q)^{1/q}}.$$

Montrer que $([0, 1], \theta_q)$ est dans $\mathcal{E}_1^*$, préciser $\nu(\theta_q)$.

Dans la suite de III.A, on considère une fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $([0, 1], f)$ appartienne à $\mathcal{E}_1^*$ et on pose $q = \nu(f)$ puis :

$$a = -\frac{f^{(q+1)}(0)}{(q+1)\,!}.$$

III.A.2)

a) Vérifier que a est strictement positif.

b) Si (I, g) appartient à $\mathcal{E}$ et est conjugué à $([0, 1], f)$, vérifier que (I, g) est aussi dans $\mathcal{E}_1^*$ avec $\nu(g) = q$.

III.A.3) Dans ce III.A.3, on suppose qu'il existe k dans $\{2, 3, \ldots, q\}$ et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que

$$\text{quand } x \to 0,\ f(x) = x - ax^{q+1} + bx^{q+k} + o(x^{q+k}).$$

Soit β un nombre réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h(x) = x + \beta x^k.$$

a) Montrer qu'il existe r et r' dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que h induise un C^1-difféomorphisme de $[0, r]$ sur $[0, r']$.

Dans la suite de III.A.3, les réels r et r' sont ainsi choisis et on note h^{-1} le difféomorphisme réciproque de la restriction de h à $[0, r]$.

b) Établir :quand $y \to 0$, $h^{-1}(y) = y - \beta y^k + o(y^k)$.

c) Déterminer les développements limités à l'ordre $q+k$ en 0 de $x \mapsto h \circ f(x)$ puis de $y \mapsto h \circ f \circ h^{-1}(y)$.

III.A.4) De ce qui précède déduire l'existence d'un réel E et d'un couple (I, g) de $\mathcal{E}_1^*$ conjugué à $([0,1], f)$ et tels que :

$$\text{quand } y \to 0\,,\ g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1})\,.$$

III.B - Dans cette section III.B, q est un entier strictement positif, E est un nombre réel et g une application de $[0,1]$ dans lui-même telle que $([0,1], g)$ appartienne à $\mathcal{E}_1^*$ et que :

$$\text{quand } y \to 0\,,\ g(y) = y - \frac{y^{q+1}}{q} + Ey^{2q+1} + o(y^{2q+1})\,.$$

On définit une application τ_q sur $]0,1]$ par :

$$\forall y \in\,]0,1]\,,\ \tau_q(y) = \frac{1}{y^q}\,.$$

Donc τ_q est un C^1-difféomorphisme de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$; on ne demande pas de le vérifier. Soit enfin $G = \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1}$.

III.B.1)

a) Identifier $T_q = \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1}$.

b) Quelles propriétés de G déduit-on des propriétés ii) et iii) du début de l'énoncé ?

c) Déterminer un nombre réel R tel que :

$$\text{quand } x \to +\infty\,,\ G(x) = x + 1 + \frac{R}{x} + O\left(\frac{1}{x^{1+1/q}}\right).$$

III.B.2)

a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall x \in [1,+\infty[\,,\ G^n(x) \geq x + \frac{n}{2}\,.$$

Pour tous n entier naturel et x réel supérieur ou égal à 1, on pose :

$$u_n(x) = G^n(x) - n\,.$$

b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall x \in [1,+\infty[\,,\ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{C}{n}\,.$$

En déduire que pour tout $X \geq 1$ il existe un réel strictement positif K tel que :

$$\forall n \geq n_0 ,\ \forall x \in [1, X] ,\ |u_n(x)| \leq K \ln n .$$

c) Pour tous n entier naturel strictement positif et x réel supérieur ou égal à 1, on pose : $v_n(x) = u_n(x) - R \ln n$, où R est la constante définie au III.B.1-c). Démontrer, en procédant comme au II.C.3), que la suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers une fonction v et que cette convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.

d) Si $x \geq 1$, vérifier que $v \circ G(x) = v(x) + 1$.

III.B.3)

a) Montrer que :

$$\text{quand } x \to +\infty ,\ G'(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) .$$

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ et, en procédant comme en II.D.1), prouver que v est un C^1-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur son image.

III.B.4)

a) Montrer que $v'(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$.

b) Conclure, si f est une fonction de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $([0, 1], f)$ soit dans ε_1^* et $\nu(f) = q$, que $([0, 1], f)$ est conjugué à $([0, 1], \theta_q)$.

III.C - Soit $(w_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$w_0 = \frac{\pi}{8} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} ,\ w_{n+1} = \operatorname{sh}(\sin(w_n)) .$$

III.C.1)

a) Utiliser ce qui précède pour montrer que w_n admet un équivalent du type $\dfrac{a}{n^\alpha}$ avec a et α réels. Déterminer α.

b) Montrer qu'il existe des nombres réels b et c tels que :

$$w_n = \frac{a}{n^\alpha} + \frac{b}{n^{3\alpha}} + c\,\frac{\ln n}{n^{5\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right) .$$

III.C.2) Établir un programme permettant de calculer a, b, c (on utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel).

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES I

Notations et définitions

$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On note $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$.

On note B l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ bornées sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in B$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f|$.

Si $\alpha \in [1, +\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.

On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^\alpha}\, \mathrm{d}t$.

Si $\alpha \in [1, +\infty[$ et h est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire :

$$(E_{\alpha,h}) \ : \ y'' - \frac{1}{1 + t^\alpha}\, y' + y = h$$

Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E_{\alpha,h})$.

Pour une équation différentielle linéaire du second ordre (E), de second membre h, on définit les propriétés de stabilité suivantes :

- on dira que (E) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si f est une solution de (E) vérifiant $\big\|\big(f(0), f'(0)\big)\big\| \leqslant \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leqslant \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0, 0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens ∞** si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $h \in B$ est tel que $\|h\|_\infty \leqslant \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0, 0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Filière PSI

De plus, dans le cas de l'équation $(E_{\alpha,0})$:

- on dira que $(E_{\alpha,0})$ est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
  si $\beta \in [1,+\infty[$ vérifie $|\alpha-\beta| \leqslant \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $\big(f(0),f'(0)\big) = (g(0),g'(0)) = (a,b)$, alors $f-g \in B$ et $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Objectifs et dépendance des parties

L'objectif du problème est d'étudier le comportement des solutions de $(E_{\alpha,0})$ vers $+\infty$, ainsi que les différentes notions de stabilité.

La partie **I** étudie le cas de l'équation « limite à l'infini » $y''+y=h$.

La partie **II**, indépendante de **I**, étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

La partie **III**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha > 1$, utilise des résultats de **II.A**, **II.C** et **I.5**.

La partie **IV**, qui étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{1,0})$, utilise **II.B**.

La partie **V**, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha = 1$, utilise les parties **IV** et **II**.

Partie I - Étude de l'équation $y''+y=h$

Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\big)$, on note (F_h) l'équation différentielle $y''+y=h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (F_h).

I.A -

I.A.1) Donner l'ensemble des solutions de (F_0).

I.A.2) Dans cette question uniquement, on prend pour $h : x \mapsto \cos(x)$.

Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

I.A.3) Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$, définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer l'ensemble des solutions de (F_h).

I.B - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et f est la solution de (F_0) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a,b)$, montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leqslant \|(a,b)\|$.

I.C - Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left(\int_0^t h(u)\sin(t-u)\,\mathrm{d}u\right)$ est solution de (F_h), et en déduire l'ensemble des solutions de (F_h).

I.D - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

On donne $h \in L^1$.
Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$, montrer que $f \in B$, et $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|h\|_1$.
En déduire que (F_h) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta\cos(t)$, et montrer que ses solutions sont non bornées, et plus précisement, ne sont pas en $o(t)$ quand $t \to +\infty$.

En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞.

Partie II - Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$

II.A - Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et sa continuité par rapport à α.

II.B - Relèvement angulaire

On donne $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$.

II.B.1) Justifier l'existence d'une primitive A de $\dfrac{g'}{g}$, et montrer que $g\mathrm{e}^{-A}$ est constante.

II.B.2) En écrivant la fonction A sous la forme $A = B + \mathrm{i}C$, où B et C sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'existent $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ tels que $g = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

II.C - Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$.

II.C.1) En appliquant II.B, montrer qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$

telles que $f = r\cos(\theta)$ et $f' = r\sin(\theta)$.
Exprimer r en fonction de f et f'.

Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de la partie.

II.C.2) Démontrer que $\theta' = -1 + q\sin(\theta)\cos(\theta)$. (1)

II.C.3) Démontrer que $r' = qr\sin^2(\theta)$. (2)

II.C.4) Démontrer que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} r \leqslant r(0)\exp(I(\alpha))$.
Démontrer que f et f' sont bornées par $\|\big(f(0), f'(0)\big)\| \exp(I(\alpha))$.

II.C.5) Démontrer que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \to +\infty$.

II.C.6) Démontrer qu'existent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

II.C.7) Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III - Étude de la stabilité pour $\alpha > 1$

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, et (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,0})$.
$w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ *est le wronskien associé.*
On pensera à utiliser les résultats de **II**.

III.A - Stabilité par rapport aux conditions initiales

Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B - Stabilité par rapport au second membre au sens 1

III.B.1) Déterminer une équation différentielle vérifiée par w, et montrer qu'existent a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leqslant |w(x)| \leqslant b$.

III.B.2) Si $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$, montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\dfrac{hf_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\dfrac{hf_1}{w}$.

III.B.3) Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises sur C_1 et C_2 dans la question précédente pour avoir $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$?

III.B.4) Démontrer l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ telle que : pour tout $h \in L^1$, la solution f de $(E_{\alpha,h})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$ est dans B, et $\|f\|_\infty \leqslant C\|h\|_1$. En déduire que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C - Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit g une solution de $y'' + y = \lambda \cos(t)$.
Soit f la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $y'' - \dfrac{1}{1+t^\alpha}y' + y = \lambda\cos(t)$ telle que $\big(f(0), f'(0)\big) = (0,0)$. On pose $\Phi = f - g$.

III.C.1) Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha,h})$, pour une fonction $h \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ vérifiant $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

III.C.2) Démontrer que $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ implique que $\displaystyle\int_0^t |h| \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

III.C.3) Utilisant la résolution de $(E_{\alpha,h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

III.C.4) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞.

III.D - Stabilité par rapport au paramètre

On fixe pour la suite de la question $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $\beta \in]1,+\infty[$.
Soit f la solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant $\big(f(0), f'(0)\big) = (a,b)$, g la solution de $(E_{\beta,0})$ vérifiant $(g(0), g'(0)) = (a,b)$.
On pose $\Phi = f - g$.

Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$ et $K(\lambda) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\lambda}\,\mathrm{d}t$.

Comme pour I, les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1,+\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

III.D.1) Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha}\right) g'(t)$$

III.D.2) Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leqslant \|(a,b)\| \, \mathrm{e}^{I(\beta)} \Big(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \Big).$$

III.D.3) Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV - Étude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$

f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.

On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A - Établir que pour tout $t \geqslant 0$, $g''(t) + \left(1 - \dfrac{3}{4(t+1)^2}\right) g(t) = 0$.

IV.B - Démontrer qu'existent $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\big)$ telles que $g = \rho \cos(\beta)$ et $g' = \rho \sin(\beta)$.

IV.C - Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(x) + x$ tend vers une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

IV.D - Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ, et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E - Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t}\cos(t+b) \underset{t \to +\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F - Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V - Étude de la stabilité pour $\alpha = 1$

V.A - Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est pas stable par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

V.B - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f_\lambda : x \mapsto \lambda x \sin(x)$, calculer $f_\lambda''(x) - \dfrac{1}{1+x} f_\lambda'(x) + f_\lambda(x)$.

Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

• • • FIN • • •

Mathématiques 1

PSI **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Le but de ce problème est d'établir ***partie V*** une identité relative à la fonction Gamma, due à Euler, puis d'en présenter ***partie VI*** une application à la distribution de Bolzmann dans un gaz de particules.

I La fonction Gamma

On définit la fonction Γ d'Euler, pour tout réel $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

I.A – Montrer que la fonction $t \to e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

I.B – Justifier que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

I.C – Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

I.D – Calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$.

II Formule de Stirling

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose :

$$u_k = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t\, dt$$

II.A – À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$u_k = \frac{1}{2}\left(\ln k - \ln(k-1)\right) - \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

II.B – Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note :

$$w_k = \frac{1}{2}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} w_k$.

En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + v_n$$

où $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

II.C – En utilisant encore une intégration par parties, montrer que :

$$\left| w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

II.D – En déduire que

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leqslant \frac{1}{12n^2}$$

puis que :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dans la suite on admettra que $a = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ et on pourra utiliser la formule de Stirling :

$$\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

III L'identité d'Euler

Dans cette partie, nous allons établir l'identité d'Euler suivante :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{III.1}$$

On désigne par $(f_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

et on définit pour tout réel $x > 0$ les suites $(I_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(J_n(x))_{n \geqslant 0}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt$$

III.A – Montrer que pour tout entier n, $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.B – Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$$

III.C – Montrer que, pour tout entier n, $n \geqslant 0$,

$$\forall x > 0, \qquad J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$$

III.D – En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}$$

III.E – Établir l'identité d'Euler (**III.1**).

IV Une intégrale à paramètre

Dans toute la suite, on définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u - [u] - 1/2 \end{aligned}$$

où la notation $[u]$ désigne la partie entière de u.

IV.A – Dessiner soigneusement le graphe de l'application h sur l'intervalle $[-1, 1]$.

IV.B – Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt$$

est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique de période 1.

IV.C – À l'aide d'une intégration par parties, justifier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

IV.D – L'application $u \longmapsto \dfrac{h(u)}{u+x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

IV.E – Soit φ l'application définie pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

En reprenant l'intégration par parties de la **question IV.C**, démontrer que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

V Une autre identité due à Euler

Nous allons maintenant établir une autre formule importante due à Euler, valable pour tout $x > 0$:

$$\ln \Gamma(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

où h est l'application définie à la **partie IV**.

On fixe donc $x > 0$ et pour tout entier naturel n, on définit $F_n(x)$ par :

$$F_n(x) = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}\right)$$

V.A – Montrer que pour tout entier naturel i :

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t\, dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du$$

V.B – En déduire que :

$$F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

où

$$G_n(x) = \ln n! + (x+1)\ln n - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x$$

V.C –

V.C.1) En utilisant la formule de Stirling, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi}$$

V.C.2) En déduire que :

$$\ln\Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\, du$$

V.D – Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

VI Distribution de Bolzmann

VI.A – Soient ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 quatre nombres réels strictement positifs deux à deux distincts et deux nombres réels strictement positifs E et N. Soit Ω la partie, supposée non vide, formée des quadruplets $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N \\ \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4 = E \end{cases}$$

VI.A.1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^4$.

Montrer que f admet un maximum sur Ω.

On note alors $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Omega$ un point en lequel ce maximum est atteint.

VI.A.2) Montrer que si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Omega$ alors x_3 et x_4 peuvent s'écrire sous la forme

$$x_3 = ux_1 + vx_2 + w$$
$$x_4 = u'x_1 + v'x_2 + w'$$

où l'on donnera explicitement u, v, u', v' en fonction de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

VI.A.3) En supposant qu'aucun des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 n'est nul, déduire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u'\frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v\frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v'\frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0$$

VI.A.4) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, u, u')$ et $(0, 1, v, v')$ admet un sous-espace supplémentaire orthogonal engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

VI.A.5) En déduire l'existence de deux réels α, β tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha + \beta\varepsilon_i$$

VI.B – On définit la fonction F pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}_+^4$ par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sum_{i=1}^{4} \ln \Gamma(1 + x_i)$$

On suppose qu'il existe $\overline{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4) \in \Omega$, les nombres N_1, N_2, N_3, N_4 étant tous les quatre non nuls, tel que

$$\max_{x\in\Omega} F(x) = F(\overline{N})$$

Montrer l'existence de deux nombres réels λ et μ vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\ln N_i + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2}\, du = \lambda + \mu\varepsilon_i$$

VI.C – Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on pose

$$\theta(N_i) = \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2}\, du$$

VI.C.1) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

VI.C.2) Montrer l'existence d'un réel K strictement positif tel que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$N_i = K e^{\mu\varepsilon_i} e^{-\theta(N_i)}$$

Commentaire

Les calculs précédents interviennent dans la modélisation de gaz de particules : $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_4$ *correspondent à quatre niveaux différents d'énergies et* $N_1, \ldots, N_4$ *aux nombres de particules qui se trouvent respectivement au niveau* $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_4$ *(pour un total de* N *particules et une énergie totale* E*). Sous réserve d'équiprobabilité des répartitions, la probabilité d'être dans la configuration* (x_1, x_2, x_3, x_4) *est donnée par* $N!/(N_1!\, N_2!\, N_3!\, N_4!)$.

En mécanique statistique, on pose comme principe que les particules vont se répartir de manière à ce que cette probabilité soit maximale. Cela revient à chercher la répartition qui maximise la somme $-\sum_{i=1}^{4} \ln(N_i!)$*, assujettie aux conditions de* **VI.A**. *Il découle alors du dernier résultat établi dans le problème, la* **loi de répartition de Bolzmann**, *à savoir que pour tous* j, k, $j \neq k$, *si* N_j *et* N_k *sont assez grands :* $N_j/N_k \simeq e^{\mu(\varepsilon_j - \varepsilon_k)}$. *D'autre part, un calcul utilisant conjointement la formule de Bolzmann donnant l'expression statistique de l'entropie* $S = -k_B \ln(N!/(N_1! \cdots N_4!))$ *et la relation* $dS = dE/T$ *(pour une transformation à volume constant) permet d'établir que* $\mu = -1/k_B T$.

• • • FIN • • •

Mathématiques 1

PSI **2012**

4 heures Calculatrices autorisées

- Dans le problème λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définie en **I.A**, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

I Préliminaires, définition de la transformation L

I.A – Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$$

I.B – Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C – Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

II Exemples dans le cas de f positive

II.A – Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B – Dans les trois cas suivants, déterminer E.

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$, avec λ supposée de classe C^1.

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \dfrac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C – Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait $Lf(x) - (Lf)'(x) = \dfrac{A}{\sqrt{x}}$.

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - A\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

III Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A – Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

On note encore f le prolongement obtenu.

III.B – Déterminer E.

III.C – À l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

III.D – Est-ce que $Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

IV Généralités dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A – Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$), alors Lf est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B – Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C – ***Comportement en l'infini***

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx}\, dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers l'infini, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D – ***Comportement en 0***

On suppose ici que f admet une limite finie l en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers l en 0^+.

V Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A – Montrer que E ne contient pas 0.

V.B – Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C – Montrer que E' contient 0.

V.D – Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E – En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F – On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G – Que vaut $Lf(0)$?

VI Injectivité dans le cas typique

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A – Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\displaystyle\int_0^1 P(t)g(t)\, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B – Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$.

On pose $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$ pour tout $t \geqslant 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x + a) = a \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\, dt$.

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x+na) = 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln u}{a}\right)\,du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C – Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

VII Étude en la borne inférieure de E

VII.A – ***Cas positif***

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B – Dans cette question, $f(t) = \cos t$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

VII.B.1) Déterminer E.

VII.B.2) Déterminer E'.

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E et la déterminer.

VIII Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie, $\mathcal{P}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients complexes et on utilise la transformation L appliquée à des éléments de $\mathcal{P}$ pour l'étude d'un opérateur U.

VIII.A – Soient P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\overline{P}(t)Q(t)\,dt$, où $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P, converge.

VIII.B – On note pour tout couple $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t}\overline{P}(t)Q(t)\,dt$$

Vérifier que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

VIII.C – On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ défini par

$$U(P)(t) = e^t D(te^{-t}P'(t))$$

Vérifier que U est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

VIII.D – Montrer que pour tous P et Q de $\mathcal{P}$, on a

$$\langle U(P), Q\rangle = \langle P, U(Q)\rangle$$

VIII.E – Montrer que U admet des valeurs propres dans $\mathbb{C}$, qu'elles sont réelles et que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

VIII.F – Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

VIII.F.1) Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

VIII.F.2) Quel lien y a-t-il entre λ et le degré de P ?

VIII.G – ***Description des éléments propres de*** U

On considère sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n): \quad tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

VIII.G.1) En appliquant la transformation L avec $\lambda(t) = t$ à (E_n), montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0,+\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1,+\infty[$.

VIII.G.2) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1,+\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

VIII.G.3) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t) = e^t D^n(e^{-t}t^n)$?

• • • FIN • • •

MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est d'établir certains résultats sur les polytopes de $\mathbb{R}^n$ (voir définition plus loin) notamment lorsque $n = 2$.

- Dans le problème on considère à la fois la structure vectorielle et la structure affine de $\mathbb{R}^n$; ainsi les éléments de $\mathbb{R}^n$ pourront être considérés soit comme des vecteurs, soit comme des points, ce qui permettra d'utiliser les notations classiques résultant de ce double point de vue :

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ ; } O = \vec{0} \text{ (origine) ; } \overrightarrow{OM} = M - O = M \text{, etc...}$$

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Il est orienté (si nécessaire) par la base canonique, considérée comme base orthonormale directe. Ainsi, le produit scalaire s'écrit :

$$(U|V) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{, si } U = (u_1, \ldots, u_n) \text{ et } V = (v_1, \ldots, v_n).$$

La norme de U est notée

$$\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \text{ ;}$$

la longueur du segment $[A, B]$ est, par définition, la distance euclidienne entre A et B, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{AB}\|$.

- On rappelle qu'une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application f, telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pour lesquels,

$$\forall M \in \mathbb{R}^n \text{, } f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}).$$

Dans ce cas, φ est appelée la partie linéaire de f.

Définitions

- **Combinaison affine, combinaison convexe** : soient $M_1, \ldots, M_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p réels **de somme égale** à **1**, on appelle combinaison affine

Filière PSI

des points $M_i(\lambda_i)$ le point $M = \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_p M_p$ barycentre des points M_i affectés des coefficients λ_i, ce qui se traduit vectoriellement par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}.$$

Lorsque les λ_i sont tous positifs $(\forall i, \lambda_i \geq 0)$, on parle de combinaison convexe.

- **Ensemble convexe** : soit C un sous-ensemble non vide de points de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est convexe s'il est stable par combinaison convexe. Cela signifie que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, pour tout $p-$uplet $(M_1, \ldots, M_p)$ de points de C et pour tout $p-$uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de réels positifs, de somme égale à 1 on a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C.$$

- **Polytope** : on appelle polytope l'ensemble des combinaisons convexes d'une partie finie $\{M_1, \ldots, M_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ (p entier $p \geq 1$). Cet ensemble, noté $conv(M_1, \ldots, M_p)$, est défini par

$$conv(M_1, \ldots, M_p) = \left\{ M \in \mathbb{R}^n \middle| \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et } M = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \right\}$$

Par exemple $conv(M_1, M_2)$ est le segment $[M_1, M_2]$.

  - en dimension 2, on parle de polygone convexe,
  - en dimension 3, on parle de polyèdre convexe.

- **Point extrémal** : soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un point $A \in C$ est extrémal si $C \backslash \{A\}$ est encore convexe.

Partie I - Quelques propriétés des polytopes

I.A -

I.A.1) Montrer que tout segment de $\mathbb{R}$ est convexe.

I.A.2) Montrer que tout demi-plan fermé ou ouvert F de $\mathbb{R}^2$ est convexe. On rappelle qu'un demi-plan fermé, respectivement ouvert, de $\mathbb{R}^2$ peut être défini de la façon suivante :

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \exists a \in \mathbb{R}, \left(M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} | U) < a \right).$$

respectivement

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \ , \exists a \in \mathbb{R} \ , \left(M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} \mid U) < a \right).$$

I.A.3) Montrer que, si A est un ensemble non vide d'indices et $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de convexes de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide, alors

$$C = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \text{ est convexe.}$$

I.B - Soit C un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, on suppose que

$$\forall (M,N) \in C^2 \ , \ [M,N] \subset C \ .$$

Montrer par récurrence sur p que toute combinaison convexe de p éléments de C appartient à C c'est-à-dire que

$$\forall (M_1, \ldots, M_p) \in C^p, \left(\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p \middle| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right), \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C \ .$$

En déduire une caractérisation d'un ensemble convexe.

I.C - Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle triangle tout polygone convexe $conv(M_1, M_2, M_3)$ où M_1, M_2, M_3 sont trois points non alignés. On note F_1 le demi-plan fermé contenant le point M_1 et de frontière la droite $M_2 M_3$. On définit de même, par permutation circulaire, les demi-plans F_2 et F_3.

I.C.1) Montrer que $conv(M_1, M_2, M_3) = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ (on pourra commencer par prouver que, si $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$, avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, alors $(M \in F_1 \Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0)$).

I.C.2) Montrer que M_1 est un point extrémal de $conv(M_1, M_2, M_3)$.

I.D - Montrer que l'image d'un polytope par une bijection affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est un polytope.

I.E - Soit $T = \{ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in [0, 1]^p \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1 \}$.

I.E.1) Montrer que T est un compact de $\mathbb{R}^p$.

I.E.2) Soit $M_1, \ldots, M_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application

$$f : (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_p M_p \in \mathbb{R}^n \ .$$

Dire rapidement pourquoi f est continue.

I.E.3) Montrer que tout polytope est compact.

I.E.4) En déduire que, dans $\mathbb{R}^2$, si une droite Δ coupe un polygone convexe P alors l'intersection est un segment, éventuellement réduit à un point.

I.F -

I.F.1) Soient P un polytope de $\mathbb{R}^n$ et F un demi-espace fermé contenant P défini par $F = \{M \in \mathbb{R}^n \mid (\overrightarrow{OM} \mid U) \leq \alpha\}$

où U est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et α un réel. On suppose que M_1 est le seul point de P réalisant l'égalité $(\overrightarrow{OM_1} \mid U) = \alpha$. Montrer que, si P n'est pas réduit à $\{M_1\}$, alors M_1 est un point extrémal de P.

On admet que la réciproque est vraie, autrement dit que cette propriété est caractéristique des points extrémaux des polytopes.

I.F.2) Montrer que l'ensemble des points extrémaux du polytope, ensemble des combinaisons convexes des points $M_1, \ldots, M_p$, est un sous-ensemble de l'ensemble $\{M_1, \ldots, M_p\}$.

I.F.3) On appelle courbe des moments dans $\mathbb{R}^n$ la courbe définie par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (t,\ t^2, \ldots, t^n).$$

- Préciser la courbe obtenue lorsque $n = 2$.
- Soit P le polytope, ensemble des combinaisons convexes des points $M(t_1), \ldots, M(t_p)$, où $t_1, \ldots, t_p$ sont p réels distincts. Montrer que les points extrémaux de P sont les points $M(t_1), \ldots, M(t_p)$.

Indication : on pourra prendre pour chaque point $M(t_i)$ le vecteur

$U_i = (2t_i, -1, 0, \ldots, 0)$, et pour demi-espace fermé $F_i = \left\{M \in \mathbb{R}^n \middle| (\overrightarrow{OM} \mid U_i) \leq t_i^2\right\}$.

Partie II - Représentation complexe des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$

On assimile le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes en identifiant tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au nombre complexe $z = x + iy$.

II.A -

II.A.1) Soit $f : z \mapsto f(z)$ une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est $\mathbb{R}-$linéaire,
- il existe des complexes α et β tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$.

II.A.2) On considère une application $\mathbb{R}-$linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$. Montrer que $det\ f = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.

II.A.3) Exemple : donner l'écriture complexe de la réflexion vectorielle (i.e. la symétrie vectorielle orthogonale) f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, d'axe la droite vectorielle $\delta(\theta)$ d'angle polaire $\theta \in [0,\pi[$, c'est-à-dire de vecteur directeur $\vec{U}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

II.B -

II.B.1) Soit p un entier $p \geq 3$. Montrer que le sous-ensemble

$$H = \left\{(z_1,\ldots,z_p) \in \mathbb{C}^p \middle| z_1 + \ldots + z_p = 0\right\}$$

de $\mathbb{C}^p$ est un hyperplan vectoriel.

II.B.2) Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ défini par

$$\psi : (z_1, z_2, \ldots, z_p) \mapsto (z_2, \ldots, z_p, z_1).$$

On pose, pour tout k entier de $[0, p-1]$, $\Omega_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(p-1)k})$, avec

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}.$$

- Calculer ψ^p. En déduire que ψ est un automorphisme diagonalisable.
- Calculer $\psi(\Omega_k)$. Que dire du résultat obtenu ?

II.B.3) En déduire une base de l'hyperplan H.

II.C - On suppose, au cours de cette question, que le vecteur

$$V = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}^p$$

appartient à l'hyperplan H, autrement dit que $a_1 + \ldots + a_p = 0$.

II.C.1) Justifier l'existence et l'unicité de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ tel que $V = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \Omega_k$.

II.C.2) Montrer que $\lambda_1 = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p} \omega^{1-r} a_r$ et que $\lambda_{p-1} = \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p} \omega^{r-1} a_r$.

II.C.3) On suppose que, $|\lambda_1| = |\lambda_{p-1}|$ ce qui signifie que

$$(\exists\theta \in [0, 2\pi[), \lambda_{p-1} = e^{i\theta}\lambda_1.$$

On pose :

$$\forall r \in [1, p] \cap \mathbb{N}, \alpha_r = \sin\left[(r-1)\frac{2\pi}{p} - \frac{\theta}{2}\right].$$

Montrer que :

$$\sum_{r=1}^{p} \alpha_r = 0 \text{ et que } \sum_{r=1}^{p} \alpha_r a_r = 0.$$

Partie III - Étude des familles $\pi-$rationnelles de droites vectorielles

Toutes les droites considérées dans cette partie sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$

On rappelle que, pour tout élément θ de $\mathbb{R}$, on note $\delta(\theta)$ la droite vectorielle d'angle polaire $\theta \in [\,0, \pi[$ du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit p un entier $p \geq 1$. Une famille $\mathscr{F} = (d_1, \ldots, d_p)$ de droites, est dite $\pi-$rationnelle s'il existe un automorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\{d_1, \ldots, d_p\} = \left\{ f\left(\delta\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right) \middle| \, k \in [0, p-1] \right\}.$$

III.A - Exemples de familles de droites $\pi-$rationnelles.

III.A.1) Montrer qu'une famille (d_1) réduite à une droite ainsi qu'une famille (d_1, d_2) constituée de deux droites distinctes sont $\pi-$rationnelles.

III.A.2) Montrer qu'une famille (d_1, d_2, d_3) constituée de trois droites deux à deux distinctes est elle aussi $\pi-$rationnelle.

III.B - Existence de familles de droites non $\pi-$rationnelles.

Soit $\mathscr{F} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ une famille constituée de quatre droites deux à deux distinctes.

III.B.1) Pour tout $j \in [1, 4]$ on note U_j un vecteur directeur de la droite d_j. Montrer que le rapport

$$\mathscr{R} = \frac{\det(U_1, U_3) \cdot \det(U_2, U_4)}{\det(U_1, U_4) \cdot \det(U_2, U_3)}$$

ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs U_j. Il est recommandé, pour la suite du problème, de les choisir unitaires en les écrivant $U_j = (\cos\theta_j, \sin\theta_j)$. Ce rapport sera noté $\mathscr{R}(\mathscr{F})$.

III.B.2) Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$f(\mathscr{F}) = (f(d_1), f(d_2), f(d_3), f(d_4)).$$

Montrer que $\mathscr{R}(f(\mathscr{F})) = \mathscr{R}(\mathscr{F})$.

III.C -

III.C.1) Justifier l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'un polynôme T_k à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$.

III.C.2) Soit p un entier, $p \geq 4$. On considère une famille $\mathscr{D} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ de quatre droites deux à deux distinctes extraites d'une famille $\pi-$rationnelle $\mathscr{F}$ de p droites. Montrer l'existence d'une fraction rationnelle G à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{Q}(X)$, telle que l'on ait

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}) = G\left(\cos\frac{\pi}{p}\right).$$

III.C.3) On admet l'existence de nombres réels n'appartenant pas à l'ensemble

$$\mathcal{E} = \bigcup_{q \geq 4}\left\{G\left(\cos\frac{\pi}{q}\right)\middle| G \in \mathbb{Q}(X)\right\}.$$

Montrer que, pour tout entier $p \geq 4$, il existe des familles non $\pi-$ rationnelles de p droites.

Partie IV - Identification par des rayons d'un polygone convexe.

Dans toute cette partie on se place dans $\mathbb{R}^2$.

Soient $\mathcal{P}$ un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$ et θ un réel de $[0, \pi[$. Pour tout réel x, on note $\Delta_{\theta,x}$ la droite affine de vecteur directeur d'affixe $e^{i\theta}$ passant par le point d'affixe $xie^{i\theta}$. On rappelle (cf. I.E.4. que l'intersection $\Delta_{\theta,x} \cap \mathcal{P}$, lorsqu'elle est non vide, est un segment. On note $\ell(\Delta_{\theta,x} \cap \mathcal{P})$ sa longueur, que l'on prend nulle lorsque cette intersection est vide. On définit ensuite l'application

$$L_{\theta,\ \mathcal{P}} : x \in \mathbb{R} \mapsto \ell(\Delta_{\theta,x} \cap \mathcal{P}) \in \mathbb{R}.$$

On considère deux polygones convexes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $\delta(\theta)$ une droite vectorielle fixée, où $\theta \in [0, \pi[$. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits $\delta(\theta)-$ identifiables si les applications $L_{\theta,\ \mathcal{P}}$ et $L_{\theta,\ \mathcal{P}'}$ sont égales.
- Soit $\mathcal{F} = (\delta(\theta_1), \ldots, \delta(\theta_p))$ une famille de p droites vectorielles, avec $p \geq 1$. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits $\mathcal{F}-$ identifiables si pour tout $i \in [1, p]$ les polygones $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont $\delta(\theta_i)-$ identifiables, c'est-à-dire si
$$(\forall i \in [1, p]),\ L_{\theta_i,\ \mathcal{P}} = L_{\theta_i,\ \mathcal{P}'}.$$

L'objectif de la partie IV - est de montrer qu'une famille convenablement choisie de quatre droites vectorielles suffit pour savoir si deux polygones convexes sont distincts.

IV.A -

IV.A.1) Trouver l'équation polaire de la droite $\Delta_{\theta,x}$.

IV.A.2) Illustrer par un dessin la définition de la fonction $L_{\theta,\mathcal{P}}$.

IV.B - Le but de cette question est de montrer que si $\mathscr{F}$ est une famille de droites vectorielles permettant de savoir si deux polygones convexes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont distincts alors $\mathscr{F}$ n'est pas $\pi-$ rationnelle.

IV.B.1) Montrer que si f est une bijection affine de $\mathbb{R}^2$ de partie linéaire φ, et si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont des polygones convexes $\delta(\theta)-$ identifiables, alors les polygones convexes $f(\mathscr{P})$ et $f(\mathscr{P}')$ sont $\varphi(\delta(\theta))-$identifiables.

Dans toute la suite de cette question, soit p un entier, $p \geq 3$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

Le symbole $[A]$ désignant l'affixe complexe du point A de $\mathbb{R}^2$, on note $A_1,\ldots,A_p$ et $B_1,\ldots,B_p$ les points de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$(\forall k \in [1, p]) \; [A_k] = \omega^k, [B_k] = e^{i\pi/p}\omega^k,$$

et on considère les deux polygones convexes distincts $\mathscr{P} = conv(A_1,\ldots,A_p)$ et $\mathscr{P}' = conv(B_1,\ldots,B_p)$.

IV.B.2) Prouver que pour tout $q \in [1, p]$ la réflexion affine σ_q d'axe la droite Δ_q passant par O et de direction $\delta_q = \delta\left((2q-1)\frac{\pi}{2p}\right)$ vérifie $\sigma_q(\mathscr{P}') = \mathscr{P}$.

IV.B.3) Exhiber une famille $\mathscr{F}$ de p droites vectorielles telle que les polygones convexes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ soient $\mathscr{F}-$ identifiables.

IV.B.4) En déduire que, pour toute famille $\pi-$ rationnelle $\mathscr{G} = (d_1,\ldots,d_m)$ de m droites vectorielles, il existe au moins deux polygones convexes distincts $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q}'$ qui soient $\mathscr{G}-$identifiables.

IV.C - Réponse au problème de la reconnaissance de deux polygones convexes distincts $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de p droites vectorielles distinctes avec $p \geq 4$. On admet que s'il existe deux polygones convexes distincts $\mathscr{F}-$identifiables, alors $\mathscr{F}$ est nécessairement extraite d'une famille $\pi-$ rationnelle.

Soit $\mathscr{D} = (d_1,d_2,d_3,d_4)$ une famille de quatre droites vectorielles distinctes telle que $\mathscr{R}(\mathscr{D}) \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ avec

$$\mathcal{E} = \bigcup_{q \geq 4} \left\{ G\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) \middle| \; G \in \mathbb{Q}(X) \right\}$$

ce qui est possible d'après la question III.C.3.

Montrer que si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont des polygones convexes $\mathscr{D}-$identifiables alors on a $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Rappels, notations et objectifs du problème.

Dans tout ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels. On note :

- $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- $\mathscr{S}_n$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. symétriques définies positives c'est-à-dire dont les valeurs propres sont strictement positives).
- $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (termes sous-diagonaux nuls) et $\mathscr{U}_n^+$ l'ensemble des matrices appartenant à $\mathscr{U}_n$ dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls.
- $\mathscr{L}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures dont les termes diagonaux valent 1. Le symbole I_n désigne la matrice unité $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$ élément de $\mathscr{M}_n$.

Pour $A \in \mathscr{M}_n$, le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j est noté $A_{i,j}$.

Dans les parties I et II seulement, si $1 \le i \le n$, A_i désigne la matrice d'ordre i

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,i} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \ldots & A_{i,i} \end{bmatrix} \text{ extraite de } A.$$

On confond respectivement :

- matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.
- vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de ses coordonnées.
- une matrice d'ordre 1 et le réel la constituant.

Si nécessaire, $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne rendant la base canonique orthonormale. Ainsi, si $v \in \mathbb{R}^n$, $v\,{}^t v$ est une matrice de $\mathscr{M}_n$ tandis que ${}^t v v$ représente $\|v\|^2$ (norme euclidienne).

Le but de ce problème est d'étudier trois types de décompositions matricielles : décomposition LU (partie I), décomposition de Cholesky (partie II), décomposition QR (partie III).

Filière PSI

La partie IV utilise des décompositions des parties I à III, pour déterminer des approximations des valeurs propres d'une matrice.

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que si A appartient à $\mathscr{M}_n$ est triangulaire inversible, son inverse A^{-1} est aussi triangulaire.

I.A.2) Montrer que $(\mathscr{L}_n, \times)$ est un groupe.

I.B - Soit $A \in \mathscr{M}_n$:

I.B.1) Montrer que si A est inversible, il existe au plus un couple $(L,U) \in \mathscr{L}_n \times \mathscr{U}_n$ tel que $A = LU$.

Si c'est le cas, on dira que A possède une décomposition LU (L comme Lower et U comme Upper).

I.B.2) Montrer que si A est inversible et possède une décomposition LU, alors pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$

(on pourra utiliser une décomposition par blocs de A).

I.B.3) On suppose que $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et on écrit A par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe H dans $\mathscr{L}_n$ telle que :

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},) \ (HA)_{n,i} = 0 \quad .$$

En posant *a priori* $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}$ expliciter une telle matrice H ainsi que son inverse, c'est-à-dire expliciter les blocs H_{n-1} et H', ainsi que les blocs correspondants de H^{-1} en fonction des blocs de la matrice A.

I.B.4) Montrer que si pour tout k dans $\{1, \ldots, n\}$, $\det(A_k) \neq 0$ alors A a une décomposition LU

(on pourra opérer par récurrence en utilisant une décomposition par blocs de A).

I.C -

I.C.1) Soit deux entiers p et q tel que $1 \leq p < q \leq n$. Montrer que l'opération élémentaire consistant à échanger les lignes p et q d'une matrice de $\mathscr{M}_n$ correspond à la multiplication à gauche par une matrice de $\mathscr{M}_n$ à déterminer.

I.C.2) Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$, le symbole

$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{bmatrix}_A$ désigne le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{i_1, j_1} & A_{i_1, j_2} & \ldots & A_{i_1, j_k} \\ A_{i_2, j_1} & A_{i_2, j_2} & \ldots & A_{i_2, j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_k, j_1} & A_{i_k, j_2} & \ldots & A_{i_k, j_k} \end{pmatrix}$$

extraite de A. Ainsi par exemple, $\det(A_i) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & i \\ 1 & 2 & \ldots & i \end{bmatrix}_A$.

Sous les hypothèses de la question I.B.4, et notant $A = LU$ la décomposition LU de A, trouver dans l'ordre :

a) la première ligne de U,

b) la première colonne de L,

c) les éléments diagonaux de U,

d) les éléments de L des colonnes $2, 3, \ldots, n$
(on utilisera I.C.1) sous forme $PA = PLU$ où P est une matrice telle que la multiplication de M par P à gauche permute deux lignes de M),

e) les éléments de U des lignes $2, 3, \ldots, n$.

On montrera que pour $2 \leq j \leq i \leq n$, $L_{i,j} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & j \\ 1 & 2 & \ldots & j \end{bmatrix}_A}$ et on donnera

pour $U_{i,j}$ ($2 \leq i \leq j \leq n$) une formule analogue.

I.D - Écriture de l'algorithme

En utilisant :

- un algorithme induit par la question I.C.2),
- un langage de programmation (qu'on précisera) comprenant la fonction déterminant (notée det),

écrire une procédure donnant, pour une matrice A satisfaisant aux conditions du I.B.4), les matrices L et U telles que $A = LU$.

I.E - Exemples :

I.E.1)

a) À l'aide de l'algorithme mis en place au I.D - , effectuer la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en indiquant les différentes étapes et les calculs intermédiaires.

b) En déduire la résolution du système matriciel $AX = Y$ d'inconnue

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et de paramètre } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ t \end{pmatrix}.$$

I.E.2) Donner deux exemples de matrices de $\mathcal{M}_2$, l'une ne possédant pas de décomposition LU, l'autre en possédant plusieurs.

I.E.3) Dans cette question C_p^q désigne le coefficient du binôme de Newton avec la convention $C_p^q = 0$ si $p < q$, si $p < 0$ ou si $q < 0$.

a) Soient p, q et r entiers naturels. Montrer la formule de Vandermonde :

$$C_{p+q}^r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_p^k C_q^{r-k}$$

(on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

b) Soit $p \in \mathbb{N}$; déterminer la décomposition LU de la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{i,j} = C_{p+j-1}^{i-1}$. En déduire $\det A$.

Écrire A, L, U lorsque $p = 1$ et $n = 4$.

Partie II -

II.A - Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer que A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si pour tout v appartenant à $\mathbb{R}^n$ non nul, ${}^t vAv > 0$.

On suppose dans le reste de cette partie II - , que $A \in \mathcal{S}_n^{++}$.

II.A.1) Montrer que A possède une décomposition LU unique notée :

$$A = LU \text{ où } L \in \mathcal{L}_n \text{ et } U \in \mathcal{U}_n.$$ (on pourra utiliser I.B).

II.A.2) Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_{i,i} > 0$.

II.B -

II.B.1) Montrer qu'il existe B dans $\mathcal{U}_n$ telle que $A = {}^tBB$ (on pourra modifier L et U et se ramener au cas de matrices triangulaires inférieure et supérieure à diagonales identiques).

II.B.2) Montrer que la décomposition obtenue à la question précédente est unique si on impose $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_{i,i} > 0$.

II.C - Si $M \in \mathcal{M}_n$, montrer que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

i) $M \in \mathcal{S}_n^{++}$,

ii) $\exists B \in \mathcal{U}_n$ inversible telle que $M = {}^tBB$,

iii) $M \in \mathcal{S}_n$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(M_k) > 0$.

Partie III -

III.A - Soit $v \in \mathbb{R}^n$ unitaire ($\|v\| = 1$). On pose $H^{(v)} = I_n - 2v{}^tv$ (matrice de Householder) et par convention $H^{(0)} = I_n$.

III.A.1) Montrer que $H^{(v)}$ est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.

III.A.2) Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}^n$, il existe v dans $\mathbb{R}^n$ tel que $H^{(v)}a$ soit de la forme $(*, 0, 0, \ldots, 0)$.

III.B - Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

III.B.1) Montrer qu'il existe $H_1, \ldots, H_{n-1}$ matrices de Householder telles que :

$$H_{n-1}H_{n-2}\ldots H_1 A \in \mathcal{U}_n.$$

III.B.2) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n$ s'écrit sous la forme $A = QR$ où $Q \in \mathcal{M}_n$ est orthogonale et $R \in \mathcal{U}_n^+$ (on parle de décomposition QR).

III.B.3) Montrer que si A est inversible, il y a unicité de la décomposition.

III.C - Quel résultat de cours permet d'obtenir directement une décomposition du type QR lorsque A est supposée inversible ?

Partie IV -

Dans cette partie A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ inversible et possédant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$.

IV.A - Dans cette section, on montre des résultats préliminaires.

IV.A.1) On rappelle qu'une suite de matrice $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M si et seulement si chaque coefficient de M_k converge vers le coefficient de M correspondant.

Montrer que si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathcal{M}_n$ convergentes de limites respectives M et N alors la suite $(M_k N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers MN.

IV.A.2) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n$, on définit

$$|||M||| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|MX\|,$$

et on admet que $M \mapsto |||M|||$ définit une norme dans $\mathcal{M}_n$.

a) Montrer que si M et N sont dans $\mathcal{M}_n$, on a

$$|||MN||| \leq |||M||| \cdot |||N|||.$$

b) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n$ vérifie $|||M||| < 1$ alors $M + I_n$ est inversible.

IV.A.3) Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose dans la suite de cette partie que P^{-1} possède une décomposition LU sous la forme $P^{-1} = LU$ et on pose $P = QR$ la décomposition QR de P.

IV.B - Soit $(A_k)_{k \geq 1}$ la suite d'éléments de $\mathcal{M}_n$ définie par récurrence de la façon suivante :

- $A_1 = A$;
- si A_k a été construite, on pose $A_k = Q_k R_k$ la décomposition QR de A_k ;
- on définit $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Montrer que les matrices A_k ($k \geq 1$) sont semblables à A.

IV.C - Déterminer explicitement la matrice $D^k L D^{-k}$ et $\lim_{k \to +\infty} D^k L D^{-k}$ (la matrice D est celle définie au IV.A.3)).

On posera dans la suite $E_k = D^k L D^{-k} - I_n$.

IV.D - Montrer qu'à partir d'un certain rang $I_n + R E_k R^{-1}$ admet une décomposition QR unique de la forme :

$$I_n + R E_k R^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$$

où $\tilde{R}_k$ est à termes diagonaux strictement positifs.

On admet dans toute la suite que la suite $(\tilde{Q}_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{M}_n$.

IV.E - .

IV.E.1) Montrer que la limite $\tilde{Q}$ de la suite $(\tilde{Q}_k)_{k \geq 1}$ est orthogonale.

IV.E.2) Montrer que la suite $(\tilde{R}_k)_{k \geq 1}$ converge et que sa limite $\tilde{R}$ est dans $\mathcal{U}_n^+$.

IV.E.3) Déterminer $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$.

IV.F - En utilisant deux compositions QR de A^k, montrer que la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ est telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i (1 \leq i \leq n) \qquad \lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,j} = 0 (1 \leq j < i \leq n)$$

••• FIN •••

Exemples de suites récurrentes de polygones du plan

Notations, valables pour l'ensemble du sujet :

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- $M_k(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices à coefficients complexes possédant k lignes et k colonnes.
- Pour toute matrice M de $M_k(\mathbb{C})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.
- Si $(a_0,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ on note :

$$M(a_0,\ldots,a_{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{C}).$$

Par exemple, lorsque $k = 3$,

$$M(a_0,a_1,a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Définition : on dit qu'un endomorphisme u de $\mathbb{C}^k$ est canoniquement associé à une matrice M de $M_k(\mathbb{C})$ si et seulement si M est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^k$.

Partie I - Étude des matrices compagnes

I.A - Cas général

I.A.1) Soit $(a_0,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$. Calculer le déterminant de φ. Déterminer le rang, l'image et le noyau de φ.

I.A.2) Soit $(a_0,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Montrer que $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$ est semblable à la matrice :

$$N = \begin{bmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

I.A.3) L'énoncé “toute matrice non nulle élément de $M_k(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$” est-il vrai ? Justifier la réponse.

I.A.4) L'énoncé “toute matrice de la forme $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$ est diagonalisable” est-il vrai ? Justifier la réponse.

I.A.5) Soit $(a_0,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Rappeler la définition du polynôme caractéristique de $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$. On pose

$$Q(X) = X^k - \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r .$$

Déterminer, à l'aide de $Q(X)$, le polynôme caractéristique de $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$.

I.A.6) Soit $N \in M_k(\mathbb{C})$. On suppose que N est semblable à une matrice de la forme $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$. Le k–uplet $(a_0,\ldots,a_{k-1})$ est-il unique ?

I.A.7) Soit $(a_0,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. Soit λ une valeur propre de $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$. Donner une base du sous-espace propre E_λ associé à cette valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$ pour que $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$ soit diagonalisable.

I.B - Étude d'un cas particulier

On fixe $(a_0,\ldots,a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1 .$$

On suppose de plus que : $\forall r \in \{0,\ldots,k-1\},\ a_r > 0$.
On pose

$$Q(X) = X^k - \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r .$$

I.B.1) Montrer que 1 est une valeur propre de $M(a_0,\ldots,a_{k-1})$ et indiquer un vecteur propre associé.

I.B.2) Montrer que les racines de Q sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

I.B.3)

a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Q(e^{i\theta}) = 0$. Montrer que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r \cos((r-k)\theta) = 1 .$$

b) En déduire que 1 est la seule racine de Q de module 1.

I.B.4) Montrer que 1 est une racine simple de Q.

Partie II - Présentation des exemples

Notations valables pour toute la suite du sujet :

- P est un plan vectoriel euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
- On rappelle que si A est un point de P de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le complexe $z = x + iy$ est appelé l'affixe de A et A est appelé l'image du complexe z.
- On appelle polygone d'ordre k tout k-uplet de points de P.

II.A - Préliminaire

II.A.1) Soient $(A_0, \ldots, A_{k-1})$ un polygone d'ordre k et $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r \neq 0 .$$

On rappelle que le barycentre des points $A_0, \ldots, A_{k-1}$ affectés des coefficients $a_0, \ldots, a_{k-1}$ est l'unique point G de P vérifiant

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r \overrightarrow{GA_r} = \vec{0} .$$

Lorsque, pour tout $r \in \{0, \ldots, k-1\}$, $a_r = 1$, on dit que G est l'isobarycentre des points $A_0, \ldots, A_{k-1}$. Donner une expression du vecteur

$\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_{k-1}}$.

II.A.2) On note $z_0, \ldots, z_{k-1}$ les affixes des points $A_0, \ldots, A_{k-1}$. Déterminer l'affixe de G en fonction des complexes $z_0, \ldots, z_{k-1}$.

Fixons une suite de polygones d'ordre k de P, notée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = (A_0^{(n)}, \ldots, A_{k-1}^{(n)})$ et notons $z_0^{(n)}, \ldots, z_{k-1}^{(n)}$ les affixes des points $A_0^{(n)}, \ldots, A_{k-1}^{(n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = (z_0^{(n)}, \ldots, z_{k-1}^{(n)})$. Ainsi $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}^k$.

II.B - Exemple 1

Soit $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1 .$$

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polygone p_{n+1} est construit à partir du polygone p_n selon le procédé suivant :

- pour tout $r \in \{0, \ldots, k-2\}$, on pose $A_r^{(n+1)} = A_{r+1}^{(n)}$,
- $A_{k-1}^{(n+1)}$ est le barycentre des points $A_0^{(n)}, \ldots, A_{k-1}^{(n)}$ affectés des coefficients $a_0, \ldots, a_{k-1}$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_k(\mathbb{C})$ telle que, en écrivant Z_n et Z_{n+1} sous la forme de matrices colonnes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. Exprimer Z_n en fonction de n, de Z_0 et de M.

II.B.2) Faire un schéma représentant un polygone p_0 d'ordre 3 (un triangle) et les polygones p_1 et p_2 lorsque $a_0 = a_1 = a_2 = 1/3$.

II.C - Exemple 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polygone p_{n+1} est construit à partir de p_n selon le procédé suivant :

- pour tout $r \in \{0, \ldots, k-2\}$, $A_r^{(n+1)}$ est le barycentre des deux points $A_r^{(n)}$ et $A_{r+1}^{(n)}$ affectés des coefficients respectifs λ et $1-\lambda$,
- $A_{k-1}^{(n+1)}$ est le barycentre des deux points $A_{k-1}^{(n)}$ et $A_0^{(n)}$ affectés des coefficients respectifs λ et $1-\lambda$.

II.C.1) Montrer qu'il existe une matrice $M \in M_k(\mathbb{C})$ telle que, en écrivant Z_n et Z_{n+1} sous la forme de matrices colonnes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = MZ_n$. Exprimer Z_n en fonction de n, de Z_0 et de M.

II.C.2) Faire un schéma représentant un polygone p_0 d'ordre 5 et les polygones p_1, p_2, p_3 et p_4 lorsque $\lambda = 1/2$.

II.D - Un peu d'informatique

On garde les hypothèses et les notations du II.C. On suppose que l'on dispose d'un langage informatique présentant les caractéristiques suivantes :

- l'instruction $A{:=}B$ permet d'affecter à la variable A la valeur de l'expression B, qui peut notamment désigner un point de P.
- dans une série d'instructions, ces dernières sont séparées par des ";".

- si $S(i)$ désigne une série d'instructions qui dépend d'une variable entière i, et si m et n sont deux entiers tels que $m \leq n$, l'instruction
  `for i from m to n do S(i) od ;`
  effectue $S(m)$, puis $S(m+1)$, ..., puis $S(n)$.
- l'instruction
  `if test then <série d'instructions> fi ;`
  effectue la série d'instructions lorsque le test est vrai et n'effectue rien sinon.
- si A et B sont des points de P, $f(A,B,\lambda)$ désigne le barycentre de A et de B affectés des coefficients λ et $1-\lambda$.

II.D.1) À l'aide des seules caractéristiques du langage précisées ci-dessus, écrire dans ce langage une série d'instructions dont l'exécution a pour effet de stocker dans les variables $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ les points du polygone p_{100}, en supposant qu'initialement les variables $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ contiennent les valeurs des points du polygone p_0. On prendra soin d'utiliser le moins de variables supplémentaires possible.

II.D.2) À l'aide des seules caractéristiques du langage précisées ci-dessus, en supposant qu'initialement les variables $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ contiennent les valeurs des points d'un polygone p, écrire dans ce langage une série d'instructions qui stockent dans la variable OK la valeur 0 si le polygone contient au moins deux points égaux et la valeur 1 si les points du polygone sont deux à deux distincts.

Partie III - Étude des exemples

III.A - Étude de l'exemple 1

On reprend les notations de l'exemple 1 (cf II.B). Ainsi $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ est un élément de $\mathbb{R}^k$ tel que

$$\sum_{r=0}^{k-1} a_r = 1 .$$

On suppose de plus que $\forall r \in \{0, \ldots, k-1\}$, $a_r > 0$. On pose

$$Q(X) = X^k - \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r$$

et on suppose que toutes les racines de Q sont simples.

III.A.1) Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ que l'on notera Z_∞.

III.A.2) Montrer que Z_∞ est colinéaire au vecteur de $\mathbb{C}^k$ égal à $(1,1,\ldots,1)$.

III.A.3)

a) Montrer que 1 est une valeur propre de ${}^t M(a_0, \ldots, a_{k-1})$.

b) Soit $V \in \mathbb{C}^k$ un vecteur propre de ${}^tM(a_0,\dots,a_{k-1})$ pour la valeur propre 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant V, Z_n et Z_{n+1} sous la forme de matrices colonnes, montrer que ${}^tVZ_n = {}^tVZ_{n+1}$.

c) En déduire la valeur de Z_∞.

d) Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat, relativement à la suite des polygones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$? (On introduira un barycentre).

III.B - Étude de l'exemple 2

III.B.1) Préliminaires

a) Soit la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $u \in L(\mathbb{C}^k)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J.

On note aussi $c = (c_0,\dots,c_{k-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^k$.

Calculer $u(c_0),\dots,u(c_{k-1})$.

Soit $r \in \{0,\dots,k\}$. Calculer $u^r(c_0),\dots,u^r(c_{k-1})$.

En déduire la valeur de J^r pour tout $r \in \{0,\dots,k\}$.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.

c) Posons $\omega = e^{2i\pi/k}$. Pour tout $r \in \{0,\dots,k-1\}$ on pose

$$e_r = \frac{1}{\sqrt{k}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \dots \\ \omega^{(k-1)r} \end{bmatrix}.$$

Montrer que $e = (e_0, \dots, e_{k-1})$ est une base de $\mathbb{C}^k$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^k$. Calculer la matrice de u dans la base e.

Pour toute la suite du problème, on notera A la matrice de passage de la base c vers la base e.

d) Soit $(a_0,\dots,a_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$. On note

$$R(X) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r X^r.$$

Préciser la forme de la matrice $R(J)$ et la diagonaliser.

III.B.2) On reprend les notations de l'exemple 2 (cf. II.C) et on suppose jusqu'à la fin du sujet que $\lambda = 1/2$.

a) Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on notera Z_∞, et montrer que, en représentant Z_∞ et Z_0 sous la forme de matrices colonnes, $Z_\infty = ADA^{-1}Z_0$, où D est une matrice diagonale à déterminer.

b) Si Z et Z' sont deux éléments de $\mathbb{C}^k$, on note $\langle Z, Z'\rangle$ leur produit scalaire canonique. Montrer que

$$Z_0 = \sum_{r=0}^{k-1} \langle e_r, Z_0\rangle e_r .$$

En déduire que $Z_\infty = \langle e_0, Z_0\rangle e_0$.

c) Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat, relativement à la suite des polygones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

III.B.3) Déterminer une matrice C diagonale, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, en représentant Z_n, Z_∞ et Z_0 sous la forme de matrices colonnes,

$$Z_n - Z_\infty = AC^nA^{-1}Z_0 .$$

III.B.4)

a) Soit $s \in \{0,\ldots,2k-1\}$. Montrer que la limite de la suite

$$\left(\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}(Z_{2nk+s} - Z_\infty)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

vaut $A\Delta_s A^{-1}Z_0$ où Δ_s est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont

$$0,\ e^{is\pi/k}, 0,\ldots,0, e^{-is\pi/k} .$$

b) Soit $s \in \{0,...,2k-1\}$. Montrer que

$$A\Delta_s A^{-1}Z_0 = \langle e_1, Z_0\rangle e^{is\pi/k}e_1 + \langle e_{k-1}, Z_0\rangle e^{-is\pi/k}e_{k-1} .$$

c) Montrer qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $r \in \{0,\ldots,k-1\}$ et pour tout $s \in \{0, \ldots, 2k-1\}$

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{-2nk-s}(z_r^{2nk+s} - z_G)\right) = e^{i\pi(2r+s)/k}c + e^{-i\pi(2r+s)/k}d ,$$

où z_G est l'affixe de l'isobarycentre noté G des points constituant le polygone initial p_0.

III.B.5)

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme v de P dans P tel que pour tout $r \in \{0, \ldots, k-1\}$ et pour tout $s \in \{0, \ldots, 2k-1\}$, si l'on note $M_{r,s}$ le point de P d'affixe $z_G + e^{i\pi(2r+s)/k} c + e^{-i\pi(2r+s)/k} d$ et $\Omega_{r,s}$ le point de P d'affixe $e^{i\pi(2r+s)/k}$, on a

$$\overrightarrow{GM_{r,s}} = v(\overrightarrow{O\Omega_{r,s}}) .$$

b) Notons w l'application de P dans P définie par : $\forall \Omega \in P$, $w(\Omega) = G + v(\overrightarrow{O\Omega})$. Montrer que w est une application affine de P dont l'application linéaire associée est v. Montrer que l'image du cercle de centre O et de rayon 1 par l'application affine w est ou bien une ellipse de centre G ou bien une partie bornée d'une droite passant par G.

III.B.6) Interpréter géométriquement les résultats des questions III.B.3, III.B.4 et III.B.5, relativement à la suite des polygones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

••• FIN •••

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $u \cdot v$, la norme $\|u\|$.

De plus, dans les parties I et II, E désigne un espace euclidien de dimension n, $(n \geq 2)$.

Partie I -

I.A - Soient u et v deux vecteurs quelconques de E. On note $\mathrm{Gram}(u, v)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u,v) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{bmatrix} \text{ et } G(u, v) = \det[\mathrm{Gram}(u,v)]$$

I.A.1) Montrer que : $G(u, v) \geq 0$.

I.A.2) On note P un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E contenant u et v et B une base orthonormale de P. Vérifier que : $G(u, v) = [\det_B(u,v)]^2$.

I.A.3) À quelle condition a-t-on $G(u, v) = 0$?

I.B - Dans toute la suite de la partie I, ***n* est égal à 3 et *E* est orienté**. Si u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E, on note $\mathrm{Gram}(u, v, w)$ la matrice définie par :

$$\mathrm{Gram}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{bmatrix} \text{ et } G(u, v, w) = \det[\mathrm{Gram}(u, v, w)]$$

I.B.1) Calculer $G(u, v, w)$ si u, v, w sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux.

I.B.2) On suppose w orthogonal à u et v. Exprimer $G(u, v, w)$ en fonction de $G(u, v)$.

I.C -

I.C.1) u, v, w sont trois vecteurs quelconques de E. Montrer qu'il existe t et n, vecteurs de E, vérifiant : $w = t + n$, $u \cdot n = v \cdot n = 0$, (u, v, t) liée.

Montrer que, dans ces conditions, on a : $G(u, v, w) = G(u, v, t) + G(u, v, n)$

I.C.2) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un triplet (x, y, z) de réels différent de $(0, 0, 0)$ tel que $xu + yv + zw$ soit orthogonal à u, v et w.

b) $G(u, v, w) = 0$

I.C.3) En déduire que : $G(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow (u, v, w)$ liée

I.C.4) Montrer que $G(u, v, w)$ est un réel positif.

I.D -

I.D.1) u, v, w sont trois vecteurs de E et B une base orthonormale de E. Montrer que le réel $|\det_B(u, v, w)|$ ne dépend pas du choix de B.

I.D.2) Soit P un plan de E contenant u et v et n_1 un vecteur unitaire orthogonal à P. On désigne par B_1 une base orthonormée de P et on note $B = B_1 \cup \{n_1\}$. En utilisant ces deux bases, montrer que :

$$G(u, v, w) = [\det_B(u, v, w)]^2$$

I.E - Pour u, v vecteurs quelconques de E, $u \wedge v$ désigne le produit vectoriel de u par v.

Rappels

- Si B est une base orthonormée directe de E, pour tout élément y de E on a $\det_B(u, v, y) = (u \wedge v) \cdot y$.
- P et P', deux plans de E de vecteurs normaux respectifs n et n' (n et n' non nuls) sont dits orthogonaux si $n \cdot n' = 0$.

I.E.1) Montrer que $\|u \wedge v\|^2 = G(u, v)$

I.E.2) Soient P_1, P_2 et P_3 des plans de E orthogonaux deux à deux et p, q, r les projections orthogonales sur ces trois plans. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in E^2,\ \|a \wedge b\|^2 = G(p(a), p(b)) + G(q(a), q(b)) + G(r(a), r(b))$$

Partie II -

Soient $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. Pour tout i, tout j, entiers de $[\![1, n]\!]$ on note $g_{i,j} = u_i \cdot u_j$.

On note $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice d'élément général $g_{i,j}$ et le déterminant de cette matrice est noté

$$G(u_1, \ldots, u_n) = \det[\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)]$$

II.A - Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On pose, pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k,j} e_k$$

II.A.1) Exprimer, pour tout i, tout j, $g_{i,j}$ en fonction des coordonnées des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans la base B.

II.A.2) Soit $A = (u_{i,j})$, A élément de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = {}^tAA$$

II.A.3) En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n)$ est un réel positif. Montrer que :

$$G(u_1, \ldots, u_n) \neq 0 \Leftrightarrow (u_1, \ldots, u_n) \text{ libre}$$

II.B - On munit E d'un autre produit scalaire noté f_1. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ **une base orthonormale pour f_1** et $G_1 = \mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$.

II.B.1) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D, élément de $M_n(\mathbb{R})$, et une matrice P orthogonale telles que : $D = {}^tPG_1P$.

II.B.2) Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ la famille de vecteurs de E de matrice P dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$. Montrer que : $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_n) = D$.

En déduire que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthogonale pour le produit scalaire $(x,y) \quad x \cdot y$ et orthonormale pour f_1.

II.B.3) Montrer que tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs.

II.C - Soit $(u_1, \ldots, u_n)$, $(u'_1, \ldots, u'_n)$ **deux bases orthonormales pour f_1**.

II.C.1) Montrer qu'il existe S, matrice orthogonale, telle que : $G_2 = {}^tSG_1S$ avec $G_1 = \mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$ et $G_2 = \mathrm{Gram}(u'_1, \ldots, u'_n)$.

II.C.2) Montrer que : $\det(G_1) = \det(G_2)$ et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u'_i\|^2$.

II.D - $\mathcal{E}$ désigne ici un espace affine euclidien de dimension 2 et E l'espace vectoriel associé. $(O; i, j)$ est un repère orthonormé de ce plan. On considère deux nombres réels strictement positifs a et b et on définit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } x \text{ et } y \text{ désignent les coordonnées dans le repère } (O; i, j).$$

II.D.1) Pour u et v, vecteurs de E, de coordonnées (x,y) et (x',y') dans la base (i,j) on note

$$f_1(u, v) = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2}$$

Montrer qu'on définit ainsi un nouveau produit scalaire dans E.

II.D.2) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et parallèle à T et M' un élément de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Montrer que $f_1(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0$.

II.D.3) Montrer que $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$ et que $G(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a^2b^2$.

Partie III -

Dans toute la suite E n'est plus forcément de dimension finie. Si $u_1, \ldots, u_r$ sont r vecteurs de E, on note, comme dans la Partie II, $G(u_1, \ldots, u_r)$ le déterminant de la matrice de $M_r(\mathbb{R})$ de terme général $u_i \cdot u_j$ (G est un déterminant de $Gram$).

III.A - Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Pour tout x élément de E, on note x_F le projeté orthogonal de x sur F et $x^\perp$ le vecteur tel que : $x = x^\perp + x_F$.

III.A.1) Exprimer x_F en fonction des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.

III.A.2) Exprimer simplement le réel $d(x, F)$ défini par

$$d(x, F) = \inf\{\|x - f\| \ ; f \in F\}$$

III.A.3) Montrer que :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \ldots, e_p)}{G(e_1, \ldots, e_p)}}$$

III.B - Dans toute la suite du problème, E désigne l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$f \cdot g = \int_0^1 f(t)g(t)dt .$$

Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par :

$$\forall t \in]0, 1] ,\ p_\lambda(t) = t^\lambda ,\ p_\lambda(0) = 0 .$$

Soit $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_j = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente.}$$

III.B.1) Pour n entier non nul, on note $E_n = \mathrm{Vect}(p_{\lambda_1}, \ldots, p_{\lambda_n})$. Vérifier que E_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension n.

III.B.2) Soit k un entier fixé pour toute la suite du problème.

Pour n entier non nul, on note :

$$u_n^k = \inf\left\{\int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=1}^n a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt \ ; (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}$$

En interprétant u_n^k comme le carré d'une distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E, exprimer u_n^k en fonction de déterminants de $Gram$.

III.C - Soit p un entier non nul, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ des réels strictement positifs tels que, pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$

Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)$.

Ce déterminant sera noté $C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$.

III.C.1) Soit $F(X) = \frac{(X - a_1)\dots(X - a_{p-1})}{(X + b_1)\dots(X + b_p)}$. Expliciter la décomposition en éléments simples de F.

III.C.2) On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_{p-1}} & F(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{a_p + b_1} & \dots & \frac{1}{a_p + b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de III.C.1, et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$F(a_p)C(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p - b_i)} C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$$

III.C.3) En déduire :

$$C(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \frac{\prod_{1 \le i < j \le p}(a_j - a_i) \prod_{1 \le i < j \le p}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \le i, j \le p}(a_i + b_j)}$$

III.D -

III.D.1) En notant $\lambda_0 = k$ et, pour i entier élément de $[\![0, n]\!]$, $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$, exprimer u_n^k à l'aide d'un déterminant du type précédent.

III.D.2) En déduire :

$$u_n^k = \frac{1}{1 + 2k} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{2k + 1}{1 + \lambda_i + k}\right)^2$$

III.E - On suppose que : $\forall i \ge 1$, $k \neq \lambda_i$.

III.E.1) Montrer qu'il existe un entier non nul N tel que :

$$\forall i \geq N, \quad 1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} > 0$$

III.E.2) Quelle est la nature de la série $\sum_{i \geq N} \ln\left(1 - \frac{2k+1}{1+\lambda_i+k}\right)$?
En déduire que $u_n^k \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

III.E.3) Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \left\| p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i} \right\| \leq \varepsilon$$

III.E.4) En déduire, à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, que toute fonction f de E est limite d'une suite d'éléments de $\bigcup_{n \geq 1} E_n$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Les deux premières parties de ce problème se proposent d'étudier deux types d'approximation d'une fonction sur un segment, et de les comparer. La troisième partie munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n d'une structure euclidienne et étudie certaines propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange relativement à cette structure. La troisième partie est indépendante des deux premières.

Partie I - Matrices tridiagonales

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$A_n = M_n[2, 4, \ldots, 4, 2]$; $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 4, \ \alpha_n = 2)$

$B_n = M_n[2, 4, \ldots, 4]$; $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$

$C_n = M_n[4, \ldots, 4]$; $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$

I.A - Méthode du pivot

Dans cette section on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

et on se propose de résoudre le système $(\mathcal{S}_n)$ $A_{n+1}X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, par la méthode du pivot de Gauss **sans échange de lignes**.

Filière PSI

I.A.1) Cas $n = 2$.

Résoudre par cette méthode le système $(\mathcal{S}_2)$.
On remarquera en particulier que les pivots successifs valent :

$$p_0 = 2 \ ; \ p_1 = \frac{7}{2} \ ; \ p_2 = \frac{12}{7}.$$

I.A.2) On revient au cas général.

a) Écrire une procédure de résolution du système

$$A_{n+1}X = B,$$

suivant l'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes.

b) On note $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ la suite des pivots. Vérifier que :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-2\}, \quad p_{k+1} = 4 - \dfrac{1}{p_k} \\ p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \end{cases}$$

c) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

d) En déduire que $(\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}) \quad (2 \le p_k \le 2 + \sqrt{3})$ et que A_{n+1} est inversible.

I.B - Calculs explicites

Notation : pour toute matrice M, on note $det\ M$ son déterminant.

I.B.1) On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 15$ et pour tout $n \ge 3$, $c_n = det\ C_n$, $b_n = det\ B_n$, $a_n = det\ A_n$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \ge 3}$ vérifie une relation de récurrence simple ; en déduire $(c_n)_{n \ge 3}$ puis $(b_n)_{n \ge 3}$ et $(a_n)_{n \ge 3}$.

I.B.2) En déduire que A_n est inversible.

I.B.3) Calculer explicitement les valeurs propres de A_3 et C_3.

I.B.4) **Localisation des valeurs propres**.

a) Soit λ un réel tel que :

$$|\lambda - \alpha_1| > 1$$
$$|\lambda - \alpha_n| > 1$$

et, $\forall k \in \{2, 3, \ldots n-1\}$ $\quad |\lambda - \alpha_k| > 2$.

Montrer qu'alors $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] - \lambda I$ est inversible.

b) En déduire que les valeurs propres de $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ appartiennent à la réunion des intervalles

$$[\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \bigcup \left(\bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \bigcup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$$

et que A_n , B_n et C_n sont inversibles.

Partie II - Fonctions splines cubiques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \dfrac{1}{n}$ et pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k = \dfrac{k}{n}$.

On note S l'ensemble des fonctions (dites splines cubiques) de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré ≤ 3 .

II.A - Montrer que l'application :

$$S \to \mathbb{R}^{n+3}$$

$$s \mapsto \left(s(0), s'(0), s''(0), s_d^{(3)}(0), s_d^{(3)}\left(\frac{1}{n}\right), \ s_d^{(3)}\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, s_d^{(3)}\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

On rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$, $s_d^{(3)}(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{s''(x+t) - s''(x)}{t}$ désigne la dérivée à droite d'ordre 3 en x .

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S ?

II.B - f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$.

II.B.1) Soit $(m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ la restriction de g à $[x_{i-1}, x_i]$ est polynomiale de degré ≤ 3 ,

(ii) $\forall i \in \{0, \ldots n\}$ $g(x_i) = f(x_i)$,

(iii) $g''(0) = m_0$; $\lim\limits_{\begin{cases} x \to x_i \\ x \leq x_i \end{cases}} g''(x) = \lim\limits_{\begin{cases} x \to x_i \\ x \geq x_i \end{cases}} g''(x) = m_i$; $g''(1) = m_n$.

b) Établir que pour $i \in \{1, ..., n\}$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on a :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i$$

où u_i et v_i sont des réels que l'on exprimera en fonction de m_{i-1}, m_i, h, $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$.

II.B.2) Montrer que :

$$\begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \quad A_{n+1}M = B,$$

où $M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, $A_{n+1} = M_{n+1}[2, 4, ..., 4, 2]$ selon les notations de la partie I, et B est une matrice colonne dépendant des $f(x_i), (i \in \{0, ..., n-1\})$, $f'(0)$, $f'(1)$ et h.

II.B.3) En déduire qu'il existe une et une seule fonction spline cubique $g \in S$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, ..., n\}, g(x_i) = f(x_i) \\ g'(0) = f'(0) \,;\, g'(1) = f'(1) \end{cases}.$$

II.B.4) Retrouver la valeur de la dimension de S.

On peut montrer et on **admettra** ici que si f est de classe C^4 sur $[0, 1]$,

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \le \frac{13}{8n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$$

II.C - Interpolation de Lagrange-Sylvester

II.C.1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale h, de degré $\le n+2$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, ..., n\}, h(x_i) = f(x_i) \\ h'(0) = f'(0) \,;\, h'(1) = f'(1) \end{cases}$$

II.C.2) On peut montrer, et on **admettra** ici que, si f est de classe C^{n+3} sur $[0, 1]$:

$$\|f - h\|_\infty \le \frac{\left\|f^{(n+3)}\right\|_\infty}{(n+3)\,!}\|M_n\|_\infty \text{ où } M_n(x) = x(x-1)\prod_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

Comparer les deux méthodes d'approximation précédentes (splines cubiques et Lagrange-Sylvester) du double point de vue de la simplicité et de la précision, d'abord pour $n = 1$, puis pour $n \ge 2$.

Partie III - Un exemple de structure euclidienne

III.A - On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour P, $Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$$

III.A.1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire euclidien sur E. On notera $\|P\|_2$ la norme du polynôme P associée au produit scalaire précédent.

III.A.2) Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \qquad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

où la fonction δ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Vérifier que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de E. Elle sera notée $\mathscr{B}$. Que peut-on dire du degré du polynôme $X^n + (-1)^{n+1} n!\, L_0$?

III.A.3) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteur N de E orthogonal (au sens du produit scalaire précédemment défini) à l'hyperplan H de E formé des polynômes de degré $\le n - 1$.

Si $P \in E$, on note

$$d(P, H) = \inf_{Q \in H} \|P - Q\|_2$$

la distance du polynôme P à l'hyperplan H.

Montrer que $d(X^n, H) = n!\ d(L_0, H)$.

III.A.4) En remarquant que : $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer

$$\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$$

à l'aide d'un seul coefficient binômial.

III.A.5) En déduire la valeur de $d(X^n, H)$.

III.B - Étude d'un endomorphisme de E

On note

$$\Pi(X) = \prod_{i=0}^{n} (X-i)$$

et on fixe un polynôme M_0 dans E.

On considère l'application φ de E dans E, qui à tout P de E associe le reste de la division euclidienne de $P \times M_0$ par Π.

III.B.1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

III.B.2) Exprimer $\varphi(L_i)$ en fonction de L_i. En déduire que φ est un endomorphisme autoadjoint de E.

III.B.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M_0 pour que φ soit un automorphisme orthogonal de E. Quelle est alors sa nature géométrique ?

III.B.4) On note $\mathscr{B}_E(0,1) = \{P \in E \; ; \; \|P\|_2 \leq 1\}$.

Exprimer

$$\min_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P) \quad \text{et} \quad \max_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P)$$

à l'aide des $M_0(i)$.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $d \geq 1$. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E est noté $(u|v)$, la norme du vecteur u est notée $\|u\|$.

L'espace des endomorphismes de E est noté $L(E)$. Le composé de deux éléments f et g de $L(E)$ est noté indifféremment fg ou $f \circ g$ et l'identité I_E. L'adjoint de f est noté f^* ; on rappelle qu'il est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ (f(u)|v) = (u|f^*(v)).$$

Si f est un élément de $L(E)$, $Tr(f)$ désigne la trace de f. Le composé de p exemplaires de f est noté f^p (avec, par convention, $f^0 = I_E$). Si F est un sous espace de E stable par f, l'endomorphisme induit par f sur F est noté f_F.

On notera $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques (ou autoadjoints) de E et $S^+(E)$ le sous ensemble de $S(E)$ constitué des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives.

On rappelle que, si $t \mapsto x(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans E et $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$ une base de E, par rapport à laquelle les coordonnées de $x(t)$ sont $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_d(t)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i(t) e_i$$

alors x est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ l'application $t \mapsto x_i(t)$ est une application de classe C^k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit f un élément de $L(E)$ et x_0 un élément de E. On considère l'équation

$$\mathcal{P}(f, x_0)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dont l'inconnue x est la fonction $t \mapsto x(t)$ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E.

On rappelle que, pour tout x_0 de E, il existe une unique solution de $\mathcal{P}(f, x_0)$. On l'appelle f-trajectoire de x_0.

Filière PSI

Afin d'alléger la rédaction, on conviendra que toute propriété géométrique d'une trajectoire x concerne en réalité l'ensemble $x(\mathbb{R}) = \{x(t) | t \in \mathbb{R}\}$; par exemple, on dira que la trajectoire x est un cercle si $x(\mathbb{R})$ est un cercle.

On désigne par $B(E)$ l'ensemble des f, éléments de $L(E)$, tels que toutes les f – trajectoires sont bornées, c'est-à-dire sont telles que, quel que soit le choix de x_0, il existe un réel $M \geq 0$, dépendant de x_0, pour lequel on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \|x(t)\| \leq M ,$$

si x désigne la f – trajectoire de x_0.

De même, on note $SP(E)$ l'ensemble des f, éléments de $L(E)$, tels que toutes les f – trajectoires sont sphériques, c'est-à-dire sont telles que, quel que soit le choix de x_0, il existe un élément $\gamma \in E$ et un réel $r \geq 0$, dépendants de x_0, pour lesquels on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \|x(t) - \gamma\| = r ,$$

si x désigne la f – trajectoire de x_0.

L'objectif du problème est de caractériser les ensembles $B(E)$ et $SP(E)$.

Partie I - Étude de trajectoires

I.A - Soit F un sous-espace de E, stable par f. Montrer que si $x_0 \in F$, la f – trajectoire de x_0 est contenue dans F.

I.B - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ et x la f – trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, λ, t.

I.C - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $\operatorname{Ker} f^2$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f$ et x la f – trajectoire de x_0. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, $f(x_0)$, t et préciser la nature géométrique de cette trajectoire.

I.D - Soit f un élément de $L(E)$, x_0 un élément de $E - \{0\}$. On suppose qu'il existe un réel ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ et un réel k strictement positif tels que

$$(f^2 - 2k\cos\phi f + k^2 I_E)(x_0) = 0 .$$

On note $t \mapsto x(t)$ la f – trajectoire de x_0.

I.D.1) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0))$ est libre et justifier l'existence de deux applications u et v de $\mathbb{R}$ dans E, telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0).$$

I.D.2) Montrer que u et v sont de classe C^2. Former une équation différentielle linéaire du second ordre, avec deux conditions initiales, vérifiée par u. En déduire l'expression de u.

I.D.3) Montrer que x est bornée si et seulement si $\cos\phi = 0$. Dans ce cas, décrire géométriquement la f–trajectoire x. À quelles conditions cette trajectoire est-elle un cercle ?

I.E - Soit k un réel strictement positif, f un élément de $L(E)$, $g = f^2 + k^2 I_E$ et x_0 un élément de $\operatorname{Ker} g^2$. On désigne par G la famille

$$G = \{x_0, f(x_0), g(x_0), gf(x_0)\}.$$

I.E.1) Montrer que $F = \operatorname{vect}(G)$ est stable par f.

I.E.2) Montrer que G est libre si et seulement si $g(x_0) \neq 0$.

I.E.3) On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Montrer que la f–trajectoire de x_0 peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_0 + v(t)f(x_0) + w(t)g(x_0) + h(t)gf(x_0).$$

Déterminer $u(t)$, $v(t)$, puis $w(t)$, puis $h(t)$. Montrer que cette trajectoire n'est pas bornée.

Partie II - Étude des endomorphismes à trajectoires bornées

Dans les questions II.A à II.D incluses, f désigne un endomorphisme de E tel que toutes les f–trajectoires sont bornées : $f \in B(E)$.

II.A - Soit λ une valeur propre réelle de f. Montrer que $\lambda = 0$.

II.B - Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

II.C - Exhiber, *sans démonstration*, un polynôme *non nul*, à coefficients réels, qui annule f. Démontrer qu'il existe un polynôme unitaire à coefficient réel qui est de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ annulant f.

Dans toute la suite de la section II.C, ce polynôme est noté P.

II.C.1) Soit Q $(Q \in \mathbb{R}[X])$ un diviseur non constant de P. Montrer que $Q(f)$ ne peut être inversible.

II.C.2) On suppose que P admet une racine réelle λ. Montrer que $\lambda = 0$ et, en s'aidant de la question II.B, que l'ordre de multiplicité de cette racine dans P est égal à 1.

II.C.3) Que dire de f si P est scindé sur $\mathbb{R}$?

II.C.4) On suppose que P possède une racine complexe λ non réelle. On écrit λ sous forme trigonométrique : $\lambda = ke^{i\phi}$, avec k et ϕ réels, $k > 0$ et ϕ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$. Démontrer qu'il existe un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que : $(f^2 - 2k(\cos\phi)f + k^2 I_E)(x_0) = 0$. En déduire la valeur de $\cos\phi$. Qu'en conclure sur les racines non réelles de P ?

II.C.5) Soit $k > 0$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + k^2 I_E)^2 = \mathrm{Ker}(f^2 + k^2 I_E)$.

II.C.6) On suppose $f \neq 0$; démontrer qu' il existe un entier $s \geq 1$ et des réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$ strictement positifs et distincts tels que P soit de l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$P = \prod_{i=1}^{s} (X^2 + a_i^2) \text{ ou } X \prod_{i=1}^{s} (X^2 + a_i^2).$$

II.D - Prouver que f vérifie les deux propriétés suivantes :

i) L'endomorphisme f^2 est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels négatifs ou nuls.

ii) $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$.

Prouver que les dimensions des sous-espaces propres de f^2 associés à ses valeurs propres strictement négatives sont paires.

II.E - Réciproquement soit f un élément de $L(E)$, non nul et vérifiant les deux propriétés i) et ii) de la question II.D). Établir l'existence d'un entier s strictement positif, de s sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tous non réduits à $\{0\}$, de dimensions paires et stables par f et de s réels $a_1, a_2, \ldots, a_s$, strictement positifs et distincts, tels que :

$$\mathrm{Ker}\, f \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} E_i \right] = E \qquad (1)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\},\ \forall x \in E_i, f^2(x) = -a_i^2 x \qquad (2)$$

Étudier la $f-$trajectoire d'un vecteur appartenant à l'un des E_i et en conclure que $f \in B(E)$.

Partie III - Étude des endomorphismes à trajectoires sphériques

III.A -

III.A.1) Soit f un élément de $L(E)$. Prouver l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a) $f^* + f = 0$

b) $\forall u \in E$, $(u|f(u)) = 0$.

Un endomorphisme vérifiant l'une de ces deux propriétés est appelé *endomorphisme antisymétrique* de E. L'ensemble de ces endomorphismes est noté $A(E)$.

III.A.2) Soit f un élément de $A(E)$ et x une f-trajectoire associée ; calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \|x(t)\|^2$. Montrer que $A(E) \subset SP(E)$.

III.B - Soit f un élément de $SP(E)$ et F un sous-espace de E stable par F. Montrer que f_F est élément de $SP(F)$.

III.C - Montrer que $SP(E) \subset B(E)$.

III.D - Dans cette section III.D, E est de dimension 2 et f est un élément non nul de $SP(E)$.

III.D.1) Démontrer que f^2 est une homothétie de rapport strictement négatif.

III.D.2) Soit x_0 un élément de $E - \{0\}$ et a le centre d'un cercle contenant la f-trajectoire de x_0. Justifier que a peut s'écrire sous la forme $\alpha x_0 + \beta f(x_0)$ et prouver que $(x_0|f(x_0)) = 0$.

III.D.3) Prouver que $A(E) = SP(E)$.

III.E - Dans cette section III.E, E est un espace vectoriel orienté de dimension 3.

Soit ω un élément de $E - \{0\}$ et v un vecteur de E orthogonal à ω. On définit l'endomorphisme ψ de E par $\psi : u \mapsto \omega \wedge u + (u|\omega)v$.

III.E.1) Montrer que ψ est antisymétrique si et seulement si $v = 0$.

III.E.2) Montrer que si v est non nul, ψ appartient à $SP(E)$.

On pourra commencer par prouver que pour tout x_0 de E, si x désigne la f-trajectoire de x_0, $(x|\omega)$ est constant et l'on cherchera le centre de la sphère sous la forme $\alpha(\omega + \omega \wedge v)$, où α est une constante à déterminer.

On se propose de prouver que tout endomorphisme f élément de $SP(E)$, *non nul* est de la même forme que ψ.

III.E.3) Soit f un élément de $SP(E) - \{0\}$. Établir que f^2 n'admet qu'une seule valeur propre strictement négative, notée $-\mu^2$ et que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f^2 + \mu^2 I_E)$.

III.E.4) En déduire l'existence d'une base orthonormée de E où la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu & b \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure.

III.F - On suppose, dans cette question, que f, élément de $SP(E)$, vérifie $f^2 = -\mu^2 I_E$ où $\mu > 0$. À l'aide des résultats des questions III.B et III.D, montrer que f est antisymétrique.

III.G - Démontrer que, dans le cas général, $SP(E)$ est constitué des endomorphismes $f \in L(E)$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

i) $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

ii) L'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}\, f$ est antisymétrique.

Ces deux conditions étant supposées réalisées, préciser géométriquement en fonction de x_0 élément de E, le centre d'une sphère qui contient la f– trajectoire de x_0.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On considère un espace euclidien E de dimension n. On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.

Pour $u \in L(E)$, on note u^* son adjoint, χ_u son polynôme caractéristique et $Sp(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note π_u le générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de u dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1. π_u est appelé polynôme minimal de u.

L'endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque $u^* = -u$.

On note, $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ les sous-ensembles de $L(E)$ formés respectivement des endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux.

Si F est un sous-espace de E stable par u, on note $u|_F$ l'endomorphisme de F induit par u.

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que u^* soit un polynôme en u et $\mathscr{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathscr{P}(E) = \{u \in L(E) \ / \ u^* \in \mathbb{R}[u]\}, \ \mathscr{N}(E) = \{u \in L(E) \ / \ (u^* \circ u = u \circ u^*)\}.$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathscr{P}(E)$ *et* $\mathscr{N}(E)$.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et S_n, A_n et O_n les sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal, c'est-à-dire le polynôme minimal de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On note ${}^tA$ la transposée de A.

Deux matrices A et B sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $P \in O_n$ tel que $B = P^{-1}AP$.

On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA$ peut s'exprimer comme un polynôme en A, donc :

$$\mathscr{P}_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tA \in \mathbb{R}[A]\}$$, et de manière analogue :

$$\mathscr{N}_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tAA = A\,{}^tA\}$$

Les parties I et II sont indépendantes.

Filière PSI

Partie I - Généralités sur $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}_n$

I.A -

I.A.1) Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

I.A.2) Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur $\mathscr{B}$, une base orthonormale de E. Établir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathscr{P}(E)$ (resp. $\mathscr{N}(E)$) et l'appartenance de A à $\mathscr{P}_n$ (resp. $\mathscr{N}_n$).

Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

I.A.3) Montrer que $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{N}(E)$ et que $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{N}_n$.

I.B -

I.B.1) Vérifier que $S(E) \subset \mathscr{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathscr{P}(E)$.

I.B.2) Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathscr{P}_n$?

En déduire que si $n \geq 2$, on a $\mathscr{P}(E) \neq L(E)$.

I.B.3) Soit $u \in L(E)$ admettant, sur une certaine base $\mathscr{B}$ de E, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}'$ de E, telle que les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ soient triangulaires supérieures.

Montrer que la matrice de u dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure.

En déduire les éléments $u \in \mathscr{P}(E)$ qui sont trigonalisables.

I.B.4) On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u.

En déduire que $O(E) \subset \mathscr{P}(E)$.

I.C -

I.C.1) Montrer que si $A \in \mathscr{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note P_A, tel que degré $(P_A) <$ degré(π_A) et $P_A(A) = {}^tA$.

Si A est la matrice nulle, on convient que P_A est le polynôme nul.

Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathscr{P}(E)$.

I.C.2) Déterminer les matrices A de $\mathscr{P}_n$ pour lesquelles P_A est un polynôme constant.

I.C.3) Déterminer les matrices A de $\mathscr{P}_n$ pour lesquelles P_A est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

I.C.4) Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.

Montrer que si $A \in \mathscr{P}_n$ alors $B \in \mathscr{P}_n$ et $P_A = P_B$.

I.D - Décrire les éléments A de $\mathscr{P}_2$ et calculer les P_A correspondants.

I.E - Soit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ avec } A_1 \in \mathscr{P}_{n_1},\ A_2 \in \mathscr{P}_{n_2}.$$

I.E.1) On suppose que π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes U et V tels que :

$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\,\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\,\pi_{A_2}.$$

Calculer A^m pour m entier positif quelconque, puis $P(A)$ pour $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}$.

En déduire que $A \in \mathscr{P}_{n_1+n_2}$.

I.E.2) Expliciter π_A en fonction de π_{A_1} et π_{A_2}.

Comment trouver P_A connaissant π_{A_1}, π_{A_2}, et le polynôme P défini par :

$$P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1} \text{ ?}$$

I.F - Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $A \in \mathscr{P}_4$ et calculer P_A avec la méthode précédente.

Partie II - Étude de $\mathscr{N}(E)$ et $\mathscr{N}_n$

II.A - Montrer que si $u \in \mathscr{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathscr{N}(E)$.

II.B - Soient $u \in \mathscr{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$. En déduire que u et u^* ont le même noyau.

II.C - Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f antisymétrique inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

II.C.1) Comparer les déterminants de f et f^*. En déduire que m est pair.

II.C.2) On considère les applications n et g définies sur $\mathbb{R}^m$ par $n(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|f(x)\|^2$ et l'application

$$q : U = \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R} \text{ définie par } q(x) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}.$$

Montrer que n et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m$ et que leurs différentielles en x fixé sont les formes linéaires

$$h \mapsto 2(x|h) \text{ et } h \mapsto 2(f(x)|f(h)).$$

Montrer que l'application q est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle en x, en calculant $dq(x)(h)$ au moyen de produits scalaires et de normes.

On note $S = \{x \in U / \|x\| = 1\}$.

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par q sur S coïncide avec l'ensemble des valeurs prises par q sur U. Montrer que la fonction q admet un maximum sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et que ce maximum est atteint en un point $x_0 \in S$.

Montrer que, pour tout h, on a $(f(x_0)|f(h)) = \|f(x_0)\|^2 \, (x_0|h)$. En déduire que $\Pi = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f.

Donner une base orthonormale de Π et exprimer la matrice de $f|_{\Pi}$ relative à cette base.

II.C.3) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \tau_i = \begin{bmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

II.D - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par u et u^*. On note E_2 le supplémentaire orthogonal de E_1.

II.D.1) Montrer que E_2 est stable par u et u^*.

II.D.2) Montrer que $(u|_{E_1})^* = u^*|_{E_1}$.

II.D.3) Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $u|_{E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$ et $u|_{E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathcal{N}(E)$.

II.E - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace :

$$\bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda)\text{, où la somme porte sur l'ensemble des valeurs propres de } u\,.$$

Montrer que F est stable par u et u^*. En considérant la restriction de u à F, montrer que la dimension de F ne peut être impaire. On notera $\dim F = 2p$.

II.F - On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose

$$s = \frac{v + v^*}{2} \text{ et } a = \frac{v - v^*}{2}.$$

II.F.1) Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé.On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{n_i}.$$

II.F.2) Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.

Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{bmatrix}$$

avec, pour $i = 1, \dots, k$, M_i de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où A_i est antisymétrique.

II.F.3) On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

II.G - Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{bmatrix} \text{ avec } D \text{ matrice diagonale, } \tau_i = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} \text{ et } b_i \neq 0$$

pour $i = 1, \dots, p$.

II.H - Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.

II.I - Préciser la matrice obtenue dans II.G quand $u \in O(E)$.

Partie III - Relation entre $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{N}_n$

III.A - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

III.A.1) Soit

$$\Delta = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{bmatrix}$$ une matrice réelle diagonale par blocs.

Montrer que $P(\Delta) = {}^t\Delta$ si et seulement $P(M_i) = {}^tM_i$, pour $i = 1, \dots, k$.

III.A.2) Donner les expressions de P_A, χ_A et π_A pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ où } b \neq 0 .$$

Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si $P(a+ib) = a-ib$ et $P(a-ib) = a+ib$.

Dans les questions qui suivent, on fixe $A \in \mathscr{N}_n$. D'après II.H, A est orthogonalement semblable à une matrice B telle que celle représentée dans II.G.

III.A.3) Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si :

$$\begin{cases} P(\lambda) = \lambda \text{ pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } A \\ P(z) = \bar{z} \text{ pour toute racine complexe non réelle } z \text{ de } \chi_A \end{cases}.$$

III.A.4) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.

En déduire que $\mathscr{N}_n = \mathscr{P}_n$.

III.B - Montrer que le polynôme P trouvé dans III.A.4 est, en fait, P_A.

Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme P_A de la question I.F.

III.C - Dans cette question, on suppose $n \geq 3$ et on note $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante

$$C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{bmatrix} \text{ et } J = C(0, 1, 0, \dots, 0).$$

III.C.1) Montrer que $J \in \mathscr{P}_n$.

En déduire que toute matrice circulante appartient à $\mathscr{P}_n$.

III.C.2) À toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \text{ et } Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}.$$

Donner l'expression de π_J. Comparer Q et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J.

En déduire les étapes d'une méthode de calcul de P_A. Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

III.D - Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n \geq 3$ et une matrice $A \in \mathscr{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0 a_2 \in [0, 4[$.

Indication : montrer que, si n et A existent, χ_A admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.

••• FIN •••

MATHÉMATIQUES II

Rappels, notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n. De plus :

- $\mathscr{M}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ;
- si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $A_{i,j}$ le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j ;
- pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha, \beta)$ est la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$;
- si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ sont dans $\mathbb{R}^p$, on désigne par $\operatorname{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \ldots, M(\alpha_p, \beta_p))$ la matrice de $\mathscr{M}_{2p}$ définie par blocs carrés d'ordre 2 dont les seuls blocs éventuellement non nuls sont les blocs diagonaux $M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \ldots, M(\alpha_p, \beta_p)$;
- I_n est la matrice unité $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ élément de $\mathscr{M}_n$;
- On rappelle les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et leur codage :

opérations	codage
échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
multiplication de la ligne i par $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
ajout de la ligne j, multipliée par le scalaire λ, à la ligne i $(i \neq j)$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Si $A \in \mathscr{M}_n$ et si E est la matrice obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, alors EA (resp. AE) est la matrice obtenue à partir de A en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) de A (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

Filière PSI

On confond respectivement :

- matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé,
- vecteur de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) et matrice colonne de ses coordonnées,
- matrice de taille 1 et scalaire la constituant.

On rappelle qu'une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$; il existe alors deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tel que s soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, définie par :

$$s|_{E_1} = \mathrm{Id}_{E_1} \text{ et } s|_{E_2} = -\mathrm{Id}_{E_2}.$$

Préciser la symétrie s, c'est déterminer les sous-espaces E_1 et E_2 associés.

On note (P_A) la propriété :

(P_A)	A ne possède pas de valeur propre réelle

Le but de ce problème est d'étudier des matrices de $\mathscr{M}_n$ vérifiant la propriété (P_A).

Après avoir établi quelques résultats préliminaires, on étudie des cas particuliers dans les parties I et II et un cas plus général dans la partie III.

Résultats préliminaires

1) On se propose de démontrer le résultat suivant :

« deux matrices de $\mathscr{M}_n$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n$ ».

Soit donc A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et P un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

a) Montrer qu'il existe $R, J \in \mathscr{M}_n$ tels que $P = R + iJ$ avec $i^2 = -1$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$.

c) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0 J) \neq 0$.

d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n$.

2)

a) Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

b) En déduire que s'il existe une matrice A de $\mathscr{M}_n$ vérifiant (P_A), alors n est pair.

Dans toute la suite du problème, on suppose n pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Partie I -

I.A - Dans cette section I.A.1, on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on désigne par (e_1, e_2) la base canonique, avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

I.A.1) On considère la matrice $M(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et on désigne par u l'endomorphisme associé.

a) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de s_1, symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}e_2$.

b) Déterminer, dans la base canonique, la matrice de l'application $u \circ s_1$.

En déduire qu'il existe une symétrie s_2, qu'on précisera, telle que $u = s_2 \circ s_1$.

I.A.2) On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que A est semblable à $M(0, 1)$ et donner une matrice P de $\mathscr{M}_2$ à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que $M(0, 1) = P^{-1}AP$.

b) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Soit α et β des nombres réels tels que $\beta^2 - \alpha^2 = 1$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$.

c) Montrer que B est semblable à $M(0, 1)$ et donner une matrice Q de $\mathscr{M}_2$ telle que $M(0, 1) = Q^{-1}BQ$.

Indication : on pourra calculer $Be_1 = B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

d) Montrer que B est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.3) On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tel que $\alpha^2+\beta^2 = 1$.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.4) On considère à présent la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tels que $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.5) Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de A pour que (P_A) soit réalisée.

b) En supposant que A vérifie (P_A), et en étudiant la diagonalisation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de A, montrer qu'il existe une unique matrice, semblable à A, du type $M(\alpha,\beta)$ avec α réel et β réel strictement positif. Expliciter α et β en fonction de a, b, c et d.

c) Que peut-on dire de $\det(A)$ si A vérifie (P_A) et est dans $\mathcal{M}_2$?

d) Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.6) On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique (i.e. (e_1, e_2) est orthonormée directe). Que sont alors les endomorphismes de matrice $M(\alpha,\beta)$ (avec α et β réels tels que $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$) dans la base canonique ?

I.B - Soit B une matrice de $\mathcal{M}_p$ vérifiant $B^2 = I_p$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n$ définie par blocs sous la forme $A = \begin{bmatrix} 2B & -5B \\ B & -2B \end{bmatrix}$.

I.B.1) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p$ et qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{M}_p$ inversible, des entiers naturels q et r tels que $Q^{-1}BQ$ soit sous la forme d'une matrice par blocs $\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix}$

On convient que cette matrice vaut I_p lorsque $r = 0$ et $q = p$ et qu'elle vaut $-I_p$ lorsque $q = 0$ et $r = p$.

I.B.2) Déterminer une matrice par blocs P de $\mathscr{M}_n$ inversible et constituée de multiples de I_p telle que : $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{bmatrix}$.

I.B.3) En déduire que A est semblable dans $\mathscr{M}_n$ à la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}.$$

I.B.4) Montrer alors que A est semblable dans $\mathscr{M}_n$ à une matrice du type $\mathrm{diag}(M(0, 1), M(0, 1), \ldots, M(0, 1))$.

I.B.5) *Exemple* : on considère dans $\mathscr{M}_4$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice inversible M de $\mathscr{M}_4$ telle que

$$M^{-1}AM = \mathrm{diag}(M(0, 1), M(0, 1)).$$

b) En utilisant la technique vue à la question I.A.1, montrer que A est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Partie II -

II.A - Dans cette question, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n$ telle que $A^2 = -I_n$.

II.A.1) Montrer que (P_A) est réalisée.

II.A.2) Si E est obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, comment déduit-on EAE^{-1} de A ?

On distinguera les trois opérations élémentaires codées sous la forme :

a) $L_i \leftrightarrow L_j$,

b) $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

c) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.A.3)

a) En utilisant II.A.1, montrer qu'il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

b) En utilisant des opérations élémentaires, en déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que si $A' = PAP^{-1}$ alors $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 1$.

c) Montrer alors que $A'_{i,2} = 0$ si $i \neq 1$ et $A'_{1,2} = -1$.

II.A.4) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que $QA'Q^{-1}$ soit de la forme par blocs $\begin{bmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-2}$.

II.A.5) Montrer que A est semblable à une matrice du type

$$\mathrm{diag}(M(0,1), M(0,1), \ldots, M(0,1)).$$

II.A.6) *Exemple* : en utilisant la méthode décrite dans cette partie, trouver une matrice M inversible de $\mathcal{M}_4$ telle que $MAM^{-1} = \mathrm{diag}(M(0,1), M(0,1))$ où A est la matrice de la question I.B.5). On fera apparaître clairement les opérations élémentaires utilisées.

II.B - Dans cette question A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

II.B.1) Montrer que A vérifie (P_A).

II.B.2) Montrer que A est semblable à la matrice d'ordre n

$$\mathrm{diag}(M(\alpha,\beta), M(\alpha,\beta), \ldots, M(\alpha,\beta)).$$

Que peut-on dire de $\det(A)$?

II.C - Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $u(P)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ u(P)(x) = x^{n-1} P\left(\frac{-1}{x}\right).$$

II.C.1) Déterminer pour quelles valeurs de i et j dans $\{0, \ldots, n-1\}$, le plan $\mathit{vect}(X^i, X^j)$ est stable par u.

II.C.2) En déduire que la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{n+1-i,i} = (-1)^{i-1}$ si $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients de A étant nuls, est semblable à $\mathrm{diag}(M(0,1), M(0,1), \ldots, M(0,1))$.

Partie III -

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n$ vérifiant (P_A).

On se propose de montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

i) A est semblable à une matrice du type

$\mathrm{diag}(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \ldots, M(\alpha_p, \beta_p))$ avec $(\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour $1 \leq k \leq p$.

ii) Il existe un polynôme réel à racines simples complexes non réelles annulé par A.

iii) Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 stable par A possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A.

III.A - Dans cette section III.A, on montre que (i) $\Rightarrow$ (ii).

III.A.1) Montrer que si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, le polynôme $(X-\alpha)^2 + \beta^2$ ne possède que des racines simples complexes non réelles.

III.A.2) En déduire que (i) $\Rightarrow$ (ii).

III.B - Dans cette section III.B, on montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

On suppose donc que A vérifie (ii). Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 et stable par A. Soit (f_1, f_2) une base E que l'on complète en une base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

III.B.1) Montrer que dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a une matrice s'écrivant par blocs :

$$\begin{bmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ avec } A' \in \mathscr{M}_2.$$

III.B.2) Vérifier que A' ne possède pas de valeur propre réelle et en déduire que A' est semblable à une matrice du type $M(\alpha, \beta)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

III.B.3) Montrer que E est inclus dans $\mathrm{Ker}((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$.

III.B.4) Montrer que $\mathrm{Ker}((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$ possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A dans $\mathbb{R}^n$.

III.B.5) En utilisant une technique analogue à celle vue dans les parties II.A.3 et II.A.4, montrer que E possède un supplémentaire stable par A dans $\mathrm{Ker}((A-\alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n)$, puis conclure que iii) est réalisé.

III.C - En raisonnant par récurrence, montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i).

III.D - *Exemple* :

Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

En admettant que A annule $(X^2+1)(X^2-4X+5)$, déterminer une matrice inversible M de $\mathscr{M}_4$ et des réels α, β, α' et β' tels que

$$A = M\begin{bmatrix} M(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & M(\alpha',\beta') \end{bmatrix}M^{-1}.$$

••• **FIN** •••

MATHÉMATIQUES II

Notations. Dans tout le problème, on ne considère que des matrices carrées réelles. On désigne par $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées (réelles) d'ordre 2, c'est-à-dire à 2 lignes et 2 colonnes. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$, on rappelle la définition de sa *trace* $\mathrm{Tr}(M) = a + d$ et de son *polynôme caractéristique*

$$\chi_{_M} \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto \det(x\mathbb{I}_2 - M),$$

où $\mathbb{I}_2$ désigne la matrice identité et det le déterminant d'ordre 2.
En outre, on identifie les espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^2$ et $\mathfrak{M}_{2,\,1}(\mathbb{R})$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.
On pose donc, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

On rappelle enfin qu'une matrice carrée réelle A d'ordre 2 est *orthogonale* si, et seulement si, ${}^tA\,A = \mathbb{I}_2$. L'ensemble des matrices orthogonales réelles d'ordre 2 est noté O_2.

On désigne par S_2 l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

Partie I - Généralités

I.A -

I.A.1) Démontrer que si deux matrices de $\mathbf{E}$ sont semblables, elles ont même trace et même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

I.A.2) Démontrer que $\Phi \,:\ (M_1,\, M_2) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tM_1\, M_2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{E}$. Pour la suite du problème, $\mathbf{E}$ pourra être muni de la norme associée à ce produit scalaire.

I.A.3) Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathbf{E}$, on a $|\det(M)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}({}^tMM)$. Quand y a-t-il égalité ?

Filière PSI

I.A.4) Pour $M \in \mathbf{E}$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\chi_{_M}(x)$ en fonction de x, $\mathrm{Tr}(M)$ et $\det(M)$. En conclure que 1 est une valeur propre de M si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(M) = 1 + \det(M)$.

I.B - La décomposition *UDV*

On donne dans cette question $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de $\mathbf{E}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

I.B.1) Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\varphi(\theta) = \mathrm{Tr}(MP(\theta))$.

Démontrer que φ est une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ en lequel φ atteint son maximum. En choisissant alors un tel θ_1 et en considérant $\varphi'(\theta_1)$, démontrer que $MP(\theta_1)$ est une matrice symétrique.

I.B.2) En déduire que $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1,\, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où D est une matrice diagonale de $\mathbf{E}$.

Remarque : *on a établi que toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $M = UDV$, où D est diagonale et U, V orthogonales.*

I.B.3) **Exemple :** décomposer la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

I.C - Soit $A \in \mathbf{E}$, U et V des matrices orthogonales d'ordre 2 et $B = UAV$. Démontrer que ${}^tA\,A$ et ${}^tB\,B$ sont semblables.

On ne demande pas de démontrer le résultat suivant, qui est admis : toute matrice $M \in \mathbf{E}$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1,\, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$ vérifie en outre $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \geqslant 0$.

Partie II - Les ensembles $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$

On désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ telles que $\|MX\| \leqslant \|X\|$ pour tout vecteur-colonne $X \in \mathbb{R}^2$.

II.A - Reformuler la définition de $\mathscr{R}$ en utilisant la notion de *norme subordonnée.*

II.B -

II.B.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$, démontrer que $(a,\, b,\, c,\, d)$ appartient $[-1, 1]^4$.
Démontrer que $\mathscr{R}$ est un compact de $\mathbf{E}$.

Si $(M_1,\, M_2) \in \mathbf{E}^2$*, on définit le* segment $[M_1 M_2]$ *comme l'ensemble des matrices de la forme* $(1-t)M_1 + tM_2$*, où* t *décrit* $[0, 1]$.

II.B.2) Démontrer que $\mathscr{R}$ est aussi un *convexe* de $\mathbf{E}$, c'est-à-dire que, si M_1 et M_2 sont deux matrices de $\mathscr{R}$, le segment $[M_1 M_2]$ est inclus dans $\mathscr{R}$.

II.C -

II.C.1) Démontrer que $M \in \mathscr{R} \iff \forall\, X \in \mathbb{R}^2, \quad {}^tX\, {}^tM\, MX \leqslant {}^tX\, X$.

II.C.2)

a) Si $M \in \mathbf{E}$, justifier le fait que le polynôme caractéristique de ${}^tM\, M$ est de la forme $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, avec λ_1 et λ_2 réels.
Démontrer ensuite que ces réels sont positifs ou nuls.

On pourra considérer des expressions de la forme ${}^tX\, {}^tM\, MX$.

b) Démontrer que $M \in \mathscr{R}$ si, et seulement si, les valeurs propres de ${}^tM\, M$ appartiennent à $[0, 1]$.

II.D - Déduire en particulier de **II.C.2.a** que

$$M \in \mathscr{R} \iff \begin{cases} \mathrm{Tr}({}^tM\, M) & \leqslant & 1 + (\det(M))^2 \\ \mathrm{Tr}({}^tM\, M) & \leqslant & 2 \end{cases}$$

II.E - On définit $\mathscr{S}$ comme :

$$\mathscr{S} = \left\{ M \in \mathscr{R} \;\middle|\; \exists\, X_0 \in \mathbb{R}^2,\ X_0 \neq 0,\ ||MX_0|| = ||X_0|| \right\}.$$

II.E.1) En reprenant les calculs de **II.C.2.a**, démontrer que M appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, le polynôme caractéristique de ${}^tM\,M$ est de la forme $(x-\lambda)(x-1)$, où $\lambda \in [0,1]$.

II.E.2) Si $M \in \mathbf{E}$, on l'écrit sous la forme $M = P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1,\, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \geqslant 0$.

a) Déterminer les valeurs propres de ${}^tM\,M$ en fonction de α et β.

b) Démontrer que $M \in \mathscr{S}$ si, et seulement si, il existe U et V, matrices orthogonales d'ordre 2 et $\gamma \in [-1,1]$ tels que $M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V$.

II.E.3) En déduire que, si M est une matrice *non orthogonale* de $\mathscr{S}$, il existe des matrices orthogonales W et W' d'ordre 2 telles que M appartienne au segment $[WW']$.

On pourra montrer d'abord que si M est de la forme $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\gamma \in]-1,1[$, on peut choisir W et W' orthogonales et diagonales telles que M appartienne au segment $[WW']$.

II.F - On désigne par $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et par $\mathbf{E}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$, avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

II.F.1) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{E}$ orthogonaux au sens du produit scalaire Φ défini en **I.A.2.**

II.F.2) Démontrer que $\mathbf{E}_1$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant $+1$ et que $\mathbf{E}_2$ contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant -1.

II.F.3) Lorsque M est une matrice *non orthogonale* de $\mathscr{S}$, déduire de ce qui précède le nombre de segments $[WW']$ – où W et W' sont orthogonales – contenant M.

Partie III - Définition de l'ensemble $\mathscr{H}$

III.A -

III.A.1) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, démontrer que que $M \in \mathscr{S}$ *implique*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathbf{E}$ vérifiant cette dernière relation.

III.A.2)

a) Réciproquement, à quelle condition, vérifiée par son déterminant, une matrice $M \in \mathscr{H}$ appartient-elle à $\mathscr{S}$?

b) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathscr{H}$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si $\mathrm{Tr}({}^tM\,M) \leqslant 2$.

III.B -

III.B.1) Si $(A, B) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$, calculer $\det(A + B)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$.

Si $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$, avec $M_1 \neq M_2$ on définit la *droite affine* $(M_1 M_2)$ comme l'ensemble des matrices de la forme $(1 - t)M_1 + tM_2$, où t décrit $\mathbb{R}$. Dans la suite, on l'appellera *droite* $(M_1 M_2)$.

III.B.2) Démontrer que, si W et W' sont des matrices orthogonales éléments de $\mathbf{E}$, telles que $\det(W) = +1$ et $\det(W') = -1$, la droite (WW') est incluse dans $\mathscr{H}$. Réciproquement, $\mathscr{H}$ est-elle réunion de droites de cette forme ?

Partie IV - Représentation graphique de $\mathscr{H}$

IV.A - Si $M \in \mathbf{E}$, on rappelle que le polynôme caractéristique de ${}^tM\,M$ est de la forme $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \geqslant 0$. Pour fixer les idées, on suppose $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

On suppose $M \neq 0$. Déterminer en fonction de λ_1 et λ_2 le nombre de réels t **positifs** tels que $tM \in \mathscr{H}$. **On en trouvera « en général » deux, et on interprétera les cas particuliers.**

On étudie à partir de cette question l'intersection de $\mathscr{H}$ avec certains sous-espaces vectoriels de E. On commence par des exemples de plans vectoriels.

IV.B - Soit $\mathbf{P}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathscr{M}_1(x,\,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & y \\ 0 & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

IV.B.1) Déterminer les matrices orthogonales qui sont dans $\mathbf{P}_1$.

IV.B.2) **Dans cette question, on identifie $\mathscr{M}_1(x,\,y)$ avec le point $(x,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et de son repère orthonormal canonique. On procédera à des identifications analogues dans les questions suivantes.**

a) Démontrer que $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_1$ est la réunion de deux coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
Déterminer $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$.

b) Représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_1$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{P}_1$ dans le plan $\mathbf{P}_1$.

IV.C - Soit $\mathbf{P}_2$ l'ensemble des matrices de la forme $\mathscr{M}_2(x,\,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{2}} & \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Soit $(u,\,v) \in \mathbb{R}^2$; on ne demande pas de vérifier que la relation du **III.A.1** implique

$$\mathscr{M}_2(x,\,y) \in \mathscr{H} \cap \mathbf{P}_2 \iff x^2y^2 - 2(x^2+y^2-1) = 0$$

Étudier et représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{P}_2$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{P}_2$ dans le plan $\mathbf{P}_2$ (*on pourra discuter et résoudre l'équation par rapport à la variable y*).

IV.D - Exemple d'intersection de $\mathscr{H}$ avec un sous-espace de dimension 3

On désigne par $\mathbf{S}_2$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

IV.D.1) Démontrer qu'une matrice $M \in \mathbf{S}_2$ appartient à $\mathscr{H}$ si, et seulement si, elle admet une valeur propre égale à $+1$ ou à -1.

On admet qu'une base orthonormale de $\mathbf{S}_2$ est $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3)$, avec

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.D.2) En écrivant une matrice de $\mathbf{S}_2$ sous la forme $xM_1 + yM_2 + zM_3$, décrire l'ensemble C_a des matrices de $\mathbf{S}_2$ admettant le réel donné a comme valeur propre. En déduire une description de $\mathscr{H} \cap \mathbf{S}_2$.

IV.D.3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $N = P(\theta)M(x, y, z)P(\theta)^{-1}$; démontrer que c'est une matrice de la forme $M(u, v, w)$ et exprimer (u, v, w) en fonction de (x, y, z). Interpréter certains des résultats de la question **IV.D.2**.

IV.D.4) Représenter par un dessin $\mathscr{H} \cap \mathbf{S}_2$ et $\mathscr{S} \cap \mathbf{S}_2$.

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

PSI **2012**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $\langle X, Y\rangle$ pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On note $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$ la norme associée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On assimile $\mathbb{R}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à son algèbre d'endomorphismes. Ainsi $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. On rappelle que $\mathrm{Tr}(A)$ est égale à la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $R(A) = \left\{{}^tXAX \;\middle|\; X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\right\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Les parties ainsi que les questions ne sont pas indépendantes.

I Généralités

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A – Démontrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $R(A)$.

I.B – **I.B.1)** Démontrer que les éléments a_{ii} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de la diagonale de A sont dans $R(A)$.

I.B.2) En considérant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

montrer que les éléments a_{ij} avec $i \neq j$ ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

I.C – On considère deux nombres réels $a \in R(A)$ et $b \in R(A)$, avec $a < b$. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de norme 1 tels que ${}^tX_1AX_1 = a$, ${}^tX_2AX_2 = b$.

I.C.1) Démontrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

I.C.2) On pose $X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Démontrer que la fonction $\phi\,:\,\lambda \mapsto \dfrac{{}^tX_\lambda AX_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$.

I.C.3) En déduire que le segment $[a,b]$ est inclus dans $R(A)$.

I.D – Démontrer que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors $0 \in R(A)$.

I.E – Soit Q une matrice orthogonale réelle. Démontrer que $R(A) = R({}^tQAQ)$.

I.F – On considère les conditions suivantes :

(C1) $\mathrm{Tr}(A) \in R(A)$

(C2) Il existe une matrice orthogonale réelle Q telle que la diagonale de la matrice ${}^tQAQ$ soit de la forme $(\mathrm{Tr}(A), 0, \ldots, 0)$

I.F.1) Démontrer que la condition (C2) implique la condition (C1).

I.F.2) On suppose que $x \in R(A)$.

Démontrer qu'il existe une matrice Q_1 orthogonale telle que

$${}^tQ_1AQ_1 = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

où B est une matrice de format $(n-1, n-1)$ $(B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$, C un vecteur colonne à $n-1$ éléments $(C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}))$ et L un vecteur ligne à $n-1$ éléments $(L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}))$.

I.F.3) Démontrer que si la matrice A est symétrique il en est de même pour la matrice B ci-dessus.

I.F.4) Démontrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tQ_1AQ_1)$.

I.F.5) En déduire que si A est symétrique, la condition (C1) implique la condition (C2)

On pourra raisonner par récurrence sur n.

II Matrices symétriques de format $(2, 2)$

Dans toute cette partie A et B désignent des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \leqslant \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. B).

De plus on dira qu'une matrice symétrique S est positive, ce que l'on notera $S \geqslant 0$, si et seulement si toutes ses valeurs propres sont $\geqslant 0$.

II.A – Démontrer que $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$.

II.B – On considère l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $\langle AX, X\rangle = 1$.

II.B.1) Caractériser les conditions sur les λ_i pour lesquelles cet ensemble est :

a) vide ;

b) la réunion de deux droites ;

c) une ellipse ;

d) une hyperbole.

II.B.2) Réprésenter sur une même figure les ensembles Γ obtenus pour A diagonale avec $\lambda_1 \in \{-4, -1, 0, 1/4, 1\}$ et $\lambda_2 = 1$.

II.C – Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

On pourra utiliser une matrice P orthogonale telle que ${}^tPBP$ soit une matrice diagonale, pour obtenir ${}^tPAP = A' = (a'_{ij})$ avec $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{11} + a'_{22}$.

II.D – On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

et on suppose $A \geqslant 0$.

II.D.1) Démontrer que $\det(A) \geqslant 0$.

II.D.2) Démontrer que ${}^tXAX \geqslant 0$ pour tout vecteur X.

II.D.3) Démontrer que $a \geqslant 0$ et $d \geqslant 0$.

II.D.4) Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que :

$$S \geqslant 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad (\mathrm{Tr}(S) \geqslant 0 \text{ et } \det(S) \geqslant 0)$$

II.E – On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

On suppose dans cette section que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$.

II.E.1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(b_1, \sqrt{\det A})$ et $(b_2, \sqrt{\det B})$, démontrer que

$$b_1b_2 \leqslant \sqrt{a_1a_2d_1d_2} - \sqrt{\det A \det B}$$

II.E.2) En calculant $\det(A + B) - \det A - \det B$, en déduire que

$$\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.F – On suppose dans cette sous-partie $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, $\det A \det B \neq 0$ et $b_1b_2 \neq 0$.

II.F.1) Démontrer que l'on a l'égalité dans la formule de la **question II.E.2** si et seulement si les vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2) sont liés, ainsi que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det A})$ et $(b_2, \sqrt{\det B})$.

II.F.2) Démontrer alors que l'on a l'égalité dans la formule de la **question II.E.2** si et seulement si les matrices A et B sont proportionnelles ($A = \lambda B$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$).

II.G – On considère la relation suivante sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format (2,2) : on dit que $S \leqslant S'$ si et seulement si la matrice symétrique $S' - S$ vérifie $S' - S \geqslant 0$.

Démontrer que la relation $\leqslant$ ci-dessus est bien une relation d'ordre sur les matrices symétriques réelles de format (2,2).

II.H – On considère une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$$

de matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée pour la relation d'ordre définie à la question précédente.

II.H.1) Démontrer que pour tout vecteur X, la suite $({}^tXA_nX)_{n\geqslant 0}$ est croissante majorée.

II.H.2) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ sont croissantes majorées.

II.H.3) En considérant le vecteur $X = (1,1)$, démontrer que la suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et $(d_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$.

III Matrices symétriques définies positives

Dans cette partie toutes les matrices sont de format (n,n), où n est un entier supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

III.A – Soit A une matrice symétrique définie positive.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = {}^tYY$.

III.B – Soient A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible T telle que :

$${}^tTAT = I_n \qquad \text{et} \qquad {}^tTBT = D$$

où I_n désigne la matrice identité et D une matrice diagonale.

III.C – Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.

III.C.1) Démontrer que : $\det(I_n + B) \geqslant 1 + \det B$.

III.C.2) En déduire que : $\det(A+B) \geqslant \det A + \det B$.

III.D – Soient x un nombre réel strictement positif, β un nombre réel tel que $0 < \beta < 1$.

Démontrer que : $x^\beta \leqslant \beta x + 1 - \beta$.

III.E – Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, α et β deux nombres réels > 0 tels que $\alpha + \beta = 1$; démontrer que :

$$\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

III.F – Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, soient A_i des matrices symétriques définies positives et α_i des nombres strictement positifs tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Démontrer que

$$\det(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) \geqslant (\det A_1)^{\alpha_1} \ldots (\det A_k)^{\alpha_k}$$

On pourra raisonner par récurrence sur k.

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

PSI

2011

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Représentation connaissant les distances mutuelles

Notations

Dans tout le problème, n et p désignent des entiers naturels $\geqslant 1$.

On note la matrice colonne $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On définit les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$J = Z^tZ \qquad \text{et} \qquad P = I_n - \frac{1}{n}J$$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique que l'on notera $< \cdot, \cdot >$ et l'espace de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \qquad (M \mid N) = \operatorname{tr}\left({}^tMN\right)$$

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices à valeurs propres positives ou nulles.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I Centrage de matrices

I.A – Soit π l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la représentation dans la base canonique est la matrice P.

Montrer que π est un projecteur orthogonal et en préciser les éléments caractéristiques.

I.B – On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi(M) = PMP$$

I.B.1) Montrer que Φ est un projecteur orthogonal dans l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\cdot \mid \cdot))$.

I.B.2) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MZ = 0 \text{ et } {}^tMZ = 0\}$.

I.C – Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$S(M) = MZ = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^n m_{1i} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n m_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(M)_1 \\ \vdots \\ S(M)_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \sigma(M) =< Z, S(M) >$$

Montrer que

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}\left(S(M)^tZ + Z^tS(M)\right) + \frac{\sigma(M)}{n^2}J$$

II Produit scalaire à partir des distances mutuelles (relation de Torgerson)

Soient $U_1, U_2, \cdots, U_n$, n éléments de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^n U_i = 0$.

Géométriquement, $U_1, U_2, \cdots, U_n$ désignent des points d'isobarycentre l'origine.

On définit la matrice des distances mutuelles au carré, élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de la façon suivante :

$$M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

On note U la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ admettant pour vecteurs colonnes les éléments $U_1, U_2, \cdots, U_n$ de $\mathbb{R}^p$. (On pourra noter commodément $U = (U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n)$).

II.A – Montrer que ${}^tUU = -\dfrac{1}{2}\Phi(M)$

II.B – En déduire, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, une expression du produit scalaire $< U_i, U_j >= {}^tU_iU_j$ en fonction de

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{n}\left(S(M)_i + S(M)_j\right) + \frac{1}{n^2}\sigma(M)$$

et de m_{ij} (relation de Torgerson).

Ainsi la matrice des distances mutuelles au carré permet de retrouver la matrice des produits scalaires ${}^tUU \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III Condition pour qu'une matrice soit une matrice de distances mutuelles au carré

Soit $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$ et $m_{ii} = 0$.

III.A – On suppose dans cette question qu'il existe $U_1, U_2, \cdots, U_n$ éléments de $\mathbb{R}^p$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$.

III.A.1) Montrer que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont toutes réelles et négatives ou nulles.

III.A.2) On suppose de plus (quitte à effectuer une translation) que les $(U_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont centrés, c'est-à-dire que $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$.

Montrer que $\mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n) = \mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right)$ et que $p \geqslant \mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right)$.

III.B – Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont toutes négatives ou nulles et on pose $\Psi(M) = -\frac{1}{2}\Phi(M)$ et $r = \mathrm{rg}(\Psi(M))$.

III.B.1) Montrer qu'il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = \Psi(M)$.

III.B.2) On note $U_1, U_2, \cdots, U_n$ les colonnes de la matrice U.

On cherche à montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$.

a) Montrer que les (U_i) sont centrés, c'est-à-dire que $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$.

b) Montrer que la matrice $N = (n_{ij})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ n_{ij} = \|U_i - U_j\|^2$$

vérifie $\Psi(N) = \Psi(M)$.

c) Montrer que $M = N$ et conclure.

IV Étude d'un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, on considère quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ tels que $AB = BC = CD = DA = 1$. On pose $AC = a > 0$ et $BD = b > 0$.

On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces quatre points existent, dans un premier temps par un raisonnement géométrique puis en utilisant les résultats des parties précédentes.

IV.A – Étude géométrique

On suppose que les quatre points A, B, C et D existent.

IV.A.1) On suppose que les quatre points A, B, C et D sont coplanaires. Quelle relation vérifient alors a et b ?

IV.A.2) On suppose que les quatre points distincts A, B, C et D ne sont pas coplanaires. On note I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$.

a) Montrer que (IJ) est la perpendiculaire commune aux droites (AC) et (BD).

b) En projetant les points B et D sur le plan contenant (AC) et perpendiculaire à (IJ), montrer que $a^2 + b^2 < 4$.

On étudie maintenant la réciproque.

IV.A.3) Montrer que si des réels strictement positifs a et b vérifient la relation $a^2 + b^2 \leqslant 4$, alors il existe bien quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ vérifiant $AB = BC = CD = DA = 1$, $AC = a$ et $BD = b$.

IV.B – Étude algébrique

On se propose de retrouver les résultats précédents en utilisant les parties **II** et **III**.

Pour simplifier l'écriture des relations, on notera U_1, U_2, U_3 et U_4 les quatre points A, B, C et D de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant $U_1U_2 = U_2U_3 = U_3U_4 = U_4U_1 = 1$, $U_1U_3 = a$ et $U_2U_4 = b$.

IV.B.1) On reprend les notations des parties précédentes avec ici $n = 4$.

On pose $M = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

Écrire la matrice M puis calculer $S(M)$ et $\sigma(M)$.

IV.B.2) Montrer que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres de la matrice $\Psi(M)$ et déterminer les valeurs propres de la matrice $\Psi(M)$.

IV.B.3) Déterminer le rang de $\Psi(M)$ selon les valeurs prises par a et b.

IV.B.4) Quelle égalité vérifie les réels a et b lorsque les points U_1, U_2, U_3 et U_4 sont coplanaires ?

IV.B.5) Retrouver que les réels strictement positifs a et b vérifient $a^2 + b^2 \leqslant 4$.

IV.B.6) Réciproquement, si $a^2+b^2 \leqslant 4$, donner une famille de points U_1, U_2, U_3 et U_4 vérifiant les contraintes de distances mutuelles.

V Cas où il n'existe pas de points représentant une matrice de distances mutuelles

On considère dans cette partie une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$ et $m_{ii} = 0$.

On suppose que $\Psi(M)$ possède au moins une valeur propre strictement négative. Dans la suite, on étudie trois transformations permettant de modifier « légèrement » la matrice M pour obtenir une nouvelle matrice de distances mutuelles au carré.

V.A – Par les moindres carrés

V.A.1) On cherche à prouver qu'il existe une unique matrice symétrique T_0 à valeurs propres positives ou nulles qui minimise $\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \|{}^tQAQ\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|A\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

b) Justifier l'existence d'une matrice $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice ${}^tQ_0\Psi(M)Q_0$ soit diagonale.

c) Montrer qu'une condition nécessaire pour que $\|\Psi(M) - T_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ minimise $\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est que la matrice ${}^tQ_0T_0Q_0$ soit diagonale.

d) Prouver l'existence et l'unicité de la matrice T_0 cherchée.

V.A.2) On suppose dans cette question que T_0 est non nulle. On veut montrer qu'il existe un entier $p \in [\![1, n-1]\!]$ minimal que l'on précisera tel que l'on puisse déterminer des vecteurs $U_1, U_2, \cdots, U_n$ éléments de $\mathbb{R}^p$ satisfaisant la condition $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$ et pour lesquels la matrice $\widetilde{M} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ vérifie la relation $\Psi(\widetilde{M}) = T_0$.

On reprend les notations de la **partie II** et on note $U = (U_1 \mid U_2 \mid \cdots \mid U_n)$.

a) Montrer que l'entier p vérifie $p \geqslant \mathrm{rg}(T_0)$ et que $\mathrm{rg}(T_0) \in [\![1, n-1]\!]$.

b) Construire une matrice $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tUU = T_0$ pour $r = \mathrm{rg}(T_0)$.

Indication. En supposant que ${}^tQ_0T_0Q_0$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \Delta & \\ & 0_{n-r}\end{pmatrix}$ avec $\Delta \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, diagonale à valeurs non nulles, on cherchera U sous la forme $U = ((\Delta_1)\ (0)) \times Q_0 \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ avec $\Delta_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, diagonale.

c) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$ (on pourra étudier le vecteur UZ).

d) En déduire que $\Psi(\widetilde{M}) = T_0$ avec $\widetilde{M} = \left(\|U_i - U_j\|^2\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et conclure.

V.B – Par décalage de la distance au carré

On pose $\xi_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $N_k = \left(m_{ij} + k\xi_i^j\right)$ avec k un nombre réel strictement positif.

V.B.1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'hyperplan $\mathcal{H}$ de vecteur normal Z (et d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$) est stable par l'endomorphisme canonique associé à la matrice $\Psi(A)$.

V.B.2) Exprimer la matrice N_k en fonction des matrices M, J, I_n et du réel k.

V.B.3) Montrer qu'il existe un réel k_0 minimal que l'on précisera en fonction des valeurs propres de $\Psi(M)$, tel que la matrice $\Psi(N_{k_0})$ soit à valeurs propres positives ou nulles.

V.C – Par décalage de la distance (résultat dû à F. Cailliez, 1983)

On pose $D = (d_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \left(\sqrt{m_{ij}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à construire une matrice

$$M_c = \left(\left(d_{ij} + c\xi_i^j\right)^2\right)$$

avec $c > 0$ telle que $\Psi(M_c)$ soit à valeurs propres positives ou nulles.

V.C.1) Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tX\Psi(M_c)X = {}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \dfrac{c^2}{2}{}^tXPX$.

V.C.2) Montrer que si $\lambda_{\min}$ et $\mu_{\min}$ désignent les valeurs propres minimales respectives de $\Psi(M)$ et $\Psi(D)$, alors

$$\forall X \in \mathcal{H}, \qquad {}^tX\Psi(M)X \geqslant \lambda_{\min}{}^tXX \quad \text{et} \quad {}^tX\Psi(D)X \geqslant \mu_{\min}{}^tXX$$

(L'hyperplan $\mathcal{H}$ a été défini à la **question V.B.1**.)

V.C.3) En déduire que pour $c = \widetilde{c} = -2\mu_{\min} + \sqrt{4\mu_{\min}^2 - 2\lambda_{\min}} > 0$, $\Psi(M_c)$ est à valeurs propres positives ou nulles et que pour tout $c > \widetilde{c}$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

V.C.4) Nous allons chercher la constante $c^* > 0$ minimale (si elle existe) vérifiant

- $\Psi(M_{c^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles,
- pour tout $c > c^*$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

On sait que c^* est majoré par $\widetilde{c}$.

On considère $\mathcal{A} = \left\{X \in \mathcal{H} \mid \|X\| = 1 \text{ et } 4\left({}^tX\Psi(D)X\right)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X \geqslant 0\right\}$ et on définit l'application

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto -2{}^tX\Psi(D)X + \sqrt{4\left({}^tX\Psi(D)X\right)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $X^* \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(X^*) = \sup\limits_{X\in\mathcal{A}} \alpha(X)$ et $\alpha(X^*) > 0$.

On notera $\alpha^* = \alpha(X^*)$.

V.C.5) Montrer que

- ${}^tX^*\Psi(M_{\alpha^*})X^* = 0$,
- $\Psi(M_{\alpha^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles,
- pour tout $c > \alpha^*$ et pour tout vecteur **non nul** $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X > 0$.

En conclure que $c^* = \alpha^*$.

V.C.6) Calcul de c^*

a) Montrer que $\Psi(M_{c^*})X^* = 0$.

On pose $Y^* = \dfrac{2}{c^*}\Psi(M)X^*$.

b) Montrer que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice de taille $2n$ $\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$ et que c^* est valeur propre de cette matrice.

V.C.7) On considère γ une valeur propre réelle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que ${}^tX_2\Psi(M_\gamma)X_2 = 0$ et que $X_2 \neq 0$. En conclure que $\gamma \leqslant c^*$.

b) Quelle conclusion en déduit-on sur le calcul de la plus petite constante additive c^* ?

Ce sujet s'inspire des techniques du « positionnement multidimensionnel » (Multi Dimensional Scaling en anglais) dans le domaine de l'analyse des données (une branche des mathématiques). Ces méthodes furent particulièrement utilisées avec les avancées de l'informatisation en psychométrie et en biologie (en écologie des populations pour visualiser les associations entre espèces par exemple).

• • • FIN • • •