TP-TD4 : Induction

Exercice 1:

a)

append(cons(1,cons(2,nil)),cons(3,nil))
=(b)= cons(1,append(cons(2,nil),cons(3,nil)))
=(b)= cons(1,cons(2,append(nil,cons(3,nil))))
=(a)= cons(1,cons(2,cons(3,nil)))

b)

soit L1= Nil

prouver : Pour tous l2,l3 en liste(A) append(Nil,append(l2,l3) = append(append(Nil,l2),l3)

en applique (a) append(nil,l)=l

en a donc append(l2,l3) = append(l2,l3)

réflexivité a=a

soit l1= cons(t,q)

pour tous l2,l3 en liste(A) append(cons(t,q),append(l2,l3)) = append(append(cons(t,q),l2),l3)

en applique (b)
Forall t in A, q in liste(A), l in liste(A), append(Cons(t,q),l) = Cons(t,append(q,l))

cons(t,append(

gnatmake td4

Exercice 2:

(a)Forall l in liste(A), append(Nil,l) = l
(b)Forall t in A, q in liste(A), l in liste(A), append(Cons(t,q),l) = Cons(t,append(q,l))
(c) rev(Nil) =Nil
(d) ∀x∈A.∀y∈liste(A). rev(Cons(x,y)) = append(rev(y),Cons(x,Nil))

1 - Calculer rev(Cons(1,Cons(2,Nil))) = ??? en utilisant (c) et (d)

=d=append(rev(cons(2,nil), cons(1,nil))
=d=append(append(rev(nil),cons(2,nil)),cons(1,nil))
=c= append(append(nil,cons(2,Nil)),cons(1,nil))
=lemme=append(cons(2,Nil),cons(1,nil))

2 - Prouver Lemme : ∀ l1, l2 ∈ liste(A). rev(append(l1, l2)) = append(rev(l2), rev(l1))

l1=nill

à gauche:

rev(append(nil,l2))
=a= rev(l2)

à droite:

append(rev(l2), rev(nil))
=c= append(rev(l2),nil)
=lemme= rev(l2)

l1=cons(t,q)

b) ∀ x∈A. ∀ y, z∈ liste(A).append(Cons(x,z),y) =Cons(x, append(z,y))

à gauche:

rev(append(cons(t,q),l2))
=b= rev(cons(t,append(q,l2))
=d= append(rev(append(q,l2)),cons(t,nil))
=hyp_ind2 =>append(append(rev(l2),rev(q)),cons(t,nil))
=hyp_ind=append(rev(l2),append(rev(q),cons(t,nil))

QED.

append(x, append(y,z)) = append(append(x,y),z)

à droite:

append (rev(l2) ,rev(cons(t,q))
=d= append(rev(l2),append(rev(q),cons(t,nil))

(a)Forall l in liste(A), append(Nil,l) = l
(b)Forall t in A, q in liste(A), l in liste(A), append(Cons(t,q),l) = Cons(t,append(q,l))
(c) rev(Nil) =Nil
(d) ∀ x∈A. ∀ y∈ liste(A). rev(Cons(x,y)) = append(rev(y),Cons(x,Nil))
(hyp_ind2) ∀ l1, l2 ∈ liste(A). rev(append(l1, l2)) = append(rev(l2), rev(l1))
(hyp_ind) Pour tous l2,l3 en liste(A) append(Nil,append(l2,l3) = append(append(Nil,l2),l3)

3 - Prouver ∀x ∈ liste(A). rev(rev(x)) = x

x= nil
a gauche:

rev(rev(nil))
=c= rev(nil)
=c= nil

a droite:

nil

x=cons(t,q)

a gauche:

rev(rev(cons(t,q)))
=d= rev(append(rev(q),cons(t,nil)))
=hyp_ind2=append(rev(cons(t,nil)),rev(rev(q)))
=hyp_ind=append(rev(cons(t,nil),q)
=d=append(append(rev(nil),cons(t,nil)),q)
=c= append(append(nil,cons(t,nil)),q))
=(a)= append(cons(t,nil), q)
=b=cons(t,append(nil,q)
=a=cons(t,q)

Qed

(a) Forall l in liste(A), append(Nil,l) = l
(b)Forall t in A, q in liste(A), l in liste(A), append(Cons(t,q),l) = Cons(t,append(q,l))
(c) rev(Nil) =Nil
(d) ∀x∈A. ∀y∈liste(A). rev(Cons(x,y)) = append(rev(y),Cons(x,Nil))
(hyp_ind2) ∀ l1, l2 ∈ liste(A). rev(append(l1, l2)) = append(rev(l2), rev(l1))
(hyp_ind) Pour tous l2,l3 en liste(A) append(Nil,append(l2,l3) = append(append(Nil,l2),l3)
Faux:
=d= rev(append(rev(q),cons(t,nil)))
=hyp_ind2=append(rev(rev(q),rev(cons(t,nil))
=hyp_ind=append(q,rev(cons(t,nil))
=d=append(q,append(rev(nil),cons(t,nil))
=c=append(q,append(nil,cons(t,nil))
=a=append(q,cons(t,nil))

ex8 :
(g) 8l1; l2 2 liste(A): mapf(append(l1,l2)) = append(mapf(l1),mapf(l2))

pour l1 = cons(t,q)

a gauche:

mapf(append(cons(t,q),l2))
=b=mapf(cons(t,append(q,l2)))
=f= cons(f(t),mapf(append(q,l2)))
=hyp_ind=cons(f(t)),append(mapf(q),mapf(l2)) CQFD

a droite:

append(mapf(cons(t,q)),mapf(l2))
=f=append(cons(f(t),mapf(q)),mapf(l2))
=b=cons(f(t),append(mapf(q),mapf(l2))) CQFD