EDO et schémas numériques

21 mars 2023

Exercice 1

On souhaite modéliser et simuler le mouvement d'un pendule. On suppose qu'il est constitué d'une boule rigide de masse m fixée à l'extrémité d'une tige parfaitement rigide de longueur ℓ et de masse négligeable.

L'état du pendule est décrit à l'instant t par

— $\alpha(t)$ l'angle forme par la tige du pendule avec la verticale ;

— $\omega(t)$ la vitesse angulaire du pendule.

On souhaite décrire mathématiquement l'évolution du pendule au cours du temps. À titre culturel, on présente ici rapidement comment dériver les équations régissant l'évolution du pendule [1]. Dans une première lecture, on peut sauter directement à l'équation (5).

$*$ **Méthode Lagrangienne.** On appelle Lagrangien du système, la fonction définie par

$$\mathcal{L}(\omega, \alpha) = \frac{m}{2}|\ell\omega|^2 + mg\ell\cos(\alpha).$$

Le premier terme de cette fonction correspond à l'énergie cinétique du pendule tandis que le deuxième terme correspond à l'énergie potentielle qui fait intervenir l'accélération gravitationnelle terrestre qui est de l'ordre de

$$g = 9.8m/s^2$$

Afin de dériver les équations du système, on utilise le principe de conservation de l'énergie qui se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}. \tag{1}$$

D'après la définition du Lagrangien, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = m\ell^2\omega$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -mg\ell\sin(\alpha).$$

1. Cela va bien au-delà du cours

Ainsi l'équation (16) se traduit par

$$m\ell^2\dot{\omega} = -mg\ell\sin(\alpha)$$

On peut simplifier par la masse pour obtenir

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin(\alpha).$$

De plus, par définition, la vitesse angulaire ω est définie par

$$\omega = \dot{\alpha}.$$

Équations du système. On obtient ainsi que le système constitué par le pendule vérifie

$$\begin{cases} \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell}\sin(\alpha) & \text{pour tout } t > 0 \\ \dot{\alpha} = \omega & \text{pour tout } t > 0 \\ \omega(0) = \omega_0 & \\ \alpha(0) = \alpha_0 & \end{cases}, \tag{2}$$

où ω_0 et α_0 sont respectivement la vitesse et position angulaire initiale. Le système (5) n'admet pas de solution explicite s'exprimant à l'aide de fonctions classiques. On se propose tout de même de le *résoudre* numériquement, c'est à dire de déterminer une approximation de la solution à l'aide d'un schéma numérique.

1. *(Euler explicite)* Soit $\Delta t > 0$ le paramètre de discrétisation en temps. On se propose de déterminer des solutions approchées

$$\omega_n \simeq \omega(t_n) \text{ et } \alpha_n \simeq \alpha(t_n),$$

avec $t_n = n\Delta t$, solutions du schéma d'Euler explicite défini par

$$\begin{cases} \frac{\omega_{n+1}-\omega_n}{\Delta t} = -k\sin(\alpha_n) & \text{pour tout } n \geq 0 \\ \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\Delta t} = \omega_n & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

avec $k = g/\ell$. Exprimez explicitement ω_{n+1} et α_{n+1} en fonction de ω_n et α_n.
On se propose d'implémenter le schéma numérique en utilisant `HTML+Javascript`.

2. Exprimez explicitement ω_{n+1} et α_{n+1} en fonction de ω_n et α_n.
3. Compléter le script `pendule-vierge.html` afin d'implémenter le schéma numérique.

```html
<html>
<body>
    <svg viewBox="-100 -100 200 200" style="width:80vmin;height:80vmin;
                cursor:pointer;overflow:visible;display:block;margin:auto;">
        <g id="scene" transform="scale(1,-1)">
            <g id="pendule"  fill="red" stroke="black">
                <line x1="0" y1="0" x2="0" y2="-80"/>
                <circle cx="0" cy="-80" r="20"/>
```

```
            </g>
        </g>
    </svg>
    <script>
        var pendule=document.getElementById("pendule");
        var alpha=Math.PI/2.;   // angle initial
        var omega=0;    // vitesse initiale
        var k=1;
        pendule.style.setProperty("transform","rotate("+alpha+"rad)");
        var dt=1.e-1;

        // Update du système
        run=false;
        function update(){
            /** Mise a jour de alpha et omega **/
                /** A COMPLETER **/

            pendule.style.setProperty("transform","rotate("+alpha+"rad)");
            if(run) setTimeout(update,40);
        }
        function stop_and_go(){
            if(run){// On stop l'animation
                run=false;
            } else {
                run=true;
                update();
            }
        }
        document.addEventListener("click",stop_and_go);
    </script>
</body>
</html>
```

pendule-simple/pendule–vierge.html

4. Le mouvement du pendule vous semble-t-il réaliste ? Pourquoi ?
5. *(Euler semi-explicite)* Afin de pallier le problème rencontré, on se propose d'implémenter un autre schéma numérique dit semi-explicite.

$$\begin{cases} \frac{\omega_{n+1}-\omega_n}{\Delta t} = -k\sin(\alpha_n) & \text{pour tout } n \geq 0 \\ \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\Delta t} = \omega_{n+1} & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Modifier le code afin d'implémenter le schéma en question.
6. On peut associer au pendule solution de (5) une fonction énergie définie par
$$E(t) = \frac{m}{2}\ell^2\omega(t)^2 - gm\ell\cos(\alpha(t)).$$
Montrer que pour tout temps $t > 0$, on a
$$\frac{dE}{dt}(t) = 0.$$
Quelle est la valeur de l'énergie au temps $t = 0$ avec $\omega = 0$ et $\alpha = \pi/2$? Qu'est-ce que le principe de conservation de l'énergie ?

7. On considère l'énergie discrétisée et adimensionnée

$$E_n = \frac{1}{2}\omega_n^2 - k\cos(\alpha_n);$$

Pour chacun des schémas (explicite et semi-explicite), afficher à chaque mise à jour de l'état du pendule son énergie. On pourra utiliser la console du navigateur et la fonction `console.log("Message")` ou afficher le résultat dans la page HTML grâce à la fonction `innerHTML`.

8. Quel est le comportement de l'énergie au cours des itérations pour chacun des schémas ?

9. On fixe un temps final $T = 10$. Calculer le maximum atteint par $|E_n|$ pendant la simulation (on conservera les valeurs initiales de α et ω). Comment se comporte le maximum de l'énergie lorsqu'on diminue Δt ?

10. Visuellement, quel est l'effet d'une diminution de Δt ? Un effet similaire peut-il être observé en modifiant les paramètres de la commande `setTimeOut`

Exercice 2

On souhaite modéliser et simuler le mouvement d'un pendule double. On suppose qu'il est constitué de deux boules de masse m_1 et m_2 et de deux tiges rigides de masses négligeables et de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 (voir Figure 1). L'état du

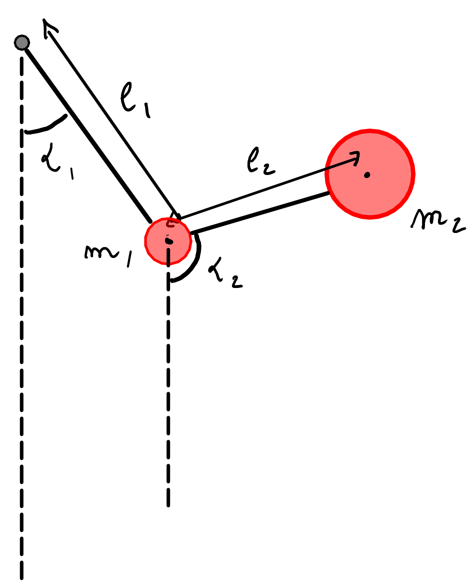

Figure 1 – Pendule double

double pendule est décrit à l'instant t par

— $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ les angle formés par les tiges avec la verticale ;
— $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ les vitesses angulaires des tiges.

On souhaite décrire mathématiquement l'évolution du pendule au cours du temps. Le cadre théorique est nettement plus compliqué que le cas du pendule simple. Déterminer les équations qui régissent l'évolution du système est assez technique (pour ne pas dire pénible). On pourra trouver des éléments dans l'appendice (on utilise le même principe basé sur le Lagrangien).

Afin de simplifier l'implémentation, un canevas (`pendule-double-a-completer.html`) est donné sur la page Moodle du cours. Comme pour le pendule simple nous allons utiliser HTML et JavaScript.

1. *(Let's draw)* Calculer les vecteurs postions $x_1 \in \mathbb{R}^2$ et $x_2 \in \mathbb{R}^2$ des boules en fonction des angles α_1 et α_2 et des longueurs des tiges. On supposera que l'extrémité de la première tige est fixée à l'origine du référentiel choisie. Compléter la fonction `draw()` afin de mettre à jour le dessin en fonction des paramètres du système.

Équations du système. On obtient ainsi que le système constitué par le double pendule vérifie pour tout $t > 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \ell_1(1+\gamma)\dot{\omega}_1 + \ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_2 = -\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_2^2 - g(1+\gamma))\sin(\alpha_1) \\ \ell_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_1 + \ell_2\dot{\omega}_2 = \ell_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1^2 - g\sin(\alpha_2) \\ \dot{\alpha}_1 = \omega_1 \\ \dot{\alpha}_2 = \omega_2 \end{array}\right. , \tag{5}$$

avec

$$\gamma = m_1/m_2$$

auquel il faut adjoindre des conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1(0) = \omega_{1,0} \\ \omega_2(0) = \omega_{2,0} \\ \alpha_1(0) = \alpha_{1,0} \\ \alpha_2(0) = \alpha_{2,0} \end{array}\right.$$

où ω_{10} et α_{10} sont respectivement la vitesse et position angulaire initiale de la première tige et ω_{20} et α_{20} de la seconde. Le système (5) n'admet pas de solution explicite s'exprimant à l'aide de fonctions classiques. On se propose tout de même de le *résoudre* numériquement, c'est à dire de déterminer une approximation de la solution à l'aide d'un schéma numérique.

* 2. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \ell_1(1+\gamma) & \ell_2\cos(\beta) \\ \ell_1\cos(\beta) & \ell_2(1+\gamma) \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule vue au semestre 1 pour les matrices 2×2, montrer que si ℓ_1, ℓ_2 et γ sont non nuls, la matrice M_β est inversible et déterminer son inverse.

** 3. Montrer que les deux premières équation du système sont équivalentes à

$$M_\beta \begin{pmatrix} \dot\omega_1 \\ \dot\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_2 \sin(\beta)\omega_2^2 - g(1+\gamma)\sin(\alpha_1) \\ \ell_1 \sin(\beta)\omega_1^2 - g\sin(\alpha_2) \end{pmatrix}.$$

avec $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. En déduire que le système décrivant l'évolution du système peut se réécrire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot\omega_1 &=& d_\beta\Big(-l\sin(\beta)\omega_2^2 - k(1+\gamma)\sin(\alpha_1) \\ && -l\cos(\beta)\sin(\beta)\omega_1^2 + k\cos(\beta)\sin(\alpha_2)\Big) \\ \dot\omega_2 &=& d_\beta\Big(\cos(\beta)\sin(\beta)\omega_2^2 + kl^{-1}(1+\gamma)\cos(\beta)\sin(\alpha_1) \\ && +l^{-1}(1+\gamma)\sin(\beta)\omega_1^2 - kl^{-1}(1+\gamma)\sin(\alpha_2)\Big) \\ \dot\alpha_1 &=& \omega_1 \\ \dot\alpha_2 &=& \omega_2 \end{array} \right. \tag{6}$$

avec

$$d_\beta = (\sin(\beta)^2 + \gamma)^{-1}$$

et

$$l = \ell_2/\ell_1 \ ; \ k = g/\ell_1 \ ; \ \gamma = m_1/m_2 \tag{7}$$

4. On discrétise l'EDO (6) de la manière suivante : On note $\omega_{1,n}$, $\omega_{2,n}$, $\alpha_{1,n}$ et $\alpha_{2,n}$ l'état du sytème à l'itération n et Δt le pas de temps. On exprime le schéma numérique à l'aide des paramètres définis par (7).
À chaque itération, on met à jour l'état du système à l'aide des équations (8-15)

$$\beta_n = \alpha_{1,n} - \alpha_{2,n}, \tag{8}$$

$$d_n = 1/(\sin(\beta_n)^2 + \gamma) \tag{9}$$

$$S_{1,n} = \omega_{1,n}^2 \tag{10}$$

$$S_{2,n} = \omega_{2,n}^2 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \omega_{1,n+1} = \omega_{1,n} + \Delta t d_n\Big(&- l\sin(\beta_n)S_{2,n} - k(1+\gamma)\sin(\alpha_{1,n}) \\ &- l\cos(\beta_n)\sin(\beta_n)S_{1,n} + k\cos(\beta_n)\sin(\alpha_{2,n})\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \omega_{2,n+1} = \omega_{2,n} + \Delta t d_n\Big(&\cos(\beta_n)\sin(\beta_n)S_{2,n} + k(1+\gamma)\cos(\beta_n)\sin(\alpha_{1,n})/l \\ &+ (1+\gamma)\sin(\beta_n)S_{1,n}/l - k(1+\gamma)\sin(\alpha_{2,n})/l\Big) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\alpha_{1,n+1} = \alpha_{1,n} + \Delta t\omega_{1,n+1} \tag{14}$$

$$\alpha_{2,n+1} = \alpha_{2,n} + \Delta t\omega_{2,n+1}. \tag{15}$$

Compléter le script afin d'implémenter le schéma proposé.

Appendice : Méthode Lagrangienne

Afin d'appliquer le formalisme Lagrangien pour déterminer les équations du mouvement, il est nécessaire de calculer l'énergie cinétique du sysème. En particulier, on en déduit que les vitesses des boule En dérivant les expressions de la position x_1 et x_2 des boules en fonctions de α_1 et α_2, on obtient

$$\dot{x}_1 = \begin{pmatrix} -\ell_1 \sin(\alpha_1)\omega_1 \\ \ell_1 \cos(\alpha_1)\omega_1 \end{pmatrix}.$$

$$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} -\ell_1 \sin(\alpha_1)\omega_1 - \ell_2 \sin(\alpha_2)\omega_2 \\ \ell_1 \cos(\alpha_1)\omega_1 + \ell_2 \cos(\alpha_2)\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$|\dot{x}_1|^2 = \ell_1^2 \omega_1^2$$

et

$$|\dot{x}_2|^2 = (\ell_1 \sin(\alpha_1)\omega_1 + \ell_2 \sin(\alpha_2)\omega_2)^2 + (\ell_1 \cos(\alpha_1)\omega_1 + \ell_2 \cos(\alpha_2)\omega_2)^2.$$

En développant, il vient

$$|\dot{x}_2|^2 = \ell_1^2\omega_1^2 + \ell_2^2\omega_2^2 + 2\ell_1\ell_2(\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2))\omega_1\omega_2.$$

On rappelle la formule trigonométrique

$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b).$$

Ainsi,

$$|\dot{x}_2|^2 = \ell_1^2\omega_1^2 + \ell_2^2\omega_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1\omega_2.$$

Expression du Lagrangien. Le Lagrangien du système est alors défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{m_1}{2}\ell_1^2\omega_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(|\ell_1\omega_1|^2 + |\ell_2\omega_2|^2 + 2\ell_1\ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1\omega_2\right) \\ + (m_1+m_2)g\ell_1\cos(\alpha_1) + m_2 g\ell_2\cos(\alpha_2).\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette fonction correspondent à l'énergie cinétique du double pendule tandis que le deux derniers découleent de l'énergie potentielle qui fait intervenir l'accélération gravitationnelle terrestre g. Afin de dériver les équations du système, on utilise le principe de conservation de l'énergie qui se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} \text{ et } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} \tag{16}$$

D'après la définition du Lagrangien, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = m_1\ell_1^2\omega_1 + m_2\ell_1^2\omega_1 + m_2\ell_1\ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\omega_2;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2} = m_2 \ell_2^2 \omega_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1.$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1\omega_2 - (m_1 + m_2) g \ell_1 \sin(\alpha_1);$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)\omega_1\omega_2 - m_2 g \ell_1 \sin(\alpha_2) \quad ;$$

Ainsi, l'équation (16) se traduit par

$$(m_1+m_2)\ell_1^2\dot{\omega}_1 + m_2\ell_1\ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_2 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)\omega_2 = \\ - m_2\ell_1\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1\omega_2 - (m_1+m_2)g\ell_1\sin(\alpha_1) \quad ;$$

et

$$m_2\ell_2^2\dot{\omega}_2 + m_2\ell_1\ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_1 - m_2\ell_1\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)\omega_1 = \\ - m_2\ell_1\ell_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)\omega_1\omega_2 - m_2 g\ell_1\sin(\alpha_2) \quad ;$$

En divisant par la masse m_2 et en utilisant le fait que $\dot{\alpha} = \omega$, il vient

$$(1+\gamma)\ell_1^2\dot{\omega}_1 + \ell_1\ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_2 + \ell_1\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_2^2 = -g\ell_1(1+\gamma)\sin(\alpha_1)$$

avec $\gamma = m_1/m_2$ et

$$\ell_2^2\dot{\omega}_2 + \ell_1\ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_1 - \ell_1\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1^2 = -g\ell_2\sin(\alpha_2).$$

On peut simplifier la première équation par ℓ_1 et la seconde par ℓ_2. On obtient finalement

$$(1+\gamma)\ell_1\dot{\omega}_1 + \ell_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_2 = -\ell_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_2^2 - g(1+\gamma)\sin(\alpha_1)$$

$$\ell_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)\dot{\omega}_1 + \ell_2\dot{\omega}_2 = \ell_1\sin(\alpha_1-\alpha_2)\omega_1^2 - g\sin(\alpha_2).$$