Mathématiques

Table des matières

Mathématiques 1

Logique et raisonnement

Logique

1. Connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ($\oplus$ ou $\veebar$)

La négation $\neg$, pour les ensembles, correspond au complémentaire du sous ensemble A dans E, noté $\complement_E A$, $\overline{A}$ ou A^C
Négation $\neq$ Contraire (Non jeune $\neq$ vieux)

La conjonction $\wedge$ pour ET, correspond à l'intersection $\cap$.

La disjonction $\vee$ OU, correspond à l'union $\cup$.

La disjonction exclusive $\oplus$ **ou** $\veebar$ XOR, l'une des deux vrais et l'autre nécessairement fausse.
Correspond à la différence symétrique Δ.

Règles de Morgan : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Distributivité : $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

Produit cartésien : $A \times B = \{(a,b),\ a \in A \ et \ b \in B\}$

2. Connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

L'implication de P à Q n'est fausse que lorsque P est vraie et Q fausse.
Correspond à : $\neg P \vee Q$
Négation : $P \wedge \neg Q$
Réciproque : $Q \Rightarrow P$
Contraposée : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
(même valeur de vérité).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'équivalence de P et Q n'est vraie que si P et Q ont même valeur de vérité. L'équivalence a la même valeur de vérité que la double implication (nécessaire et suffisante).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Quantificateurs

$\forall x \in A, P(x)$: quel que soit x élément de A (ou pour tout x appartenant à A). **Négation :** $\exists x \in A, \neg P(x)$
$\exists x \in A, P(x)$: il existe au moins un élément x de A vérifiant P. **Négation :** $\forall x \in A, \neg P(x)$
$\exists! x \in A, P(x)$: il y a existence et **unicité** de l'élément x dans A vérifiant P.

Méthodes de raisonnement

1. Raisonnement direct

(Par déduction ou hypothèse auxiliaire).
Hypothèse $\Rightarrow$ Conclusion.

2. Raisonnement par disjonction des cas

Raisonnement direct dans lequel l'hypothèse peut se décomposer en plusieurs sous hypothèses :
$H \Leftrightarrow H_1 \wedge H_2$
On montre ensuite $H_1 \Rightarrow C$ et $H_2 \Rightarrow C$

3. Raisonnement par contraposition

$(H \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg H)$
Exemple : La contraposée de « $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair, alors n^2 est pair. » est « Si n^2 est impair, alors n est impair »

4. Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire et on montre que cela vient contredire une proposition vraie.
Exemple : Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel $\rightarrow$ supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On aurait donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et p et q premiers entre eux. Donc $p^2 = 2q^2$ alors p pair, $p = 2p'$ d'où $q^2 = 2p'^2$ donc q serait pair. Ainsi, p et q ne seraient pas premiers entre eux, on a bien une contradiction.

5. Raisonnement par contre-exemple

Il suffit de trouver un contre exemple pour prouver qu'une propriété est fausse.

6. Raisonnement par récurrence simple

- On montre que $P(0)$ est vraie (propriété initialisée ou fondée)
- On suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$ (hérédité)

7. Raisonnement par analyse-synthèse

- Analyse : on établit une liste de potentielles solutions parmi lesquelles toutes les solutions réelles sont nécessairement incluses.
- Synthèse : pour chacune de ces solutions, on détermine si elles sont viables ou non.

Généralités sur les fonctions

Généralités

1. Différence entre applications et fonctions

Une application est une relation entre deux ensembles.
Une fonction est une application d'une partie D_f d'un ensemble de départ. D_f est appelé ensemble de définition.
Une fonction n'est donc pas forcément définie sur l'entièreté de l'ensemble de départ.

2. Image directe

Ensemble des images de A par f :
$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$

3. Image réciproque

Ensemble des antécédents d'un ensemble.
C'est l'image directe de l'ensemble par f^{-1}.

4. Restriction

On note $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, avec $A \subset D_f$.

5. Composition

$f \circ g(x) = f(g(x))$
Associative mais non commutative :
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

6. Injectivité

Au plus un antécédent.
Fonction injective : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Non injective : $\exists (x_1, x_2) \in D_f^2 \ / \ f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

7. Surjectivité

Au moins un antécédent.
Fonction surjective : $\forall y \in F, \ \exists x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
Non surjective : $\exists y \in F \ / \ \forall x \in D_f, \ y \neq f(x)$

8. Bijectivité ou Réciprocité

À la fois injective et surjective : $\forall y \in F, \ \exists! x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
On note alors $x = f^{-1}(y)$ la bijection réciproque de f.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Sens de variation

$f \circ g$ est :
- Croissante si f et g sont de même monotonie.
- Décroissante si f et g sont de sens de monotonies contraires.

Si f est strictement monotone, alors elle est injective (au plus un antécédent par image).

2. Majorant et minorant

- α **maximum de A** si α est à la fois majorant et élément de A : $\alpha = \max(A)$ (resp. $\min(A)$).
- α **borne supérieure de A** si α est le plus petit des majorants : $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).
  - si A est non vide non majoré : $\sup(A) = +\infty$
  - si A est non vide non minoré : $\inf(A) = -\infty$

Si le maximum existe, il est égal à la borne supérieure.

3. Parité

- Si f et g sont paires, $f + g$ est paire (resp. impaires).
- Si f et g ont même parité, $f \times g$ est paire (resp. f/g).
- Si f et g ont des parités contraires, $f \times g$ est impaire (resp. f/g).
- Si f est paire, $g \circ f$ est paire.
- Si f est impaire, $g \circ f$ a la même parité que g.

4. Périodicité

T-périodique si $\forall (x, x+T) \in D_f^2, \ f(x+T) = f(x)$.
- Si f et g sont T-périodiques, $f + g$ et $f \times g$ sont T-périodiques.
- Si f est T-périodique, $g \circ f$ est T-périodique.

5. Bijectivité et symétrie

- Si f est une bijection, C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$.
- $x \mapsto f(-x)$: symétrie par l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto -f(x)$: symétrie par l'axe des abscisses.
- $x \mapsto f(x+a)$: translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
- $x \mapsto f(x) + a$: translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
- $x \mapsto f(ax)$: réduction/agrandissement sur axe x.
- $x \mapsto af(x)$: agrandissement/réduction sur axe y.

Mathématiques 3

Fonctions usuelles

Fonction partie entière

$E(x) = \lfloor x \rfloor$ (Plus grand entier inférieur ou égal à x).

- $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leqslant x$.
- $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ E(x+n) = E(x) + n$

Fonction log, exp et puissances

1. Logarithme naturel / népérien

$\forall x > 0,\ \ln(a)$ vaut l'aire sous la courbe de $\dfrac{1}{x}$ entre 1 et a.
On note e tel que $\ln(e) = 1$ (base du logarithme népérien).
Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle, dont l'unique dérivée vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ est elle même.

2. Fonctions logarithmes

$\log_b(a) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.
$\log_e$: népérien, $\log_2$: binaire, $\log_{10}$: décimal (log).
De même, $\exp_a(x) = a^x$.

3. Fonctions puissances

X^a est bijective de réciproque $X^{\frac{1}{a}}$ $(a \neq 0)$
Sur $\mathbb{R}_+^*$:
X^a est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

Fonctions trigonométriques

Angles opposés :
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\quad$ $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
Angles supplémentaires :
$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\quad$ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\quad$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
Angles complémentaires :
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$

Somme des angles :
$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$
$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$
$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$
$\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Fonctions hyperboliques

Cosinus hyperbolique :
$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- Fonction paire
- Strict. décroissante sur $\mathbb{R}_-$
- Strict. croissante sur $\mathbb{R}_+$

Sinus hyperbolique :
$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- Fonction impaire
- Strictement croissante

Tangeante hyperbolique :
$\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

- Fonction impaire
- Strictement croissante
- Définie sur $\mathbb{R}$.

Lien avec sinus et cosinus :

- $\cosh(a+b) = \cosh a\cosh b + \sinh a\sinh b$
- $\sinh(a+b) = \sinh a\cosh b + \cosh a\sinh b$
- $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$

$\cosh a = \cos(ia)$
$\sinh a = -i\sin(ia)$

Mathématiques 4

Polynômes

Définitions

$\deg(0) = -\infty$

Opérations :

- $P = Q \Leftrightarrow$ même degré et mêmes coefs.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) \leqslant \deg(P) \times \deg(Q)$

Division euclidienne et racines

Les polynômes peuvent être divisés par un polynôme non nul, au même titre que les réels.
Soit α une racine de P, alors P est divisible par $(X - \alpha)$.
Un polynôme P admet n racines avec $n \leqslant \deg(P)$.

Un polynôme a la même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son terme de plus haut degré.
Si un polynôme P est de degré impair, alors P a au moins une racine réelle.

Formule de Taylor

La dérivée d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est donnée par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

Pour la dérivée $k-$ième, on retrouve $k!$ pour le premier coefficient. Ainsi, on a $\forall\ k \leqslant \deg(P)$, $P^{(k)}(0) = k!\ a_k$

Ainsi, on a $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

Généralisation (formule de Taylor) : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$

Racines multiples

α est une racine d'ordre de multiplicité m de P si $P = (X - \alpha)^m\ Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.
(Racine simple, double, triple, ...).

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de la multiplicité :
α est une racine de P d'ordre de multiplicité m ssi :

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

(Par exemple, pour une racine double, la tangente est horizontale, et pour une racine triple, il y a en plus un point d'inflexion).

Factorisation

Tout polynôme P à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet exactement $\deg(P)$ racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Si z est une racine complexe non réelle de P et de multiplicité m, alors $\overline{z}$ est de même une racine de P de multiplicité m.

Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si il est muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$, respectant les 8 axiomes de base :
Commutativité et associativité de l'addition, élément neutre de la loi externe, existence d'un symétrique, multiplication par 1 (identité), ordre de la multiplication, distributivité à gauche et à droite.

Sous espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E si $F \subset E$ avec $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Stabilité par combinaison linéaire :

$$F \text{ est un s.e.v de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \text{ (Un s.e.v. contient toujours le vecteur nul)} \\ \forall(\alpha, \beta, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{K}^2 \times F^2,\ \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \in F \\ \text{(F est stable par combinaison linéaire)} \end{cases} \tag{5.1}$$

L'intersection de deux s.e.v est un s.e.v. Ce n'est pas le cas pour l'union.

Sous-espace vectoriel engendré par A (Vect(A)) : c'est le plus petit s.e.v. de E contenant A.
Par convention : $\text{Vect}(\emptyset) = \overrightarrow{0_E}$
On dit que Vect(A) est constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de A.

Dimension d'un espace vectoriel

1. Familles libres, génératrices, bases

Une famille de vecteurs de E est <u>libre</u> s'ils sont linéairement indépendants (seul la combinaison linéaire avec des coefficients tous nuls mène à $\overrightarrow{0}$).

Sinon, la famille est <u>liée</u>, les vecteurs sont alors linéairement dépendants (il existe des coefficients non tous nuls tel que la combinaison linéaire de ces vecteurs soit nulle).

Deux vecteurs formant une famille liée sont colinéaires. Trois vecteurs formant une famille liée sont coplanaires.

- Une famille de vecteurs est liée $\iff$ l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, elle est liée.
- Une famille extraite d'une famille libre est libre.
- Une famille contenant une famille liée est liée.

Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ d'un e.v. E est <u>génératrice</u> de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de la famille (Ce qui équivaut à dire que $E = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$).
Une famille libre et génératrice de E est une <u>base</u> de E (Elle est canonique si chaque vecteur a une unique composante égale à 1).

2. Dimension finie

Un e.v. E est de dimension finie s'il existe une famille finie de vecteurs génératrice de E. Sinon, $\dim(E) = +\infty$

Soit E un e.v. de dimension finie, on peut compléter une famille libre de E par des vecteurs bien choisis d'une famille génératrice de E pour obtenir une base de E.

Soit $n = \dim(E)$:

- Toute famille libre de E contient au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

$\Rightarrow$ Soit F une famille de $\dim(E)$ vecteurs : F est une base de E $\iff$ F est libre $\iff$ F est génératrice de E

3. Sous-espace en dimension finie

Soit F et G des s.e.v de E de dimension finie.

- $\dim E \geqslant \dim F$
- $\dim F = \dim E \iff F = E$
- $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim F, \dim G)$
- Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$

4. Rang d'une famille de vecteurs

Soit F une famille de p vecteurs d'un e.v. E :
$\mathrm{rg}(F) = \dim(\mathrm{Vect}(F))$

- Si F est libre, $\mathrm{rg}(F) = p$ Sinon, $\mathrm{rg}(F) < p$
- $\mathrm{rg}(F) = \dim E \iff F$ est génératrice de E
- $\mathrm{rg}(F) = p = \dim E \iff F$ est une base de E

5. Méthode des zéros échelonnés

Une famille est échelonnée relativement à une base si dans l'écriture des vecteurs exprimés dans la base, chaque vecteur commence par au moins un zéro de plus que le précédent.
Toute famille de vecteurs tous non nuls échelonnée relativement à une base est libre.

On peut échelonner des vecteurs en les écrivant en colonne (comme dans les systèmes), mais en faisant des combinaisons linéaires avec les colonnes (et non avec les lignes). On a donc pas d'équivalence, mais uniquement une égalité de rang $\mathrm{rg}(F)$.

Applications linéaires

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

On considérera f une application linéaire tel que $f \in \mathcal{L}(E, F)$
On a : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, f(\alpha \cdot_E \overrightarrow{u} +_E \beta \cdot_E \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot_F f(\overrightarrow{u}) +_F \beta \cdot_F f(\overrightarrow{v})$

Toute réciproque d'une bijection linéaire, combinaison linéaire ou composée d'applications linéaires **est linéaire**.
Une application linéaire bijective de E dans F est un isomorphisme de E sur F. E et F sont isomorphes.
Si $E = F$, c'est un endomorphisme bijectif ou automorphisme de E.

Image par une application linéaire

1. Image et image réciproque

- Image directe : image d'un ensemble.
- Image réciproque : antécédents d'un ensemble : $f^{-1}(A)$ (toujours définie contrairement à la réciproque).

L'image s'un s.e.v. est un s.e.v. dans l'ensemble de définition.

2. Noyau et image

- L'image de f est le s.e.v $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ (Ensemble d'arrivée de f).
- Le noyau de f est le s.e.v. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\overrightarrow{0_F})$ (Tous les $\overrightarrow{u}$ de E ayant pour image $\overrightarrow{0}$).

f est surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F$.
f est injective $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

3. Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de E :

- Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est liée, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est liée.
- Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre et f injective, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est libre.
- Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice et f surjective, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est génératrice.
- Si $G = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, alors $f(G) = \mathrm{Vect}(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$.

Applications linéaires en dimension finie

1. Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E, de dimension finie :

- $(f(\overrightarrow{e_1}, \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$ est libre dans F ssi f est injective.
- $(f(\overrightarrow{e_1}, \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$ est génératrice dans F ssi f est surjective.
- $(f(\overrightarrow{e_1}, \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$ est une base de F ssi f est un isomorphisme.
- Si f injective, alors $\dim E \leqslant \dim F$
- Si f surjective, alors $\dim E \geqslant \dim F$
- Si f est un isomorphisme, alors $\dim F = \dim E$
- Si $\forall i \in [\![0\ ;\ p]\!]$, $f(\overrightarrow{e_i}) = 0$, alors f est l'application nulle.
- Si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $f(\overrightarrow{e_i}) = g(\overrightarrow{e_i})$, alors $f = g$.
- Soit $(\overrightarrow{\epsilon_1}, \ldots, \overrightarrow{\epsilon_p})$ des vecteurs de F, alors il existe une unique A.L. f telle que $\forall i \in [\![0\ ;\ p]\!]$, $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{\epsilon_i}$.

2. Représentation analytique

On peut écrire un système appelé représentation analytique de f, qui exprime les coordonnés de $f(\overrightarrow{u})$ en fonction de combinaisons linéaire des composantes de $\overrightarrow{u}$ et des coefficients de f.

3. Matrice d'une app. linéaire

On peut aussi écrire matriciellement :
$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) \iff Y = AX$.
Avec A la matrice des coefficients de f et X la matrice des composantes de $\overrightarrow{u}$.

4. Rang d'une application linéaire

$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ C'est le rang de la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$.

- $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si f est injective.
- $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ avec égalité si f est surjective.
- $\mathrm{rg}(f) = \dim(F) = \dim(E)$ si f est un isomorphisme.

Théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$
Donc si E et F sont de même dimension, f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f est un endomorphisme.

Limites et continuité
Comparaison de fonctions

Bornes sup/inf d'une fonction

f est majorée sur D si $\exists \alpha \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in D, f(x) \leqslant \alpha$ (resp. minorée)

Ainsi, f admet un plus petit majorant et un plus grand minorant : borne supérieure et borne inférieure
Si f est non majorée, $\sup f(x) = +\infty$ (resp. non minorée, $\inf f(x) = -\infty$)

Limites d'une fonction

Une propriété est vraie au voisinage d'un réel x_0 s'il existe un intervalle de la forme $I =]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ où la propriété est vraie sur $I \backslash \{x_0\}$. De même pour un voisinnage en $\pm\infty$, un intervalle $]A; +\infty[$ ou $]-\infty; A[$.

1. Limite finie en l'infini

$\forall \epsilon > 0,\ \exists X_\epsilon \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in D_f,\ x > X_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
On a alors une asymptote horizontale $y = l$ à C_f.

2. Limite infinie en l'infini

$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists X_A \in \mathbb{R} \;/\; \forall x \in D_f,\ x > X_A \Rightarrow f(x) > A$

3. Limite infinie en un réel

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \alpha_A \Rightarrow f(x) > A$
On a alors une asymptote verticale $x = x_0$ à C_f.

4. Limite finie en un réel

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha_\epsilon > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \alpha_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

5. Limite en général

Dans le cas général, f admet l pour limite en x_0 si pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $f(V_{x_0} \cap D_f) \subset V_l$. Une limite est unique, démontre la continuité ($l = f(x_0)$), et si elle est finie, f est bornée au voisinage de x_0.

6. Limites à gauche/droite

Si $x_0 \notin D_f$, f admet une limite en x_0 ssi f admet une limite à gauche et à droite identique en x_0.
Si $x_0 \in D_f$, il faut que ces limites vaillent $l = f(x_0)$. C'est la continuité.

7. Opérations sur les limites

Formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, ∞^0, 0^0, 1^∞.
Polynômes et fractions rationnelles : termes de plus haut degré.

8. Branches infinies

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$
$y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$:
f admet une branche parabolique de direction asymptotique à la droite $y = ax$ en $+\infty$.
Si $a = \pm\infty$, la direction asymptotique est l'axe des ordonnées.

9. Ordre et limites

Si f croissante (resp. décroissante) sur $I =]a, b[$ où $a, b \in [-\infty, +\infty]$:
- Si f majorée sur I, elle admet une limite à gauche finie en b.
- Si f non majorée sur I, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.
- Dans les deux cas $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup f(x)$.

Croissance comparées :
- Les puissance du logarithme sont négligeables devant les fonctions puissances positives.
- Les fonctions puissance sont négligeables devant les puissances positives de l'exponentielle.

Ordre et limites : Si $f \leqslant g$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
On peut étendre ceci pour définir le théorème de l'encadrement.

Continuité d'une fonction

1. Continuité en un point

f continue en $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sinon, f peut être continue uniquement à gauche ou à droite de x_0.

2. Prolongement par continuité

Si $x_0 \notin D_f$ mais que f admet une limite l en x_0, on peut prolonger f par continuité en définissant $\tilde{f}(x_0) = l$.

3. Opérations

Une combinaison linéaire, division ou composition de fonctions continues est continue.
Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) > 0$ alors $f(x) > 0$ au voisinage de x_0.

Comparaison locale de deux fonctions

1. Négligeabilité

f négligeable devant g : $f \underset{x_0}{=} o(g) \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$
La négligeabilité se conserve par transitivité ou opérations d'addition, multiplication, division et puissance.

2. Équivalence de fonctions

f et g équivalentes : $f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 1$
L'équivalence est symétrique, transitive et réflexive, et se conserve aussi par multiplication, division et puissance.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \iff f \underset{x_0}{\sim} l$
$f \underset{x_0}{\sim} g \iff (f - g) \underset{x_0}{=} o(g) \underset{x_0}{=} o(f)$

Équivalents usuels

- $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$
- $\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$
- $(1 + x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x$

- $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \dfrac{x^2}{2}$
- $\sin x \underset{0}{\sim} x$
- $\tan x \underset{0}{\sim} x$
- $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$
- $\arctan x \underset{0}{\sim} x$

- $\cosh x \underset{0}{\sim} 1 + \dfrac{x^2}{2}$
- $\sinh x \underset{0}{\sim} x$
- $\tanh x \underset{0}{\sim} x$
- $\cosh x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$
- $\sinh x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$

Mathématiques 8

Continuité

Continuité et grand théorèmes

1. Fonctions continues sur un intervalle

f est continue sur $I \iff f$ est continue en tout point de I.
On démontre souvent la continuité sur un intervalle par opérations de fonctions continues.

Théorème des valeurs intermédiaires :
Si f est continue sur un intervalle $[a,\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c dans l'intervalle $[a,\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire 1 : Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés, alors il existe un réel c dans l'intervalle $[a,\ b]$ tel que $f(c) = 0$.
Corollaire 2 : L'image de $[a,\ b]$ est un intervalle $[f(a),\ f(b)]$.

Définition d'un segment : C'est un intervalle fermé borné, du type $[a,\ b]$

Théorème des valeurs extrêmes :
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Corollaire : Si f est continue, l'image d'un segment est un segment.

2. Continuité et bijection

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :
- f est une bijection de I sur $f(I)$.
- f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

Application : Fonctions trigonométriques

1. La fonction arc sinus

Restriction de sinus sur $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$: strictement croissante, réalise une bijection sur $[-1,\ 1]$.
Bijection réciproque : arcsin, continue et croissante sur $[-1,\ 1]$.

2. La fonction arc cosinus

Restriction de cosinus sur $[0,\ \pi]$: strictement décroissante, réalise une bijection sur $[-1,\ 1]$.
Bijection réciproque : arccos, continue et strictement décroissante sur $[-1,\ 1]$.

3. La fonction arc tangente

Restriction de tangente sur $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$: strictement croissante, réalise une bijection sur $\mathbb{R}$.
Bijection réciproque : arctan, continue et croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Relations fondamentales

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5. Equivalents usuels

$\arccos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$
$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$
$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$
$\arctan(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$
$\arctan(x) \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{\pi}{2}$

Dérivation

Dérivées successives

Fonction de classe $\mathcal{C}^n$: n fois dérivable et $f^{(n)}$ continue.
Une somme, produit ou quotient de fonctions $\mathcal{C}^n$ reste $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I.
exp, ln, sin, cos, polynômes et puissances sont $\mathcal{C}^{+\infty}$.

Dérivabilité des fonctions réciproques

Soit f continue strictement monotone. f réalise donc une bijection.

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a) = b$.

On a alors $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$

Cela permet de démontrer que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Fonctions à valeurs complexes

On peut décomposer la fonction en deux fonctions à valeurs réelles.

f est dérivable si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et $f'(x) = (\mathrm{Re}(f))' + i(\mathrm{Im}(f))'$.

Théorème des accroissements finis (TAF)

Théorème de Rolle :
Soit f continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$ tel que $f(a) = f(b)$,
alors il existe $c \in\ ]a,\ b[$ tel que $f'(c) = 0$.
(f admet au moins un extremum sur $]a,\ b[$)

Théorème des accroissements finis :
Soit f continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$,
alors il existe $c \in\ ]a,\ b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
On note aussi $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Applications du TAF

1. Sens de variation d'une fonction et signe de la dérivée

Le signe de la dérivée donne la monotonie d'une fonction continue dérivable et vice versa.
Stricte monotonie de f continue : f' de signe constant ne s'annulant qu'en un nombre fini de points.

2. Extrema d'une fonction dérivable

Une fonction possède un extremum local en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a où $\forall x \in \mathcal{V},\ f(x) \leqslant f(a)$.
(ou $\geqslant$ pour un minimum local).

Dans ce cas, on a nécessairement $f'(a) = 0$.
(Pour une fonction dérvable).

Un réel a pour lequel $f'(a) = 0$ est un point critique de f.
Ça n'est un extremum que si f' change de signe.

3. Théorème de la limite dérivée

— Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, alors f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

— Si $l = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 (tangeante verticale).

— Si f' a une limite à gauche et à droite différente en a, alors f n'est pas dérivable en a.

— Si f' n'admet pas de limite en a, on ne peut rien conclure.

Compléments d'algèbre linéaire

Somme de sous-espace vectoriels

1. Somme et somme directe

Le sev somme de F et G est $H = \{u_F + u_G,\ u_F \in F,\ u_G \in G\}$

On a : $F + G = \operatorname{Vect} F \cup G$ ($F + G$ est le plus petit SEV engendré par les parties F et G).
$F + G$ est directe si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ On note $F \oplus G$.
Tout élément de $F \oplus G$ s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et de G.

2. Supplémentaires

F et G sont supplémentaires dans $E \iff E = F \oplus G$ (donc si $F \cap G = \{0_E\}$)

Un sev peut avoir une infinité de supplémentaires.

3. En dimension finie

Formule de Grassman :
Soit E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

$\mathcal{B}_F \cap \mathcal{B}_G$ est une base de $E \iff F \oplus G = E$.
Dans un ev de dimension finie n, tout sev F admet des supplémentaires de dimension $n - \dim(F)$.

Projections vectorielles

$$E = F \oplus G \iff \forall \overrightarrow{x} \in E,\ \exists! \overrightarrow{x}_G \in G,\ \exists! \overrightarrow{x}_F \in F,\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_F + \overrightarrow{x}_G$$

Ainsi, on appelle projection vectorielle sur F parallèlement à G l'application $p : E \to E$ définie par $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}_F$.

Ainsi, si $E = F \oplus G$,
- p est linéaire (endomorphisme de E)
- $G = \operatorname{Ker}(p)$ et $F = \operatorname{Im}(p)$
- $F = \{\overrightarrow{x} \in E,\ p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\} = \operatorname{Ker}(p - id_E)$ (F est l'espace des invariants de p)

En dimension finie, si un endomorphisme p de E est une projection, alors $\operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p) = E$.

Si p est une projection vectorielle, alors $p \circ p = p$.
Réciproquement, si p est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$, alors p est une projection vectorielle sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

Mathématiques 11

Matrices

Matrices et opérations

1. Définition

Une matrice, notée $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ est un tableau de scalaires à n lignes et p colonnes.
Ses coefficients sont notés a_{ij}, i étant la ligne et j la colonne.

Matrices particulières :

— Matrice nulle : $0_{\mathcal{M}n,p}$
— Matrice ligne : $n = 1$
— Matrice colonne : $p = 1$
— Matrice carrée : $n = p$, on note $A \in \mathcal{M}_n$

Matrices particulières carrées :

— Triangulaire supérieure : $\forall i > j, a_{i,j} = 0$
— Triangulaire inférieure : $\forall i < j, a_{i,j} = 0$
— Diagonale : $\forall ij, a_{i,j} = 0$
— Identité : diagonale, avec coefs. égaux à 1.

2. Opérations sur les matrices

Somme et multiplication par un scalaire

— **Loi interne + :**
Les coefficient i, j s'ajoutent entre eux (matrices de même taille).

— **Loi externe $\cdot$:**
Chaque coefficient est multiplié par le scalaire.

Produit de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$, alors $AB = C \in \mathcal{M}_{n,q}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

On multiplie les lignes de A par les colonnes de B.

3. Règles de calcul

Puissances de matrices :

— A^k est définis uniquement pour $A \in \mathcal{M}_n$ et vaut $A \times A \times \cdots \times A$ (k fois).

Produit matriciel :

— On distingue la distributivité à gauche et à droite car $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif.
— La multiplication avec un scalaire est commutative : $\lambda \times A = A \times \lambda$.
— L'associativité est vérifiée : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Matrices identité :

I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel.

Matrices particulières :

— Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur
— Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieur
— Le produit de deux matrices diagonales est diagonal.

Binôme de Newton :

Si A et B commutent ($AB = BA$) :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$$

Lien avec les applications linéaires

1. Matrice d'une application linéaire

Une application linéaire f est entièrement déterminée par la donnée de $f(e_1)$, ..., $f(e_p)$. On peut donc représenter une application linéaire par une matrice.

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ a les colonnes formées des coordonnées des images des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}$ exprimés dans la base d'arrivée $\mathcal{B}'$.
On note cette matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Si f est un endomorphisme, on peut choisir la même base B de départ et d'arrivée et on note $[f]_{\mathcal{B}}$.

2. Image d'un vecteur par une application linéaire

On multiplie la matrice d'une application linéaire par $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ pour obtenir le vecteur image de Y par f.

On note $Y = AX$.

3. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev. donc :
- $[f+g]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + [g]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$
- $[\lambda f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \lambda [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

On définis ainsi un isomorphisme :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E,\ F) & \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \end{cases}$$

Où $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np = \dim(F) \times \dim(E)$

4. Composées d'applications linéaires et produit matriciel

Soient $f\ :\ E \to F$ et $g\ :\ F \to G$ deux applications linéaires :

$$[g \circ f]_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G} = [g]_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G} \times [f]_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}$$

On met en première la matrice de l'application appliquée en dernière.

Inversion de matrices