

Logique et raisonnement

Logique

1. Connecteurs logiques \neg , \wedge , \vee , (\oplus ou \vee)

La négation \neg , pour les ensembles, correspond au complémentaire du sous ensemble A dans E , noté $\complement_E A$, \overline{A} ou A^C
Négation \neq Contraire (Non jeune \neq vieux)

La conjonction \wedge pour ET, correspond à l'intersection \cap .

La disjonction \vee OU, correspond à l'union \cup .

La disjonction exclusive \oplus ou \vee XOR, l'une des deux vrais et l'autre nécessairement fausse. Correspond à la différence symétrique Δ .

Règles de Morgan : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Distributivité : $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
 $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

Produit cartésien : $A \times B = \{(a, b), a \in A \text{ et } b \in B\}$

2. Connecteurs logiques \Rightarrow et \Leftrightarrow

L'implication de P à Q n'est fausse que lorsque P est vraie et Q fausse.

Correspond à : $\neg P \vee Q$

Négation : $P \wedge \neg Q$

Réciproque : $Q \Rightarrow P$

Contraposée : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
(même valeur de vérité).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'équivalence de P et Q n'est vraie que si P et Q ont même valeur de vérité. L'équivalence a la même valeur de vérité que la double implication (nécessaire et suffisant).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Quantificateurs

$\forall x \in A, P(x)$: quel que soit x élément de A (ou pour tout x appartenant à A).

$\exists x \in A, P(x)$: il existe au moins un élément x de A

$\exists! x \in A, P(x)$: il y a existence et **unicité** de l'élément x dans A vérifiant la propriété P

Négation : $\exists x \in A, \neg P(x)$

Négation : $\forall x \in A, \neg P(x)$

Méthodes de raisonnement

1. Raisonnement direct

(Par déduction ou hypothèse auxiliaire).

Hypothèse \Rightarrow Conclusion.

2. Raisonnement par disjonction des cas

Raisonnement direct dans lequel l'hypothèse peut se décomposer en plusieurs autres hypothèses

$H \Leftrightarrow H_1 \wedge H_2$

On montre ensuite $H_1 \Rightarrow C$ et $H_2 \Rightarrow C$

3. Raisonnement par contraposition

$(H \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg H)$

Exemple : La contraposée de « $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair, alors n^2 est pair. » est « Si n^2 est impair, alors n est impair »

4. Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire et on montre que cela vient contredire une proposition vraie.

Exemple : Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel \rightarrow sup-

posons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On aurait donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et p et q premiers entre eux. Donc $p^2 = 2q^2$ alors p pair, $p = 2p'$ d'où $q^2 = 2p'^2$ donc q serait pair. Ainsi, p et q ne seraient pas premiers entre eux, on a bien une contradiction.

5. Raisonnement par contre-exemple

Il suffit de trouver un contre exemple pour prouver qu'une propriété est fausse.

6. Raisonnement par récurrence simple

- On montre que $P(0)$ est vraie (propriété initialisée ou fondée)

- On suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$ (hérédité)

7. Raisonnement par analyse-synthèse

- Analyse : on établit une liste de potentielles solutions parmi lesquelles toutes les solutions réelles sont nécessairement incluses.

- Synthèse : pour chacune de ces solutions, on détermine si elles sont viables ou non.

Généralités sur les fonctions

Généralités

1. Différence entre applications et fonctions

Une application est une relation entre deux ensembles.

Une fonction est une application d'une partie D_f d'un ensemble de départ. D_f est appelé ensemble de définition.

Une fonction n'est donc pas forcément définie sur l'entiereté de l'ensemble de départ.

2. Image directe

L'image directe d'un ensemble A par une fonction f est l'**ensemble des images** de A par f :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

3. Image réciproque

L'image réciproque est l'ensemble des **antécédents** d'un ensemble. C'est l'image directe de l'ensemble par f^{-1} .

4. Restriction

On note $f|_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, avec $A \subset D_f$.

5. Composition

$f \circ g(x) = f(g(x))$
Associative mais non commutative :
 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

6. Injectivité

Au plus un antécédent.

Fonction injective : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Non injective : $\exists (x_1, x_2) \in D_f^2 \mid f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

7. Surjectivité

Au moins un antécédent.

Fonction surjective : $\forall y \in F, \exists x \in D_f \mid y = f(x)$.

Non surjective : $\exists y \in F \mid \forall x \in D_f, y \neq f(x)$

8. Bijectivité ou Réciprocité

Exactement un antécédent.

À la fois injective et surjective : $\forall y \in F, \exists! x \in D_f \mid y = f(x)$.

On note alors $x = f^{-1}(y)$ la bijection réciproque de f .

Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}