Mathématiques 1

Logique et raisonnement

Logique

1. Connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ($\oplus$ ou $\veebar$)

La négation $\neg$, pour les ensembles, correspond au complémentaire du sous ensemble A dans E, noté $\complement_E A$, $\overline{A}$ ou A^C
Négation $\neq$ Contraire (Non jeune $\neq$ vieux)

La conjonction $\wedge$ pour ET, correspond à l'intersection $\cap$.

La disjonction $\vee$ OU, correspond à l'union $\cup$.

La disjonction exclusive $\oplus$ **ou** $\veebar$ XOR, l'une des deux vrais et l'autre nécessairement fausse.
Correspond à la différence symétrique Δ.

Règles de Morgan : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Distributivité : $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

Produit cartésien : $A \times B = \{(a,b),\ a \in A\ et\ b \in B\}$

2. Connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

L'implication de P à Q n'est fausse que lorsque P est vraie et Q fausse.
Correspond à : $\neg P \vee Q$
Négation : $P \wedge \neg Q$
Réciproque : $Q \Rightarrow P$
Contraposée : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
(même valeur de vérité).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'équivalence de P et Q n'est vraie que si P et Q ont même valeur de vérité. L'équivalence a la même valeur de vérité que la double implication (nécessaire et suffisant).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Quantificateurs

$\forall x \in A, P(x)$: quel que soit x élément de A (ou pour tout x appartenant à A). **Négation :** $\exists x \in A, \neg P(x)$
$\exists x \in A, P(x)$: il existe au moins un élément x de A **Négation :** $\forall x \in A, \neg P(x)$
$\exists! x \in A, P(x)$: il y a existence et **unicité** de l'élément x dans A vérifiant la propriété P

Méthodes de raisonnement

1. Raisonnement direct

(Par déduction ou hypothèse auxiliaire).
Hypothèse $\Rightarrow$ Conclusion.

2. Raisonnement par disjonction des cas

Raisonnement direct dans lequel l'hypothèse peut de décomposer en plusieurs autres hypothèses
$H \Leftrightarrow H_1 \wedge H_2$
On montre ensuite $H_1 \Rightarrow C$ et $H_2 \Rightarrow C$

3. Raisonnement par contraposition

$(H \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg H)$
Exemple : La contraposée de « $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair, alors n^2 est pair. » est « Si n^2 est impair, alors n est impair »

4. Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire et on montre que cela vient contredire une proposition vraie.
Exemple : Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel $\rightarrow$ supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On aurait donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et p et q premiers entre eux. Donc $p^2 = 2q^2$ alors p pair, $p = 2p'$ d'où $q^2 = 2p'^2$ donc q serait pair. Ainsi, p et q ne seraient pas premiers entre eux, on a bien une contradiction.

5. Raisonnement par contre-exemple

Il suffit de trouver un contre exemple pour prouver qu'une propriété est fausse.

6. Raisonnement par récurrence simple

- On montre que $P(0)$ est vraie (propriété initialisée ou fondée)
- On suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$ (hérédité)

7. Raisonnement par analyse-synthèse

- Analyse : on établit une liste de potentielles solutions parmi lesquelles toutes les solutions réelles sont nécessairement incluses.
- Synthèse : pour chacune de ces solutions, on détermine si elles sont viables ou non.

Mathématiques 2

Généralités sur les fonctions

Généralités

1. Différence entre applications et fonctions

Une application est une relation entre deux ensembles.
Une fonction est une application d'une partie D_f d'un ensemble de départ. D_f est appelé ensemble de définition.
Une fonction n'est donc pas forcément définie sur l'entièreté de l'ensemble de départ.

2. Image directe

L'image directe d'un ensemble A par une fonction f est l'**ensemble des images** de A par f :
$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$

3. Image réciproque

L'image réciproque est l'ensemble des **antécédents** d'un ensemble.
C'est l'image directe de l'ensemble par f^{-1}.

4. Restriction

On note $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, avec $A \subset D_f$.

5. Composition

$f \circ g(x) = f(g(x))$
Associative mais non commutative :
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

6. Injectivité

Au plus un antécédent.
Fonction injective : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Non injective : $\exists (x_1, x_2) \in D_f^2 \ / \ f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

7. Surjectivité

Au moins un antécédent.
Fonction surjective : $\forall y \in F, \ \exists x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
Non surjective : $\exists y \in F \ / \ \forall x \in D_f, \ y \neq f(x)$

8. Bijectivité ou Réciprocité

Exactement un antécédent.
À la fois injective et surjective : $\forall y \in F, \ \exists ! x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
On note alors $x = f^{-1}(y)$ la bijection réciproque de f.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Sens de variation

$f \circ g$ est :
- Croissante si f et g sont de même monotonie.
- Décroissante si f et g sont de sens de monotonies contraires.

Si f est strictement monotone, alors elle est injective (au plus un antécédent par image).

2. Majorant et minorant

- α **maximum de A** si α est à la fois majorant et élément de A : $\alpha = \max(A)$ (resp. $\min(A)$).
- α **borne supérieure de A** si α est le plus petit des majorants : $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).
  - si A est non vide non majoré : $\sup(A) = +\infty$
  - si A est non vide non minoré : $\inf(A) = -\infty$

Si le maximum existe, il est égal à la borne supérieure.

3. Parité

- Si f et g sont paires, $f + g$ est paire (resp. impaires).
- Si f et g ont même parité, $f \times g$ est paire (resp. f/g).
- Si f et g ont des parités contraires, $f \times g$ est impaire (resp. f/g).
- Si f est paire, $g \circ f$ est paire.
- Si f est impaire, $g \circ f$ a la même parité que g.

4. Périodicité

T-périodique si $\forall (x, x+T) \in D_f^2, \ f(x+T) = f(x)$.
- Si f et g sont T-périodiques, $f + g$ et $f \times g$ sont T-périodiques.
- Si f est T-périodique, $g \circ f$ est T-périodique.

5. Bijectivité et symétrie

- Si f est une bijection, C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$.
- $x \mapsto f(-x)$: symétrie par l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto -f(x)$: symétrie par l'axe des abscisses.
- $x \mapsto f(x+a)$: translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- $x \mapsto f(x) + a$: translation de vecteur $b\vec{\jmath}$.
- $x \mapsto f(ax)$: réduction/agrandissement sur axe x.
- $x \mapsto af(x)$: réduction/agrandissement sur axe y.

Mathématiques 3

Fonctions usuelles

Fonction partie entière

$E(x) = \lfloor x \rfloor$ (Plus grand entier inférieur ou égal à x).

- $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$.
- $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ E(x+n) = E(x) + n$

Fonction log, exp et puissances

1. Logarithme naturel / népérien

$\forall x > 0,\ \ln(a)$ vaut l'aire sous la courbe de $\frac{1}{x}$ entre 1 et a.
On note e tel que $\ln(e) = 1$ (base du logarithme népérien).
Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle, dont l'unique dérivée vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ est elle même.

2. Fonctions logarithmes

$\log_b(a) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.
$\log_e$: népérien, $\log_2$: binaire, $\log_{10}$: décimal (log).
De même, $\exp_a(x) = a^x$.

3. Fonctions puissances

X^a est bijective de réciproque $X^{\frac{1}{a}}$ $(a \neq 0)$
Sur $\mathbb{R}_+^*$:
X^a est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

Fonctions trigonométriques

Angles opposés :

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\quad$ $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

Angles supplémentaires :

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\quad$ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\quad$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$

Angles complémentaires :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$

Somme des angles :

$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$
$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$
$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$
$\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Fonctions hyperboliques

Cosinus hyperbolique :

$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- Fonction paire
- Strict. décroissante sur $\mathbb{R}_-$
- Strict. croissante sur $\mathbb{R}_+$

Sinus hyperbolique :

$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- Fonction impaire
- Strictement croissante

Tangeante hyperbolique :

$\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

- Fonction impaire
- Strictement croissante
- Définie sur $\mathbb{R}$.

Lien avec sinus et cosinus :

- $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
- $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$
- $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$

$\cosh a = \cos(ia)$
$\sinh a = -i\sin(ia)$

Mathématiques 4

Polynômes

Définitions

$\deg(0) = -\infty$

Opérations :

- $P = Q \Leftrightarrow$ même degré et mêmes coefs.
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(p), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(p) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) \leq \deg(p) \times \deg(Q)$

Division euclidienne et racines

Les polynômes peuvent être divisés par un polynôme non nul, au même titre que les réels.
Soit α une racine de P, alors P est divisible par $(X - \alpha)$.
Un polynôme P admet n racines avec $n \leq \deg(P)$.

Un polynôme a la même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son terme de plus haut degré.
Si un polynôme P est de degré impair, alors P a au moins une racine réelle.

Formule de Taylor

La dérivée d'un polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est donnée par : $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$
Pour la dérivée $k-$ième, on retrouve $k!$ pour le premier coefficient. Ainsi, on a $\forall\ k \leq \deg(P)$, $P^{(k)}(0) = k!\ a_k$
Ainsi, on a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$
Généralisation (formule de Taylor) : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$

Racines multiples

α est une racine d'ordre de multiplicité m de P si $P = (X - \alpha)^m\ Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.
(Racine simple, double, triple, ...).

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de la multiplicité :
α est une racine de P d'ordre de multiplicité m ssi :

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

(Par exemple, pour une racine double, la tangente est horizontale, et pour une racine triple, il y a en plus un point d'inflexion).

Factorisation

Tout polynôme P à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet exactement $\deg(P)$ racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Si z est une racine complexe (non réelle) de P et de multiplicité m, alors $\overline{z}$ est de même une racine de P de multiplicité m.