Mécanique 1

Statique du solide

Définitions indispensables

1. Fluides et solides

- **Solide** : possède une forme et un volume propre, indéformable, la distance entre deux points quelconques reste constante.
- **Fluide :** n'a pas de forme propre
  - **Liquide :** Volume propre
  - **Gaz :** Pas de volume propre, occupe toute la place disponible

Point matériel ou masse ponctuelle : point d'un volume nul et de masse non nulle.

2. Système et référentiel

Penser à définir le **système** et le **référentiel** au début du problème.
Barycentre d'un système :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}{M_{total}}$$

Pour un solide de masse M :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} * \iiint_{\text{solide}} \rho \, \mathrm{d}V \, \overrightarrow{OM}$$

3. Modéliser des interactions par des forces

Force : concept physique modélisant l'interaction entre deux systèmes (créant un mouvement, une déformation).

Troisième loi de Newton (actions réciproques) : $\overrightarrow{F_{1\to2}} = -\overrightarrow{F_{2\to1}}$ (dans tout référentiel).

Deux types de forces : force à distance ou de contact.

- Interaction gravitationnelle : $\overrightarrow{F_{g1\to2}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{d^2}\overrightarrow{u_{1\to2}}$
- Interaction Électromagnétique : $\overrightarrow{F_{e1\to2}} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\overrightarrow{u_{1\to2}}$.
- Tension d'un fil : toujours inconnue sauf si le fil est détendu.
- Rappel élastique d'un ressort : $\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{\imath}$.
  Avec l_0 la longueur à vide, l la longueur étiré/comprimé et k la constante de raideur du ressort.
- Réaction d'un support
  - Composante normale $\overrightarrow{R_N}$: perpendiculaire au support.
  - Composante tangentielle $\overrightarrow{R_T} = \overrightarrow{f}$, frottements solides : s'oppose au mouvement.
    Ne dépend que de la masse, $\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_d\|\overrightarrow{R_N}\|$. ($\mu_d$ coefficient de frottements dynamique).
    Quand le système est immobile : $\|\overrightarrow{R_T}\| < \mu_s\|\overrightarrow{R_N}\|$ (μ_s coef. frottements statique). En général, $\mu_s > \mu_d$.
- Forces pressantes, la somme de des forces pressantes donne la poussée d'Archimède :
  $\overrightarrow{\Pi} = -\rho_{fluide}\, V_{fluide\ déplacé}\, \overrightarrow{g}$

Énergie cinétique et potentielle

Énergie cinétique (point matériel) : $\overrightarrow{E_c} = \frac{1}{2}mv^2$
Pour un solide :

$$\overrightarrow{E_c} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Énergie potentielle élastique :

$$E_{pe}(M) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

Avec $E_{pe} = 0$ pour $x = l_0$.

Énergie potentielle de position :

$$E_{pp}(M) = E_{pp}(0) + mgz$$

Bien définir l'origine des E_{pp}
Pour un solide, on prend l'altitude du barycentre.

Équilibre d'un point matériel

Seconde loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a}$
L'équilibre d'un point s'exprime aussi en fonction de l'énergie potentielle. Soit x_{eq} sa position d'équilibre :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_{eq}} = 0$$

L'équilibre est stable si le point tend à revenir vers x_{eq} s'il s'en est écarté (dérivée seconde positive).

Équilibre d'un solide

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$ ne suffit pas pour un solide (exemple du couple).
$\rightarrow$ Le moment d'une force caractérise sa capacité à faire tourner un solide.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

Bras de levier : distance entre la droite d'action de $\overrightarrow{F}$ et le centre O.

$$d = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \sin\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{F}\right) \text{ soit } \|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})\| = d\,\|\overrightarrow{F}\|$$

Dans le plan, le moment est un scalaire, on prend alors le produit scalaire avec un vecteur directeur de l'axe de rotation (le signe du moment détermine alors le sens de rotation).

Différents cas possibles :
- Couple de forces si $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$ et $\exists\, O \;/\; \sum_i \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_i}) \neq \overrightarrow{0}$ (rotation).
  Le moment d'un couple ne depend pas du point par rapport auquel il est calculé ($\exists \Rightarrow \forall$).
- Solide à l'équilibre si $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$ et $\exists\, O / \sum_i \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{0}$.
- Force unique appliquée en O si $\sum_i \overrightarrow{F_i} \neq \overrightarrow{0}$ et $\sum_i \overrightarrow{M_0}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{0}$.
- Si à la fois la résultante des moments et des forces est non nulle, le solide est à la fois en rotation et en translation.

Mécanique 2

Cinématique

Comment reperer la position d'un point ?

Trajectoire du point :
Rectiligne : ligne droite
Circulaire : arc de cercle
Curviligne : courbe quelconque

Équation de trajectoire :
Équation de la forme $y = f(x)$ ou $r = g(\theta)$
Le temps n'intervient plus.

Vitesse et acceleration d'un point materiel

<u>Mouvement uniforme :</u> $\|\overrightarrow{v}\| = const$

Cilindrique :
$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$, mais $\overrightarrow{e_r}$ varie aussi en fonction du temps :
$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$
$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$

Base de Frénet :
$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\overrightarrow{u_T}$
$\overrightarrow{a} = \dfrac{d\|\overrightarrow{v}\|}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T} + \dfrac{\|\overrightarrow{v}\|^2}{R_C}\overrightarrow{u_N}$
Si mouvement uniforme : $\overrightarrow{a} = \dfrac{\|\overrightarrow{v}\|^2}{R_C}\overrightarrow{u_N}$

Etude de quelques mouvements simples d'un point

Mouvement rectiligne uniforme :
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
$v(t) = v_0$
$x(t) = v_o t + x_0$

Mouvement circulaire :
Vitesse angulaire : $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}$

Rectiligne accéléré si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont dans le même sens, décéléré sinon.
Rectiligne uniformément accéléré si $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{e_x}$ (k constante).

Etude de quelques mouvements simples d'un solide

Translation : tous les points ont la même vitesse et le même vecteur accélération.

Rotation autour d'un point fixe : tous les points ont la même vitesse angulaire (et le même vecteur accélération angulaire).

Changement de referentiels

Soit deux référentiels R et R', de centres O et O', on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$
On a alors une position absolue ($\overrightarrow{OM}$) et relative ($\overrightarrow{O'M}$). De même pour la vitesse.

Si on dérive par rapport au référentiel R, il faudra dériver les vecteurs unitaires du référentiel R' et vice versa.

Soit $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} + z'\overrightarrow{e_{z'}}$
Alors $\overrightarrow{v_R} = \overrightarrow{v_{R'}} + \overrightarrow{v_{R'/R}}(M) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{x'}} + \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{y'}} + \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_{z'}} + x'\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{x'}}}{\mathrm{d}t}\right)_R + y'\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{y'}}}{\mathrm{d}t}\right)_R + z'\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_{z'}}}{\mathrm{d}t}\right)_R$
Dérivée de $\overrightarrow{OO'}$ = translation. Dérivées des vecteurs unitaires = rotation : peut être retiré en cas de translation.
En translation, l'accélération vaut :

$$\overrightarrow{a_R} = \overrightarrow{a_{R'}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_R$$

Mécanique 3

Introduction à la dynamique

À Chaque fois :

- Grandeur d'inertie : capacité à résister à la modification du mouvement.
- Grandeur cinématique : décrit le mouvement.

Les grandeurs cinétiques du point

1. Énergie cinétique

$\varepsilon_c = \frac{1}{2}mv^2$
(m grandeur d'inertie et v grandeur cinématique).

$$\textbf{PFD :} \frac{\mathrm{d}\varepsilon_c}{\mathrm{d}t} = \sum P_{ext}$$

2. Quantité de mouvement

$\vec{p} = m\vec{v}$
(m grandeur d'inertie et v grandeur cinématique).

$$\textbf{PFD :} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$
$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

3. Moment cinétique

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \\ &= r\overrightarrow{e_r} \wedge mr\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ &= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \\ &= J\vec{\Omega}\end{aligned}$$

- Moment d'inertie : $J = mr^2$ (grandeur d'inertie)
- Vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ (grandeur cinématique)

$$\textbf{PFD :} \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}}$$

Les grandeurs cinétiques d'un solide

1. Énergie cinétique d'un solide

Somme des énergies cinétiques des points du solide : $\varepsilon_c = \sum \varepsilon_{c,i}$

<u>En translation :</u>
Tous les points ont la même vitesse :
$\varepsilon_c = \frac{1}{2}mv^2$

<u>En rotation :</u>
$\vec{v} = r\dot{\theta}$ donc $\varepsilon_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 J_\Delta$

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ : $J_\Delta = \int r^2 \mathrm{d}m$

2. Quantité de mouvement d'un solide

(Solide en translation)
$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}$

3. Moment cinétique d'un solide

Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à vitesse $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$
$\vec{\sigma} = \vec{\Omega} \sum J_i = J\vec{\Omega}$

Le principe d'inertie

Un système est incapable de changer son état par lui même.
Dans un référentiel Galiléen, tout système isolé ou pseudo-isolé est immobile ou à vitesse uniforme.

On dit que les grandeurs cinétiques d'un système isolé ou pseudo-isolé sont conservatives :

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_c}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

Mécanique 4

Dynamique : Lois de Newton

Dynamique du point

1. Les trois lois du mouvement

— **1ère loi de Newton : principe d'inertie**
Il existe des référentiels privilégiés dits galiléens dans lesquels le mouvement d'un point isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.
Ainsi, si R_g est galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à R_g est aussi galiléen.

— **2ème loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)**
Les forces sont à l'origine du mouvement : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \dfrac{dp}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a}$ (dans un ref. galiléen).

— **3ème loi de Newton : principe des actions réciproques**
Une force unique existant seule n'existe pas.
Si deux points sont en interaction, on a deux forces : $\overrightarrow{f_{1/2}} = -\overrightarrow{f_{2/1}}$
D'où la résultante des forces intérieures à un système est nulle.

2. Théorème du moment cinétique

Dynamique des mouvements simples du solide

1. Introduction

2. Solide en translation

3. Solide en rotation autour d'un axe fixe