Mathématiques 1

Logique et raisonnement

Logique

1. Connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ($\oplus$ ou $\veebar$)

La négation $\neg$, pour les ensembles, correspond au complémentaire du sous ensemble A dans E, noté $\complement_E A$, $\overline{A}$ ou A^C
Négation $\neq$ Contraire (Non jeune $\neq$ vieux)

La conjonction $\wedge$ pour ET, correspond à l'intersection $\cap$.

La disjonction $\vee$ OU, correspond à l'union $\cup$.

La disjonction exclusive $\oplus$ **ou** $\veebar$ XOR, l'une des deux vrais et l'autre nécessairement fausse.
Correspond à la différence symétrique Δ.

Règles de Morgan : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Distributivité : $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

Produit cartésien : $A \times B = \{(a,b),\ a \in A\ et\ b \in B\}$

2. Connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

L'implication de P à Q n'est fausse que lorsque P est vraie et Q fausse.
Correspond à : $\neg P \vee Q$
Négation : $P \wedge \neg Q$
Réciproque : $Q \Rightarrow P$
Contraposée : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
(même valeur de vérité).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'équivalence de P et Q n'est vraie que si P et Q ont même valeur de vérité. L'équivalence a la même valeur de vérité que la double implication (nécessaire et suffisant).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Quantificateurs

$\forall x \in A, P(x)$: quel que soit x élément de A (ou pour tout x appartenant à A). **Négation :** $\exists x \in A, \neg P(x)$
$\exists x \in A, P(x)$: il existe au moins un élément x de A vérifiant P. **Négation :** $\forall x \in A, \neg P(x)$
$\exists! x \in A, P(x)$: il y a existence et **unicité** de l'élément x dans A vérifiant P.

Méthodes de raisonnement

1. Raisonnement direct

(Par déduction ou hypothèse auxiliaire).
Hypothèse $\Rightarrow$ Conclusion.

2. Raisonnement par disjonction des cas

Raisonnement direct dans lequel l'hypothèse peut se décomposer en plusieurs sous hypothèses :
$H \Leftrightarrow H_1 \wedge H_2$
On montre ensuite $H_1 \Rightarrow C$ et $H_2 \Rightarrow C$

3. Raisonnement par contraposition

$(H \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg H)$
Exemple : La contraposée de « $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair, alors n^2 est pair. » est « Si n^2 est impair, alors n est impair »

4. Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire et on montre que cela vient contredire une proposition vraie.
Exemple : Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel $\rightarrow$ supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On aurait donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et p et q premiers entre eux. Donc $p^2 = 2q^2$ alors p pair, $p = 2p'$ d'où $q^2 = 2p'^2$ donc q serait pair. Ainsi, p et q ne seraient pas premiers entre eux, on a bien une contradiction.

5. Raisonnement par contre-exemple

Il suffit de trouver un contre exemple pour prouver qu'une propriété est fausse.

6. Raisonnement par récurrence simple

- On montre que $P(0)$ est vraie (propriété initialisée ou fondée)
- On suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$ (hérédité)

7. Raisonnement par analyse-synthèse

- Analyse : on établit une liste de potentielles solutions parmi lesquelles toutes les solutions réelles sont nécessairement incluses.
- Synthèse : pour chacune de ces solutions, on détermine si elles sont viables ou non.

Généralités sur les fonctions

Généralités

1. Différence entre applications et fonctions

Une application est une relation entre deux ensembles.
Une fonction est une application d'une partie D_f d'un ensemble de départ. D_f est appelé ensemble de définition.
Une fonction n'est donc pas forcément définie sur l'entièreté de l'ensemble de départ.

2. Image directe

Ensemble des images de A par f :
$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$

3. Image réciproque

Ensemble des antécédents d'un ensemble.
C'est l'image directe de l'ensemble par f^{-1}.

4. Restriction

On note $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, avec $A \subset D_f$.

5. Composition

$f \circ g(x) = f(g(x))$
Associative mais non commutative :
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

6. Injectivité

Au plus un antécédent.
Fonction injective : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Non injective : $\exists (x_1, x_2) \in D_f^2 \ / \ f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

7. Surjectivité

Au moins un antécédent.
Fonction surjective : $\forall y \in F, \ \exists x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
Non surjective : $\exists y \in F \ / \ \forall x \in D_f, \ y \neq f(x)$

8. Bijectivité ou Réciprocité

À la fois injective et surjective : $\forall y \in F, \ \exists ! x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
On note alors $x = f^{-1}(y)$ la bijection réciproque de f.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Sens de variation

$f \circ g$ est :
- Croissante si f et g sont de même monotonie.
- Décroissante si f et g sont de sens de monotonies contraires.

Si f est strictement monotone, alors elle est injective (au plus un antécédent par image).

2. Majorant et minorant

- α **maximum de A** si α est à la fois majorant et élément de A : $\alpha = \max(A)$ (resp. $\min(A)$).
- α **borne supérieure de A** si α est le plus petit des majorants : $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).
  - si A est non vide non majoré : $\sup(A) = +\infty$
  - si A est non vide non minoré : $\inf(A) = -\infty$

Si le maximum existe, il est égal à la borne supérieure.

3. Parité

- Si f et g sont paires, $f + g$ est paire (resp. impaires).
- Si f et g ont même parité, $f \times g$ est paire (resp. f/g).
- Si f et g ont des parités contraires, $f \times g$ est impaire (resp. f/g).
- Si f est paire, $g \circ f$ est paire.
- Si f est impaire, $g \circ f$ a la même parité que g.

4. Périodicité

T-périodique si $\forall (x, x+T) \in D_f^2, \ f(x+T) = f(x)$.
- Si f et g sont T-périodiques,
  $f + g$ et $f \times g$ sont T-périodiques.
- Si f est T-périodique,
  $g \circ f$ est T-périodique.

5. Bijectivité et symétrie

- Si f est une bijection, C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$.
- $x \mapsto f(-x)$: symétrie par l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto -f(x)$: symétrie par l'axe des abscisses.
- $x \mapsto f(x+a)$: translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
- $x \mapsto f(x) + a$: translation de vecteur $b\overrightarrow{j}$.
- $x \mapsto f(ax)$: réduction/agrandissement sur axe x.
- $x \mapsto af(x)$: réduction/agrandissement sur axe y.

Mathématiques 3

Fonctions usuelles

Fonction partie entière

$E(x) = \lfloor x \rfloor$ (Plus grand entier inférieur ou égal à x).

- $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ et $x-1 < E(x) \leqslant x$.
- $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ E(x+n) = E(x)+n$

Fonction log, exp et puissances

1. Logarithme naturel / népérien

$\forall x > 0,\ \ln(a)$ vaut l'aire sous la courbe de $\dfrac{1}{x}$ entre 1 et a.
On note e tel que $\ln(e) = 1$ (base du logarithme népérien).
Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle, dont l'unique dérivée vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ est elle même.

2. Fonctions logarithmes

$\log_b(a) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.
$\log_e$: népérien, $\log_2$: binaire, $\log_{10}$: décimal (log).
De même, $\exp_a(x) = a^x$.

3. Fonctions puissances

X^a est bijective de réciproque $X^{\frac{1}{a}}$ $(a \neq 0)$
Sur $\mathbb{R}_+^*$:
X^a est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

Fonctions trigonométriques

Angles opposés :

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.

Angles supplémentaires :

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\qquad \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\qquad \sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$

Angles complémentaires :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$

Somme des angles :

$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$
$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$
$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$
$\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Fonctions hyperboliques

Cosinus hyperbolique :

$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- Fonction paire
- Strict. décroissante sur $\mathbb{R}_-$
- Strict. croissante sur $\mathbb{R}_+$

Sinus hyperbolique :

$\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

- Fonction impaire
- Strictement croissante

Tangeante hyperbolique :

$\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

- Fonction impaire
- Strictement croissante
- Définie sur $\mathbb{R}$.

Lien avec sinus et cosinus :

- $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
- $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$
- $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$

$\cosh a = \cos(ia)$
$\sinh a = -i\sin(ia)$

Mathématiques 4

Polynômes

Définitions

$\deg(0) = -\infty$

Opérations :

- $P = Q \Leftrightarrow$ même degré et mêmes coefs.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) \leqslant \deg(P) \times \deg(Q)$

Division euclidienne et racines

Les polynômes peuvent être divisés par un polynôme non nul, au même titre que les réels.
Soit α une racine de P, alors P est divisible par $(X - \alpha)$.
Un polynôme P admet n racines avec $n \leqslant \deg(P)$.

Un polynôme a la même limite en $+\infty$ et en $-\infty$ que son terme de plus haut degré.
Si un polynôme P est de degré impair, alors P a au moins une racine réelle.

Formule de Taylor

La dérivée d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est donnée par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

Pour la dérivée $k-$ième, on retrouve $k!$ pour le premier coefficient. Ainsi, on a $\forall\ k \leqslant \deg(P)$, $P^{(k)}(0) = k!\ a_k$

Ainsi, on a $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

Généralisation (formule de Taylor) : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$

Racines multiples

α est une racine d'ordre de multiplicité m de P si $P = (X - \alpha)^m\ Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.
(Racine simple, double, triple, ...).

La formule de Taylor permet de donner une caractérisation de la multiplicité :
α est une racine de P d'ordre de multiplicité m ssi :

$$\begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

(Par exemple, pour une racine double, la tangente est horizontale, et pour une racine triple, il y a en plus un point d'inflexion).

Factorisation

Tout polynôme P à coefficient dans $\mathbb{C}$ admet exactement $\deg(P)$ racines complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Si z est une racine complexe (non réelle) de P et de multiplicité m, alors $\overline{z}$ est de même une racine de P de multiplicité m.

Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si il est muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$, respectant les 8 axiomes de base :

On redéfinit les lois de bases (commutativité et associativité de l'addition, élément neutre. . .).

Sous espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E si $F \subset E$ avec $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Stabilité par combinaison linéaire :

$$F \text{ est un s.e.v de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \text{ (Un s.e.v. contient toujours le vecteur nul)} \\ \forall(\alpha, \beta, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{K}^2 \times F^2,\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in F \\ \text{(F est stable par combinaison linéaire)} \end{cases} \tag{5.1}$$

L'intersection de deux s.e.v est un s.e.v. Ce n'est pas le cas pour l'union.

Sous-espace vectoriel engendré par A ($\text{Vect}(A)$) : c'est le plus petit s.e.v. de E contenant A.
Par convention : $\text{Vect}(\emptyset) = \overrightarrow{0_E}$
On dit que $\text{Vect}(A)$ est constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de A.

Dimension d'un espace vectoriel

1. Familles libres, génératrices, bases

Une famille de vecteurs de E est <u>libre</u> s'ils sont linéairement indépendants (seul la combinaison linéaire avec des coefficients tous nuls mène à $\vec{0}$).

Sinon, la famille est <u>liée</u>, les vecteurs sont alors linéairement dépendants (il existe des coefficients non tous nuls tel que la combinaison linéaire de ces vecteurs soit nulle).

Deux vecteurs formant une famille liée sont colinéaires. Trois vecteurs formant une famille liée sont coplanaires.

- Une famille de vecteurs est liée $\iff$ l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, elle est liée.
- Une famille extraite d'une famille libre est libre.
- Une famille contenant une famille liée est liée.

Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ d'un e.v. E est <u>génératrice</u> de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de la famille (Ce qui équivaut à dire que $E = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_p})$).
Une famille libre et génératrice de E est une <u>base</u> de E (Elle est canonique si chaque vecteur a une unique composante égale à 1).

2. Dimension finie

Un e.v. E est de dimension finie s'il existe une famille finie de vecteurs génératrice de E. Sinon, $\dim(E) = +\infty$

Soit E un e.v. de dimension finie, on peut compléter une famille libre de E par des vecteurs bien choisis d'une famille génératrice de E pour obtenir une base de E.

Soit $n = \dim(E)$:

- Toute famille libre de E contient au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.

$\Rightarrow$ Soit F une famille de $\dim(E)$ vecteurs : F est une base de E $\iff$ F est libre $\iff$ F est génératrice de E

3. Sous-espace en dimension finie

Soit F et G des s.e.v de E de dimension finie.

- $\dim F \leqslant \dim E$
- $\dim F = \dim E \iff F = E$
- $\dim(F \cap G) \leqslant \min(\dim F, \dim G)$
- Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$

4. Rang d'une famille de vecteurs

Soit F une famille de p vecteurs d'un e.v. E :
$\mathrm{rg}(F) = \dim(\mathrm{Vect}(F))$

- Si F est libre, $\mathrm{rg}(F) = p$ Sinon, $\mathrm{rg}(F) < p$
- $\mathrm{rg}(F) = \dim E \iff F$ est génératrice de E
- $\mathrm{rg}(F) = p = \dim E \iff F$ est une base de E

5. Méthode des zéros échelonnés

Une famille est échelonnée relativement à une base si dans l'écriture des vecteurs exprimés dans la base, chaque vecteur commence par au moins un zéro de plus que le précédent.
Toute famille de vecteurs tous non nuls échelonnée relativement à une base est libre.

On peut échelonner des vecteurs en les écrivant en colonne (comme dans les systèmes), mais en faisant des combinaisons linéaires avec les colonnes (et non avec les lignes). On a donc pas d'équivalence, mais uniquement une égalité de rang $\mathrm{rg}(F)$.

Mathématiques 6

Applications linéaires

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

On considérera f une application linéaire tel que $f \in \mathcal{L}(E, F)$
On a : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2, f(\alpha \cdot_E \overrightarrow{u} +_E \beta \cdot_E \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot_F f(\overrightarrow{u}) +_F \beta \cdot_F f(\overrightarrow{v})$

Toute réciproque d'une bijection linéaire, combinaison linéaire ou composée d'applications linéaires **est linéaire**.
Une application linéaire bijective de E dans F est un isomorphisme de E sur F. E et F sont isomorphes.
Si $E = F$, c'est un endomorphisme bijectif ou automorphisme de E.

Image par une application linéaire

1. Image et image réciproque

- Image directe : image d'un ensemble.
- Image réciproque : antécédents d'un ensemble : $f^{-1}(A)$ (toujours définie contrairement à la réciproque).

L'image s'un s.e.v. est un s.e.v. dans l'ensemble de définition.

2. Noyau et image

- L'image de f est le s.e.v $\text{Im}(f) = f(E)$ (Ensemble d'arrivée de f).
- Le noyau de f est le s.e.v. $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\overrightarrow{0_F})$ (Tous les $\overrightarrow{u}$ de E ayant pour image $\overrightarrow{0}$).

f est surjective $\iff \text{Im}(f) = F$.
f est injective $\iff \text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

3. Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de E :

- Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est liée, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est liée.
- Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre et f injective, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est libre.
- Si $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice et f surjective, alors $(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$ est génératrice.
- Si $G = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, alors $f(G) = \text{Vect}(f(\overrightarrow{u_1}), \ldots, f(\overrightarrow{u_p}))$.

Applications linéaires en dimension finie

1. Image d'une famille de vecteurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E, de dimension finie :

- $(f(\overrightarrow{e_1}, \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$ est libre dans F ssi f est injective.
- $(f(\overrightarrow{e_1}, \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$ est génératrice dans F ssi f est surjective.
- $(f(\overrightarrow{e_1}, \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$ est une base de F ssi f est un isomorphisme.
- Si f injective, alors $\dim F \geqslant \dim E$
- Si f surjective, alors $\dim F \leqslant \dim E$
- Si f est un isomorphisme, alors $\dim F = \dim E$
- Si $\forall i \in [\![0\ ;\ p]\!]$, $f(\overrightarrow{e_i}) = 0$, alors f est l'application nulle.
- Si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $f(\overrightarrow{e_i}) = g(\overrightarrow{e_i})$, alors $f = g$.
- Soit $(\overrightarrow{\epsilon_1}, \ldots, \overrightarrow{\epsilon_p})$ des vecteurs de F, alors il existe une unique A.L. f telle que $\forall i \in [\![0\ ;\ p]\!]$, $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{\epsilon_i}$.

2. Représentation analytique

On peut écrire un système appelé représentation analytique de f, qui exprime les coordonnés de $f(\overrightarrow{u})$ en fonction de combinaison linéaire des composantes de $\overrightarrow{u}$ et des coefficients de f.

3. Matrice d'une app. linéaire

On peut aussi écrire matriciellement :
$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) \iff Y = AX$.
Avec A la matrice des coefficients de f et X la matrice des composantes de $\overrightarrow{u}$.

4. Rang d'une application linéaire

$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ C'est le rang de la famille $(f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_p}))$.

- $\text{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si f est injective.
- $\text{rg}(f) \leqslant \dim(F)$ avec égalité si f est surjective.
- $\text{rg}(f) = \dim(F) = \dim(E)$ si f est un isomorphisme.

Théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$
Donc si E et F sont de même dimension, f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ est un endomorphisme.

Limites est continuité
Comparaison de fonctions

Bornes sup/inf d'une fonction

f est majorée sur D si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in D, f(x) \leqslant \alpha$ (resp. minorée)

Ainsi, f admet un plus petit majorant et un plus grand minorant : borne supérieure et borne inférieure
Si f est non majorée, $\sup f(x) = +\infty$ (resp. non minorée, $\inf f(x) = -\infty$)

Limites d'une fonction

Une propriété esr vraie au voisinage d'un réel x_0 s'il existe un intervalle de la forme $I =]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ où la propriété est vraie sur $I \backslash \{x_0\}$. De même pour un voisinnage en $\pm\infty$, un intervalle $]A; +\infty[$ ou $]-\infty; A[$.

1. Limite finie en l'infini

$\forall \epsilon > 0,\ \exists X_\epsilon \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in D_f,\ x > X_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
On a alors une asymptote horizontale $y = l$ à C_f.

2. Limite infinie en l'infini

$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists X_A \in \mathbb{R}$ / $\forall x \in D_f,\ x > X_A \Rightarrow f(x) > A$

3. Limite infinie en un réel

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha_A > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \alpha_A \Rightarrow f(x) > A$
On a alors une asymptote verticale $x = x_0$ à C_f.

4. Limite finie en un réel

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha_\epsilon > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \alpha_\epsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

5. Limite en général

Dans le cas général, f admet l pour limite en x_0 si pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_{x0} de x_0 tel que $f(V_{x0} \cap D_f) \subset V_l$
Une limite est unique, démontre la continuité ($l = f(x_0)$), et si elle est finie, f est bornée au voisinage de x_0.

6. Limites à gauche/droite

Si $x_0 \notin D_f$, f admet une limite en x_0 ssi f admet une limite à gauche et à droite identique en x_0.
Si $x_0 \in D_f$, il faut que ces limites vaillent $l = f(x_0)$. C'est la continuité.

7. Opérations sur les limites

Formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, ∞^0, 0^0, 1^∞.
Polynômes et fractions rationnelles : termes de plus haut degré.

8. Branches infinies

9. Ordre et limites

Continuité d'une fonction

Comparaison locale de deux fonctions