

Mécanique

Table des matières

1	Statique du solide	2
	Définitions indispensables	2
	Énergie cinétique et potentielle	2
	Équilibre d'un point matériel	3
	Équilibre d'un solide	3
2	Cinématique	4
	Comment repérer la position d'un point ?	4
	Vitesse et accélération d'un point matériel	4
	Étude de quelques mouvements simples d'un point	4
	Étude de quelques mouvements simples d'un solide	4
	Changement de référentiels	4
3	Introduction à la dynamique	5
	Les grandeurs cinétiques du point	5
	Les grandeurs cinétiques d'un solide	5
	Le principe d'inertie	5
4	Dynamique : Lois de Newton	6
	Dynamique du point	6
	Dynamique des mouvements simples du solide	6
5	Dynamique : Théorèmes énergétiques	7
	Travail d'une force	7
	Théorème de l'énergie cinétique (TEC)	7
	Énergie potentielle	7
	Énergie mécanique	7
	Application aux mouvements simples du solide	7
6	Forces électromagnétiques	8
	Force de Lorentz	8
	Force de Laplace	8
7	Oscillations	9
	Généralités	9
	Oscillations libres	9
	Oscillations forcées	9

Mécanique 1

Statique du solide

Définitions indispensables

1. Fluides et solides

- **Solide** : possède une forme et un volume propre, indéformable, la distance entre deux points quelconques reste constante.
- **Fluide** : n'a pas de forme propre
 - **Liquide** : Volume propre
 - **Gaz** : Pas de volume propre, occupe toute la place disponible

Point matériel ou masse ponctuelle : point d'un volume nul et de masse non nulle.

2. Système et référentiel

Penser à définir le **système** et le **référentiel** au début du problème.

Barycentre d'un système :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}}{M_{total}}$$

Pour un solide de masse M :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} * \iiint_{\text{solide}} \rho \, dV \, \overrightarrow{OM}$$

3. Modéliser des interactions par des forces

Force : concept physique modélisant l'interaction entre deux systèmes (créant un mouvement, une déformation).

Troisième loi de Newton (actions réciproques) : $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}$ (dans tout référentiel).

Deux types de forces : force à distance ou de contact.

- Interaction gravitationnelle : $\overrightarrow{F_{g1 \rightarrow 2}} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \overrightarrow{u_{1 \rightarrow 2}}$
- Interaction Électromagnétique : $\overrightarrow{F_{e1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \overrightarrow{u_{1 \rightarrow 2}}$.
- Tension d'un fil : toujours inconnue sauf si le fil est détendu.
- Rappel élastique d'un ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{i}$.
Avec l_0 la longueur à vide, l la longueur étiré/comprimé et k la constante de raideur du ressort.
- Réaction d'un support
 - Composante normale $\overrightarrow{R_N}$: perpendiculaire au support.
 - Composante tangentielle $\overrightarrow{R_T} = \vec{f}$, frottements solides : s'oppose au mouvement.
Ne dépend que de la masse, $\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_d \|\overrightarrow{R_N}\|$. (μ_d coefficient de frottements dynamique).
Quand le système est immobile : $\|\overrightarrow{R_T}\| < \mu_s \|\overrightarrow{R_N}\|$ (μ_s coef. frottements statique). En général, $\mu_s > \mu_d$.
- Forces pressantes, la somme de des forces pressantes donne la poussée d'Archimède :
$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide déplacé}} \vec{g}$$

Énergie cinétique et potentielle

Énergie cinétique (point matériel) : $\vec{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$

Pour un solide :

$$\vec{E}_c = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Énergie potentielle de position :

$$E_{pp}(M) = E_{pp}(0) + mgz$$

Bien définir l'origine des E_{pp}

Pour un solide, on prend l'altitude du barycentre.

Énergie potentielle élastique :

$$E_{pe}(M) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

Avec $E_{pe} = 0$ pour $x = l_0$.

Équilibre d'un point matériel

Seconde loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

L'équilibre d'un point s'exprime aussi en fonction de l'énergie potentielle. Soit x_{eq} sa position d'équilibre :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} = 0$$

L'équilibre est stable si le point tend à revenir vers x_{eq} s'il s'en est écarté (dérivée seconde positive).

Équilibre d'un solide

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ne suffit pas pour un solide (exemple du couple).

→ Le moment d'une force caractérise sa capacité à faire tourner un solide.

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Bras de levier : distance entre la droite d'action de \vec{F} et le centre O .

$$d = \|\vec{OM}\| \cdot \sin(\angle(\vec{OM}, \vec{F})) \text{ soit } \|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\| = d \|\vec{F}\|$$

Dans le plan, le moment est un scalaire, on prend alors le produit scalaire avec un vecteur directeur de l'axe de rotation (le signe du moment détermine alors le sens de rotation).

Différents cas possibles :

- Couple de forces si $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ et $\exists O / \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) \neq \vec{0}$ (rotation).
Le moment d'un couple ne dépend pas du point par rapport auquel il est calculé ($\exists \Rightarrow \forall$).
- Solide à l'équilibre si $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ et $\exists O / \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$.
- Force unique appliquée en O si $\sum_i \vec{F}_i \neq \vec{0}$ et $\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$.
- Si à la fois la résultante des moments et des forces est non nulle, le solide est à la fois en rotation et en translation.

Mécanique 2

Cinématique

Comment reperer la position d'un point ?

Trajectoire du point :

Rectiligne : ligne droite

Circulaire : arc de cercle

Curviligne : courbe quelconque

Équation de trajectoire :

Équation de la forme $y = f(x)$ ou $r = g(\theta)$

Le temps n'intervient plus.

Vitesse et accélération d'un point matériel

Mouvement uniforme : $\|\vec{v}\| = \text{const}$

Cylindrique :

$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, mais \vec{e}_r varie aussi en fonction du temps :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Base de Frénet :

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}_T$$
$$\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\vec{u}_T + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R_C}\vec{u}_N$$

Si mouvement uniforme : $\vec{a} = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R_C}\vec{u}_N$

Etude de quelques mouvements simples d'un point

Mouvement rectiligne uniforme :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

$$v(t) = v_0$$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

Rectiligne accéléré si \vec{v} et \vec{a} sont dans le même sens, décéléré sinon.

Rectiligne uniformément accéléré si $\vec{a} = k\vec{e}_x$ (k constante).

Mouvement circulaire :

$$\text{Vitesse angulaire : } \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Etude de quelques mouvements simples d'un solide

Translation : tous les points ont la même vitesse et le même vecteur accélération.

Rotation autour d'un point fixe : tous les points ont la même vitesse angulaire (et le même vecteur accélération angulaire).

Changement de référentiels

Soit deux référentiels R et R' , de centres O et O' , on a : $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$

On a alors une position absolue (\vec{OM}) et relative ($\vec{O'M}$). De même pour la vitesse.

Si on dérive par rapport au référentiel R , il faudra dériver les vecteurs unitaires du référentiel R' et vice versa.

$$\text{Soit } \vec{OM} = \vec{OO'} + x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

$$\text{Alors } \vec{v}_R = \vec{v}_{R'} + \vec{v}_{R'/R}(M) = \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)_R + \frac{dx'}{dt}\vec{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_{z'} + x'\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_R + y'\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_R + z'\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_R$$

Dérivée de $\vec{OO'}$ = translation. Dérivées des vecteurs unitaires = rotation : peut être retiré en cas de translation. En translation, l'accélération vaut :

$$\vec{a}_R = \vec{a}_{R'} + \left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right)_R$$

Introduction à la dynamique

À Chaque fois :

- Grandeur d'inertie : capacité à résister à la modification du mouvement.
- Grandeur cinématique : décrit le mouvement.

Les grandeurs cinétiques du point

1. Énergie cinétique

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}mv^2$$

(m grandeur d'inertie et v grandeur cinématique).

$$\text{PFD : } \frac{d\varepsilon_c}{dt} = \sum P_{ext}$$

2. Quantité de mouvement

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

(m grandeur d'inertie et v grandeur cinématique).

$$\text{PFD : } \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum \vec{F}_{ext} \\ m \vec{a} &= \sum \vec{F}_{ext} \end{aligned}$$

3. Moment cinétique

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

$$= \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

$$= r \vec{e}_r \wedge m r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$= J \vec{\Omega}$$

— Moment d'inertie : $J = m r^2$
(grandeur d'inertie)

— Vecteur rotation instantané : $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$
(grandeur cinématique)

$$\text{PFD : } \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext}$$

Les grandeurs cinétiques d'un solide

1. Énergie cinétique d'un solide

Somme des énergies cinétiques des points du solide : $\varepsilon_c = \sum \varepsilon_{c,i}$

En translation :

Tous les points ont la même vitesse :

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}mv^2$$

En rotation :

$$v = r\dot{\theta} \text{ donc } \varepsilon_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 J_\Delta$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ : $J_\Delta = \int r^2 dm$

2. Quantité de mouvement d'un solide

(Solide en translation)

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}$$

3. Moment cinétique d'un solide

Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à vitesse $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$

$$\vec{\sigma} = \vec{\Omega} \sum J_i = J \vec{\Omega}$$

Le principe d'inertie

Un système est incapable de changer son état par lui-même.

Dans un référentiel Galiléen, tout système isolé ou pseudo-isolé est immobile ou à vitesse uniforme.

On dit que les grandeurs cinétiques d'un système isolé ou pseudo-isolé sont conservatives :

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0}$$

Dynamique : Lois de Newton

Dynamique du point

1. Les trois lois du mouvement

— **1ère loi de Newton : principe d'inertie**

Il existe des référentiels privilégiés dits galiléens dans lesquels le mouvement d'un point isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

Ainsi, si R_g est galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à R_g est aussi galiléen.

— **2ème loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)**

Les forces sont à l'origine du mouvement : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{dp}{dt} = m \vec{a}$ (dans un ref. galiléen).

— **3ème loi de Newton : principe des actions réciproques**

Une force unique existant seule n'existe pas.

Si deux points sont en interaction, on a deux forces : $\vec{f}_{1/2} = -\vec{f}_{2/1}$

D'où la résultante des forces intérieures à un système est nulle.

2. Théorème du moment cinétique

TMC pour un point matériel en rotation autour d'un axe fixe Δ :

$$\sum \mathcal{M}_{\vec{F}}(\Delta) = J_{\Delta} \ddot{\theta} = J_{\Delta} \dot{\omega}$$

($J_{\Delta} \ddot{\theta}$ est la dérivée du moment cinétique projeté sur Δ)

Dynamique des mouvements simples du solide

1. Introduction

Solide en translation

Tous les vecteurs interne restent équipollents
(tous les point on la même vitesse et acceleration)

Rotation autour d'un axe fixe

Tous les points ont la même vitesse angulaire :

Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$

Vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$

Le vecteur vitesse peut être retrouvé par $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$

2. Solide en translation

La quantité de mouvement d'un solide est égale à la quantité de mouvement de son barycentre, affecté de la masse totale du système : $\vec{P} = M \vec{v}_G$

PFD : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_G = \frac{d\vec{P}}{dt}$

3. Solide en rotation autour d'un axe fixe

TMC : $\sum \Gamma_{\vec{F}_{\text{ext}}}(\text{Oz}) = J_{\text{Oz}} \ddot{\theta}$

Avec $\Gamma_{\vec{F}}(\text{Oz}) = rF$ (si force selon \vec{e}_{θ})

Et $J_{\text{Oz}} = mr^2$ (si masse uniforme)

Dynamique : Théorèmes énergétiques

Travail d'une force

Le travail mécanique représente la quantité d'énergie échangée entre le système et le milieu extérieur et pouvant être transformée d'une forme en une autre.

Pour une force constante, $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

On note aussi, $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$, ce qui donne pour une force quelconque :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

On définit de même la puissance d'une force :

$$P(\vec{F}) = \frac{\delta W(\vec{F})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux de toutes les forces :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

Énergie potentielle

- Force conservative : son travail dépend uniquement des positions initiales et finales.
On dit que la force dérive d'une énergie potentielle : $dE_P = \text{grad } E_P \cdot d\vec{l} = -dW$ donc $\vec{F} = -\text{grad } E_P$
- Force non conservative : son travail dépend du chemin suivi, elles n'ont pas d'énergie potentielle associée.

Énergie mécanique

Définition de l'énergie mécanique :

$$E_M = E_C + \sum E_P$$

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces non-conservatives :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{i,nc}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext,nc})$$

Application aux mouvements simples du solide

1. Solide en translation

Pour un solide indéformable, tous les points ont la même vitesse donc l'énergie cinétique et potentielle se calculent de la même manière que pour un point matériel.

Il vient de même pour le calcul de travail et de puissance de forces.

2. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Le travail et la puissance s'expriment en fonction du moment de la force :

$$\delta W(\vec{F}) = \Gamma_{\vec{F}}(\Delta) d\theta \text{ et } P(\vec{F}) = \Gamma_{\vec{F}} \dot{\theta}$$

On a $v = r\dot{\theta}$ donc on trouve :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

Forces électromagnétiques

Force de Lorentz

Une charge dans un champ électrique \vec{E} et dans un champ magnétique \vec{B} est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Force de Laplace

1. Effet Hall

Dans solide parcouru par un courant et soumis à un champ magnétique, les électrons vont s'accumuler sur une paroi du fil dû à la force de Lorentz $\vec{F}_B = -e(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Cela crée un dipôle à l'intérieur du fil, un champ électrique \vec{E}_H : c'est l'effet Hall.

En régime permanent, l'accélération des électrons est nulle donc $\vec{F}_H = -e\vec{E}_H = -\vec{F}_B$ donc $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$.

2. Force de Laplace

Le principe des actions réciproques dit que les électrons du courant (soumis au champ \vec{E}_H) exercent une force sur les électrons accumulés, c'est la force de Laplace.

Sur un volume de conducteur section S et de longueur dl , on a $q = -e \times n_e S dl$ avec n_e la densité d'électrons. On peut alors démontrer que cela se rapporte au courant I , et avec \vec{l} la longueur du fil, orienté dans le sens de I , la force de Laplace est :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_L = I \vec{l} \wedge \vec{B} \quad \text{dans un champ uniforme.}$$

3. Travail et énergie potentielle

Contrairement à la force magnétique de Lorentz qui ne travaille pas, la force de Laplace peut travailler.

Pour un champ est orthogonal au fil et la force de Laplace colinéaire au déplacement, avec $d\lambda$ le déplacement élémentaire :

$$\delta W = I B l \times d\lambda$$

Ou en utilisant Φ le flux de \vec{B} à travers la surface balayée $l \times \lambda$:

$$\delta W = I d\Phi$$

On peut aussi définir une énergie potentielle d'interaction entre le champ B et le circuit :

$$\delta W = -dE_{p,\text{Laplace}}$$

On a donc $E_{p,\text{Laplace}} = -I\Phi$: le système est stable ($E_{p,\text{Laplace}}$ minimal), pour un flux Φ maximal, et le circuit se déplacera spontanément dans le sens de l'augmentation du flux.

Mécanique 7

Oscillations

Généralités

Un phénomène périodique se répète à lui-même à intervalles de temps égaux. Il est pseudopériodique s'il ne se répète pas exactement avec la même amplitude.

Les degrés de liberté sont les paramètres dont dépend l'état vibratoire du système.

Oscillations libres

1. Oscillations non amorties

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$
$$s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- S_m l'amplitude et φ la phase à l'origine déterminés par les conditions initiales.
- δ le coefficient d'amortissement, peut être déterminé numériquement avec une enveloppe exponentielle.
- ω_0 la pulsation propre.
- $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ la pulsation de l'oscillation amortie.

Si $\Delta > 0 \iff \delta \geq \omega_0$, le système n'oscille pas.

Si $\Delta = 0 \iff \delta = \omega_0$, on parle d'amortissement critique, c'est le cas où le système atteint le plus rapidement sa position d'équilibre.

δ peut aussi être mesuré par la méthode du décrétement logarithmique :

On fait deux mesures de S_{\max} entre k périodes, on a $\delta kT = \ln \left(\frac{S_{\max}(t_0)}{S_{\max}(t_0 + kT)} \right)$.

(Les cosinus valent 1, les constantes S_m se simplifient, et le \ln fait sortir δkT).

Oscillations forcées

Une excitation de l'extérieur est imposée au système :

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = Y_0 \cos(\Omega t)$$

1. Solution particulière

$$s(t) = s_H + S_m \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{Avec } S_m = \frac{Y_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\text{Et } \tan \varphi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

2. Phénomène de résonance

Pour $\Omega = \omega \iff \Omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$, il y a une augmentation brutale de l'amplitude :

$$S_{\max} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ avec ω_1 et ω_2 les pulsations de coupure à -3 dB ($\frac{\text{MAX}}{\sqrt{2}}$).