Mathématiques 1

Logique et raisonnement

Logique

1. Connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ($\oplus$ ou $\veebar$)

La négation $\neg$, pour les ensembles, correspond au complémentaire du sous ensemble A dans E, noté $\complement_E A$, $\overline{A}$ ou A^C
Négation $\neq$ Contraire (Non jeune $\neq$ vieux)

La conjonction $\wedge$ pour ET, correspond à l'intersection $\cap$.

La disjonction $\vee$ OU, correspond à l'union $\cup$.

La disjonction exclusive $\oplus$ **ou** $\veebar$ XOR, l'une des deux vrais et l'autre nécessairement fausse.
Correspond à la différence symétrique Δ.

Règles de Morgan : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$

Distributivité : $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

Produit cartésien : $A \times B = \{(a,b),\ a \in A \ et \ b \in B\}$

2. Connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

L'implication de P à Q n'est fausse que lorsque P est vraie et Q fausse.
Correspond à : $\neg P \vee Q$
Négation : $P \wedge \neg Q$
Réciproque : $Q \Rightarrow P$
Contraposée : $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
(même valeur de vérité).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'équivalence de P et Q n'est vraie que si P et Q ont même valeur de vérité. L'équivalence a la même valeur de vérité que la double implication (nécessaire et suffisant).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Quantificateurs

$\forall x \in A, P(x)$: quel que soit x élément de A (ou pour tout x appartenant à A). **Négation :** $\exists x \in A, \neg P(x)$
$\exists x \in A, P(x)$: il existe au moins un élément x de A **Négation :** $\forall x \in A, \neg P(x)$
$\exists! x \in A, P(x)$: il y a existence et **unicité** de l'élément x dans A vérifiant la propriété P

Méthodes de raisonnement

1. Raisonnement direct

(Par déduction ou hypothèse auxiliaire).
Hypothèse $\Rightarrow$ Conclusion.

2. Raisonnement par disjonction des cas

Raisonnement direct dans lequel l'hypothèse peut de décomposer en plusieurs autres hypothèses
$H \Leftrightarrow H_1 \wedge H_2$
On montre ensuite $H_1 \Rightarrow C$ et $H_2 \Rightarrow C$

3. Raisonnement par contraposition

$(H \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \neg H)$
Exemple : La contraposée de « $\forall n \in \mathbb{Z}$, si n est pair, alors n^2 est pair. » est « Si n^2 est impair, alors n est impair »

4. Raisonnement par l'absurde

On suppose le contraire et on montre que cela vient contredire une proposition vraie.
Exemple : Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel $\rightarrow$ supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On aurait donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et p et q premiers entre eux. Donc $p^2 = 2q^2$ alors p pair, $p = 2p'$ d'où $q^2 = 2p'^2$ donc q serait pair. Ainsi, p et q ne seraient pas premiers entre eux, on a bien une contradiction.

5. Raisonnement par contre-exemple

Il suffit de trouver un contre exemple pour prouver qu'une propriété est fausse.

6. Raisonnement par récurrence simple

- On montre que $P(0)$ est vraie (propriété initialisée ou fondée)
- On suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$ (hérédité)

7. Raisonnement par analyse-synthèse

- Analyse : on établit une liste de potentielles solutions parmi lesquelles toutes les solutions réelles sont nécessairement incluses.
- Synthèse : pour chacune de ces solutions, on détermine si elles sont viables ou non.

Généralités sur les fonctions

Généralités

1. Différence entre applications et fonctions

Une application est une relation entre deux ensembles.
Une fonction est une application d'une partie D_f d'un ensemble de départ. D_f est appelé ensemble de définition.
Une fonction n'est donc pas forcément définie sur l'entièreté de l'ensemble de départ.

2. Image directe

L'image directe d'un ensemble A par une fonction f est l'**ensemble des images** de A par f :
$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$

3. Image réciproque

L'image réciproque est l'ensemble des **antécédents** d'un ensemble.
C'est l'image directe de l'ensemble par f^{-1}.

4. Restriction

On note $f_{|A}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, avec $A \subset D_f$.

5. Composition

$f \circ g(x) = f(g(x))$
Associative mais non commutative :
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

6. Injectivité

Au plus un antécédent.
Fonction injective : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Non injective : $\exists (x_1, x_2) \in D_f^2 \ / \ f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

7. Surjectivité

Au moins un antécédent.
Fonction surjective : $\forall y \in F, \ \exists x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
Non surjective : $\exists y \in F \ / \ \forall x \in D_f, \ y \neq f(x)$

8. Bijectivité ou Réciprocité

Exactement un antécédent.
À la fois injective et surjective : $\forall y \in F, \ \exists ! x \in D_f \ / \ y = f(x)$.
On note alors $x = f^{-1}(y)$ la bijection réciproque de f.

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Sens de variation

$f \circ g$ est :
- Croissante si f et g sont de même monotonie.
- Décroissante si f et g sont de sens de monotonies contraires.

Si f est strictement monotone, alors elle est injective (au plus un antécédent par image).

2. Majorant et minorant

- α **maximum de A** si α est à la fois majorant et élément de A : $\alpha = \max(A)$ (resp. $\min(A)$).
- α **borne supérieure de A** si α est le plus petit des majorants : $\alpha = \sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).
  - si A est non vide non majoré : $\sup(A) = +\infty$
  - si A est non vide non minoré : $\inf(A) = -\infty$

Si le maximum existe, il est égal à la borne supérieure.

3. Parité

- Si f et g sont paires, $f + g$ est paire (resp. impaires).
- Si f et g ont même parité, $f \times g$ est paire (resp. f/g).
- Si f et g ont des parités contraires, $f \times g$ est impaire (resp. f/g).
- Si f est paire, $g \circ f$ est paire.
- Si f est impaire, $g \circ f$ a la même parité que g.

4. Périodicité

T-périodique si $\forall (x, x+T) \in D_f^2, \ f(x+T) = f(x)$.
- Si f et g sont T-périodiques,
  $f + g$ et $f \times g$ sont T-périodiques.
- Si g est T-périodique,
  $g \circ f$ est T-périodique.

5. Bijectivité et symétrie

- Si f est une bijection, C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à $y = x$.
- $x \mapsto f(-x)$: symétrie par l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto -f(x)$: symétrie par l'axe des abscisses.
- $x \mapsto f(x+a)$: translation de vecteur $-a\vec{\imath}$.
- $x \mapsto f(x) + a$: translation de vecteur $b\vec{\jmath}$.
- $x \mapsto f(ax)$: réduction/agrandissement sur axe x.
- $x \mapsto af(x)$: réduction/agrandissement sur axe y.

Fonctions usuelles