Formulation du problème en PLNE

December 2016

On dispose d'un ensemble $(P_i)_{i\in 1,n}$ de patients ($n \in N$) et d'un ensemble $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ de créneaux ($p \in N$ avec $n \leq p$) auxquels on veut assigner chaque patient de façon optimale, pour le critère d'optimalité suivant : la répartition est optimale si elle minimise le mécontement globale des patients (on définit plus loin le mécontement).

Chaque créneau c_j est un intervalle de la forme $[t^j_{début}, t^j_{fin}]$, avec

$$\forall j \in [\![1, p-1]\!],\ t^j_{début} < t^j_{fin} \leq t^{j+1}_{début}$$

(les créneaux ne se chevauchent pas).

Chaque patient P_i ordonne les créneaux selon ses préférences et assigne au créneau c_j le rang m^i_j (par exemple, $m^i_j = 1$ si c_j est le créneau qui lui convient le mieux et $m^i_j = p$ si c'est le créneau qui l'arrange le moins). On appelle m^i_j le **mécontement** de P_i relatif au créneau c_j (plus m^i_j est grand, plus P_i est mécontent qu'on lui assigne le créneau c_j).

On cherche alors à minimiser, pour chaque créneau c_j le mécontement global m_j qui lui est associé, défini comme le max des mécontements de chaque patient pour ce créneau. Autrement dit, :

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ m_j = \min_{i\in[\![1,n]\!]} m^i_j$$

Notre problème se met alors sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers de la façon suivante :

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{p} m_j x_j$$

$$\begin{array}{c} \text{s.c} \qquad \sum_{j=1}^{p} y_{i,j} x_j = 1,\ i \in [\![1, n]\!] \\ x_j \in \{0, 1\}, j \in [\![1, p]\!] \\ y_{i,j} \in \{0, 1\}, i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, p]\!] \end{array}$$

où :

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ si on assigne le créneau } c_j \text{ à un patient} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si le patient } P_i \text{ est affecté au créneau } c_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$