Éléments Finis TP

Clément Karinthi

Janvier 2023

1 Le problème général

1.1 Présentation générale

Soit $\Omega =]a, b[$: avec $a = 0$ et $b = 1$
On a l'équation différentielle $-u'' + \alpha u = 10$ sur $[0, 1]$ avec des conditions limites différentes:
Dirichlet: $u(0) = u_a$ et $u(1) = u_b$.
Neumann: $u'(0) = g_a$ et $u'(1) = g_b$.
Mixte: $u(0) = u_a$ et $u'(1) = g_b$.

1.2 Forme variationnelle

Pour chacun des problèmes on a la forme variationnelle: $\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ Trouver $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ tel que:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx = 10 \int_0^1 v(x)dx$$

qui revient après IPP sur u" à:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'x)v(x)]_0^1 + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx = 10 \int_0^1 v(x)dx$$

On fait passer de l'autre coté:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx = 10 \int_0^1 v(x)dx - u'(0)v(0) + u'(1)v(1)$$

On utilisera cette forme pour chacun des sous-problèmes mais pour Dirichlet $u'(0) = 0$ et $u'(1) = 0$ et pour les conditions limites mixtes $u'(0) = 0$.

2 Le problème de Dirichlet

2.1 Le problème spécifique

On a pour ce problème avec les conditions limites de Dirichlet:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx$$

$$l(v) = 10 \int_0^1 v(x)dx$$

car $u'(0) = u'(1) = 0$.
Ainsi le problème revient à $\forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ trouver $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} a(u,v) = l(v) \\ u(0) = u_a, u(1) = u_b \end{cases}$$

2.2 Présentation de la solution

Avec les conditions limites $u(0) = u_a$ et $u(1) = u_b$ on assemble la matrice R et M correspondant aux deux parties de $a(u,v)$. On a donc avec n posé $c(1) = u_a$ et $c(n+1) = u_b$. On retranche à B les valeurs de $u(1) * (R + \alpha M)$ et $u(n+1) * (R + \alpha M)$ pour prendre en compte les conditions limites.
J'ai posé $u_a = 1$ et $u_b = 1$ ainsi que $\alpha = 1$ pour ce problème. La solution exacte est de la forme :

$$u(x) = c1 * e^{\sqrt{\alpha} * x} + c2 * e^{-\sqrt{\alpha} * x} + 10/\alpha$$

avec la prise en compte des conditions limites de Dirichlet:

$$\begin{cases} c1 + c2 + 10 = 1 \\ c1 * e^1 + c2 * e^{-1} + 10 = 1 \end{cases}$$

qui donne:

$$\begin{cases} c1 = -9/(e^1 + 1) \\ c2 = (-9 * e^1)/(e^1 + 1) \end{cases}$$

2.3 Code

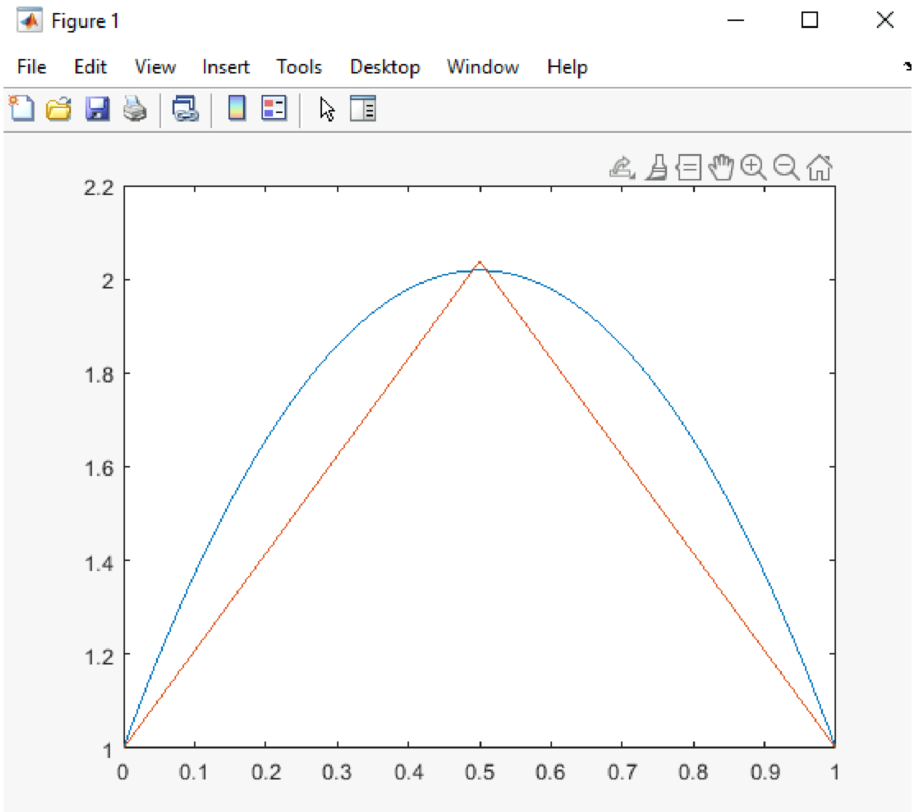
```
function [] = Dirichlet(a,b,n)
    R = sparse(zeros(n+1));
    c = [];
    B = [];
    F = @constrb;
    FR = @constrR;
    x = linspace(a,b,n+1);
```

```
M = sparse(zeros(n+1));
CM = @constrM;

alpha = 1;
ua = 1;
ub = 1;


for k =1:n

     B(k+1) = integ(F,x(k),x(k+1),1,1);
     B(k) = B(k) + integ(F,x(k),x(k+1),1,2);



     R(k,k) = R(k,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,2);
     R(k,k+1) = R(k,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,1)  ;
     R(k+1,k) =  R(k+1,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,2)  ;
     R(k+1,k+1) = R(k+1,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,1);

     M(k,k) = M(k,k) + integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,2);
     M(k,k+1) =integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,1)  ;
     M(k+1,k) =   integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,2)  ;
     M(k+1,k+1) = integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,1);
end
%avec Dirichlet Reconstitution

c(1) = ua;
c(n+1) = ub;
B = B - c(1) * (R(1,:) + alpha*M(1,:));
B = B - c(n+1)* (R(n+1,:) + alpha*M(n+1,:));

B = B(2:n);
R = R(2:n,2:n);
M = M(2:n,2:n);
disp(B);
disp(R);
disp(M);
c(2:n) = (R+alpha*M)\B';
disp(c);


c2 = (-9*exp(1))/(exp(1)+1);
c1 = -9/(exp(1)+1);

xr = linspace(a,b,100);
```

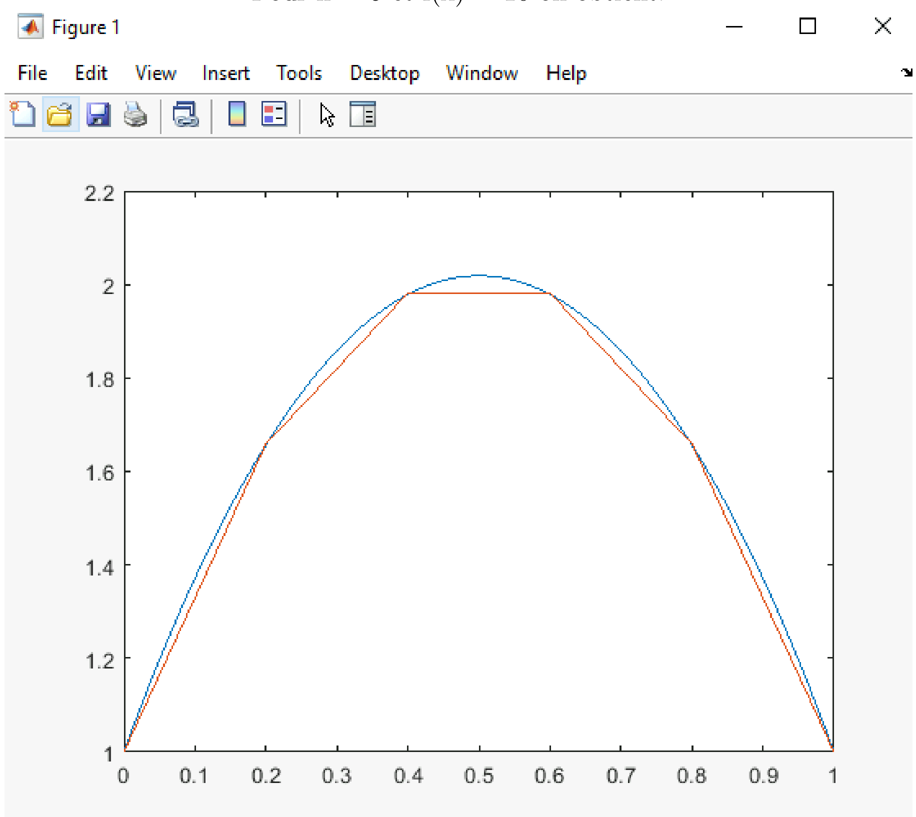
```
    y =  c1*exp(sqrt(alpha)*xr) + c2 *exp(-sqrt(alpha) * xr) + 10/alpha;

    axis equal;
    plot(xr,y);
    hold on;
    plot(x,c);


end
```

2.4 Résultats:

Pour n = 2 et f(x) = 10 on obtient:



Pour n = 5 et f(x) = 10 on obtient:



3 Le problème de Neumann

3.1 Le problème spécifique

On a pour ce problème avec les conditions limites de Neumann:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx$$

$$l(v) = 10 \int_0^1 v(x)dx - u'(0)v(0) + u'(1)v(1)$$

Ainsi le problème revient à $\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ trouver $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} a(u,v) = l(v) \\ u'(0) = g_a, u'(1) = g_b \end{cases}$$

3.2 Présentation de la solution

On a $u'(0) = 1$ et $u'(1) = -1$ avec la forme de la solution :

$$u(x) = c1 * e^{\sqrt{\alpha} * x} + c2 * e^{-\sqrt{\alpha} * x} + 10/\alpha$$

soit:

$$u'(x) = \sqrt{\alpha} * c1 * e^{\sqrt{\alpha} * x} - \sqrt{\alpha} * c2 * e^{-\sqrt{\alpha} * x}$$

avec $\alpha = 1$ et les conditions limites de Neumann on a :

$$\begin{cases} c1 - c2 = 1 \\ c1 * e^1 - c2 * e^{-1} = -1 \end{cases}$$

qui donne :

$$\begin{cases} c1 = (-1 - e^{-1})/(-e^{-1} + e^1) \\ c2 = (-1 - e^1)/(-e^{-1} + e^1) \end{cases}$$

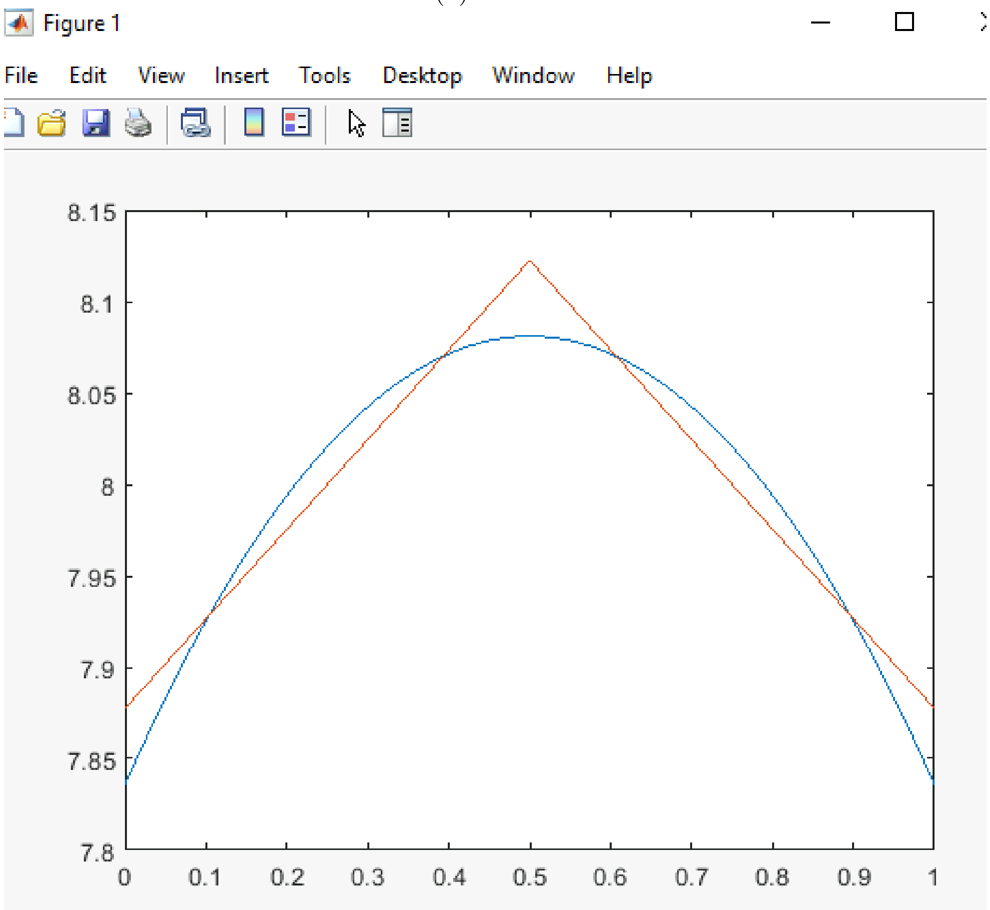
3.3 Code

```
function [] = Neumann(a,b,n)
    R = sparse(zeros(n+1));
    c = [];
    B = [];
    M = sparse(zeros(n+1));
    F = @constrb;
    alpha = 1;
    FR = @constrR;
    CM = @constrM;

    x = linspace(a,b,n+1);



    for k =1:n
        B(k+1) = integ(F,x(k),x(k+1),1,1);
        B(k) = B(k) + integ(F,x(k),x(k+1),1,2);

        R(k,k) = R(k,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,2);
        R(k,k+1) = R(k,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
        R(k+1,k) =  R(k+1,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
        R(k+1,k+1) = R(k+1,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,1);

        M(k,k) = M(k,k) + integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,2);
        M(k,k+1) =integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
        M(k+1,k) =  integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
        M(k+1,k+1) = integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,1);
```

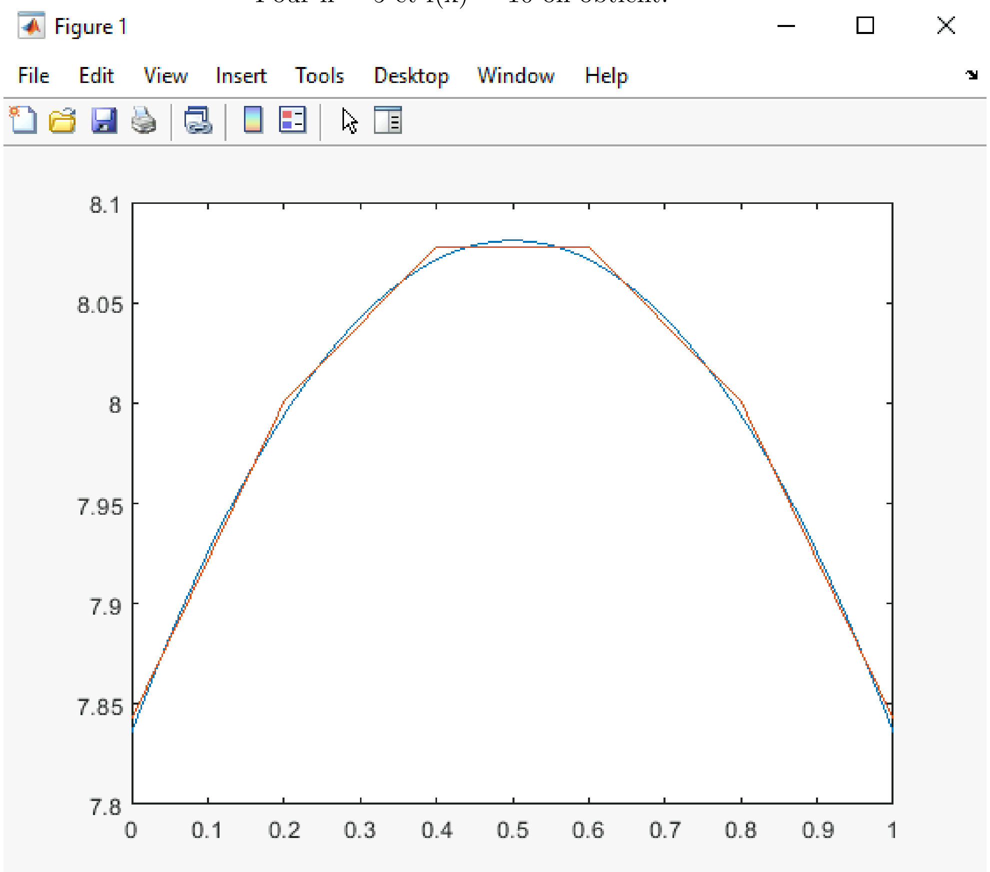
```
        end

        B(1) = B(1) - 1;%conditions limites ici
        B(n+1) = B(n+1) - 1;
        disp(R);
        disp(M);
        disp(B)
        c = (R+alpha*M)\B';
        disp(c);


        c1 = (-1-exp(-1))/(-exp(-1)+exp(1));
        c2 = (-1 -exp(1))/(-exp(-1) +exp(1));
        xr = linspace(a,b,100);
        y =  c1*exp(sqrt(alpha)*xr) + c2 *exp(-sqrt(alpha) * xr) + 10/alpha;
        axis equal;
        plot(xr,y);
        hold on;
        plot(x,c);
    end
```

3.4 Résultats

Pour n = 2 et f(x) = 10 on obtient:



Pour n = 5 et f(x) = 10 on obtient:



4 Le problème mixte

4.1 Le problème spécifique

On a pour ce problème avec les conditions limites mixtes:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx$$

$$l(v) = 10 \int_0^1 v(x)dx + u'(1)v(1)$$

car $u'(0) = 0$.
Ainsi le problème revient à $\forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ avec $v(a) = 0$ trouver $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ tel que:

$$\begin{cases} a(u,v) = l(v) \\ u(0) = u_a, u'(1) = g_b \end{cases}$$

4.2 Présentation du problème

On a les conditions limites $u(0) = u_a$ et $u'(1) = g_b$ ici $u(0) = 1$ et $u'(1) = 1$. toujours avec

$$u(x) = c1 * e^{\sqrt{\alpha} * x} + c2 * e^{-\sqrt{\alpha} * x} + 10/\alpha$$

et

$$u'(x) = \sqrt{\alpha} * c1 * e^{\sqrt{\alpha} * x} - \sqrt{\alpha} * c2 * e^{-\sqrt{\alpha} * x}$$

on obtient avec la prise en compte des conditions limites mixtes:

$$\begin{cases} c1 + c2 + 10 = 1 \\ c1 * e^1 - c2 * e^{-1} = 1 \end{cases}$$

qui donne:

$$\begin{cases} c1 = (e^1 - 9)/(e^2 + 1) \\ c2 = (-9e^2 - e^1)/(e^2 + 1) \end{cases}$$

4.3 Code

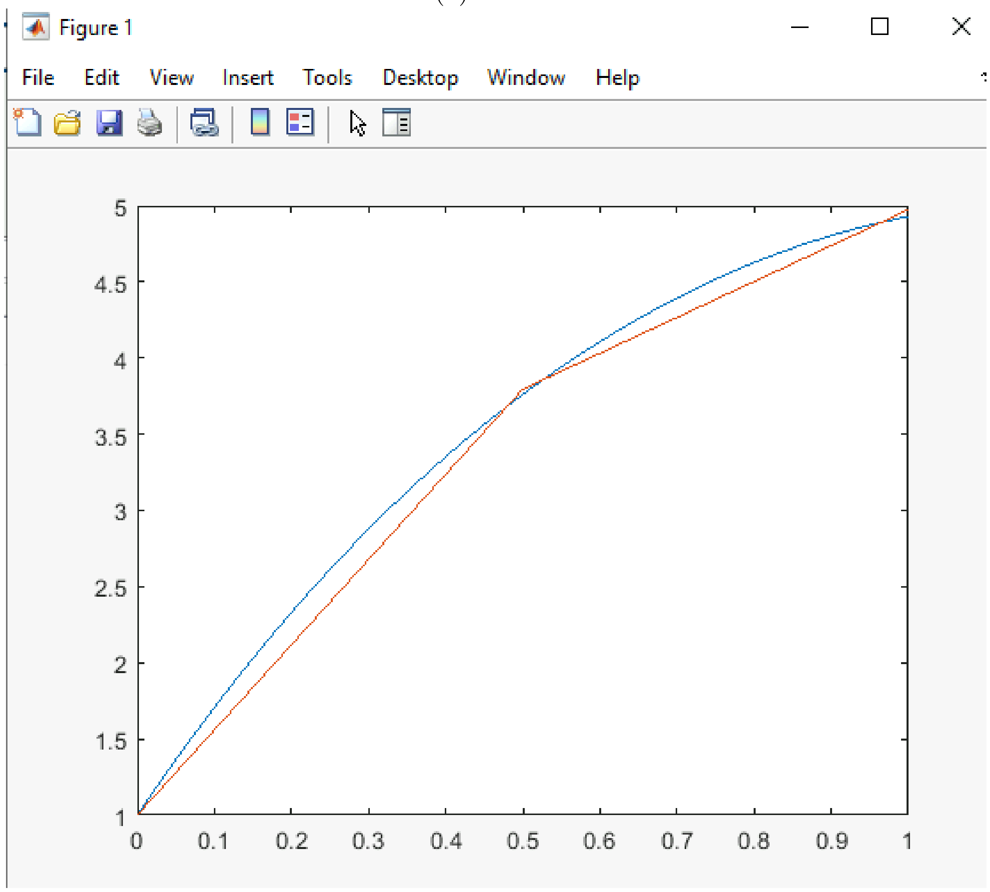
```
function [] = mixte(a,b,n)
    R = sparse(zeros(n+1));
    c = [];
    B = [];
    M = sparse(zeros(n+1));
    F = @constrb;
    alpha = 1;
    FR = @constrR;
    CM = @constrM;
```

```
g_b = 1;
ua = 1;
x = linspace(a,b,n+1);



for k =1:n
    B(k+1) = integ(F,x(k),x(k+1),1,1);
    B(k) = B(k) + integ(F,x(k),x(k+1),1,2);

    R(k,k) = R(k,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,2);
    R(k,k+1) = R(k,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
    R(k+1,k) =  R(k+1,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
    R(k+1,k+1) = R(k+1,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,1);

    M(k,k) = M(k,k) + integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,2);
    M(k,k+1) =integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
    M(k+1,k) =  integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
    M(k+1,k+1) = integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,1);
end
c(1) = ua;

B = B - c(1) * (R(1,:) + alpha* M(1,:));
B(n+1) = B(n+1) + g_b;


B = B(2:n+1);
R = R(2:n+1,2:n+1);
M = M(2:n+1,2:n+1);

disp(R);
disp(B)
disp(M);

c(2:n+1) = (R+alpha*M)\B';
disp(c);


c1 = (exp(1)-9)/(exp(2)+1);
c2 = (-9*exp(2)-exp(1))/(exp(2) +1);
xr = linspace(a,b,100);
y =  c1*exp(xr) + c2 *exp(-xr) + 10;
axis equal;
plot(xr,y);
hold on;
```

```
    plot(x,c);
end
```

4.4 Résultats

Pour n = 2 et f(x) = 10 on obtient:



Pour n = 5 et f(x) = 10 on obtient: