Éléments Finis TP1

Clément Karinthi

Janvier 2023

1 Présentation du problème

1.1 Problème général

On cherche à trouver les solutions de l'équation différentielle: $-u'' = f$ sur un intervalle $[a,b]$ avec ici, les conditions aux limites de Dirichlet $u(a) = u(b) = 0$.
En forme variationnelle ce problème revient à:
Trouver $u \in \mathcal{H}_0^1([a,b])$ tel que $\forall v \in \mathcal{H}^1([a,b])$ avec $v(a) = v(b) = 0$ soit $v \in \mathcal{H}_0^1([a,b])$

$$-\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

ce qui revient après IPP à:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx \ - [u'(x)v(x)]_a^b = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

avec les conditions aux limites u(a) = u(b) = 0, on a:

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

On pose a application bilinéaire continue coercitive (j'admets):

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

et l'application linéaire continue

$$l(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Trouver $u \in \mathcal{H}_0^1([a,b])$ tel que $\forall v \in \mathcal{H}_0^1([a,b])$ avec $u(a) = u(b) = 0$

$$a(u,v) = l(v)$$

1.2 Problème discret

Soit V_h l'espace $\mathcal{H}_0^1([a,b])$ discrétisé de dimension n. Soit ϕ une base de V_h.
On a ainsi u discret: $u_h = \sum_{j=1}^{n} \phi(j) c_j$ avec les coefficients c_j inconnus et $v_h \in V_h$
Le problème revient à (en sortant directement c_j):

$$\forall i, \sum_{j=1}^{n} c_j a(\phi(j), \phi(i)) = l(\phi(i))$$

On pose

$$R_{i,j} = a(\phi(j), \phi(i)) = \int_a^b \phi'(j)\phi'(i)dx$$

$$b_i = l(\phi(i)) = \int_a^b f(x)\phi(i)dx$$

Ainsi la résolution par le principe des éléments finis revient à trouver les coefficients c de:

$$Rc = b$$

2 Maillage

2.1 La fonction Phibase

La fonction Phibase est utilisée dans une boucle pour construire les fonctions:

$$\phi_{croissante}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\phi_{decroissante}(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

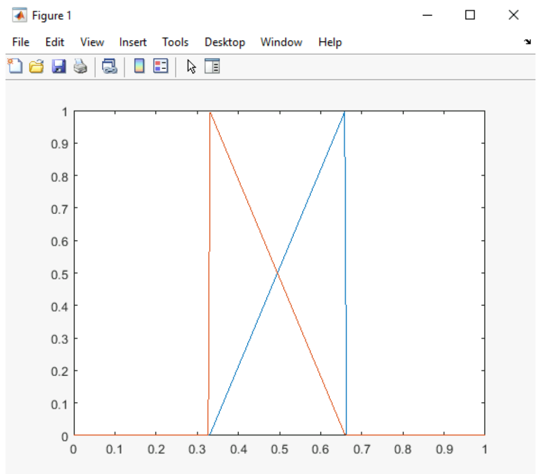
```
function y = phibase(x,gd,xi,xi1)
    if(x<xi || x>xi1)
    y = 0;
    else
        %Fonction croissante ou decroissante
        if gd == 1
            y = (x-xi)/(xi1-xi);
        else
            y = (x-xi1)/(xi-xi1);
        end
    end
end
```

2.2 Utilisation

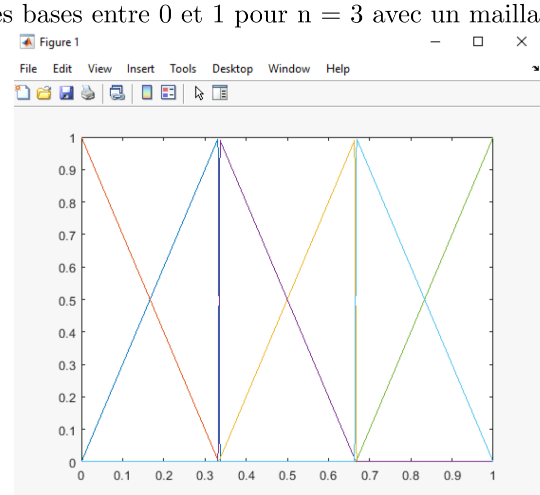
Dans le main elle peut être utilisée pour construire une seule base, les deux bases d'un intervalle ou toutes les bases entre les points choisis (0,1 ici). Elle peut également être utilisée avec une maille irrégulière permettant d'adapter le maillage à une fonction très linéaire sur un intervalle et très complexe sur un autre.

```
function [] = main(a,b,n)

    %utilisation phibase

    hold on;%on garde chaque graphe

    %maille reguliere
    %maille = linspace(a,b,n+1);

    %maille irreguliere
    maille = [0,0.4,0.6,1];
    %affichage de toutes les bases
    for j = 1:length(maille)-1
        y1 = [];
        y2 = [];
        i = 1;
        %affichage d'une base
        for xm = linspace(a,b,200) %On evalue 200 points
            y1(i) = phibase(xm,1,maille(j),maille(j+1));
            y2(i) = phibase(xm,2,maille(j),maille(j+1));
            i = i + 1;
        end
        plot(y1);
        plot(y2);
    end
end
```

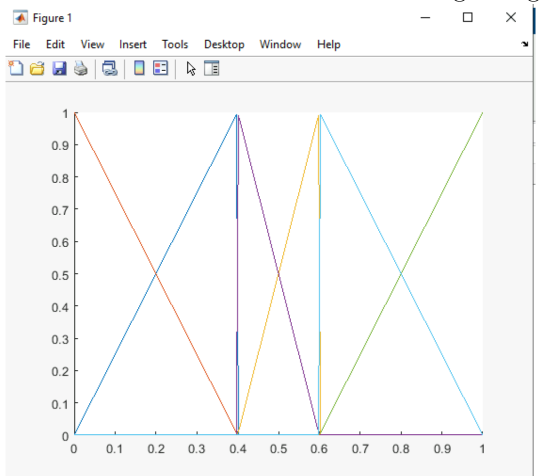
Base entre 0.33 et 0.66 pour n=3 entre 0 et 1



Toutes les bases entre 0 et 1 pour n = 3 avec un maillage régulier



Toutes les bases entre 0 et 1 avec un maillage irrégulier



3 Assemblage

On reconstruit la matrice B définit par $\forall i, B(i) = l(\phi(i)) = \int_a^b f(x)\phi(i)dx$ et la matrice R définit par $R_{i,j} = \int_a^b \phi'(j)\phi'(i)dx$

3.1 La fonction Integ

On a la fonction d'intégration de simpson qui en fonction d'un argument arg effectue les traitements de fun pour 0,1,2 arguments supplémentaires (le format de varargin en cells m'ennuyait).

```
function val = integ(fun,a,b,arg,i,j)
    %Le format de Varargin m'ennuie
    c = (a+b)/2;
    y = [];
    val = 0;
    if( arg == 0)
        y(1) = feval(fun,a,a,b,varargin);
        y(2) = feval(fun,b,a,b,varargin);
        y(3) = feval(fun,c,a,b,varargin);
        val = (b-a)*(y(1) + 4 * y(3) + y(2))/6;
    else
        if(arg == 1)
            y(1) = feval(fun,a,a,b,i);
            y(2) = feval(fun,b,a,b,i);
            y(3) = feval(fun,c,a,b,i);
            val = (b-a)*(y(1) + 4 * y(3) + y(2))/6;
        else
            if(arg == 2)
```

```
                y(1) = feval(fun,a,a,b,i,j);
                y(2) = feval(fun,b,a,b,i,j);
                y(3) = feval(fun,c,a,b,i,j);
                val = (b-a)*(y(1) + 4 * y(3) + y(2))/6;
            end
        end

    end

end
```

Elle prendra en argument les fonctions constrB ou constrR.

3.2 constrB

On introduit également une fonction constrB qui en fonction de i (1 ou 2) renvoit fonction $f(x) * \phi_{croissante}$ ou $f(x) * \phi_{decroissante}$ pour pouvoir intégrer dessus. C'est elle qui est appelée dans la fonction integ.

```
function [y] = constrb(x,xk,xk1,i)
if(i == 1)
    y = F(x) * phibase(x,1,xk,xk1);
else
    y = F(x) * phibase(x,2,xk,xk1);
end
```

Elle ne prend pas en compte les valeurs aux limites de v.

3.3 La fonction Phiderbase

On introduit la dérivée de la fonction phibase.

```
function y = phiderbase(x,gd,xi,xi1)
    if(x<xi || x >xi1)
    y = 0;
    else
        if gd == 1
            y = 1/(xi1-xi);
        else
            y = 1/(xi-xi1);
        end
    end
end
```

3.4 la fonction constrR

C'est la fonction qui sera intégrée soit $\phi'(j)\phi'(i)$. Si on a les arguments i=1 et j=1 c'est qu'on intégre les dérivés des deux fonctions $\phi_{croissante}(k+1)$ et $\phi_{croissante}(k+1)$ soit R(k+1,k+1).
De même i=1 et j=2 signifie qu'on intégre $\phi_{croissante}(k+1)$ et $\phi_{decroissante}(k)$ soit R(k+1,k).

```
function y = constrR(x,xk,xk1,i,j)
    if(i == 1)
        if( j == 1)
            y =  phiderbase(x,1,xk,xk1) * phiderbase(x,1,xk,xk1);
        else
            y =  phiderbase(x,1,xk,xk1) * phiderbase(x,2,xk,xk1);
        end
    else
        if( j == 1)
            y =  phiderbase(x,2,xk,xk1) * phiderbase(x,1,xk,xk1);
        else
            y =  phiderbase(x,2,xk,xk1) * phiderbase(x,2,xk,xk1);
        end
    end

end
```

3.5 Traduction dans le main

On sait que $B(i)$ a une valeur non nulle seulement sur les intervalles i-1 et i. Dans le main pour chaque intervalle on donne sa valeur seulement à $B(i)$ et $B(i+1)$.
De même $R(i,j)$ a une valeur non nulle pour $R(i,i-1)$,$R(i,i)$ et $R(i,i+1)$ on donne alors la valeur correspondante soit $R_{i,j} = \int_a^b \phi'(j)\phi'(i)dx$ en une seule fonction parcourant chaque intervalle 1 fois et en faisant les affectations suivante pour chaque intervalle:

$$R(i,i) = R(i,i) + a(k^{eme}\phi_{decroissante}, k^{eme}\phi_{decroissante})$$
$$R(i+1,i) = a(k^{eme}\phi_{croissante}, k^{eme}\phi_{decroissante})$$
$$R(i,i+1) = a(k^{eme}\phi_{decroissante}, k^{eme}\phi_{croissante})$$
$$R(i+1,i+1) = a(k^{eme}\phi_{croissante}, k^{eme}\phi_{croissante})$$

```
function [] = main(a,b,n)
    %Assemblage
    R = zeros(n+1);
    c = [];
```

```
    B = [];
    F = @constrb;
    FR = @constrR;
    x = linspace(a,b,n+1);
    %On reflechis par intervalle

    for k =1:n
        %B(k+1) c'est l'integrale de la fonction croissante
        B(k+1) = integ(F,x(k),x(k+1),1,1);
        %B(k) c'est l'integrale de la fonction decroissante
        B(k) = B(k) + integ(F,x(k),x(k+1),1,2);


        R(k,k) = R(k,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,2);

        R(k,k+1) = R(k,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,1) ;

        R(k+1,k) =  R(k+1,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,2) ;

        R(k+1,k+1) = R(k+1,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,1);
    end
    disp(R);
    disp(B);
end
```

3.6 Test pour n = 3, F(x) = 10 et a = 0, b = 1

Pour n = 3 et f(x) = 10 on obtient:

```
>> m(0,1,3)
     3    -3     0     0
    -3     6    -3     0
     0    -3     6    -3
     0     0    -3     3


    1.6667    3.3333    3.3333    1.6667
```

Elles semblent cohérentes avec les valeurs théoriques car pour B:

$$\int_0^1 10\phi(0) = 10 * \int_0^{1/3} \frac{x-1/3}{-1/3} dx = 10 * (-1/6 + 1/3) = 5/3$$

soit $B(1) = 5/3$ d'ou le 1.6667 trouvé.

$$\int_0^1 10\phi(1) = 10 * (\int_0^{1/3} \frac{x}{1/3} dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{x - 1/3}{-1/3} dx) = 10 * (1/6 + 1/6) = 10/3$$

soit $B(2) = 10/3$ d'ou le 3.33 trouvé.
De même pour R:

$$\int_0^1 \phi'(0)\phi'(0)dx = \int_0^{0.33} \frac{1}{-1/3}\frac{1}{-1/3}dx = 3$$

conforme à R(1,1).

Il faudra ensuite recomposer c et exploiter pour voir si les resultats sont bons.