Éléments Finis TP2

Clément Karinthi

Janvier 2023

1 Assemblage

On a le problème $-u'' = 10$ sur $[0,1]$ avec $u(0) = 4$ et $u(1) = 2$:
Sur le problème discret on a $c(1) = 4$ et $c(n+1) = 2$ car en 0 et en 1 on connait la valeur exacte de u et la seule fonction ϕ de ces intervalles vaut 1 pour chacun des deux points.
On peut ensuite réduire le rang des matrices R et B en prenant en compte c(1) et c(n+1) et déduire les coefficients c de u_h.
On reconstruit ensuite u_h qui en chaque point de l'espace discrétisé vaut son coefficients c car les bases ϕ de Lagrange valent 1 en ces points.

1.1 Code

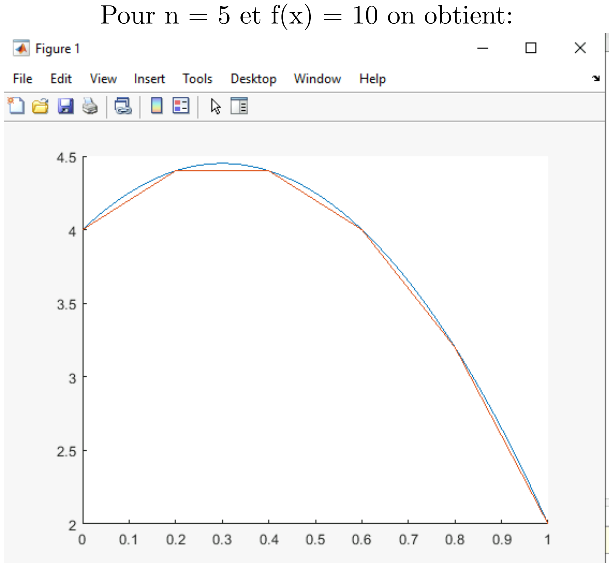
```
function [] = Assemblage(a,b,n)
    %Assemblage
    R = sparse(zeros(n+1));
    c = [];
    B = [];
    F = @constrb;
    FR = @constrR;
    x = linspace(a,b,n+1);
    ua = 4;
    ub = 2;

    for k =1:n
        B(k+1) = integ(F,x(k),x(k+1),1,1);
        B(k) = B(k) + integ(F,x(k),x(k+1),1,2);


        R(k,k) = R(k,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,2);
        R(k,k+1) = R(k,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
        R(k+1,k) =  R(k+1,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
        R(k+1,k+1) = R(k+1,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,1);
    end
```

```
    %avec Dirichlet Reconstitution

    c(1) = ua;
    c(n+1) = ub;
    B = B - c(1) * R(1,:);
    B = B - c(n+1)*R(n+1,:);
    B = B(2:n);
    R = R(2:n,2:n);
    %disp(B);
    %disp(R);

    c(2:n) = R\B';
    %disp(c);
    xr = linspace(0,1,100);
    y = -5*xr.^2 + 3*xr + 4;
    hold on;
    plot(xr,y);
    plot(x,c);

end
```

1.2 Résultats

Après avoir reconstitué la valeur exacte théorique de u à savoir $u(x) = -5x^2 + 3x + 4$ on compare la valeur théorique en bleu avec la valeur trouvé en rouge.

Pour n = 5 et f(x) = 10 on obtient:



2 Méthode des éléments finis pour u = f

2.1 Le problème:

On introduit un nouveau problème $u = f$ avec $f \in L^2$ ou $f(x) = (x-1)(x+1)$ sur $[-1,1]$, problème algébrique sans besoin de conditions limites à résoudre avec la méthode des éléments finis.
Sa forme variationnelle est:
Trouver $u \in P_1$ tel que $\forall v_h \in P_1 : (u_h, v_h)_{L^2} = (f, v_h)_{L^2}$
On pose la matrice de masse $M = [\int_{-1}^{1} \phi(i)\phi(j)]$ et $B = [\int_{-1}^{1} f(x) * \phi(j)]$ $\forall i, j$

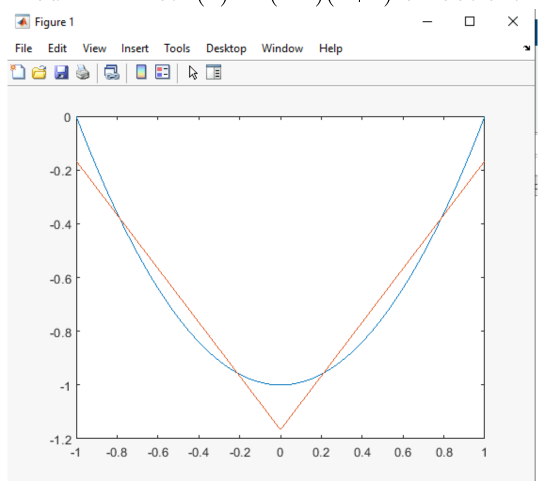
2.2 Le code

```
function [] = main(a,b,n)

    x = linspace(a,b,n+1);
    xr = linspace(a,b,100);
    %Matrice de masse
    M = zeros(n+1);
    B1 = zeros(n+1,1);
    CM = @constrM;
    FB = @constrb1;
    c1  = [];

    for k =1:n

        B1(k+1) = integ(FB,x(k),x(k+1),1,1);
        B1(k) = B1(k) + integ(FB,x(k),x(k+1),1,2);


        M(k,k) = M(k,k) + integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,2);
        M(k,k+1) =integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
        M(k+1,k) =  integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
        M(k+1,k+1) = integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,1);
    end


    disp(M);
    disp(B1);
    c1 = M\B1;
    disp(c1);
    y = (xr-1).*(xr+1);
    plot(xr,y);
    hold on;
    plot(x,c1);
end
```

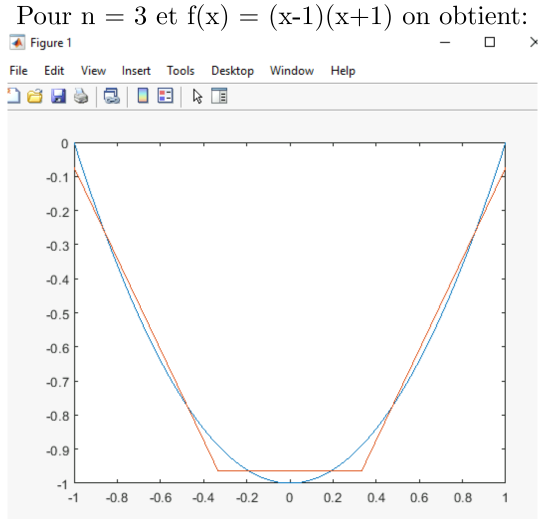
2.3 Résultats:

En rouge la valeur de u discrète et en bleu la valeur exacte.

Pour n = 2 et f(x) = (x-1)(x+1) on obtient:



Pour n = 3 et f(x) = (x-1)(x+1) on obtient:



3 Le problème de Neumann

3.1 Présentation du problème

On a l'équation différentielle:

$$-u'' + \alpha u = C$$

sur [0,1] avec $u'(0) = 1$ et $u'(1) = -1$
On introduit sa forme variationnelle: $\forall v \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ Trouver $u \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ tel que:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx = C \int_0^1 v(x)dx$$

qui revient après IPP sur u" à:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'x)v(x)]_0^1 + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx = C \int_0^1 v(x)dx$$

On fait passer de l'autre coté:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx = C \int_0^1 v(x)dx - u'(0)v(0) + u'(1)v(1)$$

La présentation du problème discret sera la même que pour Dirichlet. Ce problème se résoudra en reprenant la même matrice R que pour Dirichlet correspondant à $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx$. On a aussi $\alpha * M$ qui correspond à $\alpha \int_0^1 u(x)v(x)dx$. Ainsi que le même B en ajoutant -u'(0) sur la première base (en raison du terme v(0)) et en ajoutant u'(1) la dernière base, la base sur 1 (en raison du terme v(1)).

3.2 Code

Avec u'(0) = 1 et u'(1) = -1.

```
function [] = Neumann(a,b,n)
    R = sparse(zeros(n+1));
    c = [];
    B = [];
    M = sparse(zeros(n+1));
    alpha = 1;

    F = @constrb;
    FR = @constrR;
    CM = @constrM;

    x = linspace(a,b,n+1);
```

```
    for k =1:n
        B(k+1) = integ(F,x(k),x(k+1),1,1);
        B(k) = B(k) + integ(F,x(k),x(k+1),1,2);

        R(k,k) = R(k,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,2);
        R(k,k+1) = R(k,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
        R(k+1,k) =  R(k+1,k) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
        R(k+1,k+1) = R(k+1,k+1) + integ(FR,x(k),x(k+1),2,1,1);

        M(k,k) = M(k,k) + integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,2);
        M(k,k+1) =integ(CM,x(k),x(k+1),2,2,1) ;
        M(k+1,k) =  integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,2) ;
        M(k+1,k+1) = integ(CM,x(k),x(k+1),2,1,1);
    end
    %application cl u'(0) = 1 u'(1) = -1
    B(1) = B(1) - 1;
    B(n+1) = B(n+1) - 1;

    disp(R);
    disp(M);
    disp(B)

    c = (R+alpha*M)\B';
    disp(c);

    %affichage solution exacte
    c1 = (-1-exp(-1))/(-exp(-1)+exp(1));
    c2 = (-1 -exp(1))/(-exp(-1) +exp(1));
    xr = linspace(a,b,100);
    y =  c1*exp(sqrt(alpha)*xr) + c2 *exp(-sqrt(alpha) * xr) + 10/alpha;

    plot(xr,y);
    hold on;
    plot(x,c);
end
```

3.3 Résultats

On a la solution exacte $u(x) = c1 * e^{\sqrt{a}x} + c2 * e^{-\sqrt{a}x}$ donné en cours que je reprends. On dérive une fois l'expressions grace aux conditions limites on obtient un système qui nous donne $c1 = \frac{(-1-e^{-1})}{(-e^{-1}+e)}$ et $c2 = \frac{(-1-e)}{(-e^{-1}+e)}$.

Pour n = 5 et f(x) = 10 on obtient: