Simulations de valeurs d'actifs: application au calcul du CVA

Yves Rakotondratsimba

March 12, 2019

Contents

1 Risque de Contrepartie

1. Il y a lieu de faire la distinction entre le Risque de Credit CR (Credit Risk) et le risque de contrepartie CCR (counterparty Credit Risk). Le CCR sur le marché des transactions est le risque que la contrepartie pourrait faire défaut avant le paiement final des Cash Flows liés au transaction.

2. Selon les directives de BCBS (2014), le CCR est mesurable a partir du coût de rempalcement du produit dérivé OTC.

2 Mesures courantes utilisées pour le CCR

2.1 Définitions

1. Dans toute la suite on désigne par
$$(\mathsf{MtM})(t)$$
la valeur "Mark-to-Market" d'un contrat OTC à un instant t.

2. L'exposition au défaut EAD (Exposure-at-Default) est définie par
$$\mathsf{EAD}(\cdot) \equiv \mathsf{EAD\_pos}(\cdot) = \max\Big\{(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}\big(\tau(\cdot)\big); 0\Big\} \tag{1}$$
où $\tau(\cdot)$ désigne l'instant de défaut de la contrepartie, qui est une variable aléatoire relativement à l'instant où la mesure est considérée. Ici la notation $(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}\big(\tau(\cdot)\big)$ est utilisée pour nommer la valeur de marché de la position associée au contrat (de produit dérivé OTC) en question.

3. Si l'on considère un portefeuille de produits dérivés avec une même contrepartie, alors l'exposition au défaut peut se calculer à partir de la relation
$$\mathsf{EAD}(\cdot) \equiv \mathsf{EAD}\_port(\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{n} \max\Big\{(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}^{(i)}\big(\tau(\cdot)\big); 0\Big\} \tag{2}$$
où $(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}^{(i)}\big(\tau(\cdot)\big)$ désigne la valeur de marché du i-ème contrat dans le portefeuille considéré. S'il y a un accord de "global netting", alors au lieu de (2), l'exposition au défaut pour le portefeuille avec une même contrepartie se calcule plutôt à partir de la relation
$$\mathsf{EAD}\_port(\cdot) \equiv \max\Big\{\sum_{i=1}^{n} (\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}^{(i)}\big(\tau(\cdot)\big); 0\Big\}. \tag{3}$$
Il est clair de l'expression définie en (3) est beaucoup plus petite (donc avantageuse) que celle en (2).

4. En pratique il est rare qu'un accord de global netting agreement se fasse. La plupart du temps, c'est plutôt différent netting relativement à des périmètres de trading (equities, bonds, interest-rate options,...) qui se pratiquent et de sorte que la formule pour le

calcul de l'exposition au défaut devient

$$\begin{aligned}&\mathsf{EAD}\_port(\cdot) \equiv \\ &\sum_{k=1}^{K}\Bigg(\max\Big\{\sum_{i\in\mathcal{N}_k}(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}^{(i)}\big(\tau(\cdot)\big);0\Big\} \\ &\qquad + \sum_{i\notin\mathcal{N}_k}\max\Big\{(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}^{(i)}\big(\tau(\cdot)\big);0\Big\}\Bigg). \qquad (4)\end{aligned}$$

5. L'exposition au risque de contrepartie à tout instant courant t est donnée par

$$\mathsf{expos}_t = \max\Big\{(\mathsf{MtM})\_\mathsf{pos}(t);0\Big\}. \qquad (5)$$

Si t est un instant futur, alors il est aussi courant de désigner l'expression en (5) sous le nom de Potential Future Exposure (PFE).

6. On parle de Peak Exposure (PE) pour désigner un quantile d'ordre α, avec $\alpha \in (0,1)$, de la distribution du PFE de sorte que

$$\mathsf{PE}(t;\alpha) \equiv \inf\Big\{x; \quad \mathbb{M}\Big(\mathsf{PFE}_t(\cdot) \le x\Big) \ge \alpha\Big\} = \mathbf{F}^{-}_{PFE;[0,t]}(\alpha) \qquad (6)$$

où $\mathbf{F}^{-}_{PFE;[0,t]}$ correspond à la fonction de répartition du PFE restreinte à l'intervalle $(0,t)$, sous la mesure de probabilité $\mathbb{M}$.

7. Il arrive aussi que l'on accorde un intérêt au Maximum Peak Exposure (MPE) et qui est donné par

$$\mathsf{MPE}(0,t;\alpha) \equiv \sup\Big\{\mathsf{PE}(s;\alpha); \quad 0 < s \le t\Big\}. \qquad (7)$$

8. Toujours dans le cadre de mesure de CCR, il est de tradition d'introduire l'exposition espérée ou Expected Exposure (EE) comme étant l'espérance de la distribution de PFE

$$\mathsf{EE}(t) \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{M}}\big[\mathsf{PFE}_t(\cdot)\big] = \int_0^{\infty} x d\mathbf{F}^{-}_{PFE;[0,t]}(x). \qquad (8)$$

9. Par Expected Positive Exposure (EPE), pour l'intervalle de temps $(0,t)$, on désigne la quantité

$$\mathsf{EPE}(0,t) \equiv \mathbb{E}_{\mathbb{M}}\Big[\frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{PFE}_s(\cdot)ds\Big] = \frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{EE}(s)ds. \qquad (9)$$

10. Aussi par Effective Expected Exposure (EEE), on sous-entend

$$\mathsf{EEE}(t) \equiv \sup\Big\{\mathsf{EE}(s); \quad 0 < s \le t\Big\} = \max\Big\{\mathsf{EEE}(t^-);\mathsf{EE}(t)\Big\}. \qquad (10)$$

11. Enfin par Effective Expected Positive Exposure (EEPE), pour l'intervalle de temps $(0,t)$, il s'agit de

$$\mathsf{EEPE}(0,t) \equiv \frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{EEE}(s)ds. \qquad (11)$$

2.2 Implémentations

Il est assez rare que l'on dispose de calculs explicites pour les mesures introduites dans la sous-section 2.1, et la plupart des temps on devrait procéder numériquement en se basant essentiellement sur des simulations de Monte-Carlo.

1. Bien que les diverses mesures de risque $\mathsf{(MtM)\_pos}$, PFE, EE, ... font intervenir des instants continus, en pratique on ne peut se limiter qu'à des instants discrets croissants
$$0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$$
2. Là où l'utilisation des simulations de Monte-Carlo est cruciale se trouve essentiellement pour générer des scénarios $\mathsf{(MtM)\_pos}^{(i)}(n, t_m)$ de valeurs de marché des positions i aux instants t_m et que l'on peut tout simplement noter par $\mathsf{(MtM)\_pos}^{(i)}(n, m)$. Si on considère le portefeuille de produits dérivés OTC alors on utilise la notation
$$\mathsf{(MtM)\_port}(n, m) \tag{12}$$
pour désigner le n-ième scénario de la valeur de marché du portefeuille à l'instant t_m. On peut supposer que $n \in \{1, \ldots, N\}$ de sorte que N, comme $N = 100\,000$, est le nombre de simulations utilisées. Aussi on peut considérer que $m \in \{1, \ldots, M\}$
3. De manière générale obtenir les quantités en (12) demande du temps de calcul et est de loin l'étape la plus délicate pour déterminer les mesures de CCR.
4. Avec les $\mathsf{(MtM)\_port}(n, m)$ alors one peut générer des scénarios de PFEs à tout instant t_m selon
$$\mathsf{PFE}(n, m) \equiv \max\Big\{\mathsf{(MtM)\_port}(n, m); 0\Big\}. \tag{13}$$
5. Il en résulte que le PE du portefeuille à l'instant t_m avec un seuil de probabilité α, $\alpha \in (0, 1)$, peut être approché par
$$\mathsf{PE}(t_m; \alpha) \approx \text{quantile}\Big(\alpha; \Big\{\mathsf{PFE}(\mathrm{n}, \mathrm{m}); \quad \mathrm{n} \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}\Big\}\Big). \tag{14}$$
6. L'Expected Exposure (EE) du portefeuille à l'instant t_m est tout juste approchée par une moyenne empirique selon
$$\mathsf{EE}(t_m) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathsf{PFE}(n, m). \tag{15}$$
7. L'Expected Positive Exposure (EPE), pour l'intervalle de temps $(0, t_m)$ peut être calculé approximativement selon
$$\mathsf{EPE}(0, t_m) \approx \frac{\triangle}{t_m} \sum_{k=1}^{K} \mathsf{EE}(t_k) \tag{16}$$
où l'on utilise un découpage de l'intervalle $(0, t_m)$ en K sous-intervalles de longueur commune $\triangle$.
8. Pour l' Effective Expected Exposure (EEE), une approximation s'obtient juste en explorant la définition de sorte que
$$\mathsf{EEE}(t_m) \approx \max\Big\{\mathsf{EEE}(t_{m-1}); \mathsf{EE}(t_m)\Big\}. \tag{17}$$

9. Enfin l'Effective Expected Positive Exposure (EEPE) pour l'intervalle de temps $(0, t_m)$ peut être approchée selon

$$\mathsf{EEPE}(t_m) \approx \frac{\triangle}{t_m} \sum_{k=1}^{K} \mathsf{EEE}(t_k). \tag{18}$$

3 Le contexte XVA

1. Depuis 2011 on a assité à l'avènement d'un certain nombre de valeurs de prix d'ajustement. Le mouvement a commencé avec le CVA mais par la suite on a vu apparaître les notions de DVA, FVA, CollVA, KVA. Leur émergence a naturellement créé un certain degré de confusion dans l'industrie.

2. Dorénavant, la valorisation d'un book of derivatives ne tient pas compte seulement des flux propres intrinsèques à chacun des instruments, mais on tient compte maintenant touts sortes d'actes environnants comme: hedging, managing default risk, funding risk et capital cost.

3. Il convient de faire une nuance entre prix et valeur. Par prix on sous-entend le prix de sortie qui va être enregistré dans la balance de paiement dans le cadre d'une comptabilité en juste prix (fair value accounting). En contraste par Valeur on comprend plutôt ce que l'institution financière accorde à son book of derivatives.

4. Un point important qui émerge est que la valeur d'un book of derivatives n'est pas la même pour les participants de marché et en conséquence le contexte de valorisation devrait tenir compte de ce fait.
   L'idée largement acceptée de valorisation risque-neutre dans le cadre de fair value accounting, ne pourrait plus être utilisée du fait qu'elle est basée sur l'idée d'arbitrage des dérivés dont la réalisation sur le marché réel ne puisse être exercée comme on l'admet dans la théorie.

5. Le prix d'un produit dérivé essaie de capter génériquement au combien deux institutions peuvent négocier de manière équitable le produit en question sans prendre en considération la spécificité de l'environnement où toutes les deux opèrent.

6. Les divers ajustements que l'on fait sur les prix risque-neutres des produits dérivés OTC sont désormais connus sous le nom de XVAs.

7. Le contexte classique de "pricing" et "valuation" est basé sur le théorème fondamental du pricing qui dit que la juste valeur d'un produit financier à l'instant d'aujourd'hui est l'espérance sous la mesure risque-neutre des flux futurs (actualisés).

8. Ce contexte ne prend pas en compte le fait que

   (a) les deux contreparties qui échangent un certain nombre de flux peuvent faire faillite avant le terme du contrat

   (b) Chaque contrepartie liée au contrat du produit dérivé peut acheter une assurance de protection de crédit sur l'autre (via éventuellement un CDS)

9. Il est désormais plus logique d'introduire la notion de "Value-To-Me" comme

$$\mathbf{VtM} = P_{sale} - P_{manufacturing} \tag{19}$$

où P_{sale} est l'espérance de la valeur présente des flux futurs lié au deal avec la contrepartie et $P_{manufacturing}$ est l'espérance de la valeur présente des flux futurs lié aux activités que l'on a besoin pour produire ou gérer les risques liés au trade: risque de marché, risque de contrepartie, risque de financement, tail risk.

10. Ainsi la **loi d'un prix unique**, un des piliers dans le pricing des produits dérivés n'est plus tenable. Un nouveau contexte de valorisation est nécessaire et en cours de développement et d'implémentation.

11. Le CVA représente le coût de couverture du risque associé à la contrepartie. En réalité le côté actif du CVA peut être couvert par l'achat d'une série de CDSs sur le marché.

12. Le LVA (Liquidity-Valuation-Adjustment) peut être vu comme étant un terme correspondant à un risque de financement, du fait qu'il s'agit du coût qui est attaché au liquidity-funding-premium. L'idée derrière est que l'environnement de liquidité d'un bond est complètement différent de celui d'un CDS. Le bond doit être trouvé ailleurs et que réellement il y a une disponibilité limitée pour celà. Le LVA est l'ajustement que l'on devrait appliquer à un portefeuille de ngociation pour prendre en compte les contraintes réelles de liquidité que l'on devrait faire face dans le financement et le marché de crédit.

13. Le FVA (Funding-Valuation-Adjustment) ...

14. Au coeur de la valorisation de tout produit dérivé se situe la notion de taux sans risque et qui entre en jeu dans l'actualisation des flux. Avant la crise financière de 2008, les taux LIBOR sont traités comme non entachés de risque de crédit et étaient en conséquence utilisés dans le cadre d'actualisations des flux. La défaillance de Lehman a déclenché un effondrement des crédit et liquidité. Il s'en est suivi alors des spreads énormes entre LIBORs de différents tenors de sorte que qu'il n'est plus tenable de considŕer les taux LIBOR comme étant sans risque de crédit.
Il se trouve ainsi que l'OIS (Overnight Index Swap) est devenu le nouveau benchmark pour le taux sans risque. Les flux futurs sont désormais actualisés en utilisant l'OIS. Ceci étant car il apparaît équitable d'avoir un même taux pour un montant prêté et un cash posté en collatéral.

15. Quand la contrepartie fait défaut, les dérivés ayant des valeurs positives vont aller à travers un processus de recouvrement de défaut. Le montant à recouvrir devrait dépendre de plusieurs facteurs:

    (a) la détermination du temps de défaut

    (b) la valorisation du produit dérivé à l'instant de défaut de la contrepartie, donc il s'agit de l'exposition au défaut EAD (Exposure-At-Default)

    (c) the actifs restants de la partie qui fait défaut une fois le défaut est déclaré

    (d) la séniorité du produit dérivé en question et le cascades correspondants de paiements.

16. Il est d'usage de faire un choix pour le taux de recouvrement R pour une contrepartie spécifique et de sorte que la perte associé à la contrepartie est résumée comme

$$\mathbf{default\_loss} = \mathbf{LGD} \times \mathbf{EAD} \quad \text{avec } \mathbf{LGD} = 1 - R \text{ et } \mathbf{EAD} = \max\{V^+; 0\} \tag{20}$$

où V est la valeur du portefeuille de produits dérivés de la contrepartie.
L'idée clé est que, quand la contrepartie fait défaut et redevable d'un certain montant, alors la partie qui survit va souffrir d'une perte de crédit.

17. Si la valeur du portefeuille est négative pour la partie qui survit, alors cette dernière est capable d'honorer son obligation, et en conséquence il n'y a pas de perte de crédit dans ce cas. La partie survivante doit juste clôturée la position et honorer ses paiements.

18. Ainsi ce qui est important dans le cadre de risque de défaut est la partie positive PE (Positive Exposure) correspondant à ce que la contrepartie devrait s'acquiter pour clore équitablement le deal.

4 Les idées de base relatives au CVA

Lorsque une institution entre en contrat de swap, alors elle est exposée aux risques de marché et de taux qui affectent les flux liés à l'échange. Mais elle est aussi exposée au risque que sa contrepartie au contrat n'arrive pas à honorer les engagements de paiement sous-jacent à la transaction. Le risque de marché détermine l'amplitude de l'exposition avec la contrepartie. Tandis que le risque de crédit de cette dernière donne la vraisemblance de cette exposition se transformer en une perte.

Le risque de contrepartie fait référence à la combinaison entre les risques de marché et de crédit. Une évaluation propre du risque de contrepartie exige ainsi l'intégration jointe des incertitudes liées aux deux types de risque.

L'instrument standard pour quantifier le risque de contrepartie est le CVA (Credit Valuation Adjustment) qui peut être vue comme étant le prix du risque de contrepartie. Lorsqu'une institution A échange un ensemble de contrats dérivés avec une autre institution B alors, du point de vue de A, le CVA du portefeuille de dérivés est la différence entre la valeur du portefeuille si B ne peut pas tomber en défaut et la valeur réelle du portefeuille prenant en compte la qualité de crédit de B. Il s'agit précisémment de ce que l'on appelle UCVA (Unilateral CVA). De manière similaire on parle de BCVA (bilateral CVA) lorsque l'on ajuste à la fois suivant les qualités de crédit de A et B.

Le risque de contrepartie en général et le CVA en particulier ont attiré l'attention des opérateurs de marchés depuis les faillites de grandes institutions activement impliquées dans des produits dérivés (Bear Sterns, Lehman Brother, AIG) en 2008. Depuis, une nouvelle charge de capital (CVA-based capital charge) afin de prendre en compte le risque de contrepartie fait partie des exigences en capital selon Bâle 3 pour les banques ayant des activités importantes sur les produits dérivés.

Les déterminations des CVAs sont très consommateurs de ressources (informatiques, de calculs, ...) du fait qu'ils exigent de

- de simuler toutes les variables importantes de marché (prix, taux d'intérêt, taux de change, ...)
- évaluer tous le produits dérivés du portefeuille à tous les instants (certes discrets mais assez élevés en général) de chaque trajectoire et des facteurs sous-jacents
- d'intégrer ses expositions avec un modèle de risque de crédit de la contrepartie.

On parle de WWR (Wrong Way Risk) pour faire référence à la possibilité que la contrepartie devient plus enclin au défaut lorsque l'exposition au marché grandit, ou encore lorsqu'il y a une dépendance positive entre les risques de marché et de crédit. En pratique les source et nature du WWR sont difficiles à capter et mesurer. En effet il y a suffisamment de données pour calibrer séparemment les modèles de marché et de crédit. Mais il n'y a pas vraimment de données permettant de faire une calibration jointe de deux modèles.

Le CVA est calculé sous une probabilité ajustée au risque de sorte que les données historiques ne sont pas directement utilisables. Pour les calculs des CVAs, très souvent les banques utilisent des modèles d'évaluation développés pour des instruments spécifiques aux trading et hedging qui, par conséquent, ne peuvent pas être intégrés facilement avec un modèle de risque de crédit de la contrepartie.

Le calcul de CVA est beaucoup plus simple lorsque la dépendance entre risque de marché et risque de crédit est ignorée. L'approche standard sous Bâle 3 pour le CVA, suppose l'indépendance et que le résultat devrait alors être multiplié par un facteur 1.4 afin de corriger plusieurs sources d'erreurs incluant le manque d'informations sur les dépendances.

Les CVAs eux même sont maintenant considérés comme des produits dérivés à part entière et doivent être en conséquence gérer de manière similaire que tous les autres produits dérivés.

Soit V_t la valeur à tout instant t du portefeuille de swap négocié en OTC avec une contrepartie dont l'instant de défaut est noté τ. La valeur du swap peut être positive ou négative de sorte que la perte due à la contrepartie va dépendre de l'expostion $V^+_{\tau(\cdot)}(\cdot)$. Le CVA pour un horizon T est donné par

$$\mathbf{CVA}(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\big(1 - R_\tau(\cdot)\big)P\big(t, \tau(\cdot)\big)V^+_\tau(\cdot)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \tag{21}$$

où $R_\tau(\cdot)$ et $P\big(t,\tau(\cdot)\big)$ désignent respectivement les taux de recouvrement et d'ctualisation. Dans la suite, nous allons nous intéresser uniquement au cas des CVAs indépendants.

5 Formules pour les CVA indépendants

Dans la pratique, au lieu de considérer le cadre général continu comme au (21), il convient de travailler dans un contexte discret. Ainsi pour un portefeuille V négocié en OTC avec une contrepartie, et sous l'hypothèse d'indépendance entre les risques de marché lié au portefeuille et de crédit de la contrepartie, alors avec un taux de recouvrement constant, le prix du risque de contrepartie ou CVA à l'instant t, est donné par

$$\mathbf{CVA}(t) = (1 - R)\sum_{k=1}^{K} P(t, t_k)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[V^+_{t_k}(\cdot)\Big|\mathcal{F}_t\Big]\Big(S(t, t_{k-1}) - S(t, t_k)\Big) \tag{22}$$

sous condition que le défaut de la contrepartie et la valeur du portefeuille sont indépendants.

Dans (22), K désigne un nombre entier strictement supérieur à 1, aussi on note par

$$V_{t_k}(\cdot)$$

la valeur de l'instant t_k du portefeuille et qui est ainsi considérée comme une variable aléatoire de l'instant t. Dans (22), $\mathbb{Q}$ est une probabilité (risque-neutre) que l'on n'a pas besoin d'être précisée de plus, ainsi que le flot d'informations $\mathcal{F}_t$ dont on dispose jusqu'à l'instant t. On rapelle que

$$Y^+ = \max\{Y; 0\}.$$

La quantité

$$S(t, t_{k-1}) - S(t, t_k)$$

représente la probabilité que la contrepartie fait défaut durant la période (t_{k-1}, t_k). On fait la convention que

$$t_0 = t \qquad \text{et} \qquad S(t,t) = 1.$$

Aussi dans (22), R désigne le taux (moyen) de recouvrement associé à cette contrepartie. On peut voir $P(t, t_k)$ comme étant un facteur d'actualisation ou tout simplement le prix à l'instant t du zéro-coupon de maturité t_k.

Les instants t_k croissants

$$0 \equiv t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_{K-1} < t_K$$

sont supposés équidistants de sorte

$$t_k - t_{k-1} = \delta$$

et que le pas δ soit suffisamment petit. Ceci est utile du fait que (22) est en réalité une approximation discréte d'une formule d'une certaine expression donnée par une intégrale.

Il apparaît de la formule (22) que pour obtenir le CVA (du portefeuille), à part le taux de recouvrement R et le choix du nombre de discrétisation K, on a besoin de disposer de quantités

$$P(t, t_1), \ldots, P(t, t_k), \ldots, P(t, t_K) \tag{23}$$

$$S(t, t_1), \ldots, S(t, t_k), \ldots, S(t, t_K) \tag{24}$$

$$\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k, \ldots, \mathcal{E}_K \tag{25}$$

avec

$$\mathcal{E}_k = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[V_{t_k}^+(\cdot)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \tag{26}$$

On peut noter qu'à partir de (24), du fait que $S(t,t) = 1$, on peut avoir facilement la coube des probabilités de défaut

$$1 - S(t, t_1), \ldots, S(t, t_{k-1}) - S(t, t_k), \ldots, S(t, t_{K-1}) - S(t, t_K). \tag{27}$$

La courbe de taux (23) ou plus exactement de prix zéro-coupons est souvent disponible plus ou moins directement sur le marché assez souvent à partir des prix des produits liquides existants (forwards, obligations, Swaps).s Si par exemple on suppose avoir une courbe de taux de zero coupon plate $r = r(t, T)$ pour la période (t, T) alors on a

$$P(t, t_k) = \exp\big[-r(t_k - t)\big]. \tag{28}$$

En adoptant une spécification à l'aide d'un taux de hazard constant λ, comme on le fait souvent en première approximation en pratique, alors on a

$$S(t, t_k) = \exp\big[-\lambda(t_k - t)\big]. \tag{29}$$

On peut utiliser une approximation comme: $\lambda = \frac{s}{1-R}$, où s est le spread de crédit pour la maturité t. Mais il arrive aussi lorsque c'est possible que l'on détermine λ à partir des côtations des CDSs que la contrepartie a émis. Donc nous pouvons supposer que l'on peut plus ou moins disposer facilement de la courbe de probabilités de défaut (27) de la contrepartie.

Toute la difficulté pour le calcul du CVA en (22) réside alors dans la détermination des expositions espérées (25) pour les divers instants jusqu'à la maturité. L'exposition $\mathcal{E}_k$ dans (26) est définie comme étant la partie positive de l'espérance de la valeur de marché $V_{t_k}(\cdot)$ du portefeuille considéré pour l'instant futur t_k.

Mais on doit être conscient que la détermination à tout instant jusqu'à la maturité de la valeur de marché d'un portefeuille comprenant de produits dérivés n'est jamais immédiate et simple. Il faudrait en effet prendre en compte des flux futurs selon juste les perceptions de l'instant présent t. La considération de $V_{t_k}(\cdot)$ elle même implique à analyser des flux à venir après l'instant futur t_k telle que l'on devrait percevoir travers les informations dont on disposerait jusqu'à l'instant t_k. Formellement on a

$$V_{t_k}(\cdot) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_j P(t_k, T_j)(\cdot)\mathcal{C}_j(..)\Big|\mathcal{F}_{t_k}(\cdot)\right] \tag{30}$$

où $\mathcal{C}_j(..)$ est le flux en jeu à l'instant T_j avec $t_k < T_j$. Il ne faut pas oublier que l'on ait encore à l'instant t, avec $t < t_k$, alors que dans (30) on a besoin des informations disponibles jusqu'à l'instant futur t_k.

Si on se concentre dans le cas d'un portefeuille constitué tout juste d'une option européenne vanille, avec une approche classique à la Black-Scholes, la valeur de marché V_{t_k} dépend du prix spot s_{t_k}, de la maturité restante $T - t_k$, de la volatilité implicite $\sigma(t_k, t_M)$ pour la période de temps (t_k, t_M).
Dans le cas d'une option asiatique, la situation est plus délicate car des cours de l'action sous-jacente s_{T_j}, pour $t_k \leq T_j \leq T$, sont aussi déterminantes pour la valorisation.

Pour un portefeuille constitué d'obligations et de swaps, la valeur de marché V_{t_k} dépend de la courbe de prix zéro-coupon de l'instant t_k formé des $P(t_k, T_j)$ pour $t_k \leq T_j \leq T$. Donc l'obtention de la courbe d'exposition (25) nécessite d'avoir une famille de courbes de taux à des instants futurs.

Ainsi pour la détermination de l'exposition $\mathcal{E}_k$, il faudrait déjà avoir une idée claire des instants T_j de tombées de flux après t_k et ensuite faire en sorte de relativiser les connaissances des flux selon les informations de l'instant présent t.

Dans beaucoup de cas, en pratique on détermine une approximation de l'exposition $\mathcal{E}_k$ en utilisant une simulation de Monte-Carlo de sorte que l'on ait

$$\mathcal{E}_k \approx \sum_{n=1}^{N} V^+(n,k)\mathbf{p}_n \tag{31}$$

où N est le nombre de simulation utilisée et $V^+(n,k)$ désigne une n-ième réalisation de la variable aléatoire $V_{t_k}(\cdot)$. Ici $\mathbf{p}_n$ est un poids de sorte que $0 < \mathbf{p}_n < 1$ avec $\sum_{n=1}^{N} \mathbf{p}_n = 1$. Assez souvent on est dans le cas où $\mathbf{p}_n = \frac{1}{N}$. Mais suite à ce qui est expliqué ci-dessus, la détermination de $V(n,k)$ demande une analyse fine de la situation comme on verra ci-dessous.

6 Implémentation de la formule du CVA sous R

Sous R la formule (22) va être juste réduite à la commande

```
CVA=LGD*sum(
vec_discount*
vec_exposure*
vec_def_prob
)
```

où

vec_discount, **vec_exposure** et **vec_def_prob**

désignent respectivement les vecteurs formés par les quantités donnés en (23), (25) et (27).

Du moment que l'on peut raisonner vectoriellement sous R, le point fondamental à noter pour l'obtention des quantités $\mathcal{E}_k$ dans (31) est d'abord d'avoir une matrice formée par les

$$\begin{array}{l} V^+(1,1),\ldots\ldots,V^+(1,k),\ldots\ldots,V^+(1,K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V^+(n,1),\ldots,\ldots,V^+(n,k),\ldots,\ldots,V^+(n,K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V^+(N,1),\ldots\ldots,V^+(N,k),\ldots\ldots,V^+(N,K) \end{array} \tag{32}$$

dont le nom de variable associée peut être nommée

mat_exposure_port.

Ainsi les quantités en (25) peuvent être facilement obtenues en utilisant la commande

```
vec_exposure=apply(
mat_exposure_port,
2,
mean
)
```

Une étape avant d'arriver à la matrice des expositions comme dans (32) est d'obtenir préalablement la matrice des réalisations possibles des valeurs du portefeuille

$$\begin{array}{l} V(1,1),\ldots\ldots,V(1,k),\ldots\ldots,V(1,K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V(n,1),\ldots,\ldots,V(n,k),\ldots,\ldots,V(n,K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V(N,1),\ldots\ldots,V(N,k),\ldots\ldots,V(N,K) \end{array} \tag{33}$$

dont une variable R associée peut être notée par

mat_value_port.

On devrait noter que les matrices **mat_exposure_port** et **mat_value_port** sont des matrices de même dimension $N \times K$ avc $N =$ **nb_simul** et $K =$ **nb_time_step**.

Le passage de **mat_value_port** vers **mat_exposure** peut simplement se faire suivant les instructions

```
for (k in (1:nb_step)){
mat_exposure[,k]=
pmax(
mat_value_port[,k],0
)
}
```

Toutes ses considérations montrent que le fonds pour l'implémentation de la CVA se trouve dans la détermination de la matrice **mat_value_portfolio** des réalisations possibles du portefeuille.

7 Exposition suivant les simulations historiques

Une possibilité pour déterminer l'exposition $\mathcal{E}_k$, comme dans (26), est de procéder par simulation historique. Mettant à part la limite naturelle que *l'avenir est la répétition du passé*, cette approche apporte un bon compromis largement accepté et utilisé par les praticiens faces aux modèles compliqués qui sont non seulement discutables mais aussi difficiles à mettre en oeuvre.

On doit être cependant vigilant, comme on a mentioné ci-dessus, que la détermination cohérente de la CVA suppose que l'on travaille avec une mesure de probabilité risque-neutre. Alors que lorsque l'on manipule les données du passé on est tout naturellement dans le cadre de la mesure de probabilité historique, qui constitue l'approche reconnue dans le cadre des gestions de risque. Le point ici, comme dans la pratique en assurance, est que nous générons les facteurs initiaux sous-jacents au portefeuille selon les données historiques, mais par contre nous restons bien dans le contexte risque-neutre pour l'évaluation après.

Pour la commodité de la présentation, on va se limiter dans le cas où le portefeuille se réduit à une option vanille Européenne. Mais on peut bien étendre les idées à d'autres situations plus générales.

On introduit les instants suivants

$$t_0^* < t_1^* < \ldots < t_n^* < \ldots < t_{N+K-1}^* = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_K = T \tag{34}$$

de sorte que $t_0 = t_{N+K-1}^*$ est l'instant présent et que $t_K = T$ est la maturité ou l'horizon dont on veut calculer le CVA. En plus on suppose que les écarts entre les instants passés et futurs devraient être les mêmes dans le sens que

$$t_k - t_{k-1} = t_n - t_{n-1} = \delta \tag{35}$$

pour tous $k \in \{1, \ldots, K\}$ et $n \in \{1, \ldots, N+K-1\}$. Dans (34), K et N sont des nombres entiers strictement positifs. Il est important d'observer qu'il y a K instants futurs, tandis qu'il y a beaucoup plus d'instants passés à considerer, soit $N+K-1$.

Comme écrit dans (30), la valeur de marché V_{t_k} va dépendre des prix de l'actif sous jacent s_{t_k} et s_{t_K} à l'instant t_k et la maturité $T = t_K$. Avec l'approche classique à la Black-Scholes, la valeur de marché V_{t_k}, pour $k < K$, dépend du prix spot s_{t_k}, de la maturité restante $T - t_k$, de la volatilité (implicite) $\sigma(t_k, t_K)$ qui prévaut durant la période de temps (t_k, t_K). Il y a alors là une simplification de la situation dans le sens que l'on n'a pas vraimment à décrire les flux durant la la période (t_k, t_K). Cependant comme on devrait générer toutes les expositions $\mathcal{E}_k$, avec $1 \leq k \leq K$, alors il y a lieu en réalité de considérer les $s_{t_k}(\cdot)$ pour tous $k \in \{1, \ldots, K\}$ et tels que l'on appréhende de l'instant présent t. Il faut aussi noter que V_{t_K} se détermine directement par le pay-off a la maturité t_K et non pas par une formule Black-Scholes.

On peut remarquer qu'au prix $s_{t_k}(\cdot)$ correspond un facteur de risque associé $x_{t_k}(\cdot)$ qu'est le rendement de l'action entre les instants t_{k-1} et t_k . Ainsi de l'instant t_{k-1} on peut prendre par exemple que

$$x_{t_k}(\cdot) = \ln\Big(\frac{s_{t_k}(\cdot)}{s_{t_{k-1}}}\Big). \tag{36}$$

Dans l'approche par simulation historique, les $t_1, \ldots, t_K$ sont les instants où l'on veut générer les réalisations possibles des facteurs $x_{t_k}(\cdot)$, tandis que les $t_1^*, \ldots, t_{N+K-1}^*$ correspondent aux instants où l'on dispose des facteurs de risque dans le passé que l'on peut noter

$$x_1^*, \ldots, x_n^*, \ldots, x_{N+K-1}^* = x_0$$

Pour mieux fixer les idées on peut imaginer qu'aux instants passés

$$t_0^*, t_1^*, \ldots, t_{N+K-1}^*$$

on dispose de données historiques de prix

$$s_0^*, s_1^*, \ldots, s_n^*, \ldots, s_{N+K-1}^* = s_0 \tag{37}$$

où s_0 est le prix spot de l'instant présent. Ainsi aux instants

$$t_1^*, \ldots, t_n^*, \ldots, t_{N+K-1}^*$$

on a l'historique des facteurs de risque ou rendements

$$x_1^* \equiv \ln\Big(\frac{s_1^*}{s_0^*}\Big), \ldots, x_n^* \equiv \ln\Big(\frac{s_n^*}{s_{n-1}^*}\Big), \ldots, x_N^* \equiv \ln\Big(\frac{s_N^*}{s_{N-1}^*}\Big). \tag{38}$$

Dans le cadre des déterminations des expositions $\mathcal{E}_k$, une étape importante est de générer $N \times K$ réalisations $s(n,k)$ des prix de l'action sous-jacente aux options pour les instants futurs t_k tout en respectant la structure d'évolution des prix dans la période des temps passés $t_0^*, t_1^*, \ldots, t_{N+K-1}^*$.

En considérant l'historique des cours, les évolutions permettant d'avoir un nombre de K prix successifs sont

$$\begin{aligned}
e_1 &= \Big(x_1^*, \ldots\ldots, x_k^*, \ldots\ldots, x_K^*\Big)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_n &= \Big(x_n^*, \ldots, x_{k+(n-1)}^*, \ldots, x_{K+(n-1)}^*\Big)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_N &= \Big(x_N^*, \ldots, x_{k+(N-1)}^*, \ldots, x_{K+(N-1)}^*\Big).
\end{aligned} \tag{39}$$

Ainsi il y a N trajectoires d'évolutions possibles des K facteurs de risques, et qui sont tout naturellement induites par les données historiques. Ces N possibilités permettent de faire des projections des facteurs de risques pour les instants futurs $t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_K$. Pour être précis, avec la n-ième trajectoire d'évolution de facteurs de risque

$$e_n = \Big(x_n^*, \ldots, x_{k+(n-1)}^*, \ldots, x_{K+(n-1)}^*\Big) \tag{40}$$

on génère les prix futurs correspondants

$$\Big(s(n,1), \ldots, s(n,k), \ldots, s\big(n, K+(n-1)\big)\Big) \tag{41}$$

où

$$s(n,1) = s_0 \exp[x_1^*] \tag{42}$$

et

$$s(n,k) = s(n,k-1)\exp[x_k^*] = s_0 \exp\big[x_1^* + \ldots + x_k^*\big] \qquad \text{pour } 2 \leq k \leq K \tag{43}$$

de sorte que $s(n,k)$ soit une n-ième réalisation possible pour le prix à l'instant t_k.

Les praticiens sont sensibles au fait qu'il ne faudrait pas donner le même poids pour les évolutions des facteurs de risques $e_1,\ldots,e_n,\ldots,e_N$ écrits au (39). En effet e_1 se trouve trop éloigné de l'instant présent t_0 comparé à e_N. Cette dernière évolution de facteurs de risques devrait être plus pesante pour l'anticipation de l'évolution immédiatement à venir après l'instant présent t_0. Ainsi pour la trajectoire de facteur de risques e_n, comme avec l'approche de Risk-Metrics ou EWMA, nous allons donner le poids

$$\mathbf{p}_n = \omega\lambda^{N-n} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^N} \qquad \text{et} \qquad 0<\lambda<1 \tag{44}$$

de sorte que $\sum_{n=1}^{N} \mathbf{p}_n = 1$. Ainsi à la trajectoire e_1 on attache le poids moindre $\omega\lambda^{N-1}$ par rapport ω pour la trajectoire e_N.

Ainsi, en appliquant (43), on arrive à la matrice des cours futurs possibles (au sens de l'approche historique):

$$\begin{array}{l} s(1,1),\ldots\ldots,s(1,k),\ldots\ldots,s(1,K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s(n,1),\ldots,s\big(n,k+(n-1)\big),\ldots,s\big(n,K+(n-1)\big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s(N,1),\ldots,s\big(N,k+(N-1)\big),\ldots,s\big(N,K+(N-1)\big) \end{array} \tag{45}$$

constituée par N réalisations de trajectoires de prix pour les instants $t_1,\ldots,t_K$.
La matrice transposée, de dimension $K\times N$, est

$$\begin{array}{l} s(1,1),\ldots\ldots,s(n,1),\ldots\ldots,s(N,1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s(1,k),\ldots\ldots,s(n,k),\ldots\ldots,s(N,k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s(1,K),\ldots\ldots,s(n,K)\ldots\ldots,s(N,K) \end{array} \tag{46}$$

dont la k-ième ligne

$$s(1,k),\ldots\ldots,s(n,k),\ldots\ldots,s(N,k) \tag{47}$$

donne les N réalisations possibles des prix pour l'instant t_k. Conformément aux poids $\mathbf{p}_n$ introduits en (44), à ses prix on associe respectivement les probabilités

$$\mathbf{p}_1,\ldots\ldots,\mathbf{p}_n,\ldots\ldots,\mathbf{p}_N.$$

Les prix en (47) permettent d'aboutir à des réalisations possibles de $V_{t_k}(\cdot)$ que sont les

$$V(1,k),\ldots\ldots,V(n,k),\ldots\ldots,V(N,k) \tag{48}$$

pourvu que l'on dispose d'une association explicite du type

$$V(n,k) = \mathcal{V}_k\Big(s(n,k)\Big). \tag{49}$$

Cette dernière est juste une relation générique introduite pour simplifier la présentation. Mais le lien de dépendance entre la valeur $V(n,k)$ du produit dérivé ou portefeuille et les facteurs de risques sous-jacents $s(n,k)$ peut être un peu plus compliqué. Par exemple dans le cadre d'une option call il serait plus juste de voir

$$V(n,k) = \textbf{price\_call\_BS}\Big(s(n,k), T-t_k, \sigma\Big(s(n,k), T-t_k, \mathcal{K}\Big), r, \mathcal{K}\Big) \tag{50}$$

Dans cette dernière spécification, $\mathcal{K}$ désigne le strike de l'option. La fonctionnelle **price_call_BS** est donnée selon la formule bien connue de Black-Scholes

$$\textbf{price\_call\_BS}\big(S, \tau, \sigma, r, \mathcal{K}\big) = S\Phi\big(d_+\big) - \mathcal{K}\exp\big[-r\tau\big]\Phi\big(d_-\big) \tag{51}$$

avec

$$d_\pm \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big(\ln\Big(\frac{S}{\mathcal{K}}\Big) + \big(r \pm 0.5\sigma^2\tau\big)\Big)$$

et

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du \qquad \text{avec} \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\big[-0.5u^2\big]$$

est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Il faut remarquer qu'en pratique, au lieu d'une constante fixe comme présentée dans les ouvrages académiques, on utilise une volatilité implicite qui dépend elle même du cours du sous-jacent, de la maturité restante et aussi du strike. D' où l'utilité d'utiliser une nappe de volatilité du type

$$\big(\tau, \mathcal{K}\big) \longmapsto \sigma\big(S, \tau, \mathcal{K}\big).$$

Bien que l'on perd en rigueur théorique le bon sens pour la mise en oeuvre de (50), est que l'on utilise la fonction de volatilité telle que l'on appréhende à l'instant présent t.

Toutes nos analyses ci-dessus aboutissent à la conclusion qu'une bonne approximation de l'exposition $\mathcal{E}_k$ comme définie en (26) lorsque l'on adopte l'approche par simulation historique serait

$$\mathcal{E}_k = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[V_{t_k}^+(\cdot)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \approx \sum_{n=1}^{N} V^+(n,k)\mathbf{p}_n \tag{52}$$

Dans l'approche par simulation historique comme décrite dans (52), il est important de noter que l'on devrait un paramétre, λ, avec $0 < \lambda < 1$, permettant de définir les probabilités $\mathbf{p}_n$ attachés à chaque scénario de réalization $V(n,k)$ de $V_{t_k}(\cdot)$. Il est d'usage en pratique d'utiliser une valeur conservative fixée empiriquement. Il est aussi possible, comme dans la spécification (50) que des paramètres supplémentaires sont à introduire et fixer.

8 Implémentation des expositions sous simulation historique

ENCORE A FAIRE

9 Exposition en suivant un modéle paramétrique

Le cadre des simulations historiques ne nécessite aucune hypothèse ad-hoc (possiblement forte) sur la dynamique d'évolution de(s) facteur(s) de risque sous-jacent. Cette dernière est supposée être structurellement la même que celle contenue dans les données historiques passées. Ce qui est intuitevement trop forte par rapport à des changements possibles non encore constatés à travers les données dont on dispose.

Ainsi on ne peut pas toujours faire l'économie d'introduire des modèles avec lesquels on espère mieux appréhender la dynamique d'évolution de marché possiblement non encore rencontrée dans l'évolution passée des cours.

Pour simplifier nous allons juste nous concentrer dans le cadre où la valeur du portefeuille est donnée par une formule explicite comme

$$V_{t_k}(\cdot) = \mathcal{V}_{t_k}\Big(r_{t_k}(\cdot); \Theta(t_k, T)\Big) \tag{53}$$

où $r_{t_k}(\cdot)\big|_{\mathcal{F}_0}$ suit une loi particulièrement identifiable bien connue comme par exemple une loi normale par exemple. L'application $u \longmapsto \Theta(u, T)$ est une fonction déterministe de u qui ne dépend que des caractéristiques du portefeuille.

Il est important de noter, qu'avec (53), la valeur $V_{t_k}(\cdot)$ s'obstient à partir d'une fonction déterministe $\mathcal{V}_{t_k}$ et de la valeur $r_{t_k}(\cdot)$ d'un facteur de risque associé à l'instant t_k. La spécification (53) englobe les cas de portefeuilles constitués uniquement de produits de taux comme les obligations, swaps, options sur obligation, ... Des portefeuilles plus généraux peuvent être abordés lorsque l'on autorise à ce que $r_{t_k}(\cdot)$ soit donné par un vecteur. Il s'agit par exemple d'un portfeuille contenant de produits hybrides: actions et produits de taux et à condition que l'on travaille sous une hypothèse de taux stochastique. Cependant, un tel cadre ne sera pas étudié ici.

Comme on a indiqué relativement à (30), il faut remarquer que de manière un peu plus générale la valeur de marché $V_{t_k}(\cdot)$ pourrait faire recours à une fonction des facteurs de risque $r_u(\cdot)$ pour des instants u postérieurs à t_k, c'est que $t_k \leq u \leq T$. La situation en question concerne par exemple un portefeuille qui contient de produits dérivés qui dépendent faiblement ou fortement de la trajectoire des facteurs de risques sous-jacents. Nous n'allons pas pour le moment considérer ses situations plus délicates à analyser et gérer.

9.1 Exposition dans le cas d'un zéro-coupon

Dans cette partie nous nous proposons d'analyser l'exposition dans le cadre d'un zéro-coupon de maturité, c'est qu'à tout instant u, avec $t \leq u \leq T$, on ait

$$V_u \equiv P(u, T). \tag{54}$$

Pour simplifier les analyses on se place dans le cadre du modèle à un facteur de Vasicek[1], pour lequel relativement à une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, le taux d'intérêt à un instant futur $t+\delta$, avec $0 < \delta$, est donné par

$$r_{t+\delta}(\cdot) = \exp\big[-\kappa\delta\big] r_t + \kappa\theta\mathbf{b}\big(\delta;\kappa\big) + \sigma\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}\big(\delta; 2\kappa\big)\varepsilon_{t+\delta|t}(\cdot) \tag{55}$$

où κ, σ et θ sont des constantes strictement positives et

$$\mathbf{b}\big(u;\kappa\big) \equiv \frac{1}{\kappa}\Big(1 - \exp\big[-\kappa u\big]\Big).$$

Le terme $\varepsilon_{t+\delta|t}(\cdot)$ représente une variable aléatoire normale centré réduite. Sous le modèle (55) le prix zéro-coupon $P(t, T)$, avec $0 \leq t < T$, est donné par la formule fermée

$$P(t, T) = \exp\Big[-\mathbf{b}\big(T - t;\kappa\big) r_t - \mathbf{a}\big(T - t;\Theta\big)\Big] \tag{56}$$

[1] C'est un modèle de base généralement utilisé comme référence surtout en théorie. En pratique, on fait plutôt recours à un modèle de Hull-White à un facteur que l'on peut voir comme une extension du modèle de base

avec

$$\mathbf{a}\big(T-t;\Theta\big) \equiv \frac{\sigma^2}{4\kappa}\mathbf{b}^2\big(T-t;\kappa\big) + \Big(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\Big)\Big((T-t) - \mathbf{b}\big(T-t;\kappa\big)\Big) \tag{57}$$

En insérant (55) dans (56) il apparaît que

$$V_{t_k}(\cdot) = \mathcal{A}\Big(t_k - t; T - t_k; r_t; \Theta\Big)\exp\Big[-\beta\big(t_k - t; T - t_k; \Theta\big)\varepsilon_{t_k|t}(\cdot)\Big] \tag{58}$$

où

$$\mathcal{A}\Big(u; v; r_t; \Theta\Big) \equiv \exp\Bigg[-\mathbf{a}\big(v;\Theta\big) - \mathbf{b}\big(v;\kappa\big)\Big(\exp\big[-\kappa u\big]r_t + \kappa\theta\mathbf{b}\big(u;\kappa\big)\Big)\Bigg] \tag{59}$$

et

$$\beta\big(u; v; \Theta\big) \equiv \sigma\mathbf{b}^{\frac{1}{2}}\big(u;\kappa\big)\mathbf{b}\big(v;\kappa\big). \tag{60}$$

Du fait que $\varepsilon_{t_k|t}(\cdot)$ suit une loi normale centrée réduite, on est dans un cas où une formule fermée de l'exposition peut être obtenue et prend la forme

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{A}\Big(t_k - t; T - t_k; r_t; \Theta\Big)\exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T - t_k; \Theta\big)\Big]. \tag{61}$$

9.2 Exposition dans le cas d'une obligation couponnée

Dans cette partie nous proposons d'analyser l'exposition dans le cadre d'une obligation avec coupon de maturité T. On suppose que la valeur faciale est 1, le taux de coupon est c avec une fréquence de paiement espacé de δ. De l'instant présent t les instants restants de paiement sont notés $T_1, \ldots, T_M$ avec

$$t < T_1 < \ldots < T_M = T.$$

C'est que de l'instant t sa valeur est

$$V_t = cP(t,T_1)\delta(t,T_1) + c\sum_{j=2}^{M} P(t,T_j)\delta(T_{j-1},T_j) + P(t,T_M). \tag{62}$$

Avant de déterminer l'exposition $\mathcal{E}_k$, comme définie dans (26), il est nécessaire d'abord de mieux comprendre ce qu'est excatement $V_{t_k}(\cdot)$. Les cas à considérer sont ainsi

- $t_k = T_M$,
- $t_k = T_m$ pour $m \in \{1, \ldots, M-1\}$
- $T_{M-1} < t_k < T_M$
- $T_m < t_k < T_{m+1}$ pour $m \in \{1, \ldots, M-2\}$

Il est clair que

$$V_{t_k}(\cdot) = 1 \qquad \text{pour} \quad t_k = t_M = T \tag{63}$$

$$V_{t_k}(\cdot) = c\sum_{j=m+1}^{M} P(t_k,T_j)(\cdot)\delta(T_{j-1},T_j) + P(t_k,T_M)(\cdot)$$
$$\text{pour} \qquad t_k = T_m \text{ avec } m \in \{1,\ldots,M-1\} \tag{64}$$

$$V_{t_k}(\cdot) = \Big(1 + c\delta(t_k,T_M)\Big)P(t_k,T_M)(\cdot) \qquad \text{pour} \qquad T_{M-1} < t_k < T_M \tag{65}$$

et

$$V_{t_k}(\cdot) = cP(t_k, T_{m+1})(\cdot)\delta(t_k, T_{m+1}) + c \sum_{j=m+1}^{M} P(t_k, T_j)(\cdot)\delta(T_{j-1}, T_j) + P(t_k, T_M)(\cdot)$$
$$\text{pour} \qquad T_m < t_k < T_{m+1} \qquad \text{avec} \qquad m \in \{1, \ldots, M-1\} \quad (66)$$

Comme dans la sous-section 9.1, pour simplifier, nous effectuons le calcul des expositions $\mathcal{E}_k$ dans le cadre du modèle à un facteur de Vasicek, comme décrit dans (55). En utilisant (61) et les expressions de $V_{t_k}(\cdot)$ ci-dessus, on obtient ainsi les expositions correspondantes $\mathcal{E}_k$

$$\mathcal{E}_k = 1 \qquad \text{pour} \quad t_k = t_M = T \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k = c \sum_{j=m+1}^{M} &\mathcal{A}\Big(t_k - t; T_j - t_k; r_t; \Theta\Big) \exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T_j - t_k; \Theta\big)\Big]\delta(T_{j-1}, T_j) \\ &+\mathcal{A}\Big(t_k - t; T_M - t_k; r_t; \Theta\Big) \exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T_M - t_k; \Theta\big)\Big] \\ &\qquad \text{pour} \qquad t_k = T_m \text{ avec } m \in \{1, \ldots, M-1\}\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k = \Big(1 + c\delta(t_k, T_M)\Big)\mathcal{A}\Big(t_k - t; T_M - t_k; r_t; \Theta\Big) \exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T_M - t_k; \Theta\big)\Big] \\ \text{pour} \qquad T_{M-1} < t_k < T_M\end{aligned} \tag{69}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k = c\mathcal{A}&\Big(t_k - t; T_{m+1} - t_k; r_t; \Theta\Big) \exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T_{m+1} - t_k; \Theta\big)\Big]\delta(t_k, T_{m+1}) \\ &+c \sum_{j=m+1}^{M} \mathcal{A}\Big(t_k - t; T_j - t_k; r_t; \Theta\Big) \exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T_j - t_k; \Theta\big)\Big]\delta(T_{j-1}, T_j) \\ &\qquad +\mathcal{A}\Big(t_k - t; T_M - t_k; r_t; \Theta\Big) \exp\Big[\frac{1}{2}\beta^2\big(t_k - t; T_M - t_k; \Theta\big)\Big] \\ &\qquad \text{pour} \qquad T_m < t_k < T_{m+1} \qquad \text{avec} \qquad m \in \{1, \ldots, M-1\}. \quad (70)\end{aligned}$$

9.3 Exposition dans le cas d'un swap

EN COURS D'ELABORATION

9.4 Exposition dans le cas d'un CDS

Le calcul de CVA dans le cadre de CDS est assez compliqué pour au moins deux raisons. D'une part il y a deux instants de défaut en jeu[2]: le défaut de l'entité sous-jacente au CDS et le défaut associé à la contrepartie. Ces deux défauts peuvent être dépendants. Il y a aussi la difficulté qui apparaît même dans le calcul des expositions.

Nous n'allons pas traiter ici le problème tout en entier, mais nous nous limitons tout juste à analyser les flux associés à une position sur CDS

[2]Dnas le cadre d'un CVA bilatéral, il y a plutôt trois instants de défauts à considérer

Soit $\tau(\cdot)$ l'instant de défaut de l'entité sous-jacent au CDS considéré et dont la maturité est $T = T_M$ et les instants de paiement de coupons sont éventuellement $T_1, \ldots, T_m, \ldots, T_M$ de sorte que

$$0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_M$$

On suppose qu'à l'instant $0 = T_0$ il n'y a pas encore défaut, ce qui signifie $0 < \tau(\cdot)$. On cherche à analyser les flux associés à la vente du CDS à un instant (futur) t. Cette préoccupation apparaît tout naturellement par exemple dans le cadre de gestion d'une telle position ou de calcul de CVA.

Dans toute la suite on désigne par $\Phi_t(\cdot)$ la somme des flux à recevoir jusqu'à l'instant t et aussi ceux qui sont attendus après associés à la position considérée telle que l'on devrait voir de l'instant t. Il faut noter qu'en réalité la valeur de marché $V_{t|0}$ vue de l'instant actuel serait donnée par

$$V_{t|0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[V_t(\cdot)\big|\mathcal{I}_0\big] \tag{71}$$

qui est différente de la valeur de marché V_t vue de l'instant t et est définie par

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\Phi_t(\cdot)\big|\mathcal{I}_t\big] \tag{72}$$

où par $\mathcal{I}_t$ on désigne les informations dont on dispose jusqu'à l'instant t.

Pour simplifier on travaille avec un CDS de montant nominal 1 et dont la prime à la mise en place est notée s_{cds}.

Pour $t_i \leq t_j$, on utilise la notation $P(t_i, t_j)$ pour désigner la valeur à l'instant t_i d'une unité monétaire payée en t_j, avec la restriction que $P(t_i, t_i) = 1$. On désigne par R_i le taux de recouvrement qui s'applique lorsque le défaut survient dans la période de temps $[T_{i-1}, T_i]$. La fraction d'année entre deux instants de paiements T_{i-1} et $T_i]$ est notée par $\delta\big(T_{i-1}, T_i\big)$.

Dans un premier temps nous allons d'abord nous concentrer sur le cas $t = T_m$ pour un certain $m \in \{1, \ldots, M\}$. Avec cet éclairage, nous aborderons après le cas plus délicat $0 < t \leq T_M$ et $t \neq T_m$ pour tous m.

9.4.1 Cas où $t = T_1$

Le point de départ ici est que

$$\Phi_{T_1}(\cdot) = \mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\Phi_{T_1}(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_1<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_{T_1}(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_{T_1}(\cdot). \tag{73}$$

Pour le premier terme de (73) on a tout simplement

$$\mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\Phi_{T_1}(\cdot) = \mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\bigg(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_0, T_1) - \Big(1 - R_1(\cdot)\Big)\bigg). \tag{74}$$

Le second terme de (73) se traite comme suit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{\{T_1<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_{T_1}(\cdot)\\
&\qquad = \sum_{j=2}^{M}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Bigg[s_{cds}\sum_{l=1}^{j-1}P(T_1, T_l)(\cdot)\delta(T_{l-1}, T_l)\\
&\qquad\qquad + P(T_1, T_j(\cdot)\bigg(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_{j-1}, T_j) - \Big(1 - R_j(\cdot)\Big)\bigg)\Bigg].
\end{aligned} \tag{75}$$

Pour le troisième terme de (73) on a

$$\mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_{T_1}(\cdot) = \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\bigg(s_{cds}\sum_{j=2}^{M}P(T_1, T_j)(\cdot)\delta(T_{j-1}, T_j)\bigg). \tag{76}$$

9.4.2 Cas où $t = T_m$ avec $2 \leq m \leq M$

Le point de départ ici est que

$$\Phi_{T_m}(\cdot) = \mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_m\}}\Phi_{T_m}(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_{T_m}(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_{T_m}(\cdot). \tag{77}$$

La première expression dans (77) se traite comme suit:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_m\}}\Phi_{T_m}(\cdot) &= \mathbb{I}_{\{T_0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\Phi_{T_m}(\cdot) + \sum_{j=2}^{m}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Phi_{T_m}(\cdot)\\ &= \mathbb{I}_{\{T_0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\frac{1}{P(T_1,T_m)(\cdot)}\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_0,T_1) - \Big(1-R_1(\cdot)\Big)\right)\\ &+\sum_{j=2}^{m}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Bigg[s_{cds}\sum_{l=1}^{j-1}\frac{1}{P(T_l,T_m)(\cdot)}\delta(T_{l-1},T_l)\\ &\qquad+\frac{1}{P(T_j,T_m)(\cdot)}\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_{j-1},T_j) - \Big(1-R_j(\cdot)\Big)\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{78}$$

La deuxième expression dans (77) a seulement lieu d'être considérée pour $m+1 \leq M$, et auquel cas on a

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_{T_m}(\cdot) &= \sum_{j=m+1}^{M}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Phi_{T_m}(\cdot)\\ &= \sum_{j=m+1}^{M}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Bigg[s_{cds}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{P(T_l,T_m)(\cdot)}\delta(T_{l-1},T_l)\\ &\qquad+\sum_{l=m}^{j-1}P(T_m,T_l)(\cdot)\delta(T_{l-1},T_l)\\ &\qquad+P(T_m,T_j)(\cdot)\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_{j-1},T_j) - \Big(1-R_j(\cdot)\Big)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{79}$$

Pour la troisième expression dans (77) on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_{T_M}(\cdot)\\ &\qquad= \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}s_{cds}\left(\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{P(T_j,T_M)(\cdot)}\delta(T_{j-1},T_j)\right)\end{aligned} \tag{80}$$

et

$$\begin{aligned}&\mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\}}\Phi_{T_m}(\cdot)\\ &\qquad= \mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\}}s_{cds}\Bigg(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{P(T_j,T_m)(\cdot)}\delta(T_{j-1},T_j)\\ &\qquad\qquad+\sum_{j=m+1}^{M}P(T_m,T_j)(\cdot)\delta(T_{j-1},T_j)\Bigg) \qquad \text{pour } 2\leq m\leq M-1\end{aligned} \tag{81}$$

9.4.3 Cas où $T_0 < t < T_1$

Comme avec (73), le point de départ ici est l'identité

$$\Phi_t(\cdot) = \mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\Phi_t(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_1<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_t(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_t(\cdot). \tag{82}$$

Pour le premier terme de (82) on a tout simplement

$$\mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\Phi_{T_1}(\cdot) = \mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}P(t,T_1)(\cdot)\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_0,T_1) - \Big(1-R_1(\cdot)\Big)\right). \tag{83}$$

Le second terme de (82) se traite comme suit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{\{T_1<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_t(\cdot)\\
&\quad= \sum_{j=2}^{M}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Bigg[s_{cds}\sum_{l=1}^{j-1}P(t,T_l)(\cdot)\delta(T_{l-1},T_l)\\
&\qquad\qquad +P(t,T_j)(\cdot)\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_{j-1},T_j) - \Big(1-R_j(\cdot)\Big)\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{84}$$

Pour le troisième terme de (82) on a

$$\mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_t(\cdot) = \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\left(s_{cds}\sum_{j=1}^{M}P(t,T_j)(\cdot)\delta(T_{j-1},T_j)\right). \tag{85}$$

9.4.4 Cas où $T_{m-1} < t < T_m$ avec $2 \leq m \leq M$

Le point de départ ici est que

$$\Phi_t(\cdot) = \mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_m\}}\Phi_t(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\leq T_M\}}\Phi_t(\cdot) + \mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_t(\cdot). \tag{86}$$

La première expression dans (86) se traite comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\{0<\tau(\cdot)\leq T_m\}}\Phi_t(\cdot) &= \mathbb{I}_{\{T_0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\Phi_t(\cdot) + \sum_{j=2}^{m}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Phi_t(\cdot)\\
&= \mathbb{I}_{\{T_0<\tau(\cdot)\leq T_1\}}\frac{1}{P(T_1,t)(\cdot)}\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_0,T_1) - \Big(1-R_1(\cdot)\Big)\right)\\
&\quad+\sum_{j=2}^{m}\mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\leq T_j\}}\Bigg[s_{cds}\sum_{l=1}^{j-1}\frac{1}{P(T_l,t)(\cdot)}\delta(T_{l-1},T_l)\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{P(T_j,t)(\cdot)}\left(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_{j-1},T_j) - \Big(1-R_j(\cdot)\Big)\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{87}$$

La deuxième expression dans (86) a seulement lieu d'être considérée que pour $m+1 \leq M$

et auquel cas on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\le T_M\}}\Phi_t(\cdot) &= \sum_{j=m+1}^{M} \mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\le T_j\}}\Phi_t(\cdot) \\
&= \sum_{j=m+1}^{M} \mathbb{I}_{\{T_{j-1}<\tau(\cdot)\le T_j\}}\Bigg[s_{cds}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{P(T_l,t)(\cdot)}\delta(T_{l-1},T_l) \\
&\qquad +s_{cds}\sum_{l=m}^{j-1}P(t,T_l)(\cdot)\delta(T_{l-1},T_l) \\
&\qquad +P(t,T_j)(\cdot)\Bigg(\frac{1}{2}s_{cds}\delta(T_{j-1},T_j)-\Big(1-R_j(\cdot)\Big)\Bigg)\Bigg]. \qquad (88)
\end{aligned}
$$

Pour la troisième expression dans (86) on a

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{I}_{\{T_M<\tau(\cdot)\}}\Phi_t(\cdot) \\
&\qquad = \mathbb{I}_{\{T_m<\tau(\cdot)\}}s_{cds}\Bigg(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{P(T_j,t)(\cdot)}\delta(T_{j-1},T_j) \\
&\qquad\qquad +\sum_{j=m}^{M}P(t,T_j)(\cdot)\delta(T_{j-1},T_j)\Bigg). \qquad (89)
\end{aligned}
$$

10 Exercice

10.1 CVA d'une option par simulation historique

Les cours passés mensuels d'une action XX sont donnés sont les suivants

```
 [1]  90.724  92.231  89.648  91.009  91.341  97.390  94.335  98.276  98.544
[10]  93.298  91.749  95.104  94.851  96.177  96.128  86.073  83.426  75.177
[19]  79.494  87.097  86.653  88.085  90.694  91.084  91.848  90.452  87.607
[28]  92.630  92.131  95.719  93.584  87.777  92.259  87.396  94.973  91.809
[37]  93.553  94.661  92.431  91.401  91.687  94.083  99.184  95.616  96.597
[46]  97.304  98.051  96.198  93.924  94.657  96.921  96.990  98.708 100.382
[55] 100.472  96.564  93.195  97.232 100.000
```

sachant que le dernier nombre désigne le cours à l'instant présent.

On considère une option-call vanille ATM de maturité restante 5 mois ayant XX comme sous-jacent. Pour simplifier, on suppose un taux d'intérêt annuel sans risque de crédit de 3% et une volatilité constante de 15%.

1. Visualisez d'abord l'évolution des cours passés.
2. Déterminer les 58 rendements (logarithmiques) passés de cette action XX.
3. En déduire une matrice, de taille 54×5, des rendements à utiliser pour générer des cours pour 5 instants futurs espacés de 1 mois.
4. Comme décrit dans le cours, déterminer une matrice, toujours de taille 54×5, formée par les rendements cumulés.
5. En se servant de la matrice de la question précédente, donner la matrice, de taille 54×6, formée par des trajectoires des cours spots de l'action XX pour les 5 instants futurs jusqu'à la maturité finale de l'option.
6. Calculer le prix Black-Scholes de l'option mentionné tout au début ci-dessus.
7. En supposant que la volatilité constante 15% reste valable pour les maturités restantes et niveaux de spots, donner les 54 scénarios de prix du call à la maturité finale. Pour cela il peut être commode d'afficher à la fois les cours de l'action XX et les prix d'options correspondants.
8. Déterminer la matrice, de taille 54×4, donnant des scénarios de prix du call pour les 4 mois à venir.
9. Afin de définir des expositions, assez conformes à l'intuition, pour les prix, on attache plus de poids aux scénarios assez récents des cours, comme dans l'approche risk-Metrics décrits dans le cours. en prenant un facteur de chargement $\lambda = 0.94$. Donner le vecteur des poids et en déduire le vecteur des expositions pour le call aux divers instants jusqu'à la maturité.
10. On suppose qu'il s'agit une opération OTC avec une contrepartie dont le risque de crédit est associé à un taux de recouvrement de 35% et une intensité de défaut de 125 bp. Dans le cadre de la détermination du CVA associé à ce produit, on travaille sur une discrétisation du temps avec un intervalle de longueur constante de 1 mois. Déterminer les courbes de taux, de probabilités de survie et de défaut associés à la situation considérée.

11. Donner enfin une valeur (approchée) du CVA et ainsi que le proportion qu'elle représente par rapport aux prix initial de l'option.

10.2 CVA d'une option par simulation paramétrique

On considère une option-call vanille ATM de maturité restante 3 ans dont l'action sous-jacent XX côte actuellement à 100. Pour simplifier la volatilité est supposée fixée à 15%. On suppose un taux d'intérêt annuel sans risque de crédit de 3%. Il s'agit d'une opération OTC avec une contrepartie dont le risque de crédit est associé à un taux de recouvrement de 35% et une intensité de défaut de 150 bp. On adopte une discrétisation du temps avec un pas de 1 mois (soit ainsi 36 instants futurs à considérer).

1. En travaillant par exemple sur R avec une graine fixée par **set.seed(250)**, donner une matrice, de taille $1\,000 \times 36$, constituée par des réalisations indépendantes d'une loi normale centrée réduite.

2. En utilisant le modèle classique de Black-Scholes, et la matrice des valeurs cumulées de la question précédente, trouver une matrice, de taille $1\,000 \times 36$, correspondant à 1 000 réalisations des cours spots de l'action XX aux divers 36 instants futurs jusqu'à la maturité de l'option.

3. Déterminer le prix actuel du call.

4. Donner aussi les 1 000 valeurs possibles de ce call à la maturité.

5. Déterminer les $1\,000\times 35$ réalisations possibles du prix du call aux instants futurs exceptés à la maturité, en supposant toujours que c'est la volatilité constante indiquée s'applique.

6. En déduire de la question précédente les 36 espérances d'exposition pour ce call, en d'autre terme il s'agit de la courbe des expositions.

7. Déterminer les courbes de taux, de probabilités de survie et de défaut étant donné le taux de marché et la qualité de crédit de la contrepartie.

8. Trouver enfin la valeur du CVA (indépendant) pour ce call ainsi que la proportion qu'elle représente par rapport au prix actuel de ce call.