

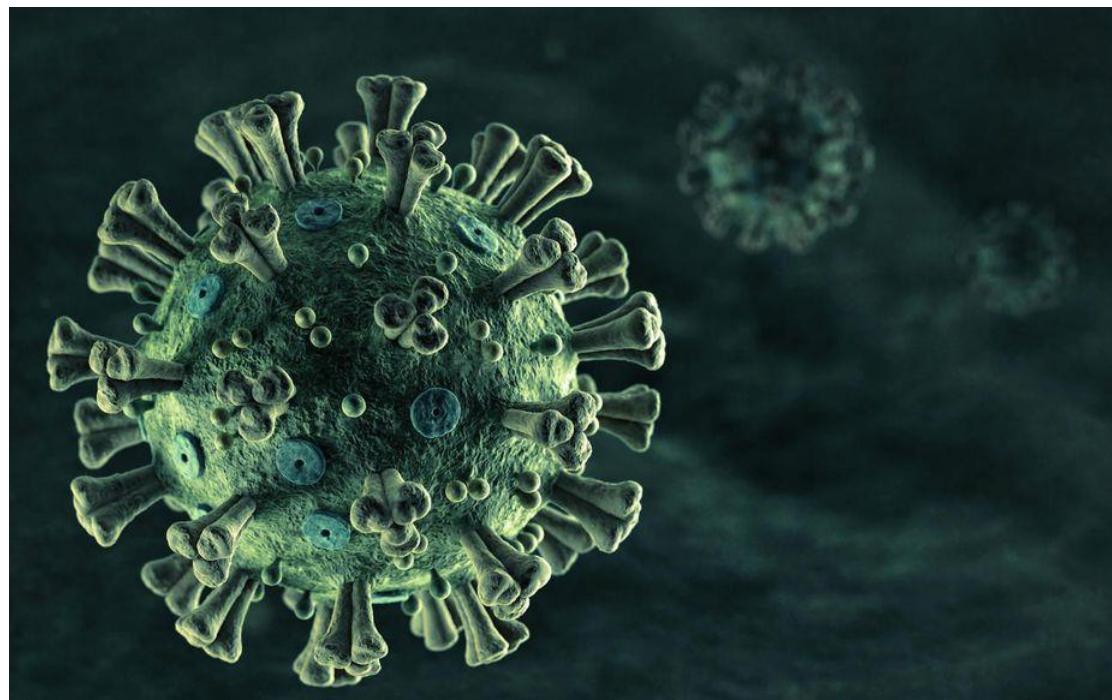
Projet S8 2021 – 2022

Modèle SIR spatialisé

Réalisé par :

De Gieter Hugo
Rouanet Clément

MACS 2



Encadré par :

M. Nicolas Vauchelet

SOMMAIRE

Introduction

I – Modèle SIR

II – Modèle SIR spatialisé

Conclusion

INTRODUCTION

Modèle SIR :

- Modèle mathématique permettant de représenter l'évolution d'une épidémie dans le temps.
- Extension → Spatialisation
- En quoi l'ajout d'une composante spatiale modifie-t-elle l'évolution de la maladie dans le temps ?

I – MODÈLE SIR : MODÉLISATION

Population divisé en 3 catégories :

- S : individus « sains »
- I : individus « infectés »
- R : individus « rétablis »

Hypothèses :

- Négligence phénomènes démographiques → population supposée constante
- Un individu quitte les « sains » qu'en devenant infecté
- Les individus ayant contractés la maladie, deviennent immunisés
- Toutes les personnes malades finissent par guérir ou mourir

I – MODÈLE SIR : MODÉLISATION

On a à tout instant t :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

On introduit :

- r le taux d'infection
- j la durée moyenne d'infection
- a le taux de guérison $\rightarrow a = \frac{1}{j}$

Le problème est le suivant :

$$\forall t \in [0, T], \quad \begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = -rS(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt}(t) = rS(t)I(t) - aI(t) \\ \frac{dR}{dt}(t) = aI(t) \end{cases}$$

avec $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$, $R(0) = 0$.



I – MODÈLE SIR : SIMULATION

Pour approcher numériquement S , I et R , on utilise un schéma aux différences finies :

Soit $(t_i)_{i=0}^M$ la discrétisation régulière de $[0, T]$ en $M + 1$ points :

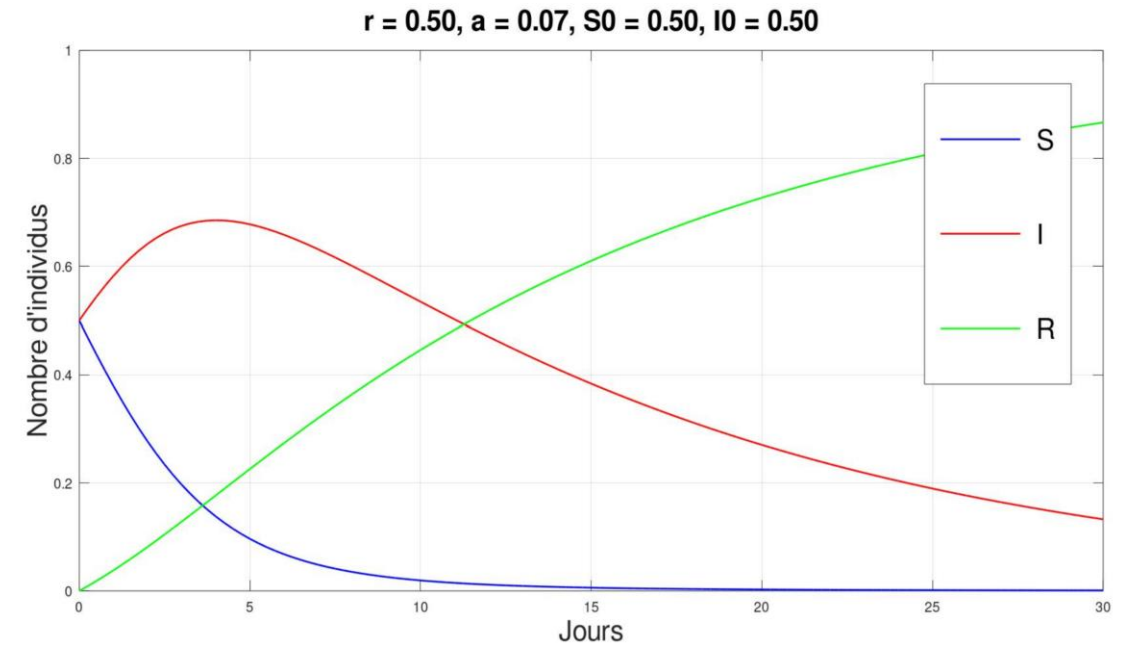
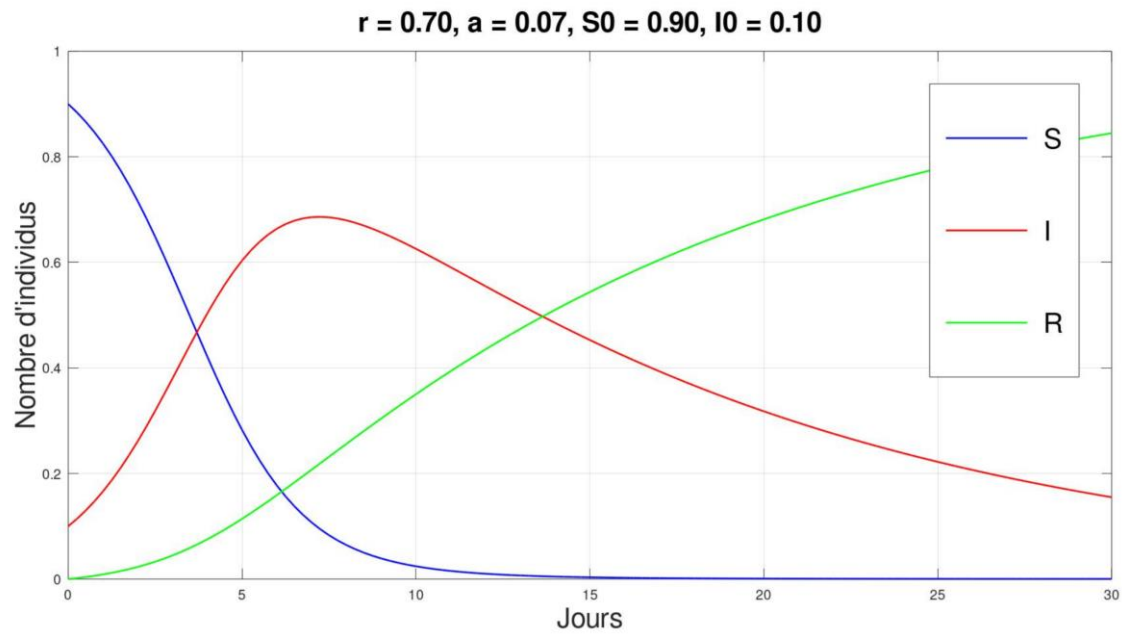
$$t_i = i \times dt, \quad \forall i \in [0, M] \text{ avec } dt = \frac{T}{M}$$

On obtient :

$$\forall i \in [0, M], \quad \begin{cases} \frac{S^{i+1} - S^i}{dt} = -rS^iI^i \\ \frac{I^{i+1} - I^i}{dt} = rS^iI^i - aI^i \\ \frac{R^{i+1} - R^i}{dt} = aI^i \end{cases}$$

$$\text{avec } S^0 = S_0 \geq 0, \quad I^0 = I_0 \geq 0, \quad R^0 = 0.$$

I – MODÈLE SIR : RÉSULTATS



II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : MODÉLISATION

On reprend le modèle précédent avec ses hypothèses.

On obtient le système suivant :

$$\forall t \in [0, T] \text{ et } \forall x, y \in \Omega,$$

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t, x, y) = D\Delta S(t, x, y) - rS(t, x, y)I(t, x, y) \\ \frac{dI}{dt}(t, x, y) = D\Delta I(t, x, y) + rS(t, x, y)I(t, x, y) - aI(t, x, y) \\ \frac{dR}{dt}(t, x, y) = D\Delta R(t, x, y) + aI(t, x, y) \end{cases}$$

$$\text{avec } S(0, x, y) = S_0 \geq 0, \quad I(0, x, y) = I_0 \geq 0, \quad R(0, x, y) = 0.$$

$$\frac{dS}{dn}(t, x, y) = g \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\frac{dI}{dn}(t, x, y) = h \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\frac{dR}{dn}(t, x, y) = k \text{ sur } \partial\Omega$$

où T est le temps final tel que $T \geq 0$;

D est le coefficient de diffusion tel que $D \in [0, 1]$;

Ω est un rectangle représentant le domaine et $\partial\Omega$ son bord.

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : SIMULATION

Nous allons approcher les dérivées en temps grâce au schéma d'Euler semi-implicite, qui est de la forme :

$$y^{n+1} = y^n + dt \left(D\Delta y^{n+1} + f(t^n, y^n) \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\forall n \in [0, N-1] \text{ et } \forall x, y \in C, \quad \begin{cases} S^{n+1}(x, y) - dt D\Delta S^{n+1}(x, y) = S^n(x, y) - r dt S^n(x, y) I^n(x, y) \\ I^{n+1}(x, y) - dt D\Delta I^{n+1}(x, y) = I^n(x, y) + dt \left(r S^n(x, y) I^n(x, y) - a I^n(x, y) \right) \\ R^{n+1}(x, y) - dt D\Delta R^{n+1}(x, y) = R^n(x, y) + a dt I^n(x, y) \end{cases}$$

avec $S^0 = S_0$, $I^0 = I_0$ et $R^0 = 0$

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : SIMULATION

Soit $V = H^1(\Omega)$.

On obtient donc le problème variationnel suivant :

(PV) Trouver $S, I, R \in V$ tel que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} S^{n+1} v dx dy + dt D \int_{\Omega} \nabla S^{n+1} \nabla v dx dy - \int_{\Omega} S^n v dx dy + r dt \int_{\Omega} S^n I^n v dx dy = \underbrace{dt D \int_{\partial\Omega} g v ds}_{=0} \\ \int_{\Omega} I^{n+1} v dx dy + dt D \int_{\Omega} \nabla I^{n+1} \nabla v dx dy - \int_{\Omega} I^n v dx dy - dt \int_{\Omega} (r S^n I^n - a I^n) v dx dy = \underbrace{dt D \int_{\partial\Omega} h v ds}_{=0} \\ \int_{\Omega} R^{n+1} v dx dy + dt D \int_{\Omega} \nabla R^{n+1} \nabla v dx dy - \int_{\Omega} R^n v dx dy - a dt \int_{\Omega} I^n v dx dy = \underbrace{dt D \int_{\partial\Omega} k v ds}_{=0} \end{cases}$$

$$\forall v \in V$$

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : ANALYSE

On va montrer l'existence et l'unicité de la solution S pour l'équation (1).

Pour cela, on vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram ; afin de pouvoir l'appliquer.

On pose :

$$a(S, v) = \int_{\Omega} S^{n+1} v dx dy + dt D \int_{\Omega} \nabla S^{n+1} \nabla v dx dy - \int_{\Omega} S^n v dx dy + r dt \int_{\Omega} S^n I^n v dx dy$$

$$L(v) = dt D \int_{\partial\Omega} g v ds$$

a est une forme bilinéaire, continue et coercive.

L est une forme linéaire continue.

$V = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

\implies On applique le théorème de Lax-Milgram.

\implies Le problème variationnel (PV) admet une unique solution.

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : RÉSULTATS

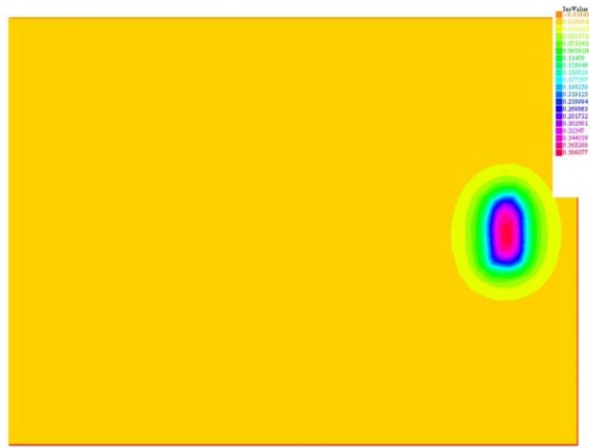
$$S_0 = 0,9$$

$$I_0 = 0,1$$

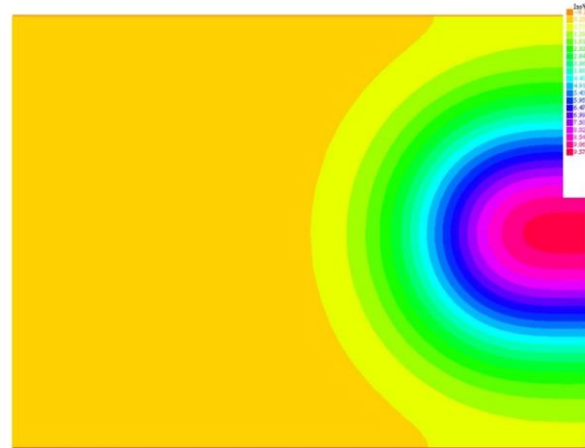
$$r = \frac{1}{14}$$

$$a = 0,7$$

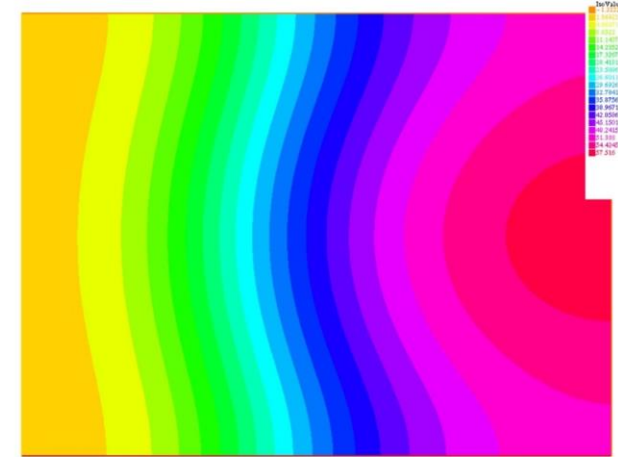
$$D = 0,1$$



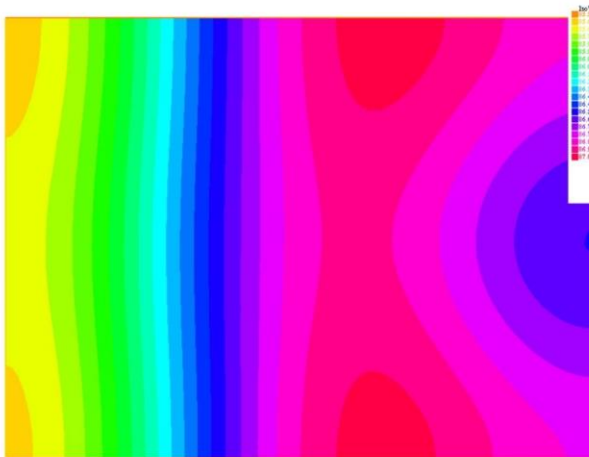
t = 0.083



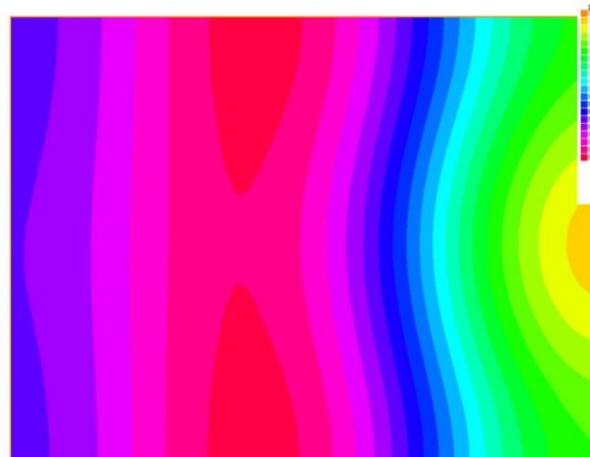
t = 1.25



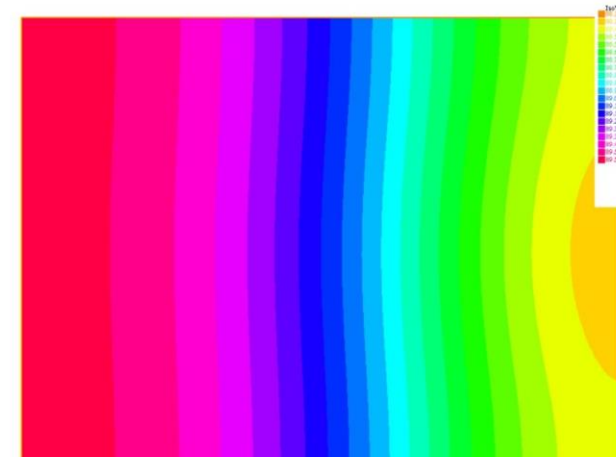
t = 2.83



t = 7.25



t = 8.41



t = 10.583

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : RÉSULTATS

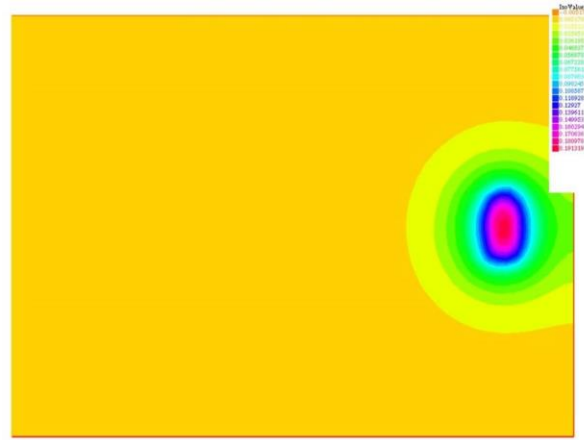
$$S_0 = 0,9$$

$$I_0 = 0,1$$

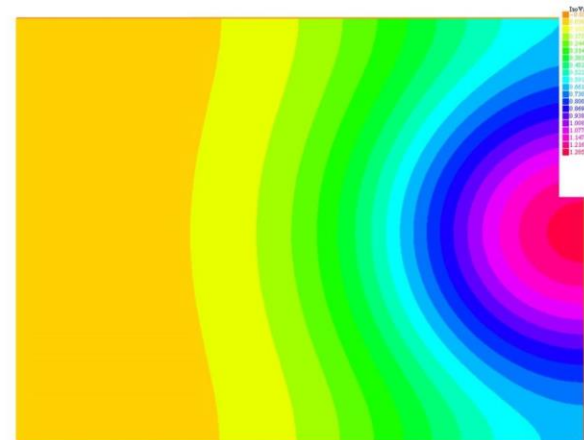
$$r = \frac{1}{14}$$

$$a = 0,7$$

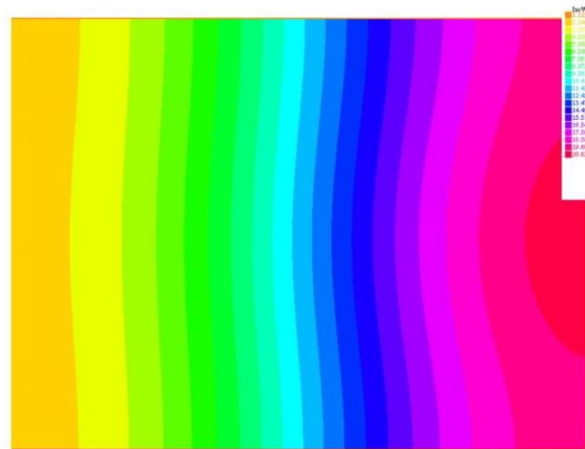
$$D = 0,5$$



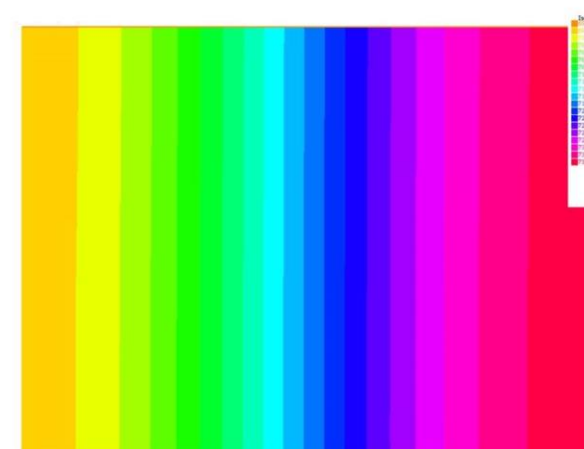
t = 0.083



t = 0.83



t = 1.75



t = 4

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : RÉSULTATS

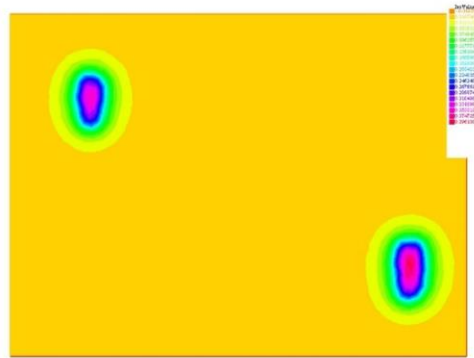
$$S_0 = 0,9$$

$$I_0 = 0,1$$

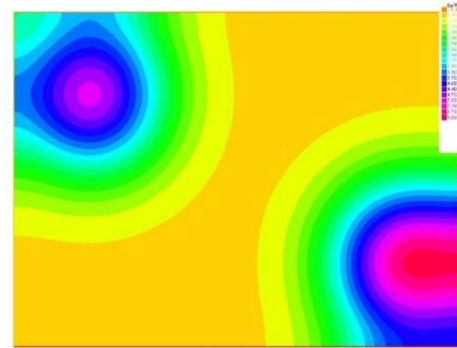
$$r = \frac{1}{14}$$

$$a = 0,7$$

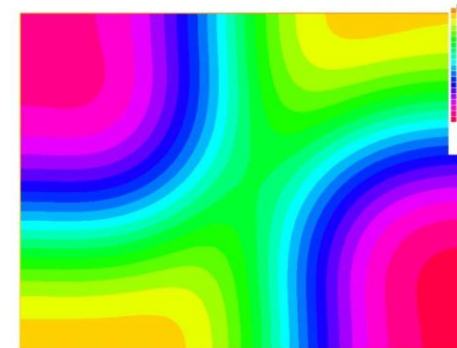
$$D = 0,1$$



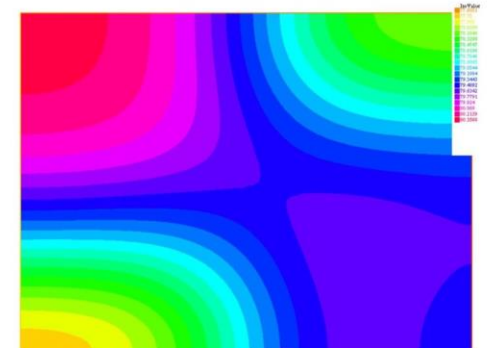
t = 0.083



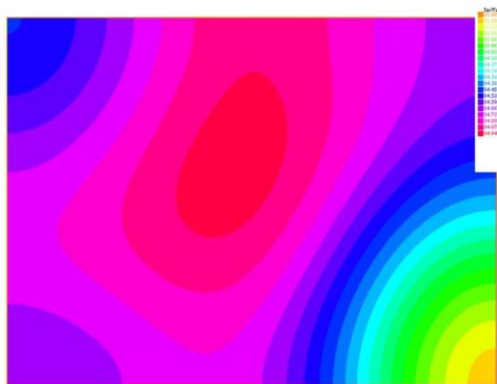
t = 1.08



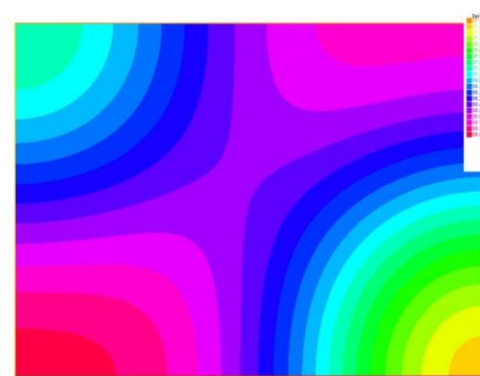
t = 2



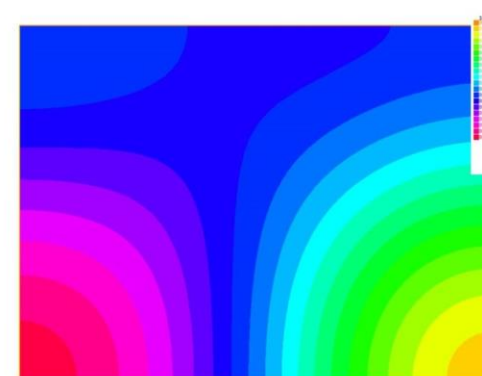
t = 4.91



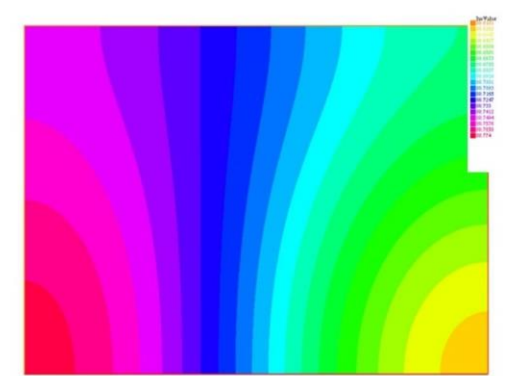
t = 6.08



t = 9.25



t = 19.75



t = 30

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : RÉSULTATS

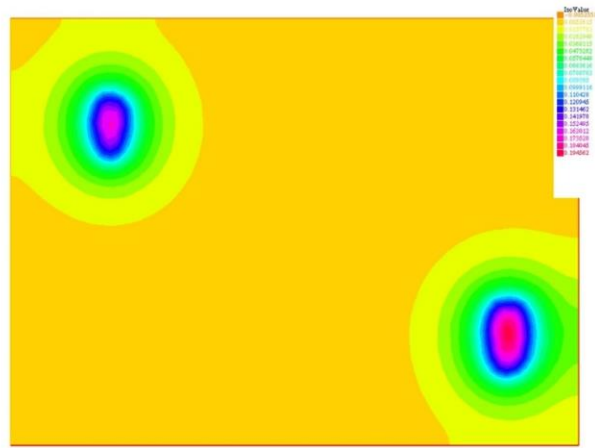
$$S_0 = 0,9$$

$$I_0 = 0,1$$

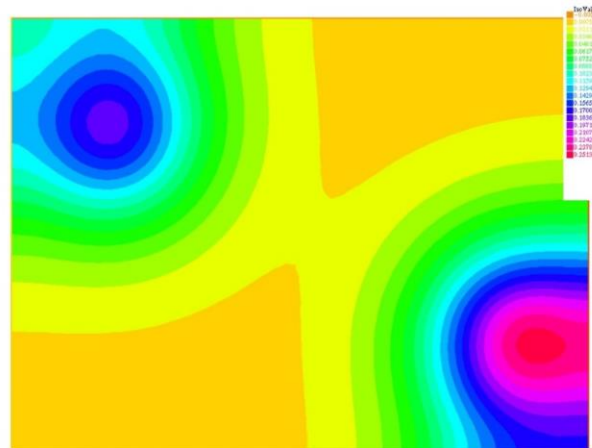
$$r = \frac{1}{14}$$

$$a = 0,7$$

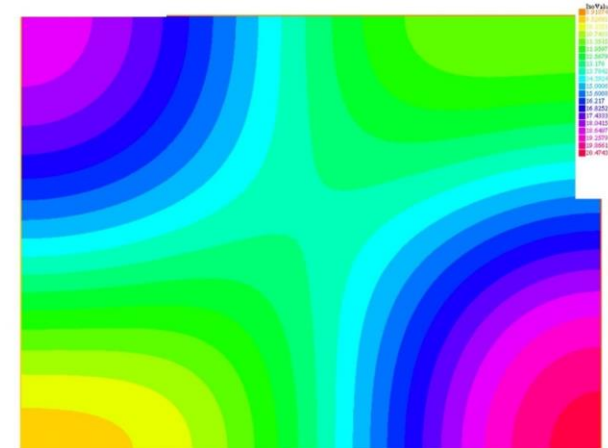
$$D = 0,5$$



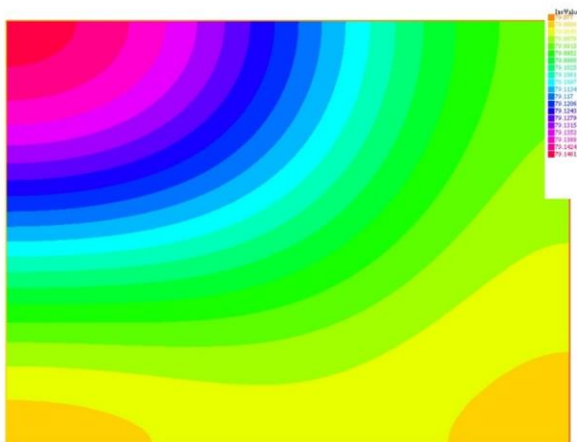
t = 0.083



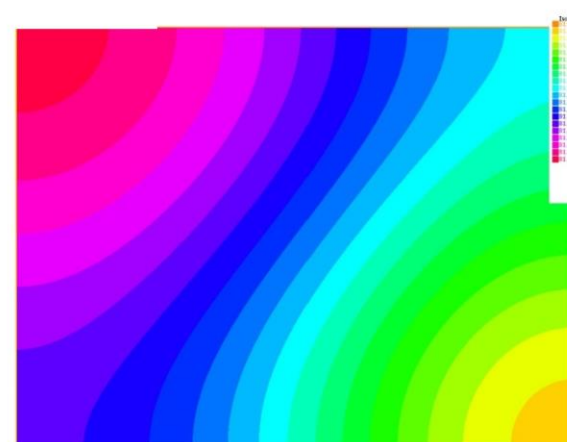
t = 0.33



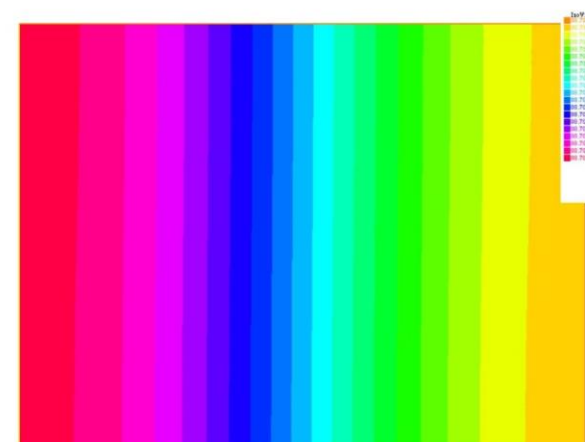
t = 1.66



t = 4.58



t = 4.91



t = 20

II – MODÈLE SIR SPATIALISÉ : RÉSULTATS

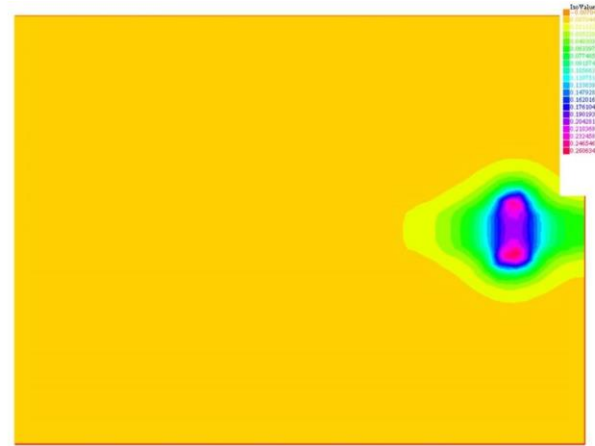
$$S_0 = 0,9$$

$$I_0 = 0,1$$

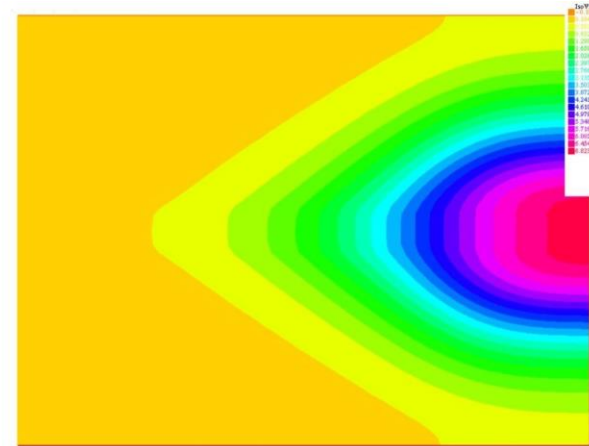
$$r = \frac{1}{14}$$

$$a = 0,7$$

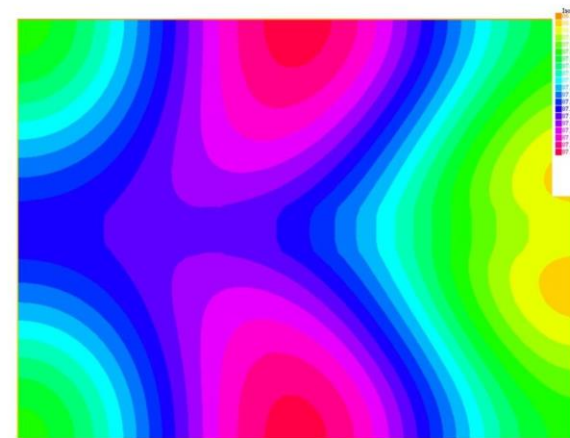
$$\begin{aligned}
 D &= 0.1(! (y < 1.6m \ \&\& \ y > 1.4m)) \\
 &\quad + 0.5(y < 1.6m \ \&\& \ y > 1.4m)
 \end{aligned}$$



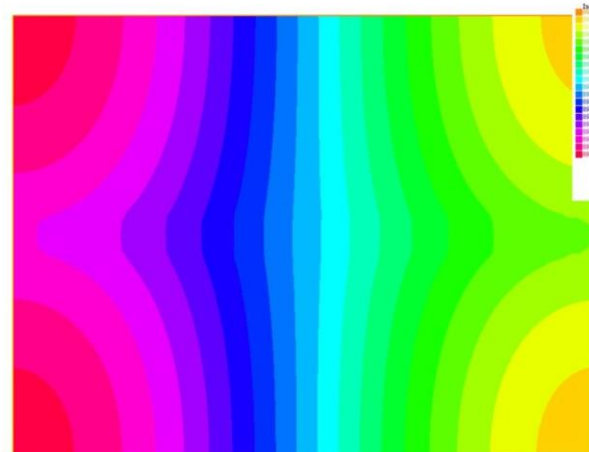
t = 0.083



t = 1.16



t = 7.16

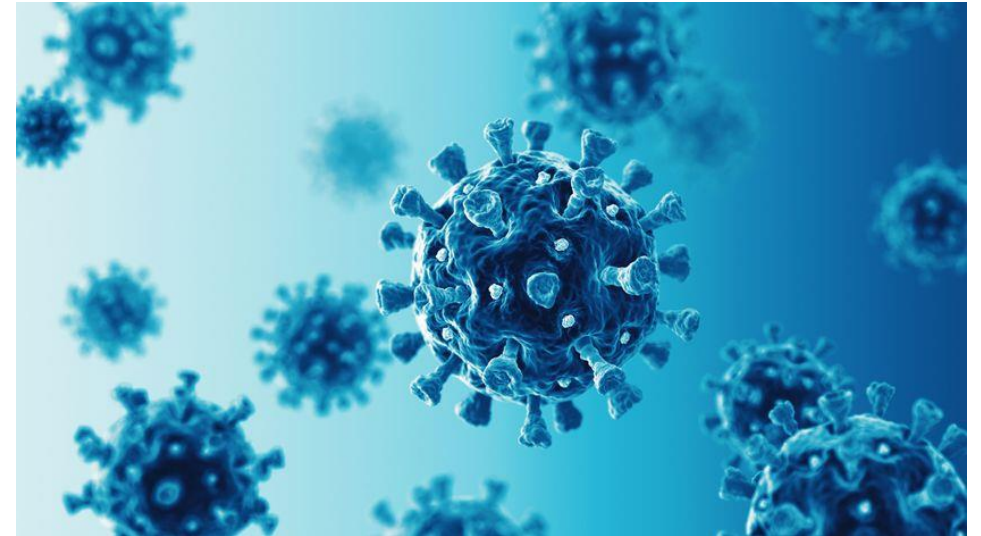


t = 20

CONCLUSION

Pertinence du modèle :

- Modèle simple
- Peu de paramètres
- Facilement programmable
- Modèle assez réaliste



Observations grâce à la simulation :

- Propagation selon la longueur
- Coefficient de diffusion