AP3 juin 2021

Sans Document

Avec Calculatrice

Devoir Surveillé
Traitement du Signal

Les réponses seront expliquées, justifiées et correctement rédigées

Evaluation des connaissances

1. Enoncer le théorème de Shannon en expliquant toutes les variables que vous y faites figurer
2. Comment obtenir très simplement la composante continue d'un signal x(t) à partir de sa transformée de Fourier ?
3. A quoi sert la quantification d'un signal ?
4. Citer une utilisation de la convolution essentielle pour le traitement du signal

Exercice 1

Soit le signal : $x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) & si \quad |t| \leq 2ms \\ 0 & si \quad |t| > 2ms \end{cases}$

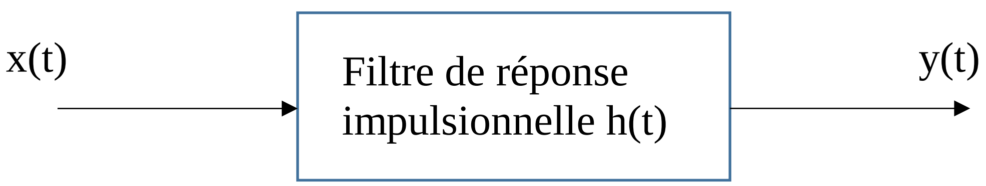
Avec A = 1 Volt et f_0 = 1kHz

1. Représenter x(t)
2. Proposer une nouvelle écriture pour le signal x(t) qui utilisera une fonction p(t) de type « porte » que l'on définira.
3. De cette nouvelle écriture, déduire X(f) la transformée de Fourier de x(t).
4. Représenter alors le spectre d'amplitude

Exercice 2

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t \leq 1ms \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

En entrée duquel on place un signal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ avec f_1= 2 kHz



1. Calculer la réponse en fréquence du filtre (c'est-à-dire la transformée de Fourier de h(t)) et représenter son spectre d'amplitude.

2. Déterminer le signal y(t) en sortie du filtre. Différentes méthodes de calculs sont possibles.

FORMULAIRE

Formules Trigo:

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle : $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$
  $x(kt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps
    $$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
    $$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon)$$
  - Par rapport à la fréquence
    $$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
    $$t^n x(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n}$$

Théorème de Plancherel

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon).Y(\upsilon)$$
$$x(t).y(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) * Y(\upsilon)$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

Transformée de Fourier d'un cosinus et d'un sinus

$$x(t) = A\cos(2\pi\upsilon_0 t) = \frac{A}{2}\left(e^{2\pi j\upsilon_0 t} + e^{-2\pi j\upsilon_0 t}\right)$$

$$\Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2}\left[\delta(\upsilon - \upsilon_0) + \delta(\upsilon + \upsilon_0)\right]$$

$$x(t) = A\sin(2\pi\upsilon_0 t) = \frac{A}{2j}\left(e^{2\pi j\upsilon_0 t} - e^{-2\pi j\upsilon_0 t}\right)$$

$$\Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2}\, j\left[\delta(\upsilon + \upsilon_0) - \delta(\upsilon - \upsilon_0)\right]$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X(\nu = \frac{k}{NT_e}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & & \text{Colonne numéro n} \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Ligne} \\ \text{Numéro} \\ \text{k}\end{array} &
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}
\end{array}$$