AP3 juin 2021

Sans Document, Avec Calculatrice

PARTIEL

TRAITEMENT DU SIGNAL

Les réponses et raisonnements seront clairement justifiée et rédigés

Exercice 1 :

Pour réaliser une transmission de données à l'aide d'un système sans fil, un ingénieur opte pour un système à base de modulations.

1. L'information à transmettre est en fait un sinus de fréquence 7 kHz et d'amplitude 1 volt.

   Pour la transmission, l'ingénieur opte pour une modulation d'amplitude analogique consistant à multiplier l'information ci-dessus par un signal porteur qui sera ici un cosinus d'amplitude 2 volts, à la fréquence 60,5kHz.
   Calculer et représenter la transformée de Fourier de ce signal transmis x(t).

2. Un autre ingénieur, recevant ce signal x(t), souhaite le traiter de façon numérique.

   a. Quelles consignes détaillées lui donneriez-vous pour numériser ce signal ? justifiez vos conclusions
   b. Représenter précisément le spectre d'amplitude de ce signal numérisé.

3. Ce second ingénieur souhaite traiter 3 millisecondes de ce signal reçu et numérisé qu'il va enregistrer. Sous Matlab il souhaite en visualiser la Transformée de Fourier Discrète avec une résolution de 0,2 kHz.

   a. Son approche pour calculer et représenter une TFD facilement lisible et interprétable de ce signal vous semble-t-elle correcte par rapport au cahier des charges ? Si ce n'est pas le cas que proposez-vous de modifier ? Toutes vos réponses seront ici expliquées
   b. En supposant qu'il tienne compte de vos éventuelles remarques, représenter le module de la TFD.

4. Dans la suite de son analyse et indépendamment de l'analyse spectrale réalisée à la question 3, ce second ingénieur reprend le signal analogique x(t) qu'il a reçu et le remultiplie par un cosinus d'amplitude 1 volt, à la fréquence 60,5kHz. Il obtient un signal que nous noterons y(t).

   a. Calculer l'expression temporelle de y(t)
   b. Représenter le spectre d'amplitude de y(t)
   c. Expliquer l'intérêt de cette opération.

Exercice 2 :

Un ingénieur spécialisé en traitement du signal souhaite stocker sur un disque dur un enregistrement de 2 secondes d'un signal audio x(t) constitué de deux sinus :

- L'un est de fréquence 520 Hz, et d'amplitude comprise entre 0V et 6V
- L'autre est de fréquence 1400Hz et d'amplitude comprise entre -2V et 2V

Il constate donc sans autre analyse que l'amplitude est bornée par -2V et 6V.

Pour réaliser cette opération de numérisation, il utilise un convertisseur analogique-numérique dont il doit régler la fréquence d'échantillonnage et le type de quantification.

Aidez-le à réaliser ce paramétrage correctement sachant qu'on lui a imposé quelques contraintes :

- une erreur de quantification maximale en valeur absolue de 0,1V est autorisée.
- les valeurs quantifiées ne pourront être codées sur plus de 8 bits.
- Il y a très peu de place sur le disque dur pour stocker cet enregistrement.

FORMULAIRE

Formules Trigo:

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle : $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$

  $$x(kt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps

  $$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$

  $$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon)$$

- Par rapport à la fréquence

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
$$t^n x(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n}$$

Théorème de Plancherel

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon).Y(\upsilon)$$
$$x(t).y(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) * Y(\upsilon)$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

Transformée de Fourier d'un cosinus et d'un sinus

$$x(t) = A\cos(2\pi\upsilon_0 t) = \frac{A}{2}\left(e^{2\pi j\upsilon_0 t} + e^{-2\pi j\upsilon_0 t}\right)$$
$$\Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2}\left[\delta(\upsilon - \upsilon_0) + \delta(\upsilon + \upsilon_0)\right]$$

$$x(t) = A\sin(2\pi\upsilon_0 t) = \frac{A}{2j}\left(e^{2\pi j\upsilon_0 t} - e^{-2\pi j\upsilon_0 t}\right)$$
$$\Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2} j\left[\delta(\upsilon + \upsilon_0) - \delta(\upsilon - \upsilon_0)\right]$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X(\nu = \frac{k}{NT_e}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \text{Colonne numéro } n & & \end{array} \\ \begin{array}{l} \\ \\ \text{Ligne Numéro } k \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix} \end{array}$$