

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR  
Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique  
UFR Sciences  
LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET D'ACOUSTIQUE - UPR CNRS 7051

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Sciences pour l'ingénieur  
Spécialité : Acoustique

Pierre Vigué

Solutions périodiques et quasi-périodiques  
de systèmes dynamiques d'ordre entier ou fractionnaire -  
Applications à la corde frottée

Soutenue le 21/09/2017 devant le jury :

José ANTUNES	Principal Researcher, ITN, Sacavém	Rapporteur
Olivier THOMAS	Professeur, LSIS, Lille	Rapporteur
Sébastien BAGUET	Maître de conférences, INSA / LaMCoS, Lyon	Examinateur
Gaëtan KERSCHEN	Professeur, LTAS, Liège	Examinateur
Christophe VERGEZ	Directeur de recherche CNRS, LMA, Marseille	Directeur de thèse
Bruno COCHELIN	Professeur, ECM / LMA, Marseille	Co-directeur de thèse



# Remerciements

Le travail présenté ici n'aurait pas pu être accompli sans l'aide et de nombreux coups de mains décisifs de plusieurs personnes, envers qui je suis extrêmement reconnaissant. Je tiens à remercier très chaleureusement mon directeur, Christophe Vergez. L'aventure a commencé lorsqu'il a accepté ma candidature pour un stage inspiré par le violon, donnant sa chance à un étudiant de mathématiques de s'éloigner de son domaine<sup>1, 2</sup>. Travailleur avec lui est un immense plaisir ; sa curiosité, sa patience inusable, son enthousiasme (toujours présent dans les coups de mou) sont quelques-unes de ses qualités les plus saillantes qui m'ont immensément aidé. Encore une fois, cher Christophe, merci beaucoup ! Mon co-directeur, Bruno Cochelin, a été tour à tour l'ange gardien (confirmant à Christophe l'intérêt du premier stage), le référent en méthodes numériques, le souffleur de théâtre<sup>3</sup>... et pour tout cela je l'en remercie.

Le travail de lecture et d'examination est fort utile<sup>4</sup> mais aussi fort prenant. Je remercie José Antunes et Olivier Thomas de m'avoir fait l'honneur d'en être les deux rapporteurs, Sébastien Baguet et Gaëtan Kerschen d'en être les examinateurs, et un point bonus est offert à Olivier pour avoir accepté d'endosser le rôle de président du jury suite à un contre-temps de transport.

Merci à mes parents, à qui je dois beaucoup plus que le fait d'être là : une certaine persévérance, leur soutien sans faille quand ladite persévérance ne suffit pas, le goût des mathématiques ; mais aussi des sœurs nombreuses et différentes, dont la première, Hélène, m'a refilé le virus du violon lorsque j'étais petit. Mes amis ont su m'encourager, garder patience, me dire maroum et inventer des mots<sup>5</sup>, étendre le concept de paronymie et être là au bon moment. Merci à toutes et tous.

Cette thèse m'a permis de côtoyer au sein du LMA des chercheurs motivants, d'horizons variés, et je tiens à remercier en particulier Fabrice Silva, pour sa perspective sur les méthodes numériques et sa bonne humeur, et Philippe Herzog pour son excellente question sur la continuation selon l'ordre fractionnaire qui a motivé des améliorations de la troisième partie de ce travail. Je n'oublie pas non plus plusieurs thésards, en cours ou en devenir à l'époque des faits, notamment Sami pour la hotline Manlab et les innombrables relectures d'articles, Soizic pour les questions toriques, Lionel pour la cohabitation bien agréable, Pierre-Yvon pour les discussions au café<sup>6</sup>, Volodymyr qui a eu l'œil pour identifier que la machine à café était devenue ma manip, Tom pour sa bonne humeur, et Louis, stagiaire formidable dont l'apport sur le quasi-périodique a été majeur, excellent clarinettiste, humble, opiniâtre, aussi drôle que gentil, et je poursuivrais l'éloge si je ne craignais pas de lasser le lecteur.

Enfin, Kelly, pour ton aide, ta gentillesse, ta joie, ton audace, et mille autres choses que nous avons partagées, merci.

---

1. J'aurais pu écrire « d'ajouter une corde à son arc » mais ce serait tendre vers des jeux de mots trop évidents autour du violon.

2. La rédaction de notes de bas de page étant une passion personnelle, autant commencer dès le début de ce document.

3. Où en serait-on si l'on n'avait pas utilisé la matrice de convolution (de matrices) ?

4. C'est en tout cas le point de vue du candidat.

5. Ex : maroum.

6. Oui, et pour les pâtisseries.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Présentation du modèle et des méthodes</b>	<b>15</b>
1.1 Régimes étudiés . . . . .	15
1.2 Autour du violon . . . . .	17
1.2.1 Premiers résultats théoriques classiques sur la corde . . . . .	17
1.2.2 Un bref historique . . . . .	19
1.3 Modèle retenu . . . . .	23
1.3.1 Équation de la corde avec terme source . . . . .	23
1.3.2 Modes propres . . . . .	24
1.3.3 Raideur, amortissement . . . . .	26
1.3.4 Loi de friction . . . . .	27
1.3.5 A-t-on un violon ? . . . . .	29
1.4 Continuation, bifurcation : un mot sur les systèmes dynamiques . . . . .	30
1.4.1 Branche de solution . . . . .	30
1.4.2 Premier exemple de méthode de continuation : prédiction, correction . . .	31
1.4.3 Bifurcation . . . . .	33
1.5 Méthodes numériques employées . . . . .	34
1.5.1 Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	35
1.5.2 Équilibrage Harmonique . . . . .	37
1.5.3 Méthode de Hill . . . . .	39
1.6 Exemple . . . . .	42
Annexes . . . . .	49
1.A Théorème des fonctions implicites . . . . .	49
1.B Théorème de la bifurcation de Hopf . . . . .	49
1.C Théorème de Floquet . . . . .	49
<b>I Solutions périodiques de la corde frottée</b>	<b>55</b>
<b>2 Regularized friction and continuation : Comparison with Coulomb's law</b>	<b>57</b>
Résumé . . . . .	57
Abstract . . . . .	58
2.1 Introduction . . . . .	59
2.2 Model . . . . .	60
2.3 Periodic stick-slip solution using Coulomb's friction law . . . . .	61
2.3.1 Coulomb's law . . . . .	61
2.3.2 Slipping . . . . .	62

2.3.3 Does slipping stop ? . . . . .	62
2.3.4 Sticking . . . . .	63
2.4 Regularized friction law . . . . .	64
2.5 Periodic solutions using a regularized friction law . . . . .	66
2.5.1 Quadratic recast . . . . .	66
2.5.2 Continuation with respect to the belt speed . . . . .	67
2.5.3 Continuation with respect to the normal force . . . . .	70
2.6 Conclusion . . . . .	70
Annexes . . . . .	74
2.A Regularization construction . . . . .	74
2.B Jacobian matrix . . . . .	75
2.C Remarques . . . . .	75
2.D Cycle stick-slip pour $n$ grand . . . . .	76
<b>3 Assessment of the harmonic balance method</b>	<b>81</b>
Résumé . . . . .	81
Abstract . . . . .	82
3.1 Introduction . . . . .	82
3.2 Model and theoretical background . . . . .	84
3.2.1 Model equations . . . . .	84
3.2.2 Numerical methods . . . . .	85
3.3 Comparison protocol . . . . .	86
3.3.1 Reference solution . . . . .	86
3.3.2 Norm . . . . .	86
3.3.3 Test solution . . . . .	87
3.4 Error results . . . . .	87
3.4.1 Case W1 : weakly nonlinear system, situation 1 . . . . .	87
3.4.2 Case W2 : weakly nonlinear system, situation 2 . . . . .	90
3.4.3 Case S1 : stiff system, situation 1 . . . . .	91
3.4.4 Case S2 : stiff system, situation 2 . . . . .	91
3.5 Conclusion . . . . .	94
<b>4 Vers un modèle de corde plus réaliste</b>	<b>97</b>
4.1 Introduction . . . . .	97
4.2 Amortissement visqueux . . . . .	100
4.2.1 Continuation selon la vitesse d'archet . . . . .	100
4.2.2 Continuation selon la force normale . . . . .	108
4.3 Amortissement modal constant . . . . .	113
4.4 Raideur de la corde . . . . .	113
4.5 Extension de la base modale . . . . .	115
4.5.1 Combien de modes ? . . . . .	115
4.5.2 Modification de l'équilibrage harmonique . . . . .	117
4.5.3 Exploitation des résultats . . . . .	118
<b>II Solutions quasi-périodiques</b>	<b>121</b>
<b>5 Continuation of quasi-periodic solutions</b>	<b>123</b>
Résumé . . . . .	123

## Table des matières

Abstract . . . . .	124
5.1 Introduction . . . . .	124
5.2 Asymptotic Numerical Method (ANM) . . . . .	125
5.3 Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM . . . . .	127
5.3.1 Coupling HBM and ANM : a sketch of the method . . . . .	127
5.3.2 Description of the periodic HBM coupled with the ANM . . . . .	127
5.3.3 Quasi-periodic HBM . . . . .	129
5.4 Forced Van der Pol oscillator . . . . .	132
5.4.1 Quadratic formulations, continuation of periodic solution . . . . .	132
5.4.2 Frequency-locking regions . . . . .	135
5.5 Coupled Van der Pol oscillators . . . . .	140
5.6 Conclusion . . . . .	144
<b>6 Discussions sur le calcul des branches de solutions quasi-périodiques</b>	<b>147</b>
6.1 Branche de solution . . . . .	147
6.2 Troncature de la série double . . . . .	148
6.3 Cas pathologiques : petits entiers, sous-harmoniques . . . . .	148
6.4 Que fait le rapport des pulsations ? . . . . .	149
6.5 Perspectives : stabilité, coexistence . . . . .	152
<b>7 Algorithme rapide de calcul de la Jacobienne</b>	<b>155</b>
7.1 Motivation et principe général . . . . .	155
7.2 Notations : complexes et réels . . . . .	157
7.3 Application linéaire : passage en réels . . . . .	157
7.4 Opérateur de dérivation . . . . .	158
7.5 Petit opérateur quadratique : autour de la matrice de convolution . . . . .	159
7.5.1 Suppression de lignes . . . . .	160
7.5.2 Opérations sur les colonnes . . . . .	160
7.5.3 Concaténation, permutation, passage en réels . . . . .	162
7.6 Temps de calcul . . . . .	162
<b>III Modèle thermique de colophane, opérateurs fractionnaires</b>	<b>165</b>
<b>8 Du modèle thermique à la dérivation fractionnaire</b>	<b>167</b>
8.1 Introduction . . . . .	167
8.2 Formulation initiale du modèle thermique de Smith et Woodhouse . . . . .	168
8.3 Une première implémentation : convolution discrète . . . . .	169
8.4 Introduction de la dérivée fractionnaire . . . . .	171
8.5 Second terme de convolution . . . . .	173
8.6 Transformées de Fourier des opérateurs fractionnaires . . . . .	174
<b>9 Continuation of periodic solutions for systems with fractional derivatives</b>	<b>181</b>
Résumé . . . . .	181
Abstract . . . . .	182
9.1 Introduction . . . . .	182
9.2 General framework . . . . .	183
9.2.1 Continuation of periodic solutions : coupling the ANM and the HBM . .	183
9.2.2 Weyl fractional derivative and integral . . . . .	184

*Table des matières*

9.3	Harmonic Balance with Weyl derivative (HBW) . . . . .	185
9.3.1	Expression of the Fourier coefficients . . . . .	185
9.3.2	A simple implementation : constant rational order . . . . .	186
9.3.3	Implementation : general case . . . . .	186
9.4	Diffusive representation and approximation . . . . .	187
9.5	Examples of continuation . . . . .	188
9.5.1	Continuation with constant rational order . . . . .	188
9.5.2	Continuation with respect to the derivation order . . . . .	190
9.6	Link with the Caputo derivative . . . . .	191
9.7	Conclusion . . . . .	193
	Annexes . . . . .	195
9.A	ANM equations for the continuation with respect to the fractional order . . . . .	195
9.B	Diffusive representation and approximation . . . . .	196
9.B.1	Diffusive representation . . . . .	196
9.B.2	Diffusive approximation . . . . .	196
9.C	Initial condition for the diffusive approximation . . . . .	197
9.D	Lemma . . . . .	198
9.E	Un exemple . . . . .	200
	<b>Conclusion générale</b>	<b>205</b>

# Introduction

La vie sans la musique, en plus d'être selon une phrase fameuse une erreur<sup>1</sup>, semble fort improbable. Les objets pratiques les plus anciens utilisés par les humains produisent couramment des sons, et peuvent être modifiés pour poursuivre ce seul but. Une fois que l'on a entendu la détente d'un arc, on peut vouloir concevoir une harpe ; heurter un bol métallique est presque une sonnerie de cloche. Ces exemples, si simples à entrevoir *a posteriori*, ont en fait donné lieu à de longues recherches<sup>2</sup>. En dépit des apparences la harpe et la cloche ont un fonctionnement proche. Le musicien donne une certaine énergie initiale à un système. Celui-ci répond par des mouvements, dont une partie de l'énergie sera rayonnée (par l'instrument entier pour la cloche, par la table d'harmonie pour la harpe) et parviendra aux oreilles de l'auditeur. Par ce rayonnement et par divers mécanismes dissipatifs pouvant échapper au musicien, l'instrument épouse l'énergie disponible et retourne au silence. Ce sont des oscillations libres. Un exemple simple de système linéaire est le système masse, ressort et amortisseur modélisé par l'équation :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (1)$$

Pour un amortissement faible ( $\zeta < 1$ ), et après l'instant initial où l'on a donné certaines conditions de position et vitesse, les solutions sont des oscillations d'enveloppe exponentielle :

$$x(t) = A \exp(-\zeta\omega_0 t) \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi) \quad (2)$$

où  $A$  et  $\varphi$  dépendent des conditions initiales.

Nous avons envisagé dans un premier temps le geste musical d'impulsion. Si l'on ajoutait dans le second membre de l'éq. (1) un terme de force plus réaliste, il serait non nul sur un bref intervalle après  $t = 0$  et nul ensuite. Par exemple, le marteau qui heurte la corde de piano<sup>3</sup> est en contact avec elle pendant un temps de l'ordre de quelques ms. Que se passe-t-il si l'on choisit à présent un terme de force oscillant périodiquement ? Déclenchons à  $t = 0$  un forçage mécanique (comme celui imposé par un pot vibrant) selon un sinus pur :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f_0 \sin(\omega t) \quad (3)$$

Le système se met à osciller, et la solution converge vers des oscillations à la pulsation du forçage, dites oscillations forcées. Leur amplitude varie à la fois selon l'amplitude  $f_0$  du terme de force et la pulsation choisie  $\omega$ . L'amplitude de la solution est plus grande lorsque la pulsation du forçage est proche de la pulsation propre  $\omega_0$  (phénomène de résonance). Un exemple musical de forçage est l'utilisation de tubes cylindriques placés sous les lames du marimba : ces résonateurs

1. « Sans la musique, la vie serait une erreur, une besogne éreintante, un exil. » - Le Crépuscule des idoles, Friedrich Nietzsche.

2. Par exemple, un des objectifs de la métallurgie en Mésoamérique était d'améliorer la sonorité des cloches [Hos95].

3. Ce contact, où le feutre recouvrant le marteau est compressé, a motivé des descriptions prenant en compte la mémoire du système [Stu95]. Dans ce cas, le modèle n'est pas local en temps et sort du cadre décrit plus haut.

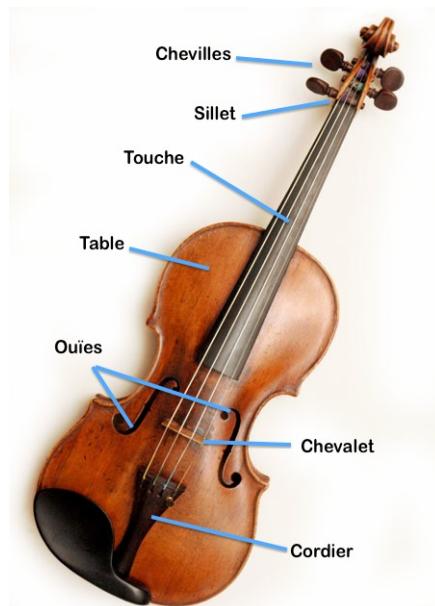


FIGURE 1 – Un violon, avec annotation de quelques éléments. (Source : Wikimedia Commons, licence CC-BY-SA-3.0)

sont excités par le son que le percussioniste a produit en frappant les lames. Illustrant ce qui précède, leur utilité est maximale lorsqu'ils sont convenablement accordés avec les lames<sup>4</sup>.

Le cas du violon est encore différent. Un violon (voir fig. 1) est un instrument de musique à quatre cordes. Lorsque ces dernières sont en mouvement elles entraînent le chevalet, qui met en vibration la table (et l'ensemble de la caisse de résonance). L'instrumentiste peut laisser vibrer les cordes telles quelles (on parle de « corde à vide »), ou plaquer les cordes sur la touche avec les doigts pour en changer la longueur. On peut pincer les cordes (*pizzicato*), ce qui donne des oscillations libres ; le cas qui nous intéresse est lorsque les cordes sont mises en vibration en les frottant. Ceci est réalisé par le biais d'un archet, une baguette de bois (l'essence la plus demandée est le pernambouc) ou en fibre de carbone sur laquelle sont tendues, en un mince ruban, une à quelques centaines de crins de chevaux. Ceux-ci sont préalablement enduits d'une pellicule de colophane, obtenue à partir de sève de pin, qui modifie les propriétés d'adhérence entre le crin et la corde.

La corde du violon, frottée avec un archet dont la vitesse varie lentement, entre en mouvement. Alors que le musicien n'a pas imposé d'oscillation dans son geste, la corde adopte un mouvement d'oscillation, et avec toutes les précautions oratoires de mise, celui-ci semble approximativement périodique - un auditeur dira qu'il entend le même son au cours du temps. La note entendue est sensiblement « de même hauteur » que lorsqu'on pince la corde et que l'on écoute ses oscillations libres. Mais frotter une corde n'est pas une succession rapide de *pizzicati* ; ni, comme le proposait Daniel Bernoulli, un archet agissant comme une roue dentée agitant la corde à la fréquence du son entendu<sup>5</sup>. Le phénomène auquel on assiste forme une troisième famille d'oscillations, les

4. Un exemple de forçage plus direct du système par le musicien serait la plaque à tonnerre (*thunder sheet*), une mince feuille métallique agitée par le percussioniste. C'est cependant dans ce cas un système non linéaire qui est excité, permettant ainsi à des oscillations de basse fréquence (car manuelles) d'être transformées en plus hautes fréquences (audibles).

5. Critique de Duhamel dans son *Mémoire de l'action de l'archet sur les cordes* : cette analogie de la roue dentée empêcherait de produire la même note à deux vitesses d'archet différentes, en contradiction avec l'expérience.

## Introduction

auto-oscillations. Il se retrouve dans d'autres instruments, notamment de la famille des vents, que la source acoustique soit une anche (clarinette, hautbois...), la lèvre du musicien (trompette, cor...) ou l'interaction entre un jet et un biseau (flûte à bec ou traversière...).

Une description empruntée à l'automatique est de décrire ces auto-oscillations comme l'interaction entre un excitateur, qui apporte de l'énergie, et le résonateur, qui est vu comme un système linéaire. Dans le système corde-archet, la corde est le résonateur et l'archet, l'excitateur. Pour certains aspects du résultat sonore, comme la fréquence fondamentale de la note, il est aisément de voir le rôle de certains paramètres de la corde : augmenter la tension de la corde ou raccourcir sa longueur font tous deux croître cette fréquence. Mais que dire de l'excitateur : que se passe-t-il si on change la vitesse ou la force avec laquelle on manie l'archet ? L'absence de réponse simple est en fait ce qui permet aux auto-oscillations de naître : le couplage entre l'excitateur et le résonateur est non linéaire. Appuyer deux fois plus fort avec l'archet n'implique pas un doublement d'amplitude du mouvement de la corde. Alors que les oscillations libres ou forcées d'un système linéaire peuvent être décrites dès que l'on connaît la réponse du résonateur à des stimuli bien choisis (comme un balayage en fréquence par un pot vibrant), la rétroaction non linéaire donne véritablement naissance à un nouveau système.

En présence de non-linéarité le principe de superposition n'est plus valide. Également, le domaine d'existence, la période ou encore l'amplitude des auto-oscillations doivent être étudiés. Ainsi, la période peut être très différente de celle des oscillations libres, ce que certains instrumentistes à vent exploitent dans la technique de *pitch bending* : alors qu'en jeu normal on obtient des fréquences proches de celles du résonateur<sup>6</sup> il est possible d'obtenir des auto-oscillations dont la fréquence s'en écarte sensiblement. Il s'agit même d'une difficulté inhérente à l'apprentissage de ces instruments : la position des doigts déterminant la longueur du tube ne crée pas à elle seule la note juste que l'on espère ! Pour les instruments à cordes frottées, les sonorités rencontrées sont également variées (quoique pas toujours maîtrisées pour le débutant). Par exemple si l'on appuie trop fort l'archet sur la corde, le son est rauque, grinçant, jusqu'à ce qu'on ne distingue même plus de note si la force est excessive. Si au contraire on l'appuie insuffisamment, le son est sifflant et sa fréquence peut être à des multiples de la fréquence fondamentale attendue.

Notre sujet général sera l'étude des auto-oscillations de la corde frottée, et plusieurs facettes en seront explorées<sup>7</sup>. Il se situe dans la continuité de thèses récentes au sein du laboratoire dans le domaine de la physique des instruments de musique : Sami Karkar sur les instruments à anche comme la clarinette [Kar12], Soizic Terrien sur la flûte à bec [Ter14] et Lionel Velut sur les cuivres comme la trompette [Vel16]. Une partie de ces travaux a été consacrée à l'étude numérique de modèles simples d'instruments de musique auto-oscillants, et ce rapport apporte comme contribution l'étude d'une nouvelle non-linéarité, la friction, et une nouvelle famille d'instruments, les cordes frottées comme le violon. Ce travail se focalise sur l'analyse des régimes d'oscillation de modèles mathématiques de la production du son. De nouvelles méthodes d'analyse y sont présentées, motivées par la nature même des problèmes rencontrés.

Le but global de ce travail est l'obtention de diagrammes de bifurcation, ce que nous présentons brièvement ici (les méthodes numériques employées étant détaillées au chapitre 1). Soit un système dynamique dont on cherche les solutions en régime permanent (ou établi). Pour les parties I et II de ce travail, ce système sera un système différentiel ; pour la partie III, nous sortirons de ce cadre avec la dérivation fractionnaire. Les solutions que l'on cherchera pourront être stationnaires (donc non oscillantes), périodiques, quasi-périodiques. Un diagramme de bifurcation représente

---

6. Ces fréquences, pour simplifier, peuvent être considérées comme fixées par les paramètres géométriques du tube et la position des doigts de l'instrumentiste sur les éventuels trous latéraux, clés ou pistons.

7. Idéalement, les 3 M : Mathématiques, Mécanique et Musique.

l'évolution d'une caractéristique de ces solutions en fonction d'un paramètre du système. Pour la corde frottée, un exemple de paramètre retenu plus tard est la vitesse d'archet. L'obtention de ces diagrammes est appelée la continuation des solutions.

Soit un système différentiel non linéaire dont on veut continuer les solutions périodiques, ou quasi-périodiques. Une première approche naïve est d'intégrer numériquement le système, pour des temps d'intégration assez longs afin d'éliminer le régime transitoire. Pour le régime périodique, un critère d'arrêt est d'observer dans l'espace des phases que la solution est revenue en un point suffisamment proche d'un point déjà rencontré. En réalisant cette intégration pour des valeurs échantillonées du paramètre, on obtient une esquisse du diagramme de bifurcation. Expliquons les faiblesses de cette approche.

Les solutions ainsi obtenues sont stables (elles sont attractives) : si la solution que l'on tentait de continuer devient instable au-delà d'une certaine valeur du paramètre, l'intégration ne peut plus converger vers elle. Un tel défaut de convergence est-il alors le symptôme d'une disparition de la solution (en ce cas, il peut être inutile de « chercher plus loin ») ou seulement d'un changement de stabilité méritant de continuer encore la solution car peut-être passager ? Y a-t-il à ce moment émergence d'un autre type de solution ?

Si plusieurs solutions stables coexistent, pour toutes les trouver il faut être capable de choisir des conditions initiales adaptées à chacune – des conditions initiales telles que les intégrations convergent vers chacune. Or la simple connaissance de cette coexistence est déjà un point difficile : contrairement aux systèmes linéaires, le nombre de solutions des systèmes non linéaires n'est pas connu. Tout ceci justifie l'emploi de méthodes spécifiques pour la continuation des solutions.

La continuation de solutions sera réalisée par l'association de deux méthodes : l'Équilibrage Harmonique (EH, ou *Harmonic Balance Method*, HBM) et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN, ou *Asymptotic Numerical Method*, ANM). L'EH transforme un système différentiel, dont les inconnues sont des fonctions du temps, en un système polynomial (dit aussi algébrique) dont les inconnues sont des coefficients de Fourier et la période. La MAN traite la continuation de solutions de systèmes polynomiaux vérifiant un formalisme particulier. La faisabilité de l'association des deux méthodes, l'EH et la MAN, a été montrée par Bruno Cochelin et Christophe Vergez [CV09]. Les auteurs ont montré qu'à condition d'adopter une certaine formulation pour le système différentiel, le système sur les inconnues de Fourier est obtenu automatiquement et respecte le formalisme requis pour l'étape de continuation par la MAN. L'association MAN-EH pour la continuation de solutions périodiques est codée pour Matlab dans l'outil Manlab [Kar+]. Ce programme, codé lors de la thèse de Rémi Arquier [Arq07], a été enrichi par B. Cochelin et C. Vergez [CV09] pour l'équilibrage harmonique, Arnaud Lazarus et Olivier Thomas [LT10] pour l'étude de la stabilité des solutions, et par S. Karkar pour l'écriture tensorielle permettant une accélération des calculs [Kar12] et pour le traitement de certaines non-linéarités [KCV13].

Ce travail tente de répondre à la problématique suivante : comment certains modèles du violon peuvent être étudiés par la continuation de leurs solutions ?

La friction a fait l'objet de recherches anciennes : Léonard de Vinci, Amontons et Coulomb ont mené des expériences visant à formuler des lois de frottement [Fee+98]. La modélisation de la friction reste un sujet très ouvert et de nombreux modèles, comptant plus ou moins de paramètres, ont été développés [Ber02]. Le rôle de la friction en acoustique est illustré dans [Aka02] par de nombreux exemples sortant du domaine musical, du verre à vin dont on frotte le bord avec le doigt, aux stridulations que produisent les insectes en frottant leurs élytres. La méthode de continuation employée, la MAN, requiert des systèmes réguliers. Ainsi, dans un premier temps le coefficient de frottement sera une fonction analytique de la vitesse relative, ce que nous appellerons friction régularisée. Le chapitre 2 montre le comportement d'un système avec friction régularisée et le compare à un système avec une loi non régulière (frottement de Coulomb). Cette analyse est menée au travers des diagrammes de bifurcation, qui permettent

## Références

une vue synthétique du comportement de modèles différents.

Une méthode doit être choisie pour transformer le système différentiel en système polynomial que la MAN peut traiter. Cela peut être dans le domaine temporel, par exemple la collocation, ou fréquentiel comme ici avec l'EH. Le nombre d'inconnues utilisées, qu'il soit lié à la finesse d'un maillage temporel ou à l'étendue d'un domaine fréquentiel, gagne évidemment à rester modeste pour des raisons pratiques (limiter le temps de calcul). Le choix d'une méthode mérite d'être éprouvé : à ce jour la littérature manque de résultats théoriques pour décrire le comportement de ces méthodes, hormis leur caractère convergent (*i.e.* quand le nombre d'inconnues tend vers l'infini). En pratique, que se passe-t-il avec un nombre raisonnable d'inconnues de discréétisation ? La capacité de l'EH à représenter les solutions de systèmes avec friction régularisée est évaluée au chapitre 3.

Le modèle de corde qui sera retenu est une Équation aux Dérivées Partielles, dont la discréétisation spatiale sera effectuée sur la base modale. Dans le chapitre 4, on montre ce que des diagrammes de bifurcations conçus avec un nombre de modes très restreint permettent de représenter. Puis la question d'un nombre de modes plus élevé est soulevée, en termes de but (combien de modes seraient à considérer pour obtenir un mouvement de corde réaliste ?) et de moyens (quelles adaptations des méthodes numériques seraient à envisager ?).

Si une corde frottée peut être étudiée en laboratoire par un monocorde sur un support très rigide (supposé immobile), ce n'est qu'une partie du système. Lorsque l'on couple cette corde avec une caisse de résonance par l'intermédiaire du chevalet, une nouvelle boucle de rétroaction est créée. On obtient l'effet désirable de transmettre plus efficacement les vibrations de la corde en ondes sonores audibles. On obtient aussi d'autres phénomènes de couplages moins désirables comme la note du loup, un phénomène familier pour le violoncelle et, plus rarement, le violon. Pour une certaine note de l'instrument, le son est jugé de mauvaise qualité, décrit comme « une note qui roule » en raison des battements audibles. Pour les instruments de la famille des cuivres, jouer une note et en chanter une seconde en même temps peut créer des effets sonores remarquables, nommés multiphoniques. Ces deux exemples de sons, qu'ils soient parasites ou recherchés, font partie des régimes quasi-périodiques à deux pulsations. L'extension de l'association MAN-EH au cas à deux pulsations est présentée au chapitre 5. Les phénomènes rencontrés et certains points mathématiques sont discutés au chapitre 6. Enfin, on montre au chapitre 7 une version remaniée de l'algorithme permettant une accélération des calculs.

La friction entre l'archet et la corde peut être modélisée de différentes manières. Ainsi que l'ont montré des mesures [SW00], la modélisation du coefficient de frottement comme fonction de la vitesse relative lors du glissement est imparfaite. Les auteurs ont alors proposé un modèle qui prend en compte la température de la colophane au point de contact. Sortant du cadre des systèmes différentiels, le système obtenu n'est plus local en temps : la température à l'instant de calcul dépend de celle dans le passé. Un modèle prenant en compte le comportement de la colophane est présenté au chapitre 8. Nous en proposons une nouvelle écriture faisant appel à la dérivation fractionnaire. Puis au chapitre 9 nous montrons comment la MAN-EH peut être utilisée pour continuer les solutions périodiques pour des systèmes différentiels comportant un opérateur fractionnaire.

## Références

- [Aka02] A. AKAY. « Acoustics of friction ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 111.4 (2002), p. 1525–1548.
- [Arq07] R. ARQUIER. « Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures ». Thèse de doct. Université de la Méditerranée-Aix-Marseille II, 2007.

- [Ber02] E. J. BERGER. « Friction modeling for dynamic system simulation ». In : *Applied Mechanics Reviews* 55.6 (2002), p. 535–577.
- [CV09] B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), p. 243–262.
- [Fee+98] B. FEENY, A. GURAN, N. HINRICHES et K. POPP. « A historical review on dry friction and stick-slip phenomena ». In : *Applied Mechanics Reviews* 51.5 (1998), p. 321–341.
- [Hos95] D. HOSIER. « Sound, color and meaning in the metallurgy of ancient West Mexico ». In : *World Archaeology* 27.1 (1995), p. 100–115.
- [Kar12] S. KARKAR. « Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2012.
- [Kar+] S. KARKAR, R. ARQUIER, B. COCHELIN, C. VERGEZ, A. LAZARUS et O. THOMAS. *Manlab : An interactive path-following and bifurcation analysis software*.
- [KCV13] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332.4 (2013), p. 968–977.
- [LT10] A. LAZARUS et O. THOMAS. « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510–517.
- [SW00] J. H. SMITH et J. WOODHOUSE. « The tribology of rosin ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), p. 1633–1681.
- [Stu95] A. STULOV. « Hysteretic model of the grand piano hammer felt ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 97.4 (1995), p. 2577–2585.
- [Ter14] S. TERRIEN. « Instruments de la famille des flûtes : analyse des transitions entre régimes ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2014.
- [Vel16] L. VELUT. « Contrôle par le musicien des régimes d'oscillation des instruments de la famille des cuivres ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2016.

# Chapitre 1

## Présentation du modèle et des méthodes

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Régimes étudiés</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Autour du violon</b>	<b>17</b>
1.2.1	Premiers résultats théoriques classiques sur la corde	17
1.2.2	Un bref historique	19
<b>1.3</b>	<b>Modèle retenu</b>	<b>23</b>
1.3.1	Équation de la corde avec terme source	23
1.3.2	Modes propres	24
1.3.3	Raideur, amortissement	26
1.3.4	Loi de friction	27
1.3.5	A-t-on un violon ?	29
<b>1.4</b>	<b>Continuation, bifurcation : un mot sur les systèmes dynamiques</b>	<b>30</b>
1.4.1	Branche de solution	30
1.4.2	Premier exemple de méthode de continuation : prédiction, correction	31
1.4.3	Bifurcation	33
<b>1.5</b>	<b>Méthodes numériques employées</b>	<b>34</b>
1.5.1	Méthode Asymptotique Numérique	35
1.5.2	Équilibrage Harmonique	37
1.5.3	Méthode de Hill	39
<b>1.6</b>	<b>Exemple</b>	<b>42</b>
	<b>Annexes</b>	<b>49</b>
<b>1.A</b>	<b>Théorème des fonctions implicites</b>	<b>49</b>
<b>1.B</b>	<b>Théorème de la bifurcation de Hopf</b>	<b>49</b>
<b>1.C</b>	<b>Théorème de Floquet</b>	<b>49</b>

---

Dans ce chapitre, nous présentons successivement le cadre (type de solutions recherchées), le sujet (la corde frottée et le violon, section 1.2), le modèle de corde frottée retenu (section 1.3), la méthode (continuation de solutions, section 1.4), et les outils numériques (section 1.5).

### 1.1 Régimes étudiés

On se concentre dans ce travail sur des familles particulières de solutions, faisant partie de ce qu'on appelle le régime permanent ou la variété invariante. Cette deuxième expression

désigne la variété topologique que l'action du système dynamique laisse invariante ; en termes simples, on s'intéresse à l'ensemble des solutions sur lesquelles le système perdure, en l'absence de perturbation, lorsqu'il y est initialement. Celles qui retiennent en particulier notre attention vérifient des contraintes supplémentaires : ce sont les solutions stationnaires, les solutions périodiques, et enfin les solutions quasi-périodiques. Nous commentons ce cadre restrictif, d'abord en précisant les termes, puis en expliquant ses objectifs.

Les solutions stationnaires sont constantes. Parce qu'elles ne varient pas dans le temps, les solutions stationnaires sont une étape, généralement plus facile, dans l'étude de systèmes dynamiques. Nous verrons qu'elles peuvent être utiles dans la recherche de solutions oscillantes grâce à l'analyse de stabilité (en particulier la bifurcation de Hopf que nous présentons un peu plus bas). Dans notre contexte musical, elles sont cependant anecdotiques car décrivant la corde frottée n'oscillant pas et donc ne produisant pas de son.

Une fonction  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est périodique lorsqu'il existe  $T > 0$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t + T) = x(t) \quad (1.1)$$

Même si une solution constante est périodique, on désignera en fait couramment par *périodique* les solutions non constantes, autant pour séparer les deux familles sémantiquement que pour une raison pratique : les outils de calcul que nous employons ne sont pas adaptés pour traiter les deux en une seule fois. Si  $x$  est une fonction périodique non constante elle admet un réel  $T_0 > 0$  minimal vérifiant la définition, qu'il est convenu d'appeler *la période de  $x$* . Les fonctions périodiques suffisamment régulières<sup>1</sup> vérifient le théorème conjecturé par Fourier, prouvé par Dirichlet :  $x$  périodique est égale à sa série de Fourier. Lorsque  $x$  est périodique et admet  $T$  pour période,  $\dot{x}$  admet aussi  $T$  pour période, et par conséquent  $(x(t), \dot{x}(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est une courbe fermée dans l'espace des phases.

Une fonction  $x$  est quasi-périodique ([PC12], section 1.2.3) lorsqu'il existe  $p > 1$  fonctions  $x_1, \dots, x_p$ , périodiques, de périodes respectives  $T_1, \dots, T_p$ , telles que

$$x(t) = \sum_{i=1}^p x_i(t) \quad (1.2)$$

et qu'il existe une famille de fréquences  $\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p\}$  telle que

1. la famille est linéairement indépendante :

$$\forall k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}, \quad \left( \sum_{i=1}^p k_i \tilde{f}_i = 0 \right) \Rightarrow \forall i, k_i = 0 \quad (1.3)$$

2. la famille est génératrice pour les fréquences  $1/T_1, \dots, 1/T_p$  :

$$\forall i, \exists k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{T_i} = \left| \sum_{i=1}^p k_i \tilde{f}_i \right| \quad (1.4)$$

En termes simples, une fonction quasi-périodique est une somme (finie) de fonctions périodiques, dont chacune a pour fréquence une combinaison linéaire d'un ensemble fini de fréquences. Étant donnée  $x$  une fonction quasi-périodique, on note que la famille de fréquences  $(\tilde{f}_i)$  n'est pas unique, mais que l'entier  $p$  l'est. Le cas qui sera étudié sera avec  $p = 2$  fréquences. La condition d'indépendance (1.3) devient :  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  sont incommensurables. Pour un système autonome, la courbe  $(x(t), \dot{x}(t))$  est dense dans un certain compact : pour tout voisinage d'un point de ce

---

1. Les fonctions recherchées seront  $\mathcal{C}^\infty$ , et le théorème de Dirichlet est vérifié dès que la fonction est  $\mathcal{C}^1$ .

## 1.2. Autour du violon

compact, il existe un point de la courbe dans ce voisinage (en fait, une infinité de tels points). La trajectoire quasi-périodique à deux fréquences évolue sur une surface difféomorphe au tore  $T^2 = S^1 \times S^1$  ( $S^1$  désignant le cercle).

Notre travail exclut les régimes transitoires – pour les musiciens, l'attaque. Ceci constitue un sujet à part entière, et nous mentionnons brièvement le travail emblématique de Guettler. Après avoir montré que les instrumentistes jugeaient satisfaisants les transitoires de courte durée [GA97], Guettler a étudié le lien entre conditions initiales de jeu et durée du régime transitoire [Gue02]. En particulier, les diagrammes de Guettler décrivent en fonction de l'accélération de l'archet et de la force normale le temps avant l'accès à un régime d'oscillation particulier, le régime de Helmholtz, que nous décrirons en section 1.2.2. Les techniques de « changement d'archet » (expression des musiciens pour désigner le changement de sens du mouvement de la main tenant l'archet) sont l'objet d'une grande attention de la part des musiciens [Gue13]. Le son d'une corde frottée, s'il peut sembler périodique à l'oreille au-delà d'une fraction de seconde, ne l'est qu'approximativement, et ce même avec un dispositif mécanique de frottement de la corde. Dans le monde expérimental, on peut par exemple souligner que l'état de surface de l'archet ne sera jamais parfaitement homogène. Dans le monde théorique, à moins que les conditions initiales appartiennent au régime périodique souhaité, la solution d'un système différentiel<sup>2</sup> ne peut pas être ce régime. D'où une question provocatrice : quel est l'intérêt de rechercher les solutions du régime permanent ?

Une réponse peut être la stabilité des solutions. En effet, lorsqu'une solution est asymptotiquement stable, elle attire les solutions situées dans un voisinage. Par conséquent, la connaissance des solutions stables du système donne une représentation synthétique de l'allure des solutions ; et en poursuivant l'objectif de transitoires courts le musicien tente de faire émerger ces solutions.

Pour donner une idée de cette convergence, revenons à l'oscillateur forcé de l'introduction : la solution est la superposition d'un terme périodique (solution du régime permanent) et d'un terme décroissant exponentiellement. La construction expérimentale de la réponse fréquentielle de ce système (amplitude et phase de la solution en fonction du forçage) peut être réalisée en observant, au bout d'un temps assez long pour éliminer toute trace du régime transitoire, les oscillations du système pour un échantillonage de fréquences. Dans le monde des modèles numériques de corde frottée, le régime transitoire peut être long, ainsi que l'illustre l'exemple suivant : McIntyre et Woodhouse [MW79], pour comparer leurs résultats avec les solutions périodiques obtenues dans [Sch79], ont laissé le calcul se poursuivre sur plusieurs centaines de pseudo-périodes. Ceci souligne que des méthodes adaptées sont nécessaires pour pouvoir étudier les solutions du régime établi.

## 1.2 Autour du violon

### 1.2.1 Premiers résultats théoriques classiques sur la corde

L'étude des oscillations d'une corde tendue (problèmes de corde vibrante) est un sujet ancien. Soit une corde (sans raideur, sans épaisseur) de caractéristiques (prises ici constantes) :

- $m_0$  sa densité linéique ;
- $L$  sa longueur ;
- $T$  sa tension.

On note  $x$  la coordonnée le long de la corde,  $y$  celle de déplacement latéral (flexion),  $t$  le temps. Sous l'hypothèse de petits déplacements de flexion seule dans un plan porté par les axes

---

2. Suffisamment régulier pour les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

$x$  et  $y$ , l'équation aux dérivées partielles de la corde s'écrit<sup>3</sup> :

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

et on considère la corde fixée à ses extrémités :

$$\forall t, \quad y(L, t) = 0, \quad y(0, t) = 0 \quad (1.6)$$

Si l'on note  $c = \sqrt{\frac{T}{m_0}}$ , la solution de D'Alembert est

$$y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct) \quad (1.7)$$

et décrit la solution comme superposition de deux ondes progressives de célérité  $c$ ,  $y_+$  allant vers les  $x$  croissants et  $y_-$  vers les  $x$  décroissants. Ces deux fonctions sont déterminées par les conditions initiales. Nous mentionnons cette description de la solution car elle est couramment utilisée pour les instruments à vents (on parle d'ondes aller et retour). Une autre description de la solution, attribuée à Bernoulli, et que nous utiliserons dans ce rapport, consiste à commencer par chercher  $y$  comme un produit d'une fonction de  $x$  et d'une de  $t$  : posons

$$y(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (1.8)$$

alors  $y$  solution de l'éq. (1.5) donne

$$m_0 \phi(x) \frac{d^2 q}{dt^2}(t) = T q(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) \quad (1.9)$$

avec conditions aux limites :

$$\phi(L) = \phi(0) = 0 \quad (1.10)$$

Sur l'éq. (1.9), par séparation de variables, il existe une constante  $k$  telle que

$$\frac{d^2 q}{dt^2}(t) + kc^2 q(t) = 0 \quad (1.11a)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) + k\phi(x) = 0 \quad (1.11b)$$

Pour l'équation différentielle sur  $\phi$ , une vue du problème est de trouver des couples  $(k, \phi)$  solutions de

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi = k\phi \quad (1.12)$$

Dans l'espace de Hilbert des fonctions  $[0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  de carré intégrable et nulles aux bords, muni du produit scalaire usuel (intégrale du produit), l'éq. (1.12) est un problème aux valeurs et vecteurs propres de l'opérateur  $-\frac{d^2}{dx^2}$  (qui est linéaire et auto-adjoint donc est diagonalisable dans une base orthogonale). C'est pourquoi les fonctions  $\phi$  seront appelées modes propres de la corde. Les solutions non triviales et normalisées de (1.9)-(1.10) sont

$$\phi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right), \quad j \in \mathbb{N}^* \quad (1.13)$$

---

3. [CK16], section 1.1.2.2.

## 1.2. Autour du violon

En substituant la constante associée  $k = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2$  dans l'eq. (1.11a), il vient les solutions

$$q_j(t) = A_j \cos\left(\frac{j\pi c}{L}t\right) + B_j \sin\left(\frac{j\pi c}{L}t\right) \quad (1.14)$$

On remarque que

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) q_j(t) \quad (1.15)$$

est encore solution de l'eq. (1.5) (par superposition). Si l'on souhaite observer les oscillations libres (ou forcées) de la corde, il ne reste plus qu'à déterminer les constantes  $A_j$ ,  $B_j$  selon les conditions initiales (éventuellement sous forme de série et non de somme finie). Si  $A_1$  ou  $B_1$  sont non nuls, l'oscillation a pour pulsation

$$\omega = \frac{\pi}{L}c = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m_0}}, \quad i.e. \quad f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m_0}} \quad (1.16)$$

La fréquence  $f$  est appelée fondamentale. C'est la fréquence des oscillations libres lorsque la corde est pincée. Le registre est un terme plus couramment employé pour les instruments à vents comme la flûte ou la clarinette : pour une même longueur de tube (déterminée par les trous latéraux ouverts), l'instrument peut produire une note au premier registre, le plus grave, et une note à un second registre, plus aigu<sup>4</sup>. De manière analogue, pour une même longueur de corde, le premier registre ( $j = 1$ ) est à la fréquence fondamentale ; les registres supérieurs ( $j > 1$ ) sont aux fréquences multiples.

Si on considère à présent que la corde est de raideur et d'épaisseur non nulles, les paramètres introduits sont :

- $E$ , module d'Young ;
- $b$ , rayon de la corde ;  $I$  le moment quadratique vaut alors  $I = \frac{\pi}{4}b^4$  ;

et l'équation (1.5) devient :

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1.17)$$

Les modes propres (1.13) pour la corde sans raideur sont encore solutions du problème séparable associé à l'EDP (1.17), pourvu que l'on rajoute les conditions aux limites d'appui simple :

$$\forall t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0, \quad y(0, t) = 0 \quad (1.18)$$

### 1.2.2 Un bref historique

Nous présentons ici un bref historique de la recherche des solutions en régime permanent de la corde frottée (et du violon, lorsque la caisse de résonance est prise en compte). Pour un plus large panorama de la recherche autour du violon nous recommandons le livre de Cremer [CA84] (avec cependant les inconvénients d'être un peu ancien et difficile à trouver) et l'article de revue [Woo14].

Helmholtz (1862) observe expérimentalement un mouvement périodique simple de la corde frottée, appelé coin de Helmholtz<sup>5</sup>. Pour la corde sans raideur, cette solution exacte est une déformée triangulaire de la corde, dont le sommet décrit deux arcs de paraboles (cf. figure 1.1).

4. Pour la flûte, une octave au-dessus ; pour la clarinette, une octave plus une quinte.

5. Une remarquable vidéo filmée en caméra rapide montre l'émergence du coin de Helmholtz, puis lorsque l'archet est soulevé, sa disparition laissant place à des oscillations libres amorties : [www.youtube.com/watch?v=6JeyiMOYNo4](http://www.youtube.com/watch?v=6JeyiMOYNo4)

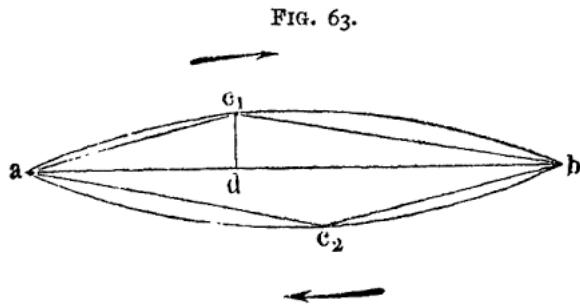


FIGURE 1.1 – Mouvement du coin de Helmholtz (figure extraite de [HE54], annexe 6 p. 387). Deux positions de la corde sont représentées, à une demi-période d'écart.

Lorsque le coin est situé dans la longue portion de corde entre l'archet et le sillet, la corde est en adhérence avec l'archet. Lorsque le coin est situé entre l'archet et le chevalet, la corde est en glissement contre l'archet. Pour tout point de la corde, la période est divisée en deux intervalles de déplacement au cours desquels la vitesse est constante. Pour Helmholtz, le mouvement ainsi obtenu est celui idéalement recherché par le musicien. Les écarts expérimentaux, comme la superposition de petites oscillations au mouvement global, sont imputés sans grand détail au choix de la position de l'archet le long de la corde.

Raman<sup>6</sup> (1918), en utilisant la description de D'Alembert (1.7) des ondes progressives pouvant parcourir la corde, et par des considérations géométriques, donne une large famille de solutions de la corde frottée sans raideur [Ram18]. Pour ces solutions, à chaque instant l'onde de vitesse est une fonction, continue et affine par morceaux, de la longueur de corde. L'énumération des solutions est alors menée selon le nombre de discontinuités de la vitesse, ce que fait Raman jusqu'à 7. De telles solutions, bien qu'ayant le mérite d'être explicites, s'éloignent cependant de plus en plus de la réalité pour la corde de violon, car elles s'appliquent à une corde supposée infiniment souple, ce qui permet un nombre arbitrairement élevé de coins anguleux. Une partie de ses travaux est consacrée à la confrontation aux résultats expérimentaux obtenus par Krigar-Menzel et Raps en 1891 sur un fil mince d'un dixième de millimètre de diamètre, peu tendu et d'une longueur de 50 à 80 cm. Ces résultats sont obtenus pour différents emplacements d'archet le long de la corde, mais en appliquant une force normale non spécifiée, ce qui pose d'évidentes difficultés de reproductibilité pour le lecteur. Raman est pourtant, en tant que violoniste autant que scientifique, conscient de l'importance du paramètre de force d'appui, consacrant un autre article [Ram20] à la force minimale requise à l'obtention du régime de Helmholtz.

Schelleng (1963) propose une analogie du violon comme circuit électrique [Sch63]. En utilisant ce cadre théorique (source, résistance, réactance...) il propose une explication du battement observé dans la note du loup, ainsi que la description de son domaine d'existence selon des caractéristiques de l'instrument (mais pas du jeu de l'instrumentiste). Il retrouve ainsi des résultats connus des musiciens. Pour une hauteur de note donnée, suffisamment proche de la note du loup<sup>7</sup>, ce sont les cordes les plus graves des instruments qui sont les plus susceptibles de produire le phénomène. Ainsi, sur la corde de Ré du violon la note du loup est difficile à produire, contrairement à la corde de Sol. Pour la même note jouée sur les cordes de Do et Sol du violoncelle, le battement est plus facile à obtenir sur la corde de Do.

Schelleng (1973) construit le diagramme [Sch73] qui porte à présent son nom<sup>8</sup>, rappelé en fig.

6. Physicien, auteur de travaux sur la diffusion de la lumière qui lui valent le prix Nobel en 1930.

7. Vers 460 Hz au violon, 190 Hz au violoncelle.

8. Ce diagramme est encore largement cité et discuté. Par exemple, il est montré dans [GSA03] que la vitesse

## 1.2. Autour du violon

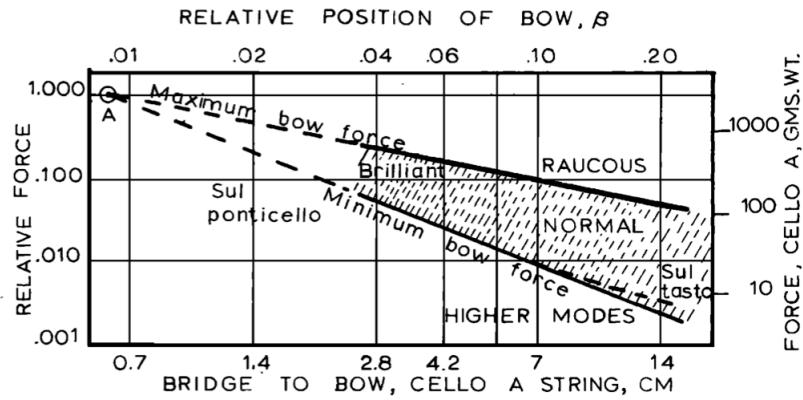


FIGURE 1.2 – Diagramme de Schelleng, issu de [Sch73], p. 31. La grandeur  $\beta$  désigne la distance de l'archet au chevalet, adimensionnée par la longueur de la corde. La force (axes verticaux) désigne la force normale d'appui sur l'archet. Les grandeurs dimensionnées proposées sur les axes à droite et en bas sont pour une corde de *La* de violoncelle, frottée à  $0.2 \text{ m.s}^{-1}$ .

1.2. Celui-ci décrit, à vitesse d'archet constante, les conditions de distance au chevalet et de force normale nécessaires à la création du régime de Helmholtz. En échelle log-log, cette zone favorable est comprise entre deux droites. L'existence de forces extrêmes s'explique qualitativement par la nécessité de maintenir la corde en adhérence, sinon l'adhérence sera interrompue par un glissement prématûr, d'où une force minimale ; et de la relâcher lorsque le coin de Helmholtz passe dessous, sans quoi l'adhérence sera maintenue trop longtemps (d'où une force maximale). Si la grandeur  $\beta$  désigne la distance de l'archet au chevalet, adimensionnée par la longueur de la corde ( $\beta = 0$  pour l'archet sur le chevalet,  $1/2$  pour l'archet au milieu de la corde), alors la force minimale est proportionnelle à  $\beta^{-2}$  et la force maximale à  $\beta^{-1}$ .

Lawergren [Law80] propose une autre famille de mouvements, pour lesquels la vitesse en un point est la somme d'une constante (comme pour la solution de Helmholtz) et d'un terme sinusoïdal, d'où leur nom de *S-motion*. Ce sont également des solutions d'ondes stationnaires pour la corde sans raideur, et elles sont mises en relation avec les observations de Schelleng [Sch73] (réflexions du coin de Helmholtz sur l'archet lors de la phase d'adhérence). La comparaison de ces résultats théoriques avec l'expérience et les solutions de Raman est présentée en figure 1.3, avec certaines confirmations expérimentales remarquables.

McIntyre et Woodhouse montrent [MW79] comment les solutions de la corde frottée<sup>9</sup> peuvent être obtenues en dissociant le système linéaire, dont la réponse est une convolution d'une fonction spécifique au résonateur (une fonction de Green peut contenir toute l'information souhaitée, éventuellement issue de mesures, sur les mouvements de flexion ou torsion de la corde et la caisse de résonance) avec la solution déjà obtenue, et le couplage non linéaire, qui devient géométriquement un problème d'intersection entre une droite et une certaine courbe - pour le violon,  $f$  une fonction non linéaire de friction. En notant  $V_r$  la vitesse relative corde-archet, et  $G$  la fonction de Green de la corde, ceci s'écrit

$$V_r(t) = \int_0^\infty G(\tau) f(V_r(t - \tau)) d\tau \quad (1.19)$$

d'archet est un paramètre plus important pour le timbre que la position de l'archet le long de la corde, et que placer l'archet plus proche du chevalet ne mène pas nécessairement à un son plus brillant.

9. L'ensemble des instruments de musique auto-oscillants est abordé dans l'article [MSW83] par la même technique.

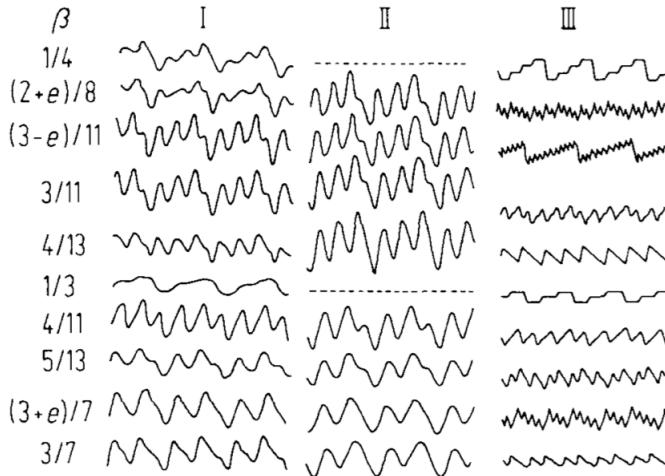


FIGURE 1.3 – Comparaisons de solutions expérimentales (colonne I), de solutions *S-motion* (colonne II) et de solutions de Raman (colonne III), pour différentes positions de l'archet (figure extraite de [Law80], p. 205). La grandeur  $\beta$  désigne la distance de l'archet au chevalet, adimensionnée par la longueur de la corde. Les déplacements sont observés au 1/15 de la corde.

Ils démontrent de plus comment résoudre le problème d'intersection lorsqu'il a plusieurs solutions, pour  $f$  appartenant à une large classe de fonctions (une difficulté soulevée auparavant par Friedlander [Fri53] et Schelleng [Sch73]). De nombreuses simulations peuvent alors être menées ; les temps de simulation doivent cependant être limités car en pratique l'expression (1.19) est une convolution (discrète) dont le nombre de termes est celui d'échantillons déjà calculés. Par conséquent, plus le support d'intégration est long et plus le calcul ralentit. Schumacher [Sch79], pour obtenir spécifiquement les solutions périodiques, choisit la version modifiée de l'éq. (1.19) : lorsque  $V_r(t + T) = V_r(T)$  pour une certaine période inconnue  $T$ , un changement de variable donne

$$V_r(t) = \int_0^T K(\tau) f(V_r(t - \tau)) \, d\tau \quad (1.20)$$

avec

$$K(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} G(\tau + nT) \quad (1.21)$$

Parmi les résultats obtenus, Schumacher montre que le *pitch flattening* impose une limite pratique à la force maximale que l'on peut exercer sur l'archet. Cet effet désigne un abaissement de la fréquence de jeu, qui est observé expérimentalement lorsque la force d'appui sur l'archet augmente, *pitch* signifiant la hauteur de note et *flat* étant le bémol<sup>10</sup>. Il montre aussi que les mouvements de torsion de la corde tendent à augmenter cet effet. Par contre, la raideur de la corde tend à lutter contre cet effet.

Enfin, si l'on se concentre sur les petites oscillations autour de l'équilibre en glissement seul, une linéarisation de la friction peut être utilisée et donne des résultats remarquables à un coût de calcul fortement réduit. Présentée dans [IA07] et étoffée dans [DAI17], cette approche montre plusieurs évolutions du timbre du son en accord avec l'expérience du musicien et avec

10. Dans une partition, une note précédée d'un bémol est jouée un demi-ton plus bas.

### 1.3. Modèle retenu

le diagramme de Schelleng : lorsque la force normale d'appui sur l'archet augmente, le son est plus brillant (de plus nombreux modes de la corde sont instables autour de l'équilibre, donc contribuent au mouvement de la corde) ; lorsque la vitesse d'archet diminue les modes de rangs élevés deviennent instables (ce qui donne à nouveau un son plus brillant). Il est également possible de prédire la croissance du mouvement pendant le régime transitoire. Cette approche par linéarisation a aussi été appliquée dans [DAI12] et montre l'émergence de la note du loup (que nous présenterons en section 1.3.5) pour des intervalles de vitesses d'archet d'autant plus grands que la force d'appui sur l'archet est faible, en accord avec des simulations temporelles prenant en compte la non-linéarité de friction.

## 1.3 Modèle retenu

### 1.3.1 Équation de la corde avec terme source

Soit une corde de caractéristiques :

- $m_0$ , densité linéique ;
- $L$ , longueur ;
- $f$  sa fréquence fondamentale ;  $T$  la tension vaut alors  $T = m_0(2Lf)^2$  ;
- $E$ , module d'Young ;
- $b$ , rayon de la corde ;  $I$  le moment quadratique vaut alors  $I = \frac{\pi}{4}b^4$  ;
- $\eta$ , coefficient d'amortissement visqueux (ce point est discuté en section 1.3.3) ;

et soumise à des forces extérieures  $F$ , pouvant être :

- la friction de l'archet (discussion en section 1.3.4) ;
- l'appui d'un doigt
- le couplage avec la caisse de résonance par l'intermédiaire du chevalet

et la gravité étant négligée. On note à nouveau  $x$  la coordonnée le long de la corde, et  $y$  celle de déplacement latéral par flexion,  $t$  le temps. Sous l'hypothèse de petits déplacements<sup>11</sup>, l'équation aux dérivées partielles de la corde s'écrit :

$$m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial y}{\partial t} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (1.22)$$

Des conditions aux limites sont à ajouter. Une situation souvent choisie est celle de la corde en appui simple aux deux extrémités (eq. (1.18)). Pour une modélisation du piano, Fletcher [Fle64] a décrit la base modale pour une corde encastrée aux deux extrémités, c'est-à-dire avec les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0, \quad y(0, t) = 0 \quad (1.23)$$

Cette modélisation serait à privilégier si l'on souhaitait considérer comme un encastrement les rainures dans lesquelles la corde passe au sillet et au chevalet. Le mot extrémités doit lui-même être précisé. Si la corde est considérée fixée aux extrémités sillet et chevalet, cela signifie que la corde est considérée immobile sur toute la portion basse entre le chevalet et le cordier. C'est une simplification qui empêche de considérer la mobilité au chevalet, et donc le rôle de la caisse de résonance. Nous pouvons cependant nommer  $L$  la longueur totale de corde vibrante, quitte à spécifier plus tard si

- la corde est fixée au chevalet,  $L$  ne comprend pas la longueur cordier-chevalet, la caisse de résonance est négligée ;

---

11. Dans le cas plus général de déformations de grande amplitude, la corde n'est pas un système linéaire [Nar68 ; Gou84 ; Wat92].

Symbole	Signification	Valeur numérique
$L$	Longueur de corde	0.33 m
$m_0$	Masse linéique de la corde	$3.1 \times 10^{-3}$ kg.m $^{-1}$
$x_b$	Distance de l'archet au chevalet	$3 \times 10^{-2}$ m
$\eta$	Facteur d'amortissement visqueux	0.01 N.s.m $^{-1}$
$f$	Fréquence fondamentale de la corde	196 Hz
$E$	Module d'Young	$5 \times 10^9$ Pa
$b$	Rayon de la corde	$4 \times 10^{-4}$ m
$\mu_d$	Coefficient de friction dynamique	0.2
$\mu_s$	Coefficient de friction statique	0.4
$T$	Tension de la corde	51.9 N.m
$I$	Moment quadratique	$2.01 \times 10^{-14}$ m $^4$
$\varepsilon$	Paramètre pour la loi de friction	$10^{-4}$

TABLE 1.1 – Paramètres retenus pour le modèle de corde frottée (corde de *Sol*).

— ou alors, la corde est fixée au cordier, et  $F$  contient un terme de force représentant le chevalet.

Les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  représentent, respectivement, l'extrémité basse (chevalet ou cordier) et l'extrémité haute (sillet) de la corde.

Le mouvement de translation latérale  $y$  par flexion dans le plan de l'archet a été seul considéré ici. Parmi les autres mouvements de la corde qui pouvaient être pris en compte, citons :

- la flexion dans le plan orthogonal [Wat92 ; DB14 ; DB15] ;
- les ondes longitudinales, ou de compression ;
- les ondes de torsion, *i.e.* la rotation de la corde sur elle-même [GE89 ; WL99 ; Gal04 ; BSW05]

Comme déjà observé par Cornu en 1896 [Cor96] la torsion de la corde joue un rôle crucial dans la création de mouvements dont la fréquence fondamentale est bien plus basse que la fréquence prévue par l'équation des ondes [HHG95 ; Ben08]. Ce type de régime peut être appelé ALF, pour « Anomalous Low Frequency » [Sch09]. Les conditions de jeu pour l'obtention de plusieurs notes ont été élucidées par la violoniste Mari Kimura<sup>12</sup>. De manière générale, il faut une force normale plus importante et une vitesse d'archet plus faible qu'usuellement. La position de l'archet le long de la corde (distance au chevalet) est déterminante dans la hauteur de la note obtenue (contrairement au mouvement de Helmholtz). Le son produit est rauque et puissant<sup>13</sup>. Il est distinct d'un autre phénomène de dénomination proche, les sous-harmoniques fantômes (« ghostly subharmonics » [MSW81]). Dans ce type de régime, le régime de Helmholtz est altéré par une solution de période plus longue (trois, quatre fois), donnant à entendre la superposition du son habituel et d'un autre à une fréquence sous-harmonique.

### 1.3.2 Modes propres

On cherche  $y$  sous la forme

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) q_j(t) \quad (1.24)$$

12. Elle a composé la pièce *Gemini*, faisant usage des sous-harmoniques, et qu'on peut écouter en ligne : [www.youtube.com/watch?v=oPTt5u681so](http://www.youtube.com/watch?v=oPTt5u681so)

13. M. Kimura produit un son de 70 dB à 1m20 ([Ben08], chapitre 5).

### 1.3. Modèle retenu

avec les mêmes modes propres (1.13) que pour l'EDP (1.17). La substitution de (1.24) dans l'éq. (1.22) donne :

$$\sum_{j=1}^N \left[ m_0 \phi_j(x) \ddot{q}_j(t) + \eta \phi_j(x) \dot{q}_j(t) - T \left( \frac{-j^2 \pi^2}{L^2} \right) \phi_j(x) q_j(t) + EI \frac{j^4 \pi^4}{L^4} \phi_j(x) q_j(t) \right] = F(x, t) \quad (1.25)$$

Les modes propres  $\phi_j$  sont orthogonaux :

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle := \int_0^L \phi_j(x) \phi_k(x) dx = \frac{L}{2} \delta_{jk} \quad (1.26)$$

donc par produit scalaire contre  $\phi_k$  l'éq. (1.25) devient :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad m_0 \frac{L}{2} \ddot{q}_k(t) + \eta \frac{L}{2} \dot{q}_k(t) + \frac{L}{2} \left( T \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + EI \frac{k^4 \pi^4}{L^4} \right) q_k(t) &= \langle F, \phi_k \rangle \\ &= \int_0^L F(x, t) \phi_k(x) dx \end{aligned} \quad (1.27)$$

On pose les paramètres modaux  $m_k$ ,  $\omega_k$  et  $\zeta_k$  (respectivement masse modale, pulsation propre et amortissement du mode  $k$ ) définis pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, N \rrbracket$  par :

$$m_k = m_1 = \frac{m_0 L}{2} \quad (1.28a)$$

$$\omega_k^2 = \frac{k^2 \pi^2 T}{L^2 m_0} \left( 1 + \frac{EI}{T} \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \right) \quad (1.28b)$$

$$\omega_k \zeta_k = \omega_1 \zeta_1 = \frac{\eta}{2m_0} \quad (1.28c)$$

Alors en divisant l'équation (1.27) par  $m_1 = m_k$ , il vient le système différentiel

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \ddot{q}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{m_1} \langle F, \phi_k \rangle \quad (1.29)$$

On transforme ainsi l'équation aux dérivées partielles (1.22) en un système différentiel sur les fonctions  $q_k$ . Le nombre de modes  $N$  est à choisir, et plusieurs choix seront considérés dans ce travail, avec des visées différentes.

Le choix  $N = 1$  mode mène à un modèle très rudimentaire de corde frottée aussi appelé modèle de Rayleigh<sup>14</sup>. L'équivalent mécanique de ce système, représenté en figure 1.4 est constitué d'une masse reposant sur un tapis roulant se déplaçant à la vitesse  $V_b$ , retenue à un support par un ressort et un amortisseur en parallèle. Il y a friction entre la masse et le tapis. Le terme de force normale  $F_N$  s'appliquant sur la masse est librement choisi par l'opérateur (la gravité est négligée). Ce modèle sera considéré au chapitre 2 pour étudier l'influence de la régularisation de la friction choisie sur les auto-oscillations du système.

Le choix  $N = 2$  modes entraîne un enrichissement considérable de la famille des solutions, ainsi qu'on le verra au chapitre 4. Nous pourrons notamment observer des solutions de second registre. Le choix d'un nombre  $N$  de modes élevé est atteignable pour certaines méthodes ; par exemple, l'intégration numérique à paramètres fixés. Par élevé, on entend par exemple  $N = 50$

14. Dans [Ray96], Rayleigh étudie le modèle de corde où la masse serait concentrée en son milieu (paragraphe 54, p. 48), et celle constituée d'une chaîne de petites masses (paragraphe 120, p. 129).

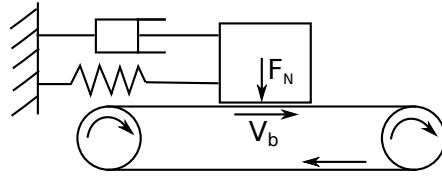


FIGURE 1.4 – Équivalent mécanique du modèle de corde projeté sur un seul mode : masse, ressort, amortisseur, tapis roulant.

[IA07] ;  $N = 60$  ou  $80$  [IAW08]. Hormis l'intérêt théorique d'un modèle plus précis de la corde, cela a été réalisé dans la synthèse sonore par modèle physique<sup>15</sup>. Nous verrons plus en détail cette question d'un grand nombre de modes au chapitre 4.

### 1.3.3 Raideur, amortissement

L'EDP choisie initialement (1.22) comporte un terme d'amortissement visqueux  $\eta \frac{\partial y}{\partial t}$ . Celui-ci mène à la définition (1.28c) des  $\zeta_k$ , où le produit  $\zeta_k \omega_k$  est constant. Comme  $\omega_k$  est croissant, on obtient un amortissement modal décroissant avec le rang du mode. Cela correspond à un facteur de qualité de la résonance  $Q_k$  croissant. Ce résultat peut être contesté ; des mesures pour les cordes de clavier filées à spires jointives donnent plutôt un amortissement modal constant [VC93]. Les pertes dues à la viscosité de l'air sont prépondérantes en basse fréquence (sous 500 Hz), négligeables en haute fréquence (au-delà de 5 kHz). Les autres causes d'amortissement explorées dans [VC93] sont la viscoélasticité (importante en haute fréquence), la thermoélasticité (domaine de fréquence intermédiaire) et la friction du filage sur lui-même.

Une démarche qui sera adoptée ici (comme par exemple dans [IA07]) est de « recaler le modèle » en modifiant les paramètres modaux  $\zeta_k$  *a posteriori*, par exemple pour choisir un amortissement modal constant, sans proposer de terme adéquat dans l'EDP en contrepartie<sup>16</sup>. Lorsque l'objectif est la synthèse sonore, la recherche de coefficients d'amortissement appropriés est motivée par le réalisme que doit avoir l'extinction du son. Certains auteurs proposent des formules approchant et extrapolant les mesures : amortissement croissant quadratiquement avec la fréquence dans [Adr89] ; formule de [Woo04] qui donne un amortissement plus élevé aux basses et hautes fréquences.

La plupart des cordes de violon sont filées, c'est-à-dire constituées d'une âme centrale (par exemple un dérivé du nylon) et d'un filage (acier, argent) [Pic85]. Similairement aux cordes de piano le but est d'augmenter la masse linéique pour obtenir les fréquences fondamentales souhaitées avec une tension et une raideur raisonnables. La raideur a été prise en compte par le terme  $EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ . Celui-ci correspond à la modélisation d'une corde homogène, ce qui n'est pas exact. Après projection modale, en posant

$$\omega_0 := \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{m_0}}, \quad B := \frac{EI\pi^2}{TL^2} \quad (1.30)$$

l'expression (1.28b) se réécrit

$$\omega_k = k\omega_0 \sqrt{1 + k^2 B} \quad (1.31)$$

15. Ex : application FingerFiddle de M. Demoucron. Démonstration : [www.youtube.com/watch?v=oC3uJi9HJ1w](http://www.youtube.com/watch?v=oC3uJi9HJ1w)

16. Contrairement, par exemple, à [DBD16] où une méthode est proposée pour approcher dans l'EDP les amortissements décrits modalement.

### 1.3. Modèle retenu

Dans le cas sans raideur,  $B = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_0$  et  $\omega_k = k\omega_1$ . Dans le cas avec raideur,  $\omega_k > k\omega_1$  (inharmonicité). Le coefficient  $B$  (ou le module d'Young  $E$ ) peut être ajusté à des mesures expérimentales et fournir ainsi une expression simple de l'ensemble des pulsations propres. La valeur que nous retiendrons ( $E=5$  GPa) est dans une gamme de valeurs proposées dans [Per13] pour la corde de *Sol* du violon. Mais de manière comparable à la modélisation de l'amortissement, où les valeurs des coefficients modaux  $\zeta_k$  peuvent être ajustés indépendamment, nous pourrions choisir des valeurs spécifiques des pulsations  $\omega_k$  (dans [Pic85] les déviations par rapport au cas harmonique sont mesurées jusqu'au huitième mode).

#### 1.3.4 Loi de friction

La corde est frottée au moyen d'un archet, et plusieurs travaux sont dédiés à la seule étude de l'archet, parmi lesquels ceux d'Askenfelt [Ask92 ; Ask93 ; Ask95] ou la thèse de F. Ablitzer [Abl11]. La physique de l'archet, dont la richesse permet des effets musicaux variés, sera ici ignorée, et seuls les phénomènes se produisant au contact (supposé ponctuel) de la corde et de l'archet retiendront notre attention. La corde sera vue comme mise en mouvement par un ruban idéalisé, et nous allons expliquer certaines des simplifications faites et leurs limites. Enfin, on considérera le type de jeu conventionnel où les crins de l'archet frottent la corde à quelques centimètres du chevalet. Une liste de modes de jeu s'éloignant sensiblement de cette description, avec des exemples musicaux, est donnée dans [EHA14], table 1.

La friction de l'archet est supposée localisée en un unique point de friction  $x = x_b$ . On peut modifier cela en sommant l'action de plusieurs crins (de l'ordre d'une dizaine [PW98 ; SS00]) supposés localisés. Ceci permet d'introduire également l'inclinaison de la mèche de l'archet, qui met alors plus ou moins de crins en contact avec la corde [SGA03].

La forme du mouvement est déjà notablement altérée lorsque l'on passe d'une interaction de friction localisée en un point, à une interaction en deux points. Ce résultat expérimental est décrit dans [MSW77]. Lorsque l'on frotte une corde avec une baguette de bois cylindrique, le contact est très localisé, et on obtient un mouvement de Helmholtz. Si à présent on creuse une rainure sur toute la longueur de la baguette, les deux bords de la rainure sont mis en contact avec la corde et représentent deux crins. Il se forme de multiples intervalles de glissement pendant la portion temporelle d'adhérence du mouvement de Helmholtz, et plus nettement sur le crin le plus proche du chevalet (phénomène de glissement différencié).

La modélisation de la friction elle-même est un sujet extrêmement riche. Pour la modélisation des instruments de musique à cordes frottées, nous présentons deux types de loi de frottement. Ce partage n'a pas vocation à l'exhaustivité ; la discussion comporte plus de catégories dans [WPM15] par exemple.

La plus large famille est celle des lois qualifiées ici d'instantanées. Ces lois de frottement relient le coefficient de frottement à la vitesse relative instantanée  $V_r$ , au point de frottement  $x = x_b$ , entre l'archet et la corde. En notant  $V_b$  la vitesse d'archet, la vitesse relative  $V_r$  est définie (au signe près suivant les auteurs) par :

$$V_r := \frac{\partial y}{\partial t}(x_b, t) - V_b \quad (1.32)$$

Le coefficient de frottement est alors défini comme une fonction de  $V_r$ , au moins lorsque celle-ci est non nulle (glissement). Au besoin une description spécifique est donnée pour le cas  $V_r = 0$  (adhérence). Dans ce travail, les lois instantanées seront appelées régulières lorsqu'elles décrivent partout le coefficient de frottement comme fonction de la vitesse relative, et non régulières celles qui admettent en  $V_r = 0$  plusieurs valeurs. L'archétype d'une telle loi non régulière sera pour nous la loi de Coulomb. Plus de détails seront donnés dans le chapitre 2.

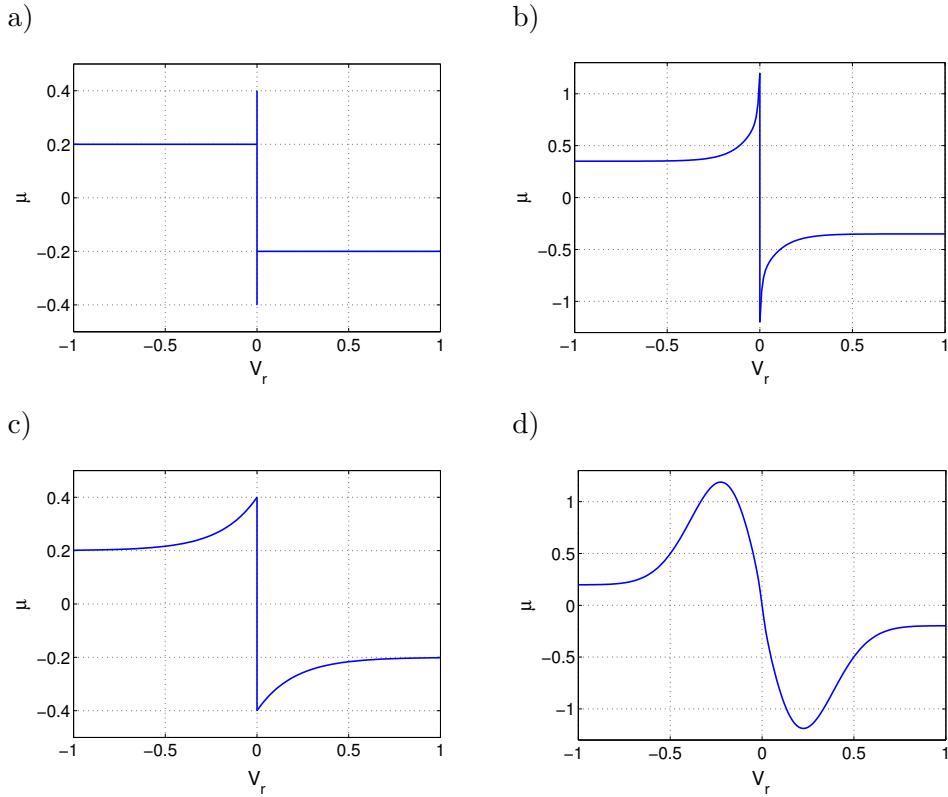


FIGURE 1.5 – Relation entre coefficient de frottement  $\mu$  et vitesse relative  $V_r$  pour 4 lois de friction. a) Friction de Coulomb ( $\mu_s = 0.4$ ,  $\mu_d = 0.2$ ). b) Def. (1.33), multivaluée en  $V_r = 0$ . c) Def. (1.34), multivaluée en  $V_r = 0$  ( $\mu_s = 0.4$ ,  $\mu_d = 0.2$ ,  $C = 5$ ). d) Def. (1.35) ( $\mu_d = 0.2$ ,  $\sigma = 10$ ).

La fonction de la vitesse relative peut être choisie assez librement. Par exemple, dans la section 3.1 de [SW00] les résultats expérimentaux<sup>17</sup> sont approchés par la fonction :

$$\mu = 0.4 \exp(-V_r/0.01) + 0.45 \exp(-V_r/0.1) + 0.35 \quad (1.33)$$

Parmi d'autres auteurs, [IA07] font appel à la fonction :

$$\mu = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) \exp(-CV_r) \quad (1.34)$$

où  $C > 0$  est un paramètre à fixer (la non-linéarité est raide pour  $C$  grand),  $\mu_d$  est le coefficient de frottement dynamique,  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique. Dans [DB14] la fonction choisie est :

$$\mu = \sqrt{2\sigma} V_r \exp(-\sigma V_r^2 + 0.5) + \mu_d \frac{2}{\pi} \arctan \frac{V_r}{0.02} \quad (1.35)$$

où  $\sigma > 0$  est un paramètre à fixer (la non-linéarité est raide pour  $\sigma$  grand), et  $\mu_d$  est le coefficient de frottement dynamique. Ces trois exemples, avec la loi de Coulomb, sont représentés en fig. 1.5.

17. Obtenus par frottement, sans stick-slip (*steady sliding*), d'une baguette de perspex enduite de colophane contre un coin de perspex.

### 1.3. Modèle retenu

Une fois que l'on s'est donné une loi de frottement (au moins pour le glissement), la force qui résulte est

$$F(V_r, x) = F_N \mu(V_r) \delta(x_b - x)$$

Les lois de frottement non instantanées sont rares en acoustique musicale, et la plus notable exception est le modèle proposé dans [SW00]. Les résultats expérimentaux des auteurs ayant établi que le coefficient de frottement n'est pas seulement fonction de la vitesse relative, ils proposent un modèle qui prend en compte la température de la colophane au point de contact. La discussion sur cette loi sera plus poussée dans le chapitre 8. La distinction majeure avec le cadre général choisi (systèmes différentiels) est que le système n'est plus local en temps.

#### 1.3.5 A-t-on un violon ?

Nous avons jusqu'ici détaillé la modélisation de la corde frottée. Même en faisant abstraction des simplifications importantes choisies, en étudiant ce monocorde idéalisé, a-t-on un modèle de violon ? Peut-on espérer reproduire qualitativement l'ensemble des comportements connus sur le violon ? Sinon, quels sont les éléments essentiels à ajouter pour obtenir certains types de régimes ?

La modélisation du doigt de l'instrumentiste peut prendre dans un premier temps une forme très simpliste, en considérant que la corde est fixe au niveau du doigt. Les équations précédentes sont alors applicables en prenant pour la longueur de la corde celle entre le chevalet et le doigt. En situation de jeu normal, il y a pourtant une différence notable entre jouer sur une corde sans doigt dessus et avec un doigt dessus. Elle est très évidente si on pince la corde au lieu de la frotter : la disparition du son est beaucoup plus rapide avec un doigt à l'extrémité de la corde que sans. Lorsqu'on la frotte, la corde émet un son moins brillant avec un doigt que sans. Ces observations indiquent que la présence du doigt a augmenté l'amortissement de la corde ; et que cet effet a été plus marqué sur les modes élevés (le timbre brillant d'un son étant associé à sa richesse en hautes fréquences). Un modèle de doigt peut être un système masse-ressort-amortisseur (exemple pour la harpe, instrument à cordes pincées : [Le +08]).

Lorsque le musicien effleure légèrement la corde avec le doigt en des points bien choisis (à la moitié, le quart, le tiers...) et frotte la corde, l'apparition forcée d'un nœud de vibration en ce point donne naissance à un son que les musiciens francophones nomment « harmoniques », l'anglais ayant choisi une expression faisant référence au timbre de flûte obtenu, « flageolet tone ». La hauteur de la note est en relation directe avec la position du doigt mais n'est pas en général la même que si le doigt bloque la corde comme en jeu normal. Si le doigt est à la longueur relative  $\beta = p/q$  la demi-longueur d'onde du son est donnée par<sup>18</sup> :

$$\frac{\text{pgcd}(p, q - p)}{q} = \frac{\text{pgcd}(p, q)}{q} \quad (1.36)$$

Comme le décrit cette expression, il y a symétrie par rapport à la moitié : par exemple, lorsque le doigt effleure la corde au quart ou aux trois-quarts, la même harmonique est obtenue. L'instrumentiste peut observer que lorsqu'il joue une harmonique et soulève le doigt, pour des conditions de jeu appropriées (vitesse d'archet, force d'appui, etc.), l'harmonique se maintient<sup>19</sup> alors qu'il n'y a plus d'obstacle sur la corde créant de nœud de vibration. Ceci soulève la question de la stabilité de la solution obtenue, et nous serons amenés à reparler de ce phénomène au chapitre 4.

Le système chevalet-caisse peut être vu comme un système linéaire, et se prête à une identification de paramètres modaux. C'est l'approche suivie dans [IAW08] (avec une identification

---

18. Cf. [Fie13], eq. (1.1).

19. En contradiction avec l'assertion dans [Fie13] : « removing the finger from the string after a short time terminates the flageolet sound immediately ».

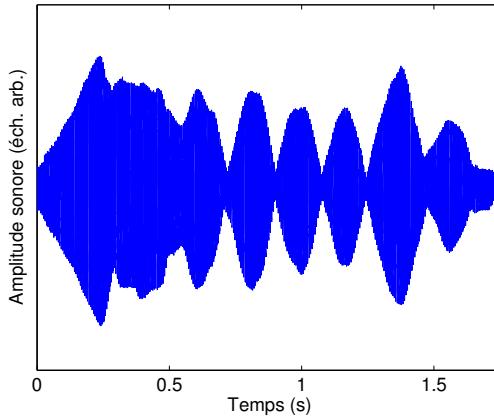


FIGURE 1.6 – Exemple de note de loup sur un violoncelle, vers 181 Hz. Son : [http://www.lma.cnrs-mrs.fr/media/theses/vigue/ex\\_wolf\\_444250.wav](http://www.lma.cnrs-mrs.fr/media/theses/vigue/ex_wolf_444250.wav)

de 53 modes pour une caisse de violoncelle), ou dans [DAI12] (avec un seul mode). Par exemple, un marteau d’impact frappant le chevalet latéralement et un accéléromètre enregistrant la réponse à cette impulsion donnent accès à la réponse fréquentielle de ce système sans avoir besoin d’en modéliser toute la complexité (géométrie, caractéristiques anistropes du bois...), comme réalisé dans la thèse de J. Chabassier [Cha12] pour la table du piano. Le couplage de la corde avec la caisse est à l’origine du phénomène de la note du loup, dont un exemple enregistré sur un violoncelle est en fig. 1.6. Il se produit lorsque pour la longueur de corde fixée par le doigt de l’instrumentiste, la pulsation fondamentale de la note est dans le voisinage de la pulsation propre d’un mode de caisse peu amorti<sup>20</sup>. La différence de fréquences est assez faible (sur l’exemple mesuré, vers 5 Hz) si bien qu’elle est entendue comme un battement, une importante modulation d’amplitude lente devant la fréquence fondamentale de la note jouée.

## 1.4 Continuation, bifurcation : un mot sur les systèmes dynamiques

### 1.4.1 Branche de solution

Rappelons le système (1.29) :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \ddot{q}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{1}{m_k} \langle F, \phi_k \rangle \quad (1.29)$$

C’est un système différentiel dont on peut étudier l’évolution des solutions selon un paramètre (la vitesse d’archet  $V_b$ , la force normale  $F_N$ ...). Il peut être mis sous la forme d’un système du premier ordre

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur de  $2N$  variables, et  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ . Les solutions stationnaires ( $\mathbf{x}$  vecteur constant) sont les solutions d’un système non linéaire

---

20. Un exemple de mesure sur un violoncelle ([IAW08], p. 268) montre que ce mode a un amortissement modal d’environ 0.7%, les autres ayant un amortissement d’au moins 2%.

#### 1.4. Continuation, bifurcation : un mot sur les systèmes dynamiques

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \quad (1.38)$$

Dans le système (1.29), ces solutions vérifient  $\dot{q}_k = \ddot{q}_k = 0$  et donc

$$\forall k, \quad \omega_k^2 q_k = \frac{F_N}{m_k} \mu(-V_b) \sin\left(\frac{k\pi x_b}{L}\right) \quad (1.39)$$

Si on choisit comme paramètre  $\lambda = F_N$ , l'ensemble de solutions est proportionnel à  $\lambda$ . Si l'on choisit comme paramètre  $\lambda = V_b$  ou  $x_b$ , la famille de solutions stationnaires s'exprime encore explicitement mais à l'aide de fonctions non linéaires ( $\mu, \sin$ ).

La recherche de la solution stationnaire, et l'obtention d'une famille de solutions selon un paramètre, constituent un cas particulier de la recherche de solutions qui sera menée. Pour  $\mathbf{R}$  une fonction (qui sera appelée résidu)

$$\mathbf{R} : \mathbb{R}^{N_{inc}+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_{inc}}, \quad (\mathbf{X}, \lambda) \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) \quad (1.40)$$

la recherche des solutions du système

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = 0 \quad (1.41)$$

selon le paramètre  $\lambda$  à partir d'un premier point solution  $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$  est l'objet de la continuation. Nous admettons pour l'instant que le problème (1.37), de type système différentiel, peut être transformé en un problème (1.41), de type système non linéaire polynomial. Hormis cas particuliers de singularité de la Jacobienne  $\mathbf{JR}$  de la fonction  $\mathbf{R}$ , on a existence et unicité d'une branche de solutions passant par le point  $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$  : c'est le théorème des fonctions implicites, dont une version est énoncée en annexe. La continuation numérique a pour but de calculer cette branche de solutions. Soit un premier point vérifiant

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = (\mathbf{R}_1(\mathbf{X}_0, \lambda_0), \dots, \mathbf{R}_{N_{inc}}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)) = 0_{N_{inc}} \quad (1.42)$$

Si on suppose l'inversibilité de la Jacobienne

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \right)_{i,j \in \llbracket 1, N_{inc} \rrbracket}$$

alors dans un voisinage du premier point il existe une unique fonction  $\mathbf{G}$  telle que les solutions  $(\mathbf{X}, \lambda)$  s'écrivent  $(\mathbf{G}(\lambda), \lambda)$ . On appelle  $(\mathbf{X}_l, \lambda_l)$  point limite si la branche  $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\lambda)$  atteint une valeur extrémale  $\lambda_l$  de  $\lambda$ . En ce point l'ensemble des solutions du système (1.41) n'est pas décrit comme fonction de  $\lambda$ . Ceci motivera dans la construction d'une méthode effective le choix d'une formulation ne donnant pas un rôle trop particulier à  $\lambda$ .

##### 1.4.2 Premier exemple de méthode de continuation : prédition, correction

La continuation d'une branche de solution peut être traitée par des méthodes numériques de prédition-correction, aussi appelées incrémentales-itératives. C'est historiquement la première famille de méthodes, et nous en donnons une brève présentation avant de présenter en section 1.5.1 la méthode plus avancée que nous emploierons (la MAN). Étant donné un premier point solution  $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ , on calcule un deuxième point de la branche, en deux étapes :

1. prédition : extrapoler un nouveau point  $(\mathbf{X}_p, \lambda_p)$  voisin de  $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ . Nous donnerons comme exemple plus bas le prédicteur tangent.

2. correction(s) : modifier  $(\mathbf{X}_p, \lambda_p)$  pour réduire la norme de  $\mathbf{R}(\mathbf{X}_p, \lambda_p)$ , éventuellement plusieurs fois. Lorsque celle-ci devient inférieure à un critère de tolérance arbitraire  $\varepsilon$  on considère obtenu un nouveau point de la branche  $(\mathbf{X}_1, \lambda_1)$ . Un exemple de correction est la méthode de Newton-Raphson.

Notons les incrément de prédiction  $\Delta\mathbf{X}_0, \Delta\lambda_0$  :

$$(\mathbf{X}_p, \lambda_p) = (\mathbf{X}_0, \lambda_0) + (\Delta\mathbf{X}_0, \Delta\lambda_0) \quad (1.43)$$

On suppose que le nouveau point  $(\mathbf{X}_p, \lambda_p)$  est solution, *i.e.*

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}_p, \lambda_p) = 0 \quad (1.44)$$

Si on note

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \right)_{i,j \in [\![1, N_{inc}]\!]} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \lambda}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) \right)_{i \in [\![1, N_{inc}]\!]} \quad (1.45)$$

alors par développement limité à l'ordre 1 de l'éq. (1.44)

$$\underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \Delta\mathbf{X}_0 + \Delta\lambda_0 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} + o(\|(\Delta\mathbf{X}_0, \Delta\lambda_0)\|) = 0 \quad (1.46)$$

d'où le système approché

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \Delta\mathbf{X}_0 + \Delta\lambda_0 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = 0 \quad (1.47)$$

de  $N_{inc}$  équations sur  $N_{inc} + 1$  inconnues. On ajoute alors la condition sur la longueur du pas pour fermer le système :

$$\|\Delta\mathbf{X}_0\|^2 + (\Delta\lambda_0)^2 = \Delta a^2 \quad (1.48)$$

où le choix de  $\Delta a$  est laissé libre à l'utilisateur, ce que nous commenterons.

Pour l'étape de correction, une méthode itérative comme la méthode de Newton peut être utilisée. Cependant, celle-ci repose sur l'inversion de la Jacobienne de la fonction, ce qui une fois de plus doit être aménagé car le système est sous-déterminé ( $N + 1$  inconnues,  $N$  équations). Une stratégie possible est d'utiliser le pseudo-inverse de Moore-Penrose [AG12] ; une autre est d'ajouter une équation, par exemple la condition d'orthogonalité de la correction par rapport à la prédiction. En notant  $\Delta\mathbf{X}_i, \Delta\lambda_i$  les incrément de la  $i$ -ème correction de Newton, cette condition s'écrit

$$\Delta\mathbf{X}_0 \cdot \Delta\mathbf{X}_i + \Delta\lambda_0 \cdot \Delta\lambda_i = 0 \quad (1.49)$$

On obtient

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{X}_1 & = & \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}_1 + \dots + \Delta\mathbf{X}_{n_{iter}} \\ \lambda_1 & = & \lambda_0 + \Delta\lambda_0 + \Delta\lambda_1 + \dots + \Delta\lambda_{n_{iter}} \\ \text{nouveau point} & = & \text{ancien point} + \text{prédiction} + n_{iter} \text{ corrections de Newton} \end{array} \quad (1.50)$$

Une fois le deuxième point obtenu, on peut effectuer un nouveau pas (étapes 1 et 2), et ainsi de proche en proche, obtenir un échantillonnage de la branche de solution. Si l'étape de prédiction est suffisamment précise, le résidu est petit ce qui favorise la convergence à l'étape de correction. La qualité de l'étape de prédiction dépend de deux facteurs :

#### 1.4. Continuation, bifurcation : un mot sur les systèmes dynamiques

- la connaissance de la Jacobienne. Si la Jacobienne est approchée par différences finies (ou une autre méthode d'approximation numérique) et non évaluée à l'aide d'une expression exacte, des problèmes d'instabilité numérique peuvent se présenter.
- la distance à parcourir  $\Delta a$ . Si la branche présente une courbure importante, choisir un pas grand (*i.e.*  $\Delta a$  grand) peut rendre la prédiction médiocre, au point de faire diverger l'étape de correction.

Le choix de distance  $\Delta a$  peut faire appel à des heuristiques pour essayer de savoir si la zone explorée est fortement courbée. Par exemple, si l'étape de correction est rapide, la prédiction est bonne, donc la courbure est faible et le pas suivant peut être allongé ; et inversement, à une correction difficile sera associée une réduction du pas suivant. C'est la stratégie utilisée dans Matcont [DGK03] et AUTO [DO09]. Cependant on peut souhaiter choisir toujours le plus grand pas possible pour explorer rapidement la branche : à chaque étape de prédiction est associée une inversion de la matrice Jacobienne. Ce compromis entre vitesse et précision est délicat.

##### 1.4.3 Bifurcation

Lorsque pour une certaine valeur de  $\lambda$ , le système dynamique (1.37) connaît un changement du nombre de solutions ou de leur stabilité, on parle de bifurcation [BPV88]. La représentation des branches de solutions de systèmes dynamiques est appelée diagramme de bifurcation. On placera  $\lambda$  en abscisse et une caractéristique d'intérêt des solutions en ordonnée (souvent dans ce travail, l'amplitude crête-à-crête ou la pulsation).

L'évolution des solutions selon le paramètre  $\lambda$  n'est que la description des solutions à chaque  $\lambda$  donné. Si par un léger abus de langage, pour décrire un diagramme de bifurcation, on dit « lorsque  $\lambda$  augmente... », ce n'est qu'au sens de variable d'une fonction, et non au sens de  $\lambda$  une variable temporelle : tout commentaire portera sur des valeurs statiques de  $\lambda$ . En effet, on ne peut pas déduire de manière évidente le comportement d'un système dynamique lorsque le paramètre  $\lambda$  évolue au cours du temps - d'autant plus si l'évolution est rapide comparée aux temps caractéristiques du système. Certains phénomènes décrits de manière statique (comme l'émergence de solutions oscillantes à une certaine valeur critique de  $\lambda$ ) se produisent de manière altérée lorsque  $\lambda$  est fonction du temps, et un domaine particulier, la bifurcation dynamique, est consacré à ce type d'étude (par exemple, la thèse de B. Bergeot [Ber13]).

La stabilité de la solution stationnaire est connue par analyse linéaire. Soit  $Jf$  la Jacobienne du système (1.38), si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative la solution stationnaire est stable, sinon elle est instable. Un phénomène d'intérêt pour nous est la bifurcation de Hopf : l'émergence de solutions oscillantes à partir d'une branche de solution stationnaire par modification d'un paramètre. Le critère testé<sup>21</sup> sur les systèmes différentiels est que la Jacobienne du système, évaluée sur la branche stationnaire, possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui franchit l'axe imaginaire. De plus, à la bifurcation, la solution périodique a pour pulsation la partie imaginaire de ces valeurs propres, au signe près (l'une étant l'opposée de l'autre).

La bifurcation générique de Hopf<sup>22</sup> voit l'amplitude  $a$  de la branche périodique croître en  $\mathcal{O}(\sqrt{\lambda})$  : quitte à réaliser des changements de variable, elle s'écrit

$$\exists C \neq 0, \quad \lambda(a) = Ca^2 + \mathcal{O}(a^3) \quad \text{en } a \rightarrow 0 \quad (1.51)$$

Nous mentionnons dès à présent ce type de croissance de l'amplitude car c'est un comportement remarquable qui sera rencontré dans un autre contexte : une bifurcation de la branche stationnaire

---

21. Un énoncé rigoureux est donné en annexe.

22. Cf. [HK12], théorème 11.18, p. 359.

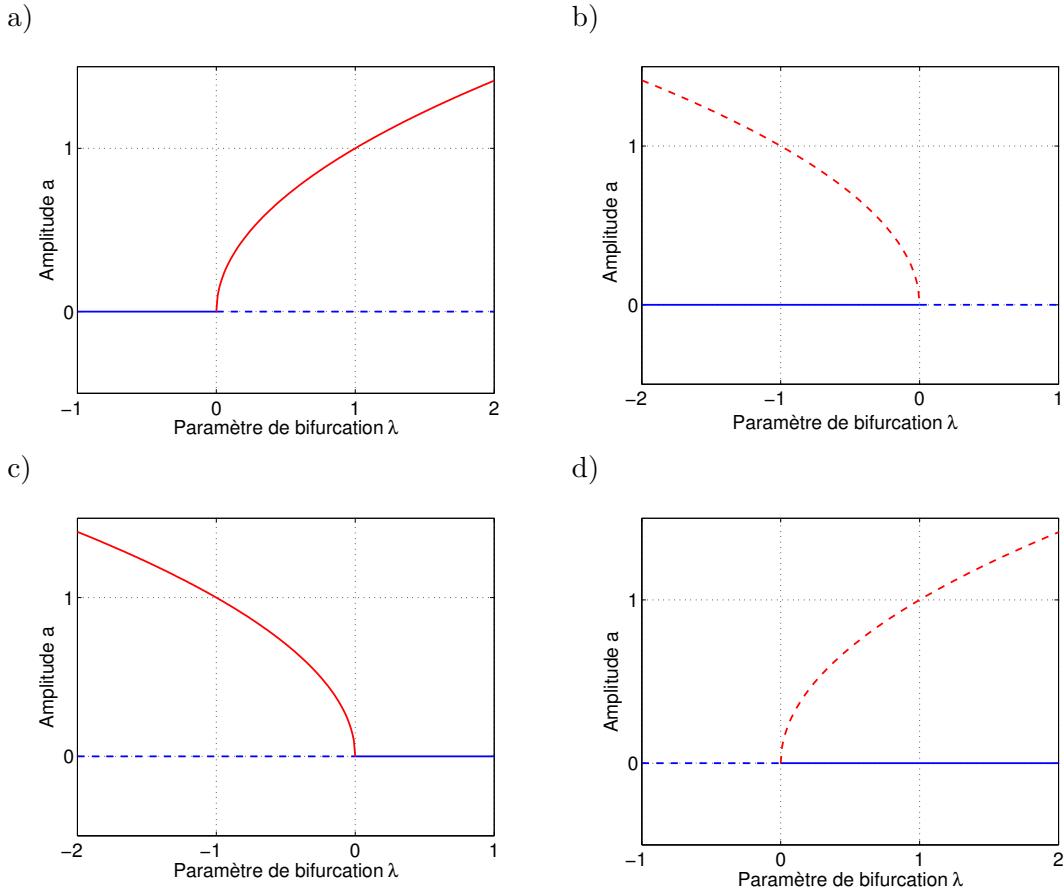


FIGURE 1.7 – Les quatre bifurcations de Hopf possibles (d’après [HK12], fig. 11.7, p. 359). La solution stationnaire est en bleu (amplitude nulle), la solution périodique en rouge. Le trait plein désigne une solution stable, les tirets une solution instable. Les bifurcations peuvent être directes (a, c) ou indirectes (b, d).

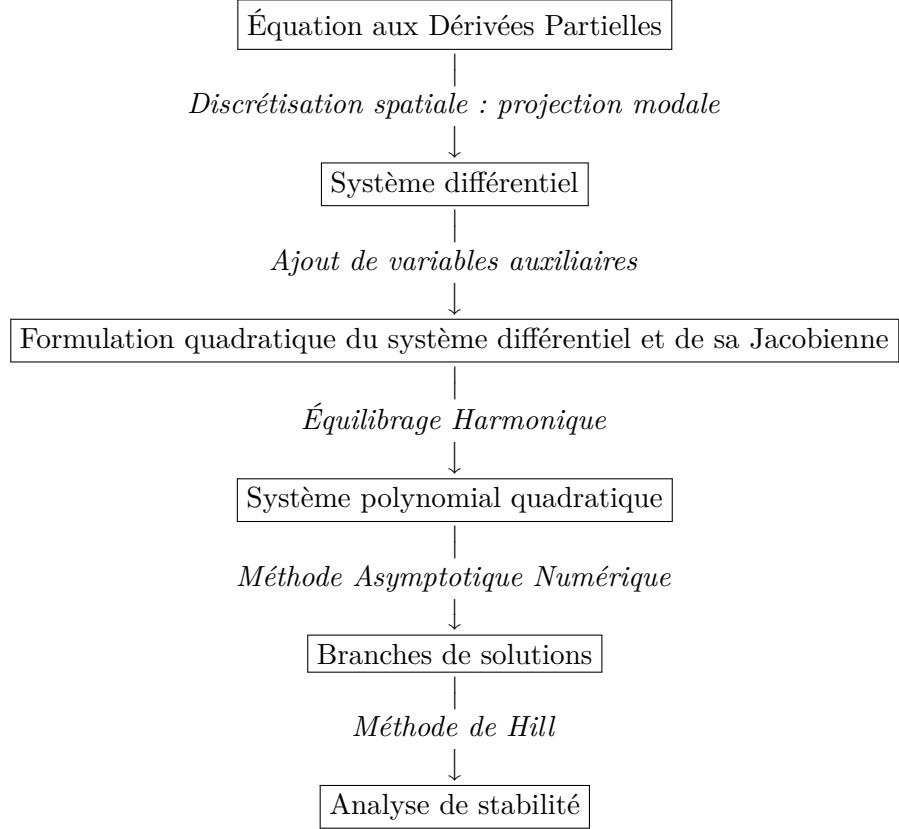
vers la branche périodique dans des systèmes avec dérivation fractionnaire (chapitre 9). Les quatre situations possibles au franchissement de la bifurcation générique de Hopf décrite par l’eq. (1.51) sont représentées en fig. 1.7. Lorsque la solution périodique émergente est stable, la bifurcation est dite directe ou surcritique ; sinon, elle est indirecte ou sous-critique.

## 1.5 Méthodes numériques employées

Le modèle retenu (section 1.3) est une équation aux dérivées partielles transformée par projection modale en un système différentiel. Nous souhaitons réaliser la continuation de ses solutions périodiques (ou quasi-périodiques) en fonction de certains paramètres du modèle comme la vitesse d’archet ou la force normale. De plus, la stabilité des solutions obtenues est une caractéristique importante. Puisqu’un système ne converge pas vers ses solutions instables, celles-ci ne peuvent pas être observées en régime établi par intégration numérique (à l’exception de conditions initiales choisies exactement sur ces solutions). Lorsque la méthode de continuation ne repose pas sur une intégration les solutions instables sont aussi obtenues et une étape

## 1.5. Méthodes numériques employées

supplémentaire de calcul de stabilité est nécessaire. L'objectif de cette section est de présenter les méthodes numériques employées. La démarche employée peut être mise sous la forme schématique suivante, en gardant à l'esprit que les méthodes non détaillées jusqu'ici sont précisément le sujet de cette section :



### 1.5.1 Méthode Asymptotique Numérique

#### Théorie

Lorsqu'elle a été formulée la Méthode Asymptotique Numérique [DP90 ; Azr+93 ; CDP94] visait la continuation de branches stationnaires. Sous des hypothèses sur la fonction de résidu, elle présente plusieurs avantages :

- la Jacobienne est évaluée d'après son expression exacte (prédiction précise) ;
- la prédiction, d'ordre élevé, décrit la branche continûment d'un premier point solution jusqu'au point suivant ;
- les ordres supérieurs de la prédiction sont obtenus par la même inversion matricielle de Jacobienne ;
- la méthode détermine automatiquement l'emplacement du point d'arrêt (où la prédiction devient insuffisamment précise, et où une nouvelle étape de prédiction est relancée).

On suppose que  $\mathbf{R}$  est quadratique, au sens suivant : il existe  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{N_{\text{inc}}}, \mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1$  des matrices réelles  $N_{\text{inc}} \times N_{\text{inc}}$ ,  $\mathbf{Q}_0$  application bilinéaire de  $\mathbb{R}^{N_{\text{inc}}} \times \mathbb{R}^{N_{\text{inc}}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{\text{inc}}}$ , telles que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{C}_0 + \lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0 \mathbf{X} + \lambda \mathbf{L}_1 \mathbf{X} + \mathbf{Q}_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \quad (1.52)$$

Quitte à ajouter des inconnues auxiliaires, ce cadre en apparence restrictif permet de traiter les non-linéarités polynomiales, les puissances entières, l'inverse, et donc par composition les non-linéarités rationnelles et les puissances rationnelles. Les non-linéarités des fonctions exponentielle,

trigonométriques et leurs réciproques, et de manière générale les fonctions pouvant être définies par un système différentiel quadratique peuvent aussi être traitées par la MAN (approche proposée dans [CP04] et détaillée dans [KCV13]).

Le paramètre de continuation est à présent traité comme une inconnue (les points limites ne sont ainsi plus problématiques), et on note le vecteur  $\mathbf{V} := (\mathbf{X}, \lambda)$ . L'idée de la MAN est de chercher un développement limité d'ordre élevé<sup>23</sup> selon un paramètre de chemin  $a$  dans le voisinage d'un premier point solution  $\mathbf{V}_0$ . Soit  $\mathbf{V}_1$  un vecteur tangent en  $\mathbf{V}_0$  et soit  $a$  défini par la projection de l'écart au point de départ sur la branche :

$$a := (\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)^t \mathbf{V}_1 \quad (1.53)$$

Le développement limité de  $\mathbf{V}$  à l'ordre  $n$  s'écrit :

$$\mathbf{V}(a) = \mathbf{V}_0 + a\mathbf{V}_1 + a^2\mathbf{V}_2 + \dots + a^n\mathbf{V}_n \quad (1.54)$$

En combinant les opérateurs définis à l'eq. (1.52) :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0, \quad \mathbf{L}(\mathbf{V}) = \lambda\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0\mathbf{X}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \lambda\mathbf{L}_1\mathbf{X} + \mathbf{Q}_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \quad (1.55)$$

l'eq. (1.52) devient :

$$\mathbf{R}(\mathbf{V}) = \mathbf{Q}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \mathbf{L}(\mathbf{V}) + \mathbf{C} \quad (1.56)$$

La substitution de (1.54) dans l'eq. (1.41), puis le tri par puissances de  $a$  donne une famille de systèmes linéaires sur les  $\mathbf{V}_i$  :

- Ordre 0 :  $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0) + \mathbf{L}(\mathbf{V}_0) + \mathbf{C} = 0$  ce qui est vrai par hypothèse car  $\mathbf{V}_0$  est solution.
- Ordre 1 :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1) + \mathbf{Q}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_0) + \mathbf{L}(\mathbf{V}_1) = 0 \quad (1.57a)$$

$$\text{la définition du paramètre de chemin (1.53) donne } \mathbf{V}_1^t \mathbf{V}_1 = 1 \quad (1.57b)$$

Si  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0}$  désigne la matrice Jacobienne de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{V}_0$ , *i.e.*

$$\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0} := \mathbf{Q}(\mathbf{V}_0, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \mathbf{V}_0) + \mathbf{L}(\cdot) \quad (1.58)$$

alors l'eq. (1.57a) peut s'écrire  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0} \mathbf{V}_1 = 0$ , et forme avec l'eq. (1.57b) un système inversible.

- Ordres  $p$ ,  $2 \leq p \leq n$  :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0} \mathbf{V}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{p-i}) = 0 \quad (1.59a)$$

$$\mathbf{V}_p^t \mathbf{V}_1 = 0 \quad (1.59b)$$

Une fois la Jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0}$  calculée, les  $n$  systèmes linéaires (1.57), (1.59) peuvent être tous résolus.

On détermine à présent de manière automatisée la fin du tronçon de branche, en cherchant le rayon  $a_{\max}$  au-delà duquel la prédiction devient trop inexacte [CP04]. Fixons-nous un seuil  $\varepsilon_R$ . Lorsque l'on substitue le développement limité qui a été calculé dans  $\mathbf{R}$ , et que l'on opère à nouveau un développement et regroupement par puissances croissantes de  $a$  (de 0 à  $2n$ ), le

---

23. On peut aussi trouver dans certaines publications l'expression « série de Taylor tronquée ».

## 1.5. Méthodes numériques employées

terme à l'ordre 0 et les  $n$  suivants sont nuls (ce sont les systèmes linéaires que l'on a résolus). Puis le premier terme non nul est

$$a^{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{n+1-i}) \quad (1.60)$$

et empiriquement il est prépondérant devant les termes suivants. Par conséquent, choisir

$$a_{\max} = \left( \frac{\varepsilon_R}{\| \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{n+1-i}) \|} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (1.61)$$

donne un résidu dont la norme est de l'ordre de  $\varepsilon_R$  en  $\mathbf{V}(a_{\max})$ . Le développement limité est arrêté pour  $a = a_{\max}$ , et à partir du point  $\mathbf{V}(a_{\max})$  un autre pas de continuation peut commencer (éventuellement, après une étape de correction si le résidu est trop grand).

### Exemple (folium de Descartes)

Nous montrons un exemple simple d'utilisation de la MAN. Soit l'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \quad (1.62)$$

On reformule l'éq. (1.62) en un système à 4 inconnues et 3 équations :

$$\begin{array}{rcl} z & -x^2 & = 0 \\ u & -y^2 & = 0 \\ \underbrace{0}_{\mathbf{L}} & \underbrace{+xz + yu - 3xy}_{\mathbf{Q}} & = 0 \end{array} \quad (1.63)$$

où l'on a rappelé les opérateurs de l'éq. (1.56) (l'opérateur constant  $\mathbf{C}$  est ici nul). On remarque que pour  $y$  grand,  $x = -y$  est une bonne solution approchée de l'éq. (1.62) (c'est en fait une asymptote oblique à la courbe que nous obtiendrons). On choisit donc comme point de départ approché :

$$(x \ y \ z \ u)^t = (-5 \ 5 \ 25 \ 25)^t \quad (1.64)$$

Ce point est cependant une approximation médiocre. Une correction initiale de Newton est donc appliquée, et converge vers le point de coordonnées arrondies à  $10^{-2}$  :

$$(-5.37 \ 4.39 \ 28.85 \ 19.23)^t$$

La continuation par la MAN est lancée, pour une suite d'une vingtaine de pas ; le résultat est présenté en fig. 1.8. La longueur des pas est d'autant plus grande que la courbure de la branche suivie est faible. Si le lecteur était intrigué que nous n'ayons pas choisi comme point de départ  $x = y = 0$ , la raison apparaît géométriquement : en ce point deux courbes se croisent. Puisqu'il n'y a pas unicité de la branche de solution, la Jacobienne n'est pas inversible (contraposée du théorème des fonctions implicites).

### 1.5.2 Équilibrage Harmonique

La description de signaux périodiques par leur série de Fourier est une méthode dont l'avancée majeure pour les applications numériques a été la conception d'un algorithme rapide, la *Fast Fourier Transform* (FFT) [CT65]. Prenons le problème par l'autre extrémité : au lieu de mesurer les coefficients de Fourier et la période d'un signal périodique, quelle seraient les valeurs à leur

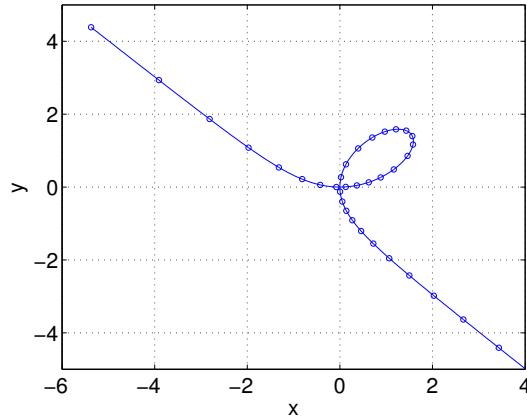


FIGURE 1.8 – Continuation de la branche de solution de l’eq. (1.62) par la MAN. Trait plein : tronçons décrits par la MAN, points : point de départ de chaque pas de continuation.

donner pour qu’ils donnent une solution périodique d’un problème ? Étant donné un système différentiel autonome à un paramètre (eq. (1.37) rappelée ici) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (1.37)$$

on cherche une solution  $\mathbf{x}$  (vectorielle, de taille  $N_{eq}$ ) sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{x}_{c,k} \cos(k\omega t) + \mathbf{x}_{s,k} \sin(k\omega t) \quad (1.65)$$

La première méthode qualifiée dans la littérature d’équilibrage harmonique (*Harmonic Balance Method*) consiste à chercher une approximation au plus bas ordre  $H = 1$  :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{c,1} \cos(\omega t) + \mathbf{x}_{s,1} \sin(\omega t) \quad (1.66)$$

On substitue cette expression dans le système différentiel (1.37). Les nouvelles inconnues sont les 3 vecteurs  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_{c,1}$ ,  $\mathbf{x}_{s,1}$ , la pulsation  $\omega$ , et le paramètre de continuation  $\lambda$ , soit en tout  $3N_{eq} + 2$  inconnues réelles. En projetant l’équation sur la même famille de fonctions (constante,  $\cos(\omega t)$ ,  $\sin(\omega t)$ ) on obtient trois systèmes de  $N_{eq}$  équations. Pour pouvoir réaliser la continuation de ce système il faut une équation supplémentaire. Le système différentiel (1.37) étant autonome,

$$\mathbf{x} \text{ solution} \Rightarrow \forall \tau, \mathbf{x}(\cdot + \tau) \text{ solution} \quad (1.67)$$

Nous pouvons imposer une condition supplémentaire, l’équation de phase, levant cette indétermination. Cela peut être un choix simple (la nullité du coefficient du premier sinus d’une des variables du vecteur  $\mathbf{x}$ ), ou, comme nous avons été amenés à le faire pour le chapitre 3, une contrainte réalisable aussi bien dans les domaines fréquentiel et temporel (une certaine variable passe par 0 au début de la période).

La méthode que nous avons décrite suit le même canevas pour un ordre quelconque  $H$  : les coefficients de Fourier sont  $2H + 1$  vecteurs, et la projection sur la famille des  $2H + 1$  fonctions (constante, cosinus et sinus) doit à nouveau être complétée par une équation de phase. Le système que nous avons obtenu avec un seul harmonique est par exemple une bonne approximation pour le cas de petites oscillations à proximité de la bifurcation de Hopf par exemple, en prenant un

## 1.5. Méthodes numériques employées

développement limité des non-linéarités de  $\mathbf{f}$  autour de la solution statique  $\mathbf{x}_0$ . Il est rapidement clair que le choix d'un nombre d'harmoniques  $H$  trop petit ne permet pas de description précise de la solution.

L'étude de Nakhla et Vlach [NV76] est souvent considérée comme importante dans la formulation moderne de l'équilibrage harmonique. Les difficultés auxquelles il faut faire face sont : la formulation du système sur les inconnues de Fourier pour un nombre  $H$  grand, et sa résolution efficace. Deux exemples de méthodes sont l'*Incremental Harmonic Balance* (IHB) et l'*Alternating Frequency/Time Domain Method* (AFT). L'IHB, proposée dans [LC81], est une technique d'amélioration successive de la solution : si l'on suppose obtenue la solution à un ordre  $H$ , alors la solution à l'ordre  $H + 1$  peut être obtenue par la résolution d'un système linéaire. Dans l'AFT, la FFT et son inverse, l'IFFT, sont utilisées à tour de rôle [LW87; CG89]. Cette fois les inconnues de Fourier ne sont pas directement recherchées : à chaque pas de continuation, la solution est évaluée dans le domaine temporel par le biais de l'IFFT, puis les coefficients de Fourier sont obtenus par FFT.

En partant de la formulation quadratique de la MAN, B. Cochelin et C. Vergez ont proposé [CV09] d'imposer également au système différentiel une formulation quadratique, *i.e.* quitte à poser des équations et variables auxiliaires,

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (1.68)$$

où  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}_0$ ,  $\mathbf{l}_1$  matrices,  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}_1$  vecteurs,  $\mathbf{q}_0$  application bilinéaire. Certaines équations peuvent être purement algébriques, et les lignes de  $\mathbf{m}$  associées sont nulles.

Alors, le système (non linéaire) vérifié par les inconnues de Fourier respecte le formalisme requis pour la MAN (eq. (1.52)) et il s'obtient de manière automatique une fois connue la formulation quadratique (1.68) du système différentiel. Un des points centraux est donc de ne pas réaliser directement l'équilibrage harmonique d'une non-linéarité quelconque, mais seulement de produit de variables, sachant que le produit de sommes de Fourier se linéarise via les formules classiques :

$$\cos(k_1\omega t)\cos(k_2\omega t) = \frac{1}{2}(\cos((k_1 - k_2)\omega t) + \cos((k_1 + k_2)\omega t)) \quad (1.69a)$$

$$\cos(k_1\omega t)\sin(k_2\omega t) = \frac{1}{2}(\sin((k_1 + k_2)\omega t) - \sin((k_1 - k_2)\omega t)) \quad (1.69b)$$

$$\sin(k_1\omega t)\sin(k_2\omega t) = \frac{1}{2}(\cos((k_1 - k_2)\omega t) - \cos((k_1 + k_2)\omega t)) \quad (1.69c)$$

### 1.5.3 Méthode de Hill

#### Principe

En même temps que le calcul de la branche de solution on souhaite connaître la stabilité des solutions périodiques. Nous donnons d'abord un aperçu de la théorie de Floquet. Soit  $\mathbf{x}_0$  une solution  $T$ -périodique d'un système (1.37), et  $\mathbf{y}$  une petite perturbation. En notant  $\mathbf{J}$  la matrice Jacobienne de  $\mathbf{f}$  au point solution  $\mathbf{x}_0$ , on a au premier ordre

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y} \quad (1.70)$$

Comme  $\mathbf{x}_0$  est  $T$ -périodique,  $\mathbf{J}$  l'est aussi. Ce qui appelle deux remarques :

- on peut calculer  $\mathbf{J}$  par équilibrage harmonique, et particulièrement si une formulation quadratique de  $\mathbf{J}$  est donnée ;

— on peut appliquer au système (1.70), linéaire à coefficients périodiques, le théorème de Floquet.

Soit  $n_v$  solutions linéairement indépendantes du système (1.70), sur lesquelles se décompose toute solution :

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{n_v} c_n \mathbf{y}_n \quad (1.71)$$

Chaque solution fondamentale  $\mathbf{y}_n$  s'écrit, par théorème de Floquet<sup>24</sup> :

$$\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{p}_n(t)e^{\alpha_n t}, \quad \mathbf{p}_n \text{ } T\text{-périodique}, \quad \alpha_n \in \mathbb{C} \quad (1.72)$$

On a alors

$$\mathbf{y}_n(t+T) = \mathbf{p}_n(t+T)e^{\alpha_n(t+T)} = \mathbf{p}_n(t)e^{\alpha_n(t+T)} = \mathbf{y}_n(t)e^{\alpha_n T} \quad (1.73)$$

On note

$$\rho_n := e^{\alpha_n T} \quad (1.74)$$

Ou bien pour tout  $n$ ,  $\alpha_n$  est de partie réelle strictement négative. Alors les solutions fondamentales  $\mathbf{y}_n$  tendent vers zéro, la perturbation  $\mathbf{y}$  est atténuée, la solution périodique  $\mathbf{x}_0$  est asymptotiquement stable. Ou bien il existe un  $\alpha_n$  de partie réelle strictement positive, et la solution périodique est instable. Les  $\alpha_n$  sont appelés exposants de Floquet, et sont uniques modulo  $\frac{2i\pi}{T}$ . Les  $\rho_n$  sont les multiplicateurs de Floquet, et la définition (1.74) donne :

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \ln(|\rho_n|) + i \frac{\arg(\rho_n) + 2k\pi}{T} \quad (1.75)$$

pour  $k \in \mathbb{Z}$ . La méthode de Hill que l'on présente maintenant a pour but de calculer les solutions et exposants de Floquet ( $\mathbf{p}_n, \alpha_n$ ). On cherche  $\mathbf{p}_n$   $T$ -périodique, et la Jacobienne  $\mathbf{J}$  est aussi  $T$ -périodique : en notant la pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , ils peuvent être écrits en série de Fourier, soit en complexes :

$$\mathbf{p}_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{p}_{n,k} e^{ik\omega t}, \quad \mathbf{J}(t) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathbf{J}_h e^{ih\omega t} \quad (1.76)$$

où les  $\mathbf{p}_{n,k}$  sont des vecteurs de taille  $n_v$  et les  $\mathbf{J}_h$  des matrices de taille  $n_v \times n_v$ . Une solution  $\mathbf{y}_n$  s'écrit alors, d'après l'éq. (1.72) :

$$\mathbf{y}_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{p}_{n,k} e^{ik\omega t} e^{\alpha_n t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{p}_{n,k} e^{(ik\omega + \alpha_n)t} \quad (1.77)$$

et le fait qu'elle soit solution du système (1.70) s'écrit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik\omega + \alpha_n) \mathbf{p}_{n,k} e^{(ik\omega + \alpha_n)t} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathbf{J}_h e^{ih\omega t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{p}_{n,k} e^{(ik\omega + \alpha_n)t} \quad (1.78)$$

$$= \sum_{(k,h) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{J}_h \mathbf{p}_{n,k} e^{(i(k+h)\omega + \alpha_n)t} \quad (1.79)$$

$$= \sum_{(k,h) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{J}_h \mathbf{p}_{n,k-h} e^{(ik\omega + \alpha_n)t} \quad (1.80)$$

---

24. Dont une version est rappelée en annexe.

## 1.5. Méthodes numériques employées

soit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathbf{J}_h \mathbf{p}_{n,k-h} - (ik\omega + \alpha_n) \mathbf{p}_{n,k} \right) e^{(ik\omega + \alpha_n)t} = 0 \quad (1.81)$$

L'équilibrage harmonique de l'eq. (1.81) revient à annuler chaque harmonique (indexée par  $k$ ), soit

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{h \in \mathbb{Z}} \mathbf{J}_h \mathbf{p}_{n,k-h} - (ik\omega + \alpha_n) \mathbf{p}_{n,k} = 0 \quad (1.82)$$

Les lignes centrales  $k = -2, -1, 0$  de ce système s'écrivent :

$$\dots + \mathbf{J}_{-2} \mathbf{p}_{n,0} + \mathbf{J}_{-1} \mathbf{p}_{n,-1} + [\mathbf{J}_0 - (-2i\omega + \alpha_n) \mathbf{I}] \mathbf{p}_{n,-2} + \mathbf{J}_1 \mathbf{p}_{n,-3} + \mathbf{J}_2 \mathbf{p}_{n,-4} + \dots = 0 \quad (1.83a)$$

$$\dots + \mathbf{J}_{-2} \mathbf{p}_{n,1} + \mathbf{J}_{-1} \mathbf{p}_{n,0} + [\mathbf{J}_0 - (-i\omega + \alpha_n) \mathbf{I}] \mathbf{p}_{n,-1} + \mathbf{J}_1 \mathbf{p}_{n,-2} + \mathbf{J}_2 \mathbf{p}_{n,-3} + \dots = 0 \quad (1.83b)$$

$$\dots + \mathbf{J}_{-2} \mathbf{p}_{n,2} + \mathbf{J}_{-1} \mathbf{p}_{n,1} + [\mathbf{J}_0 - \alpha_n \mathbf{I}] \mathbf{p}_{n,0} + \mathbf{J}_1 \mathbf{p}_{n,-1} + \mathbf{J}_2 \mathbf{p}_{n,-2} + \dots = 0 \quad (1.83c)$$

En définissant par blocs la matrice de Hill  $\mathbf{H}$  (de taille infinie, pour le moment) :

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{J}_0 + 2i\omega \mathbf{I} & \mathbf{J}_{-1} & \mathbf{J}_{-2} & \mathbf{J}_{-3} & \mathbf{J}_{-4} & \dots \\ \dots & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 + i\omega \mathbf{I} & \mathbf{J}_{-1} & \mathbf{J}_{-2} & \mathbf{J}_{-3} & \dots \\ \dots & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_{-1} & \mathbf{J}_{-2} & \dots \\ \dots & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 - i\omega \mathbf{I} & \mathbf{J}_{-1} & \dots \\ \dots & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 - 2i\omega \mathbf{I} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

et les concaténations de vecteurs

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{q}_{n,\ell} := \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{p}_{n,-1-\ell} \\ \mathbf{p}_{n,-\ell} \\ \mathbf{p}_{n,1-\ell} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

le système (1.82) s'écrit<sup>25</sup>

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{H} \mathbf{q}_{n,\ell} = (\alpha_n + i\ell\omega) \mathbf{q}_{n,\ell} \quad (1.86)$$

En pratique, l'ordre des séries de Fourier  $h$  est compris entre  $-H$  et  $H$  et la matrice est tronquée. Les valeurs propres calculées sur cette matrice ne sont pas celles du problème non tronqué mais convergent vers elles [ZHA04]. Pour gérer cette approximation, [LT10] proposent de collecter les vecteurs propres approchés dont le profil est le plus symétrique<sup>26</sup>. Enfin, dans l'implémentation actuelle pour Manlab, les blocs matriciels  $\mathbf{J}_k$  sont calculés à l'aide d'une formulation quadratique de la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}$ .

25. Le cas  $\ell = 0$  donne l'écriture du système telle que détaillée dans les équations (1.83).

26. Une communication pour détailler le comportement numérique de cette technique est en préparation par A. Lazarus et B. Bentvelsen.

### Bifurcations du régime périodique

Les multiplicateurs de Floquet, dont on compare le module à 1 pour évaluer la stabilité de la solution périodique, sont des valeurs propres d'une matrice (la matrice de monodromie, définie en annexe), de sorte que trois comportements sont possibles<sup>27</sup> :

1. un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité en +1 (fig. 1.9) : bifurcation de cycle limite (en anglais, *fold limit cycle bifurcation*).
2. un multiplicateur sort du cercle en -1 (fig. 1.10) : bifurcation de doublement de période (*flip*, ou *period doubling bifurcation*). Un exposant de Floquet traverse l'axe imaginaire avec partie imaginaire égale à la moitié de la pulsation de la solution<sup>28</sup>. Dans le voisinage, il existe une nouvelle branche périodique, de période double.
3. le module de deux multiplicateurs, complexes conjugués (non réels), devient supérieur à 1 (fig. 1.11) : bifurcation de Neimark-Sacker. Dans le voisinage, il existe une branche de solution quasi-périodique à deux pulsations. La valeur de ces pulsations est connue au voisinage de la bifurcation : l'une vaut la pulsation de la solution périodique, l'autre est égale à la partie imaginaire des exposants de Floquets franchissant l'axe imaginaire (au signe près).

## 1.6 Exemple

Nous présentons un exemple simple de continuation des solutions périodiques d'un système autonome, un oscillateur de type Van der Pol. L'équation retenue est :

$$\ddot{x} - (\lambda - \mu x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1.87)$$

de paramètre de continuation  $\lambda$ ;  $\mu = 0.1$ . L'éq. (1.87) est reformulée en système différentiel d'ordre 1 :

$$\dot{x} = y \quad (1.88a)$$

$$\dot{y} = \lambda y - \mu x^2 y - x \quad (1.88b)$$

de Jacobienne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu xy - 1 & \lambda - \mu x^2 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

dont l'évaluation sur la branche stationnaire ( $x = y = 0$ ) vaut

$$\mathbf{J}_s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

Ses valeurs propres se calcurent explicitement : le polynôme caractéristique de  $\mathbf{J}_s$  est

$$\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -1 & \lambda - z \end{vmatrix} = z^2 - \lambda z + 1 \quad (1.91)$$

de racines

$$\frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{où } \Delta = \lambda^2 - 4 \quad (1.92)$$

---

27. Cf. [Guc07].

28. L'exposant conjugué a pour partie imaginaire l'opposé de la moitié de la pulsation de la solution.

### 1.6. Exemple

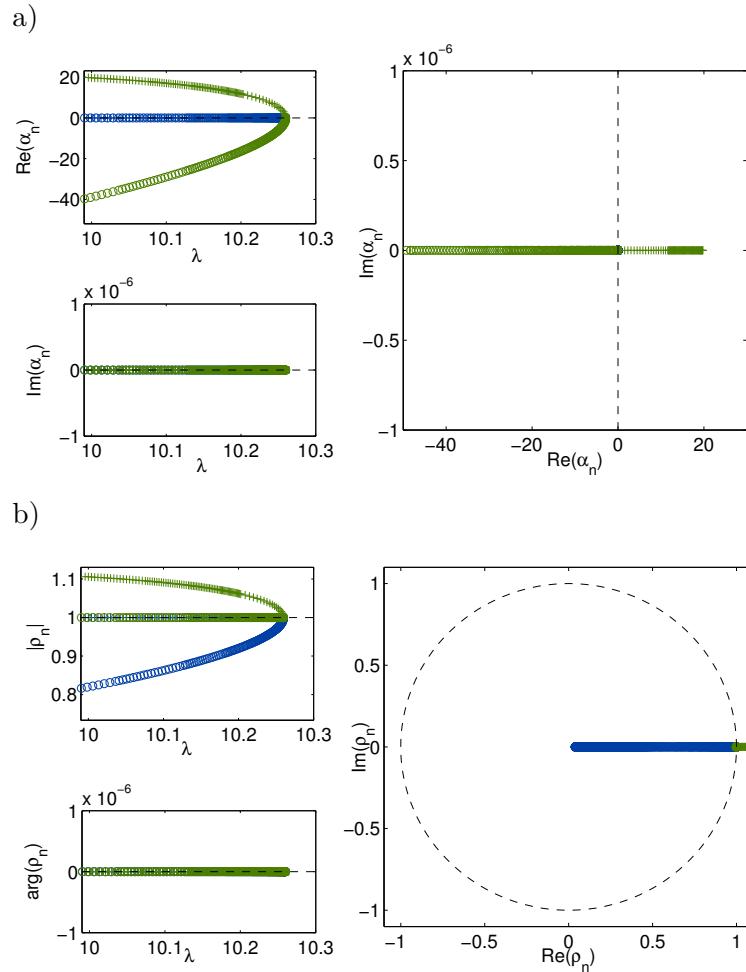


FIGURE 1.9 – Exemple d'exposants (a) et de muplificateurs (b) de Floquet lors d'une bifurcation de point limite (système étudié : corde frottée, cas à un mode, continuation selon la vitesse d'archet, section 2.5.2, p. 67). L'un des exposants  $\alpha_n$  franchit l'axe imaginaire. L'un des muplificateurs sort du cercle unité en +1.

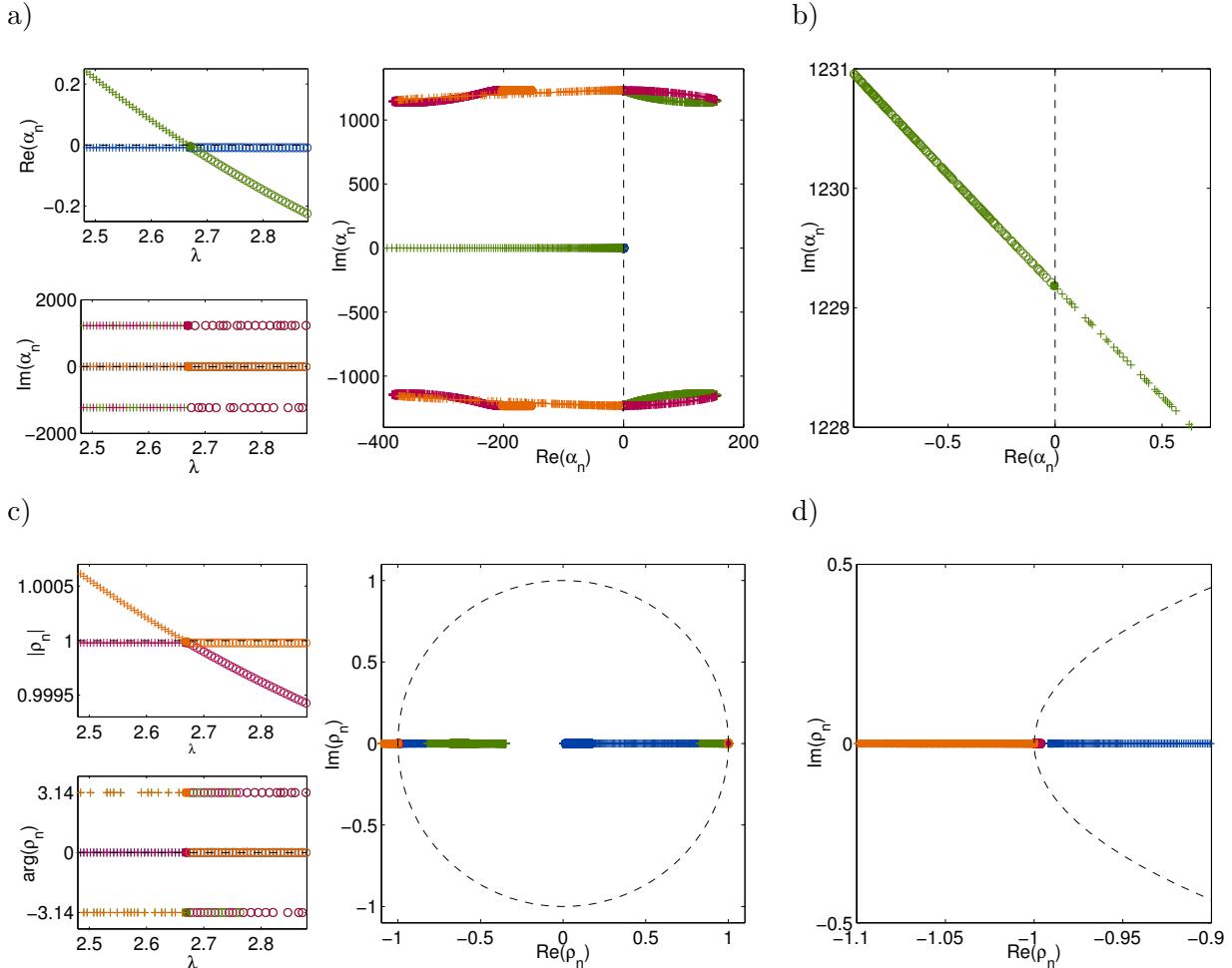


FIGURE 1.10 – Exemple d'exposants (a-b) et de multiplicateurs (c-d) de Floquet lors d'une bifurcation de doublement de période (système étudié : corde frottée, cas à deux modes, continuation selon la vitesse d'archet, section 4.2.1, p. 100). L'un des exposants  $\alpha_n$  (couleur verte) franchit l'axe imaginaire (zoom en b) avec partie imaginaire égale à la moitié de la pulsation de la solution périodique. L'un des quatre multiplicateurs (couleur orange) sort du cercle unité en -1 (zoom en d).

### 1.6. Exemple

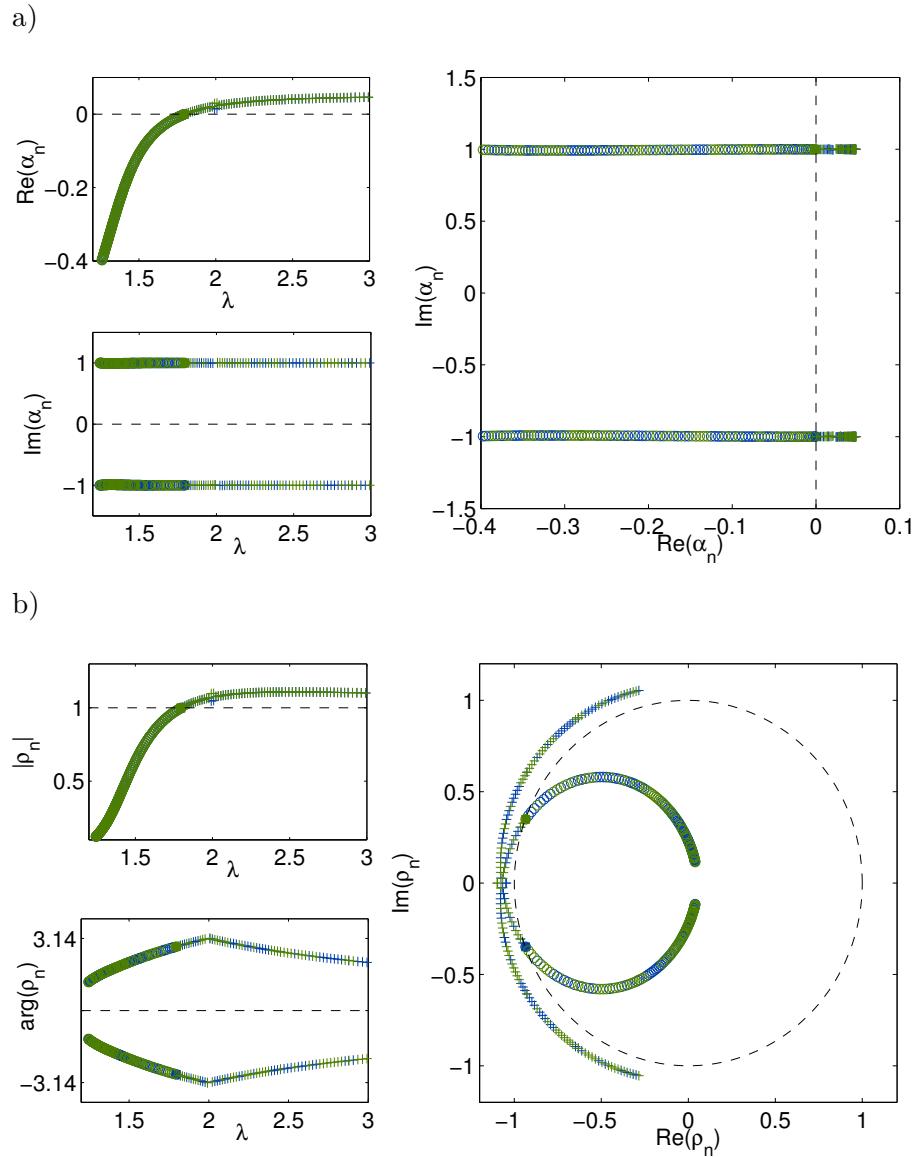


FIGURE 1.11 – Exemple d'exposants (a) et de multiplicateurs (b) de Floquet lors d'une bifurcation de Neimark-Sacker (système étudié : oscillateur de type Van der Pol forcé, continuation selon la pulsation de forçage, section 5.4, p. 132). Les deux multiplicateurs  $\rho_1, \rho_2$ , complexes conjugués non réels, sortent du cercle unité. À la bifurcation, la seconde pulsation de la branche quasi-périodique émergente est égale (au signe près) à la partie imaginaire des exposants  $\alpha_1, \alpha_2$  franchissant l'axe imaginaire (environ  $0.9996 \text{ rad.s}^{-1}$ ).

Celles-ci sont donc complexes conjuguées pour  $\lambda^2 < 4$ , et leur partie réelle s'annule pour  $\lambda = 0$ , donnant ainsi une bifurcation de Hopf.

Au voisinage de cette bifurcation, la branche périodique peut être approchée par l'équilibrage harmonique le plus simple, à un seul harmonique :

$$x(t) = x_0 + x_{c1} \cos \omega t + x_{s1} \sin \omega t \quad (1.93)$$

On choisit pour toute la suite la condition de phase suivante :  $x_{s1}$  est nul. Comme la solution stationnaire est nulle, l'expression (1.93) devient

$$x(t) = x_c \cos \omega t \quad (1.94)$$

que l'on substitue dans l'éq. (1.87) :

$$-\omega^2 x_c \cos \omega t - (\lambda - \mu x_c^2 \cos^2 \omega t)(-\omega x_c \sin \omega t) + x_c \cos \omega t = 0 \quad (1.95)$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega t \sin \omega t &= \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{1}{4} \left( 2 \cos \left( \frac{3\omega t + \omega t}{2} \right) \sin \left( \frac{3\omega t - \omega t}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{1}{4} (\sin(3\omega t) - \sin \omega t) = \frac{1}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \end{aligned} \quad (1.96)$$

l'éq. (1.95) devient

$$-\omega^2 x_c \cos \omega t + \lambda \omega x_c \sin \omega t - \mu x_c^3 \omega \frac{1}{4} (\sin \omega t - \sin 3\omega t) + x_c \cos \omega t = 0 \quad (1.97)$$

La projection contre  $\cos \omega t$  donne

$$-\omega^2 x_c + x_c = 0 \Leftrightarrow x_c = 0 \text{ ou } \omega = 1 \quad (1.98)$$

et celle sur  $\sin \omega t$  donne

$$\lambda \omega x_c - \mu x_c^3 \omega \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \omega x_c = 0 \text{ ou } x_c^2 = \frac{4}{\mu} \quad (1.99)$$

On trouve une croissance de l'amplitude en  $\sqrt{\lambda}$ , soit une bifurcation de Hopf générique (éq. (1.51)).

La continuation de la branche périodique est réalisée avec Manlab. À l'aide d'une variable auxiliaire  $r = x^2$ , le système (1.88) admet la formulation quadratique :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -x + \lambda y - \mu r y \\ 0 & = & r - x^2 \\ \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} & = & \mathbf{l}_0 \mathbf{u} + \lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{array} \quad (1.100)$$

où l'on a rappelé les petits opérateurs requis pour Manlab (éq. (1.68)). (Ici,  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$  sont nuls.)

D'autre part, pour calculer la stabilité par la méthode de Hill, l'implémentation prévue dans Manlab requiert que la Jacobienne (éq. (1.89), rappelée ci-dessous) soit reformulée comme une somme de 3 matrices,  $\mathbf{J}_0$  (coefficients constants et  $\lambda$ ),  $\mathbf{J}_L$  (termes linéaires selon les variables) et  $\mathbf{J}_Q$  (produits de variables), ce qui est ici immédiat sans même nécessiter de variable auxiliaire :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu xy - 1 & \lambda - \mu x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} + 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\mu xy & -\mu x^2 \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

### 1.6. Exemple

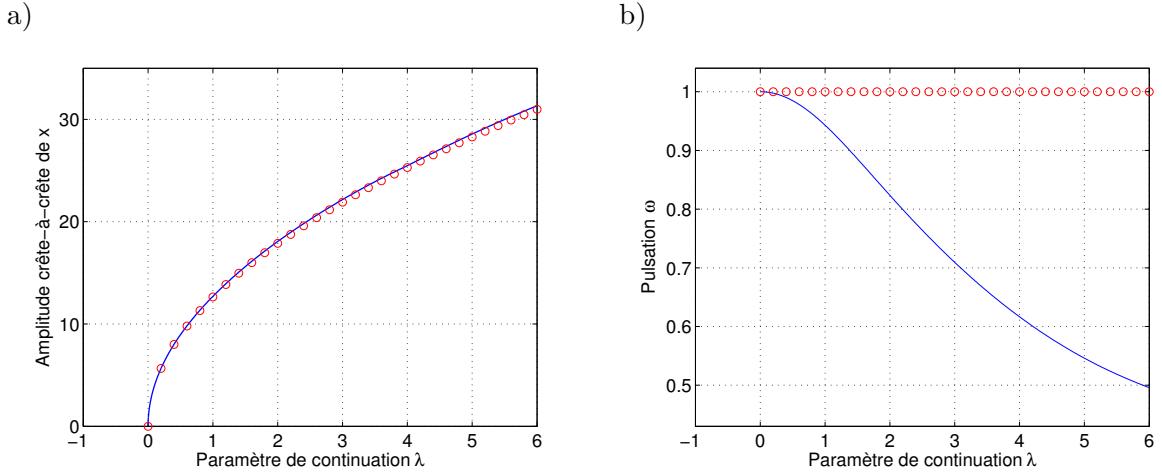


FIGURE 1.12 – Diagramme de bifurcation de l’oscillateur (1.87). a) Amplitude crête-à-crête de la solution en fonction de  $\lambda$ . Trait bleu : solution obtenue par MAN-EH (Manlab),  $H = 25$  harmoniques. Cercles rouges : estimation à  $H = 1$  donnée par l’eq. (1.99). b) Pulsation  $\omega$  en fonction de  $\lambda$ .

Grâce à l’EH à  $H = 1$  qui précède, un point de départ approché au voisinage de la bifurcation est :

$$x = x_c \cos \omega t \quad (1.102a)$$

$$y = -\omega x_c \sin \omega t \quad (1.102b)$$

$$r = \frac{x_c^2}{2} \quad (1.102c)$$

avec

$$x_c = 0.1 \text{ (petite amplitude arbitraire)}, \quad \lambda = 0, \quad \omega = 1 \quad (1.103)$$

qui est une approximation assez juste pour permettre à l’algorithme de correction de Newton de converger. Le premier terme de la série de Fourier est même largement prépondérant dans le voisinage de la bifurcation, de sorte que l’on peut proposer une extension à plus d’harmoniques, par exemple  $H = 25$ , du point de départ ci-dessus, en le complétant par des coefficients de Fourier nuls au-delà du premier ; la correction de Newton converge encore vers la branche périodique souhaitée.

Le diagramme de bifurcation, calculé avec  $H = 25$  harmoniques, est tracé en fig. 1.12. La solution périodique est stable. On remarque que le résultat prévu par l’EH à  $H = 1$  est une très bonne approximation pour l’amplitude crête-à-crête, mais ne suffit pas pour décrire le comportement de la pulsation  $\omega$  (l’eq. (1.98) donne  $\omega = 1$ , qui n’est correct qu’à la bifurcation). Pour trois points le long de la branche, le diagramme de phase est donné en fig. 1.13. Chaque solution obtenue par EH peut être comparée à l’intégration numérique en donnant à celle-ci un point du cycle obtenu comme condition initiale. Par exemple, on peut utiliser la suite de programmes Matlab `ode`. On constate qu’à  $\lambda = 5$ , le diagramme de phase devient assez inexact pour  $H = 25$  harmoniques. Le même point, recalculé avec  $H = 50$  harmoniques, est plus proche de l’intégration numérique.

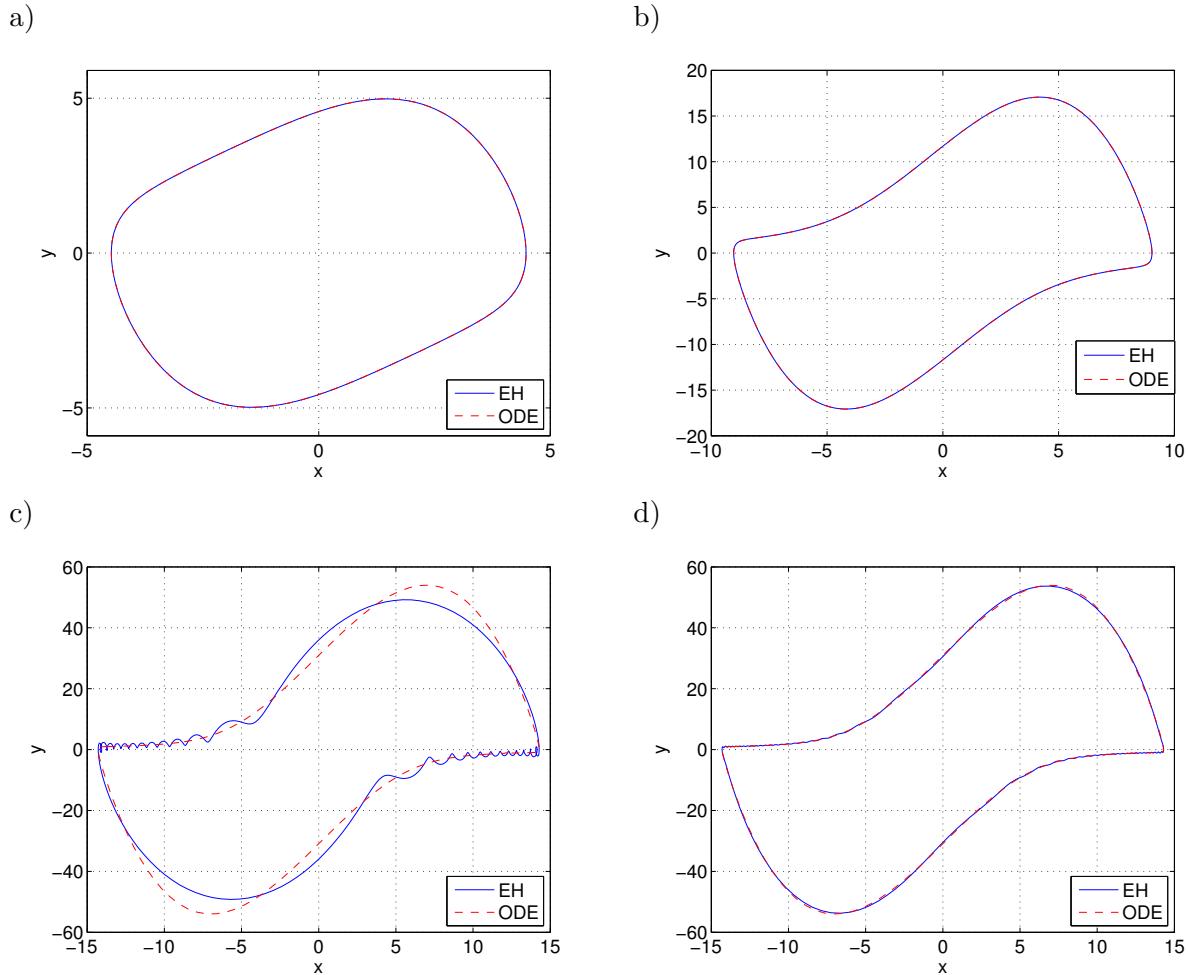


FIGURE 1.13 – Exemples de diagrammes de phase ( $x, y = \dot{x}$ ) pour quelques points de la branche périodique tracée en fig. 1.12. Trait bleu : Équilibrage Harmonique. Tirets rouges : intégration numérique (Matlab, `ode45`). a)  $\lambda = 0.5$ . b)  $\lambda = 2$ . c)  $\lambda = 5$ . d)  $\lambda = 5$ , recalcul avec  $H = 50$  harmoniques.

## 1.A Théorème des fonctions implicites

### Annexes

#### 1.A Théorème des fonctions implicites

**Théorème<sup>29</sup>.** Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ , soit  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_q) : V \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction analytique, et  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in V$  tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \quad \det \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket, j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \neq 0 \quad (1.104)$$

Alors il existe un ouvert  $U = U_1 \times U_2 \subset V$  et une unique fonction analytique  $\mathbf{G} : U_1 \rightarrow U_2$  telle que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_1 \times U_2 \text{ tels que } \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) \text{ tels que } \mathbf{x} \in U_1\} \quad (1.105)$$

#### 1.B Théorème de la bifurcation de Hopf

**Théorème<sup>30</sup>.** Soit le système différentiel de dimension 2

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\lambda)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{x}) \quad (1.106)$$

avec  $\mathbf{F}$  de classe au moins  $C^3$ . Supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall \lambda, |\lambda| < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = 0 \text{ et } \mathbf{J}_x \mathbf{F}(\lambda, \mathbf{0}) = 0 \quad (1.107)$$

Supposons que la partie linéaire  $A(\lambda)$ , à l'origine  $\lambda = 0$ , a une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$  telles que

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) \neq 0 \quad (1.108)$$

Enfin, supposons la condition de transversalité : les valeurs propres franchissent l'axe imaginaire avec

$$\frac{d\alpha}{d\lambda}(0) \neq 0 \quad (1.109)$$

Alors, dans tout voisinage  $U$  de l'origine de  $\mathbb{R}^2$ , et pour tout  $\lambda_0 > 0$ , il existe  $\lambda_1$ , avec  $|\lambda_1| < \lambda_0$ , tel que le système différentiel

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\lambda_1)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\lambda_1, \mathbf{x}) \quad (1.110)$$

possède une solution périodique non triviale dans  $U$ .

Lorsque le système différentiel est de dimension supérieure à deux, on peut employer le théorème de la variété centrale : voir par exemple l'article sur Scholarpedia [Kuz06].

#### 1.C Théorème de Floquet

**Théorème.** Soit  $A(t)$  une matrice  $n_v \times n_v$  à coefficients  $T$ -périodiques, et le système différentiel linéaire

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (1.111)$$

---

29. Le cas holomorphe est donné dans [FG02], p. 34. Une fonction holomorphe étant analytique selon la variable complexe, on peut voir le cas analytique (réel) que nous donnons ici comme un cas particulier.

30. Issu de [HK12], théorème 11.12, p. 344, appelé théorème de Poincaré-Andronov-Hopf en l'honneur des trois scientifiques ayant travaillé indépendamment sur la question.

Soit  $M$  une matrice fondamentale du système différentiel (une famille de  $n_v$  solutions linéairement indépendantes). Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t+T) = M(t)M^{-1}(0)M(T) \quad (1.112)$$

La matrice  $M^{-1}(0)M(T)$  est appelée matrice de monodromie du système. De plus, pour toute matrice  $B$  (a priori complexe) telle que

$$e^{TB} = M^{-1}(0)M(T) \quad (1.113)$$

il existe une matrice à coefficients  $T$ -périodiques  $P(t)$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(t) = P(t)e^{tB} \quad (1.114)$$

## Références

- [Abl11] F. ABLITZER. « Influence des paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement statique de l'archet de violon en situation de jeu ». <tel-00695927v3>. Thèse de doct. Université du Maine, 2011.
- [Adr89] J. M. ADRIEN. « Simulation numérique de systèmes vibrants complexes : application à la synthèse sonore par modélisation physique ». Thèse de doct. Paris 6, 1989.
- [AG12] E. L. ALLGOWER et K. GEORG. *Numerical continuation methods : an introduction*. T. 13. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Ask92] A. ASKENFELT. « Observations on the dynamic properties of violin bows ». In : *STL-QPSR* 33.4 (1992), p. 43–49.
- [Ask93] A. ASKENFELT. « A look at violin bows ». In : *STL-QPSR* 34.2-3 (1993), p. 41–48.
- [Ask95] A. ASKENFELT. « Observations on the violin bow and the interaction with the string ». In : *STL-QPSR* 36.2-3 (1995), p. 107–118.
- [Azr+93] L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. « An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36.8 (1993), p. 1251–1277.
- [BSW05] E. BAVU, J. SMITH et J. WOLFE. « Torsional waves in a bowed string ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 91.2 (2005), p. 241–246.
- [Ben08] W. R. BENNETT. *The science of musical sound*. Rose Lane Press, 2008.
- [Ber13] B. BERGEOT. « Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable ». Thèse de doct. Université du Maine, 2013.
- [BPV88] P. BERGER, Y. POMMEAU et C. VIDAL. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, Paris, 1988.
- [CG89] T.M. CAMERON et J.H. GRIFFIN. « An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149–154.
- [Cha12] J. CHABASSIER. « Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques ». Thèse de doct. Ecole Polytechnique X, 2012.
- [CK16] A. CHAIGNE et J. KERGOMARD. *Acoustics of musical instruments*. T. 844. Springer, 2016.

## Références

- [CDP94] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. « The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics ». In : *Revue européenne des éléments finis* 3.2 (1994), p. 281–297.
- [CP04] B. COCHELIN et F. PÉRIGNON. « Résolution de petits systèmes algébriques par la MAN sous Matlab ». In : *Revue Européenne des Eléments* 13.1-2 (2004), p. 79–96.
- [CV09] B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), p. 243–262.
- [CT65] J.W. COOLEY et J. W. TUKEY. « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series ». In : *Mathematics of computation* 19.90 (1965), p. 297–301.
- [Cor96] A. CORNU. « Étude expérimentale des vibrations transversales des cordes ». In : *J. Phys. Theor. Appl.* 5.1 (1896), p. 5–11.
- [CA84] L. CREMER et J. S. ALLEN. *The physics of the violin*. MIT Press Cambridge, 1984.
- [DP90] N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. « A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures ». In : *International Journal of Engineering Science* 28.9 (1990), p. 943–957.
- [DAI12] V. DEBUT, J. ANTUNES et O. INÁCIO. « What can we learn about the wolf phenomenon from a linearized analysis ? » In : *Acoustics 2012, Nantes, France*. <hal-00810711>. 2012.
- [DAI17] V. DEBUT, J. ANTUNES et O. INÁCIO. « Linear modal stability analysis of bowed-strings ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 141.3 (2017), p. 2107–2120.
- [DB14] C. DESVAGES et S. BILBAO. « Physical modeling of nonlinear player-string interactions in bowed string sound synthesis using finite difference methods ». In : *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics (ISMA)*, Le Mans, France. 2014, p. 7–12.
- [DB15] C. DESVAGES et S. BILBAO. « Two-polarisation finite difference model of bowed strings with nonlinear contact and friction forces ». In : *Proceedings of the 18th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*, Trondheim, Norway. 2015.
- [DBD16] C. DESVAGES, S. BILBAO et M. DUCCESCHI. « Improved frequency-dependent damping for time domain modelling of linear string vibration ». In : *Proceedings of the 22nd International Congress on Acoustics*. ICA. 2016.
- [DGK03] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS et Y. A. KUZNETSOV. « MATCONT : a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs ». In : *ACM Transactions on Mathematical Software* 29.2 (2003), p. 141–164.
- [DO09] E. J. DOEDEL et B.E. OLDEMAN. *AUTO-07P : Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, Canada. 2009.
- [EHA14] M. EDGERTON, N. HASHIM et W. AUHAGEN. « A case study of scaling multiple parameters by the violin ». In : *Musicae Scientiae* 18.4 (2014), p. 473–496.
- [Fie13] B. FIEDLER. « Mathematical models of flageolet harmonics on stringed instruments ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 254 (2013), p. 144–153.
- [Fle64] H. FLETCHER. « Normal vibrations frequencies of a stiff piano string ». In : *J. Acous. Soc. Am.* 36.1 (1964), p. 203–209.

- [Fri53] F.G. FRIEDLANDER. « On the oscillations of a bowed string ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 49. 3. Cambridge Univ Press. 1953, p. 516–530.
- [FG02] K. FRITZSCHE et H. GRAUERT. *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*. 2002.
- [Gal04] P. M. GALLUZZO. « On the playability of stringed instruments ». Thèse de doct. University of Cambridge, 2004.
- [GE89] F.S. GILLAN et S.J. ELLIOTT. « Measurement of the torsional modes of vibration of strings on instruments of the violin family ». In : *Journal of Sound and Vibration* 130.2 (1989), p. 347–351.
- [Gou84] C. GOUGH. « The nonlinear free vibration of a damped elastic string ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 75.6 (1984), p. 1770–1776.
- [Guc07] J. GUCKENHEIMER. « Bifurcation ». In : *Scholarpedia* 2.6 (2007). revision #91057, p. 1517. DOI : [10.4249/scholarpedia.1517](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1517).
- [Gue02] K. GUETTLER. « On the creation of the Helmholtz motion in bowed strings ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 88.6 (2002), p. 970–985.
- [Gue13] K. GUETTLER. « Analysis of bow-change strategies ». In : *Proceedings of Meetings on Acoustics ICA2013*. T. 19. 1. ASA. 2013.
- [GA97] K. GUETTLER et A. ASKENFELT. « Acceptance limits for the duration of pre-Helmholtz transients in bowed string attacks ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 101.5 (1997), p. 2903–2913.
- [GSA03] K. GUETTLER, E. SCHOOENDERWALDT et A. ASKENFELT. « Bow speed or bowing position- which one influences spectrum the most ? » In : *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference (SMAC)*. 2003.
- [HK12] J. K. HALE et H. KOÇAK. *Dynamics and bifurcations*. T. 3. Springer Science & Business Media, 2012.
- [HHG95] R. J. HANSON, F. W. HALGEDAHL et K. GUETTLER. « Anomalous low-pitched tones from a bowed violin string ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 97.5 (1995), p. 3270–3270.
- [HE54] H.L.F. HELMHOLTZ et A.J. ELLIS. *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*. Dover, 1954.
- [IA07] O. INÁCIO et J. ANTUNES. « A linearized modal analysis of the bowed string ». In : *Proceedings of the International Congress of Acoustics. SEA, Madrid*. 2007.
- [IAW08] O. INÁCIO, J. ANTUNES et M.C.M. WRIGHT. « Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes ». In : *Journal of Sound and Vibration* 310 (2008), p. 260–286.
- [KCV13] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332.4 (2013), p. 968–977.
- [Kuz06] Y. A. KUZNETSOV. « Andronov-Hopf bifurcation ». In : *Scholarpedia* 1.10 (2006). revision #90964, p. 1858. DOI : [10.4249/scholarpedia.1858](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.1858).

## Références

- [LC81] S.L. LAU et Y.K. CHEUNG. « Amplitude incremental variational principle for non-linear vibration of elastic systems ». In : *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics* 48 (1981), p. 959–964.
- [Law80] B. LAWERGREN. « On the motion of bowed violin strings ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 44.3 (1980), p. 194–206.
- [LT10] A. LAZARUS et O. THOMAS. « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510–517.
- [Le +08] J. L. LE CARROU, E. WAHLEN, E. BRASSEUR et J. GILBERT. « Two dimensional finger-string interaction in the concert harp ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 123.5 (2008), p. 3122.
- [LW87] F.H. LING et X.X. WU. « Fast Galerkin method and its application to determine periodic solutions of non-linear oscillators ». In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 22.2 (1987), p. 89–98.
- [MSW83] M. E. MCINTYRE, R. T. SCHUMACHER et J. WOODHOUSE. « On the oscillations of musical instruments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 74.5 (1983), p. 1325–1345.
- [MSW81] M. E. MCINTYRE, R.T. SCHUMACHER et J. WOODHOUSE. « Aperiodicity in bowed-string motion ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 49.1 (1981), p. 13–32.
- [MSW77] M.E. MCINTYRE, R.T. SCHUMACHER et J. WOODHOUSE. « New results on the bowed string ». In : *Catgut Acoustical Society Newsletter* 28 (1977), p. 27–31.
- [MW79] M.E. MCINTYRE et J. WOODHOUSE. « On the fundamentals of bowed-string dynamics ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 43.2 (1979), p. 93–108.
- [NV76] M. NAKHLA et J. VLACH. « A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems ». In : *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2 (1976), p. 85–91.
- [Nar68] R. NARASIMHA. « Non-linear vibration of an elastic string ». In : *Journal of Sound and Vibration* 8.1 (1968), p. 134–146.
- [PC12] T. S. PARKER et L. O. CHUA. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer, 2012.
- [Per13] G. K. PERCIVAL. « Physical modelling meets machine learning : performing music with a virtual string ensemble ». Thèse de doct. University of Glasgow, 2013.
- [Pic85] N. C. PICKERING. « Physical properties of violin strings ». In : *J. Catgut Acoust. Soc* 44 (1985), p. 6–8.
- [PW98] R. PITTEROFF et J. WOODHOUSE. « Mechanics of the contact area between a violin bow and a string. Part III : parameter dependence ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 84.5 (1998), p. 929–946.
- [Ram18] C.V. RAMAN. « On the mechanical theory of the vibrations of bowed strings and of musical instruments of the violin family, with experimental verification of the results ». In : *Bull. Indian Assoc. Cultiv. Sci.* 15 (1918), p. 1–158.
- [Ram20] C.V. RAMAN. « Experiments with mechanically-played violins ». In : *Proc. Indian Assoc. Cultiv. Sci.* T. 6. 1920, p. 19–36.
- [Ray96] J. W. Strutt RAYLEIGH. *The theory of sound*. T. 1. Macmillan, 1896.

- [Sch63] J. C. SCHELLENG. « The violin as a circuit ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 35.3 (1963), p. 326–338.
- [Sch73] J. C. SCHELLENG. « The bowed string and the player ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 53.1 (1973), p. 26–41.
- [Sch09] E. SCHOONDERWALDT. « The violinist’s sound palette : spectral centroid, pitch flattening and anomalous low frequencies ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 95.5 (2009), p. 901–914.
- [SGA03] E. SCHOONDERWALDT, K. GUETTLER et A. ASKENFELT. « Effect of the width of the bow hair on the violin string spectrum ». In : *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference (SMAC)*. 2003.
- [Sch79] R.T. SCHUMACHER. « Self-sustained oscillations of the bowed string ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 43.2 (1979), p. 109–120.
- [SS00] S. SERAFIN et J. O. SMITH. « A multirate, finite-width, bow-string interaction model ». In : *Proceedings of the COST G-6 Conference on Digital Audio Effects (DAFX-00)*. 2000, p. 207–210.
- [SW00] J. H. SMITH et J. WOODHOUSE. « The tribology of rosin ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), p. 1633–1681.
- [VC93] C. VALETTE et C. CUESTA. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermès, 1993.
- [Wat92] A. WATZKY. « Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string ». In : *Journal of Sound and Vibration* 153.1 (1992), p. 125–142.
- [Woo14] J. WOODHOUSE. « The acoustics of the violin : a review ». In : *Reports on Progress in Physics* 77.11 (2014).
- [WL99] J. WOODHOUSE et A.R. LOACH. « Torsional behaviour of cello strings ». In : *Acta Acustica United with Acustica* 85.5 (1999), p. 734–740.
- [WPM15] J. WOODHOUSE, T. PUTELAT et A. MCKAY. « Are there reliable constitutive laws for dynamic friction ? » In : *Phil. Trans. R. Soc. A* 373.2051 (2015).
- [Woo04] Jim WOODHOUSE. « Plucked guitar transients : Comparison of measurements and synthesis ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 90.5 (2004), p. 945–965.
- [ZHA04] J. ZHOU, T. HAGIWARA et M. ARAKI. « Spectral characteristics and eigenvalues computation of the harmonic state operators in continuous-time periodic systems ». In : *Systems & control letters* 53.2 (2004), p. 141–155.

Première partie

# Solutions périodiques de la corde frottée

## Avant-propos

Dans le chapitre 2, l'étude d'une loi de friction régularisée est menée sur un modèle de corde simplifié à l'extrême (il ne reste qu'un seul degré de liberté). On compare les diagrammes de bifurcation selon deux paramètres (vitesse d'archet, force normale) avec ceux obtenus pour la loi de friction de Coulomb à deux coefficients (statique et dynamique). Nous montrons que plusieurs propriétés sont qualitativement conservées, justifiant l'intérêt de ce type de loi régulière pour construire des diagrammes de bifurcation dans des systèmes avec friction comme la corde de violon.

Dans le chapitre 3, l'emploi de l'Équilibrage Harmonique pour la recherche des solutions périodiques est mis à l'épreuve avec notre proposition de loi de friction régularisée. L'Équilibrage Harmonique est comparé à une autre méthode classique, la Collocation Orthogonale aux points de Gauss. Sans stratégie d'optimisation pour le problème étudié, l'équilibrage harmonique se révèle robuste et sa convergence a des propriétés intéressantes. Celles-ci sont d'autant plus remarquables qu'elles ne sont pas obtenues pour la collocation orthogonale.

Dans le chapitre 4, nous présentons de nouveaux diagrammes de bifurcation, obtenus pour des modèles plus riches de corde. En ajoutant un second mode, ces diagrammes s'enrichissent considérablement. Des problèmes connus des violonistes sont évoqués, comme la possibilité de jouer au second registre ou l'abaissement de la fréquence de la note. Enfin, nous discutons de l'utilisation d'un modèle de corde réaliste où la base modale serait étendue.

## Chapitre 2

# Regularized friction and continuation : Comparison with Coulomb's law

### Sommaire

---

Résumé . . . . .	57
Abstract . . . . .	58
2.1 Introduction . . . . .	59
2.2 Model . . . . .	60
2.3 Periodic stick-slip solution using Coulomb's friction law . . . . .	61
2.3.1 Coulomb's law . . . . .	61
2.3.2 Slipping . . . . .	62
2.3.3 Does slipping stop ? . . . . .	62
2.3.4 Sticking . . . . .	63
2.4 Regularized friction law . . . . .	64
2.5 Periodic solutions using a regularized friction law . . . . .	66
2.5.1 Quadratic recast . . . . .	66
2.5.2 Continuation with respect to the belt speed . . . . .	67
2.5.3 Continuation with respect to the normal force . . . . .	70
2.6 Conclusion . . . . .	70
Annexes . . . . .	74
2.A Regularization construction . . . . .	74
2.B Jacobian matrix . . . . .	75
2.C Remarques . . . . .	75
2.D Cycle stick-slip pour $n$ grand . . . . .	76

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous reproduisons l'article [Vig+17], publié dans le *Journal of Sound and Vibration* (quelques notations ont été modifiées pour s'accorder à l'ensemble). Le but est de décrire le comportement global des solutions périodiques obtenues en utilisant, sur un modèle simple de corde à un mode (masse, ressort, amortisseur, tapis), deux modèles de friction différents : d'une part le frottement de Coulomb, d'autre part une fonction analytique de la vitesse relative.

La loi de frottement de Coulomb sera considérée à deux coefficients (statique  $\mu_s$  et dynamique  $\mu_d$ ,  $\mu_s > \mu_d$ ), et avec la définition<sup>1</sup> :

$$\mu(V_r) = \begin{cases} -\mu_d \operatorname{sign}(V_r) & \text{si } V_r \neq 0 \text{ (glissement)} \\ \mu_0 \text{ avec } |\mu_0| \leq \mu_s, & \text{si } V_r = 0, \text{ (adhérence)} \end{cases} \quad (2.1)$$

Manipuler ce type de loi, en dépit d'une description semble-t-il simple, peut mener à des questions délicates mathématiquement. S'il y a un seul coefficient (*i.e.*  $\mu_d = \mu_s$ , d'allure  $\mathbb{L}$ ),  $\mu(V_r)$  n'est certes pas une fonction de  $V_r$  mais  $(V_r, \mu)$  est un graphe et on peut utiliser certains outils comme les inclusions différentielles [BB05 ; Bas13]. Dans notre cas,  $\mu_s > \mu_d$ , on perd la propriété de graphe (à cause des points  $V_r = 0$ ,  $\mu = \pm\mu_d$ ), et l'extension de ces outils n'est pas évidente. Le caractère bien posé des problèmes non réguliers est un sujet à part entière qui ne sera pas abordé ici, et nous renvoyons le lecteur à [Kla90] ainsi qu'aux références citées dans [Bas13].

Nous proposons une famille de fonctions basée sur une fonction mère  $g$  et un paramètre de régularisation  $n$ . La fonction  $g$  définie par

$$g(V_r) = \frac{-\mu_d V_r \sqrt{V_r^2 + \varepsilon} - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1}, \quad \alpha := \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)} \quad (2.2)$$

est impaire et approche sur  $]-\infty, 0]$  la fonction rationnelle

$$V_r \mapsto \frac{\mu_d V_r^2 - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1} \quad (2.3)$$

qui a pour maximum  $\mu_s$ . Les fonctions  $\mu_n$  sont définies par  $\mu_n(\cdot) = g(n \cdot)$ . Le paramètre  $\varepsilon$  sera petit et constant, tandis que  $n$  sera typiquement entre 10 et 100.

Graphiquement,  $\mu_n$  ressemble d'autant plus à la friction de Coulomb que  $n$  est grand. Cependant cela ne présage en rien de la *ressemblance* (par exemple, en termes de convergence) d'un cycle de stick-slip régularisé avec un cycle coulombien. L'étude qui suit décrit l'évolution des solutions avec friction régularisée selon deux paramètres de continuation (la vitesse du tapis  $V_b$ , la force normale  $F_N$ ) pour plusieurs valeurs du paramètre de régularisation  $n$ , en offrant une comparaison à la référence, la solution avec friction de Coulomb.

Nous considérons un système masse-ressort avec amortisseur, et ce dernier point est important. Sans amortissement les solutions périodiques de Coulomb changent notablement :

- pour le stick-slip, on peut donner des expressions explicites des instants de la période délimitant adhérence et glissement.
- pour tous paramètres  $V_b$  et  $F_N$  strictement positifs le stick-slip existe.
- pour tous paramètres  $V_b$  et  $F_N$  strictement positifs il y a une infinité de solutions périodiques en glissement pur. Dans le diagramme de phase ce sont les cercles contenus dans le cycle de stick-slip.

Dans le cas avec amortissement, le manque de descriptions du stick-slip dans la littérature nous a conduit à un travail préalable de construction de la solution, permettant d'apporter une condition nécessaire et suffisante de son existence. Après l'article, qui comprend deux annexes, figurent quelques remarques et compléments.

## Abstract

Periodic solutions of systems with friction are difficult to investigate because of the non-smooth nature of friction laws. This paper examines periodic solutions and most notably stick-slip, on a

---

1. Le graphe est représenté en fig. 1.5 a, p. 28.

## 2.1. Introduction

simple one-degree-of-freedom system (mass, spring, damper, belt), with Coulomb's friction law, and with a regularized friction law (*i.e.* the friction coefficient becomes a function of relative speed, with a stiffness parameter). With Coulomb's law, the stick-slip solution is constructed step by step, which gives a usable existence condition. With the regularized law, the Asymptotic Numerical Method and the Harmonic Balance Method provide bifurcation diagrams with respect to the belt speed or normal force, and for several values of the regularization parameter. Formulations from the Coulomb case give the means of a comparison between regularized solutions and a standard reference. With an appropriate definition, regularized stick-slip motion exists, its amplitude increases with respect to the belt speed and its pulsation decreases with respect to the normal force.

### 2.1 Introduction

In scientific and engineering research, friction is a topic that dates back to da Vinci [Fee+98], and it is still a major issue in many systems. Brakes can create noise, such as the extensively studied brake squeal [Pap+02]. Friction plays a crucial role in mechanical joints [GN01]. The role of friction in acoustics has been reviewed in [Aka02], with a wide range of examples, from the wineglass rubbed on its rim to the insects producing stridulatory sounds.

For the bowed string, the seminal works of Helmholtz (1877) and Raman (1918) describe several regimes, respectively Helmholtz's corner, and Raman's higher types. Several works have since attempted to describe the multitude of possible regimes. In addition to experimental observations with various artificial bowing apparatus (for example, a rosined perspex rod [SGA08]), the main theoretical results [WG04] are established through graphic constructions (for instance, Friedlander's rule), numerical time simulation (time integration, digital waveguides...), or modal analysis [IA07].

However, to the authors' knowledge, there is no systematic numerical investigation of periodic solutions of the bowed string, which might be due to the non-smooth nature of friction laws. Yet as a highly nonlinear system, the bowed string may exhibit several solutions for the same set of bowing parameters, depending on initial conditions. For example, a string lightly touched by a finger at its middle emits a sound known as *flageolet tone* or *harmonic sound* that is the second register. Using appropriate bowing parameters, musicians can maintain this second register solution in the same bow stroke when the finger is raised, although these bowing parameters are compatible with a normal, first register sound. The authors' ultimate aim is the continuation of periodic solutions of a bowed string, showing the evolution of solutions with respect to a given parameter, along with their stability. A string toy model, based on a truncated modal projection retaining only two modes, was studied with the regularized law presented here [Vig+15].

The numerical framework presented in [CV09] will be used hereafter. It operates on first-order, parametric differential system  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ . A discretization method, namely, the Harmonic Balance Method or the Orthogonal Collocation at Gauss points, transforms this differential system into a polynomial one (also called algebraic system). Then, a continuation method, the Asymptotic Numerical Method (ANM), is used to study the evolution of periodic solutions. It relies on truncated power series expansion, provided that in the parametric differential system  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$ ,  $\mathbf{f}$  is an analytic function, and thus, so is the solution branch. In its implementation, the ANM operates with quadratic nonlinearities, with an extension to usual functions [KCV13], but keeping in mind that only smooth nonlinearities are admissible. That is why a regularized friction law is proposed that will be reviewed in this paper. It is not designed to fit experimental data, but rather, to present some similarities to Coulomb's two-parameters law (recalled in Eq. (2.6)). This regularized law engenders periodic solutions that can be compared with Coulomb's

Symbol	Signification	Numerical value (if applicable)
$\lambda$	Continuation parameter	.
$V_b$	Belt speed	$0.2 \text{ m.s}^{-1}$ (if $\lambda = F_N$ )
$F_N$	Normal force	$5 \text{ N}$ (if $\lambda = V_b$ )
$\zeta_1$	Damping	$1.3096 \times 10^{-3}$
$\omega_1$	Natural pulsation	$1.2316 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$
$M_1$	Modal mass	$6.42 \times 10^{-3} \text{ kg}$
$\mu_s$	Static friction coefficient	0.4
$\mu_d$	Dynamic friction coefficient	0.2
$\varepsilon$	Modulus smoothing parameter	$10^{-4}$
$\alpha$	Regularization constant	$\alpha = \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)} \simeq 0.283$
$n$	Regularization parameter	.

solution on a string toy model. Unlike Pennestri *et al.* [Pen+16], who compare through time integration many models for a given set of parameters values, the present study aims at presenting the global behaviour of one model family through continuation, with different values of the regularization parameter.

As a first step before a realistic string model, the present paper examines the periodic solutions of a mass-spring-damper resting on a conveyor belt. The model is presented in Section 2.2. This mass-spring-damper-belt device, also known as the Rayleigh string model, corresponds to the projection on the first mode of the string equation.

Explicit formulations of the periodic solution for this system with Coulomb's law are well-known in the undamped case. In the damped case however, there is a lack of such formulations, and instead of using *ad hoc* numerical integration techniques (for example, [Kar85 ; Lei+98]), the authors describe explicitly the stick-slip solution, with Coulomb's law and damping, in Section 2.3. It is then sufficient to solve numerically only one equation (the cycle condition), and in return, it provides insight into the existence domain of this solution. The regularized law is given in Section 2.4, with a brief discussion about the regularization. In Section 2.5 we present the continuation of periodic solutions with the regularized law. The continuation is carried out with respect to the belt speed (Section 2.5.2), then to the normal force (Section 2.5.3). Periodic solutions obtained with the regularized law are compared with Coulomb's stick-slip solution.

## 2.2 Model

The model studied in this paper is a mass-spring-damper-belt system. The mass rests on a conveyor belt moving at velocity  $V_b$  (Figure 2.1), and the contact between the mass and the belt follows a friction law  $\mu$ . This law is either :

- Coulomb's friction law, with distinct static and dynamic friction parameters  $\mu_s$ ,  $\mu_d$  in Section 2.3.
- a regularized (smooth) friction law  $\mu_n$ , presented and discussed in Section 2.4, used in Section 2.5.  $n$  is the regularization parameter of the smooth friction law. For small values of  $n$  the system is weakly nonlinear ; for greater values of  $n$  it becomes stiff.

The mass-spring-damper-belt system is a useful toy model of a bowed string. If  $y$  denotes the horizontal transverse displacement at the bowing point  $x = x_b$  of a string fixed at both ends, a projection of the equation of motion on the first bending mode leads to a mass-spring-damper equation. Namely, if  $V_r$  denotes the relative velocity between the mass and the belt,  $V_b$  the belt velocity,  $F_N$  the normal force,  $M_1$  the modal string mass,  $\zeta_1$  the damping,  $\omega_1$  the natural

### 2.3. Periodic stick-slip solution using Coulomb's friction law

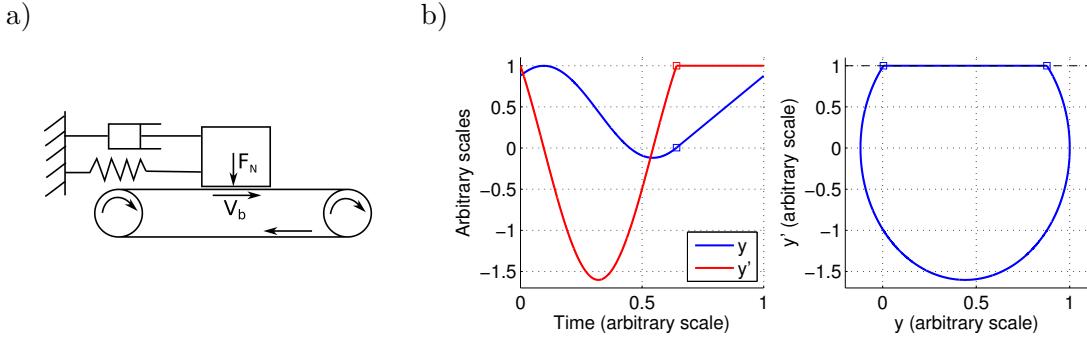


FIGURE 2.1 – a) Mass-spring-damper system with a conveyor belt. b) One period of *stick-slip* motion associated with Coulomb's law ( $V_b = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ; arbitrary scales), squares indicate the limits of sticking.

pulsation,

$$\ddot{y} + 2\zeta_1\omega_1\dot{y} + \omega_1^2 y = \frac{F_N}{M_1} \mu(V_r) \quad (2.4)$$

$$\text{where } V_r = \dot{y} - V_b \quad (2.5)$$

We underline that the normal force  $F_N$  is not to be confused with gravity here : like in a musical context, the force applied by the bow is a parameter that can vary independently from the string mass. Moreover, gravity is negligible in comparison with the normal force.

## 2.3 Periodic stick-slip solution using Coulomb's friction law

### 2.3.1 Coulomb's law

In this section we study the periodic *stick-slip* solution of the mass-spring-damper-belt system with Coulomb's friction law, defining the friction coefficient as :

$$\mu(V_r) = \begin{cases} -\mu_d \operatorname{sign}(V_r) & \text{if } V_r \neq 0 \text{ (slip)} \\ \mu_0 \text{ with } |\mu_0| \leq \mu_s, & \text{if } V_r = 0, \text{ (stick)} \end{cases} \quad (2.6)$$

with  $\mu_s$  and  $\mu_d$  respectively the static and dynamic friction coefficients, and  $\mu_d < \mu_s$ . An example of *stick-slip* periodic motion is drawn in Figure 2.1. This periodic motion can be described as follows. While the friction coefficient is smaller than  $\mu_s$ , the mass sticks to the belt ( $V_r = 0$ ). When the friction coefficient reaches its maximum  $\mu_s$ , the restoring force of the stretched spring pulls back the mass that slips ( $V_r < 0$ ,  $\mu = \mu_d$ ). Then the direction of the mass changes, the compressed spring pushes the mass, and if the velocity of the mass reaches the belt velocity, the mass sticks again to the belt.

We define  $F_1 = \frac{F_N}{M_1}$ ,  $\eta_1 = \zeta_1\omega_1$ , so that Eq. (2.4) becomes

$$\ddot{y} + 2\eta_1\dot{y} + \omega_1^2 y = F_1 \mu(V_r) \quad (2.7)$$

If the solution is slipping-only,  $\forall t$ ,  $V_r < 0$ , so the equation becomes

$$\ddot{y} + 2\eta_1\dot{y} + \omega_1^2 y = -F_1 \mu_d \operatorname{sign}(V_r) = F_1 \mu_d \quad (2.8)$$

The right-hand side is constant, so this equation has one fixed-point solution,  $y = \frac{F_1 \mu_d}{\omega_1^2}$ , and other solutions are damped oscillations, not periodic solutions. We determine the periodic *stick-slip* solution in three steps : stating the initial problem and its slipping solution ; determining whether slipping stops ; if it does, closing the cycle with a sticking phase. These three steps are detailed in the three subsections below.

### 2.3.2 Slipping

We suppose that at  $t = 0$  the spring is stretched enough to end the sticking interval. This means  $\mu(V_r)$  reaches at  $t = 0^-$  its maximum  $\mu_s$ , and the slipping interval starts. Eq. (2.7) is to be solved with  $\mu(V_r) = \mu_s$  on an interval  $[0, t_1]$ , where  $t_1$ , the instant when slipping stops, will be found later, and with initial conditions :

$$y(0) = \omega_1^{-2} (F_1 \mu_s - 2\eta_1 V_b) \quad (2.9a)$$

$$\dot{y}(0) = V_b \quad (2.9b)$$

The damped pulsation is noted  $\omega_A := \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2}$ , there exists  $A > 0$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi[$  so that

$$y(t) = A e^{-\eta_1 t} \cos(\omega_A t + \varphi) + \frac{F_1 \mu_d}{\omega_1^2} \quad (2.10)$$

and initial conditions give

$$A \cos(\varphi) = y(0) - \frac{F_1 \mu_d}{\omega_1^2} \quad (2.11a)$$

$$A \sin(\varphi) = -\omega_A^{-1} \left( \dot{y}(0) + \eta_1 \left( y(0) - \frac{F_1 \mu_d}{\omega_1^2} \right) \right) \quad (2.11b)$$

so  $A^2$  and  $\tan(\varphi)$  are known. Then it can be shown that  $\varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , and the unique couple  $(A, \varphi) \in (\mathbb{R}_+^*, ]-\frac{\pi}{2}, 0[)$  is now entirely determined by Eq. (2.11a), (2.11b).

### 2.3.3 Does slipping stop ?

Now that the slipping interval has started, there is a dilemma : either there exists  $t_1 > 0$  when slipping stops, or there is no such  $t_1 > 0$ .

The first case happens if  $V_r$ , which has become strictly negative during slipping, reaches 0 once more (cycle condition). It is also the first non-negative time  $t$  where  $y$  as given by Eq. (2.10) satisfies  $\dot{y}(t_1) = \dot{y}(0)$ . Then a *stick-slip* regime exists.

We recall that this resolution is simple in the undamped case ; in this case  $t_1 = \frac{\pi - 2\varphi}{\omega_1}$ , stick-slip solution exists for all belt speeds ; and periodic solutions without sticking interval exist. These pure slipping solutions are located inside the stick-slip cycle in the phase diagram (see for example [AC01]). The value of  $t_1$  in the undamped case can be used as a starting approximate value for a numerical solver in the damped case.

In the second case, there is no such  $t_1 > 0$ , meaning the damped oscillation of  $y$  satisfies :

$$\forall t > 0, \quad \dot{y}(t) < \dot{y}(0) \quad (2.12)$$

The system stays in a damped oscillation and there is no periodic solution. In the phase diagram (Figure 2.1, right), the left end of the horizontal segment (sticking interval) will not be reached.

### 2.3. Periodic stick-slip solution using Coulomb's friction law

Inequation (2.12) is now transformed into a condition checked only at a specific time  $t_Y$ , instead of all times  $t$ .

$\dot{y}$  can be rewritten as

$$\dot{y}(t) = -A\omega_1 e^{-\eta_1 t} \cos(\omega_A t + \varphi - \psi) \quad (2.13a)$$

$$\text{with } \psi = \arccos(\eta_1 \omega_1^{-1}) \quad (2.13b)$$

Then

$$\text{No stick-slip} \Leftrightarrow (2.12) \Leftrightarrow \forall t > 0, \quad \dot{y}(t) = -A\omega_1 e^{-\eta_1 t} \cos(\omega_A t + \varphi - \psi) < \dot{y}(0) = V_b \quad (2.14)$$

Since the left-hand side is a damped oscillation, its first local maximum is its global maximum, and it occurs at  $t = t_Y$  :

$$t_Y = \frac{2\psi - \varphi + \frac{\pi}{2}}{\omega_A} \quad (2.15)$$

From this we conclude :

$$\text{No stick-slip} \Leftrightarrow A \exp\left(-\eta_1 \frac{2\psi - \varphi + \frac{\pi}{2}}{\omega_A}\right) < \frac{V_b}{\omega_A} \quad (2.16)$$

The inequation (2.16) can be tested easily, and numerical results highlight that for a fixed normal force, a maximal belt speed  $V_{\max}$  exists, beyond which stick-slip does not exist. Conversely, for a fixed belt speed, a minimal normal force  $F_{\min}$  exists, below which there is no stick-slip. This does not provide an explicit expression of  $V_{\max}$  or  $F_{\min}$  in function of the other system parameters<sup>2</sup>, since  $A$  and  $\varphi$  depend on  $V_b$  and  $F_N$ .

#### 2.3.4 Sticking

We conclude the study of the periodic case, when  $t_1$  exists. Sticking starts at  $t = t_1$ , and stops at  $t_2$ , thus  $T = t_2$  is the period of the cycle. For all  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $V_r(t) = 0$ , i.e.  $\dot{y}(t) = \dot{y}(0)$  :  $y$  is affine, increasing from its initial value  $y(t_1)$  to its final value  $y(t_2) = y(0)$ . We calculate  $A$  and  $\varphi$  (Eq. (2.11)) ;  $t_1$  is found with a numerical solver using the value in the undamped case as an initial guess ; now constants in Eq. (2.10) are known and so is  $y(t_1)$ , from which we conclude :

$$t_2 = t_1 + \frac{y(0) - y(t_1)}{\dot{y}(0)} \quad (2.17)$$

*Stick-slip* solution  $y$  over one period, its derivative  $\dot{y}$ , and the phase diagram  $(y, \dot{y})$  are plotted in Figure 2.2 for a fixed choice of parameters, and  $V_b$  is close to the maximal belt speed  $V_{\max}$ . Two features can be underlined :

- since the belt speed is high, the *sticking* interval is then reduced to a short fraction of the period, unlike in Figure 2.1.
- in the phase diagram, the damped solution has an almost horizontal tangent at the end of the *slipping* interval, unlike the undamped solution.

We can even compute the bifurcation diagram, for instance over a belt speed interval  $[V_1; V_2]$  (or, similarly a normal force interval) discretized in  $k + 1$  values :

$$\begin{aligned} \text{for } V_b = & \left[ V_1 : \frac{V_2 - V_1}{k} : V_2 \right] \\ y(0) = \dots, \dot{y}(0) = \dots & (\text{Eq. (2.9a), (2.9b)}) \end{aligned}$$

---

2. We consider this is the most advanced, exact resolution to describe whether stick-slip exists or not. Wensrich [Wen06] also points out the difficulty to obtain an explicit boundary between the two domains.

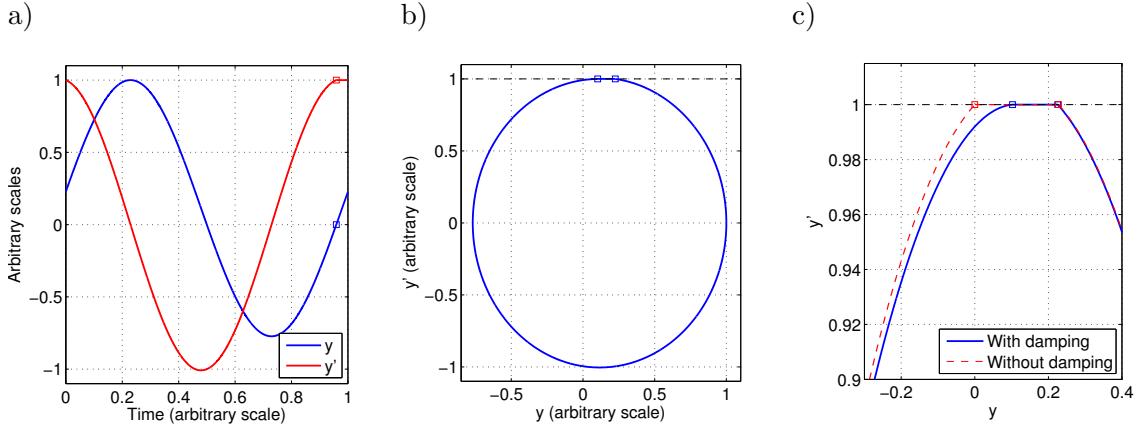


FIGURE 2.2 – *Stick-slip* periodic solution of the system with Coulomb's friction law, with  $V_b$  close to the maximal belt speed  $V_{max}$ . a) One period of  $y$  (blue) and its derivative  $\dot{y}$  (red) (arbitrary scales), squares indicate  $t = t_1$  (when sticking starts). b) Phase diagram  $(y, \dot{y})$ ; dashed black line indicates adherence ( $\dot{y} = V_b$ ), squares show the limits of sticking. c) Zoom on the sticking phase, comparison with the undamped case.

$A = \dots, \varphi = \dots$  (Eq. (2.11a), (2.11b))

$\psi = \dots$  (Eq. (2.13b))

**if** inequation (2.16) is true **then** no stick-slip

**else**  $t_{1,app} = \frac{\pi - 2\varphi}{\omega_A}$  ( $t_1$  in the undamped case serves as an estimate in the damped case)

$t_1 = \text{fsolve}(\dot{y}(t) - \dot{y}(0), \text{start} = t_{1,app})$

$t_2 = \dots$  (Eq. (2.17))

**end if**

**end for**

The bifurcation diagram for this non-smooth law may include some non-smooth bifurcations that are not standard to smooth dynamical systems. This goes beyond the scope of this paper, however the book [LN06] may interest the reader.

## 2.4 Regularized friction law

We now present the regularized friction law  $\mu_n(V_r)$  used in this paper. It is based on an analytical mother function  $g$  and a regularization parameter  $n$ . This parameter  $n$  acts as a scaling factor that modifies the stiffness of the regularization : large values of  $n$  mean a highly nonlinear friction law.  $g$  is defined as

$$g(V_r) := \frac{-\mu_d V_r \sqrt{V_r^2 + \varepsilon} - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1}, \quad \alpha = \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)} \quad (2.18)$$

where  $\alpha$  and  $\varepsilon$  are fixed parameters. The latter is meant to be small (here,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ). The function  $g$  is designed to verify the following properties :

- $g$  is odd ;
- $g(V_r) \rightarrow \mu_d$  when  $V_r \rightarrow -\infty$  ;

## 2.4. Regularized friction law

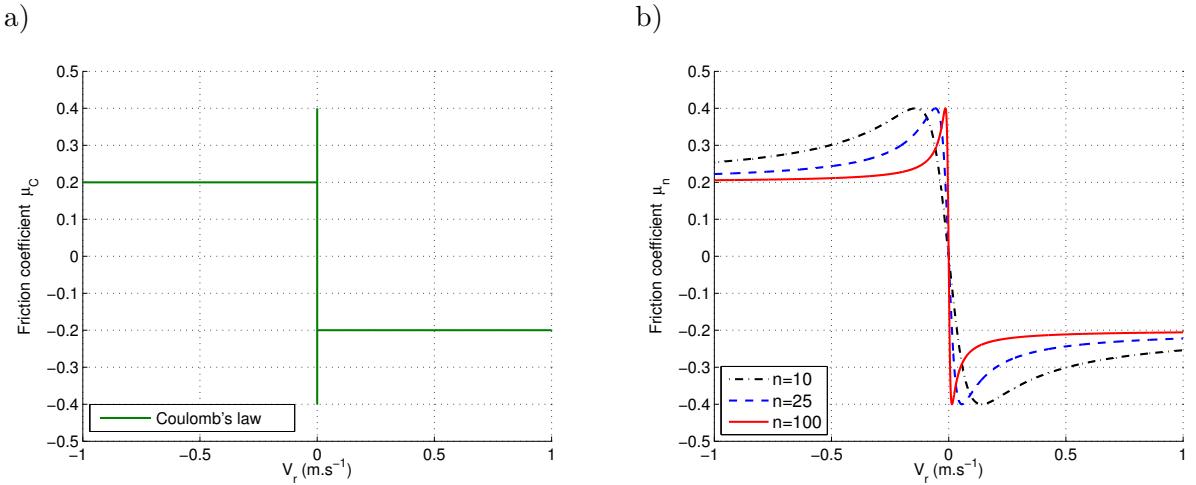


FIGURE 2.3 – a) Coulomb’s friction law, for  $\mu_s = 0.4$ ,  $\mu_d = 0.2$ . b) Regularized friction  $\mu_n$  for  $n = 10$  (black), 25 (blue), 100 (red).

—  $\max g \rightarrow \mu_s$  when  $\varepsilon \rightarrow 0$

Then,  $\mu_n$  is defined as

$$\mu_n(V_r) := g(nV_r) = \frac{-\mu_d V_r \sqrt{V_r^2 + \frac{\varepsilon}{n^2}} - 2 \frac{\alpha}{n} V_r}{V_r^2 + \frac{1}{n^2}} \quad (2.19)$$

A plot of Coulomb’s law and the regularized law for several values of  $n$ , in Figure 2.3, shows that  $\mu_n(V_r)$  resembles Coulomb’s law when  $n$  is high. Additional details on the regularization process are given in 2.A.

We highlight two main differences with Coulomb’s friction law. The first one is a velocity-dependent dynamic coefficient. But as noted by Oden and Martins ([OM85], p. 548) the assumption of velocity independence is « now known to be invalid. A large volume of experimental data and empirical formulas for the variation of the friction coefficient with sliding velocity can be found ». Yet Coulomb’s law leads to more explicit expressions of the stick-slip solution, and for non-zero relative speed, it is the limit function of the sequence  $(\mu_n)_{n>0}$ .

The second difference is that  $\mu_n$  is locally a decreasing function of  $V_r$  around  $V_r = 0$ , instead of a multivalued coefficient during adherence. This kind of smooth, velocity-dependent friction law, is a model commonly used to study the bowed string, from McIntyre83 and coll. [MSW83] to recent sound synthesis [DB14]. The present study aims at investigating such a regularized law. More complex models have been designed<sup>3</sup>, to take into account effects due to rosin [SW00], string torsion [Lei+98], etc.

A smooth friction law around 0 allows « no true sticking » (an expression found for example in [Ber02]), a drawback in a purely static context, however the present paper focuses on dynamic phenomena. Friction regularization has been used to find approximate solutions of variational formulations (for example [MO83 ; OM85]), but the authors found a small number of papers that use it in numerical simulations expecting realistic friction :

— Feeny and Moon [FM94] showed that for a harmonically forced spring-mass system, a smooth friction law can reproduce qualitatively the chaotic behaviour observed with

3. Several bowed string models can be found in [Woo93].

Coulomb's law. The selected smooth function reads :

$$\mu(V_r) = (\mu_d + (\mu_s - \mu_d)\operatorname{sech}(\beta V_r)) \tanh(\alpha V_r) \quad (2.20)$$

- Quinn [Qui04] proposes a smoothing procedure that respects the multivaluation at null relative speed by introducing an additional variable. However, it is presented in the case  $\mu_s = \mu_d$ , and its adaptation in the case  $\mu_s > \mu_d$  may be delicate.
- Vrande et al. [VVD99] use the function :

$$\mu(V_r) = -\frac{2}{\pi} \frac{\arctan(\varepsilon V_r)}{1 + \gamma |V_r|} \quad (2.21)$$

where  $\varepsilon$  is the regularization parameter. The maximal value of  $\mu$  is not constant when  $\varepsilon$  varies, and the range of belt speeds is restricted because this function tends to zero when  $V_r$  tends to infinity.

## 2.5 Periodic solutions using a regularized friction law

We now investigate the periodic solutions with the regularized friction law presented in Section 2.4. The numerical framework used is presented in [CV09] and [KCV14] and implemented in the Matlab toolbox MANLAB [Kar+].

### 2.5.1 Quadratic recast

Periodic solutions, and their continuation with respect to parameters  $V_b$  or  $F_N$ , are studied with a continuation procedure. A robust method to compute a solution branch is the Asymptotic Numerical Method (ANM). It operates on first-order differential systems with quadratic nonlinearities. This is called a quadratic formulation and requires auxiliary variables to lower the derivation order to 1, and to recast the nonlinearities into quadratic ones, so that  $\mathbf{u}$ , the vector of all variables, is solution of

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u} + \lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (2.22)$$

where  $\lambda$  is the continuation parameter,  $\mathbf{c}_0$  and  $\mathbf{c}_1$  are vectors,  $\mathbf{l}_0$ ,  $\mathbf{l}_1$  and  $\mathbf{m}$  are linear operators, and  $\mathbf{q}$  is a bilinear operator [CV09]. After this quadratic recast, periodic solutions are studied using either the Harmonic Balance Method or the Orthogonal Collocation at Gauss points, as implemented in [KCV14]; unless stated otherwise below, they provide the same results. A detailed study of their convergence should be carried out in a companion paper.

The differential equation (2.4) on  $y$  is transformed into a first-order system on  $(y, z)$  :

$$\dot{y} = \omega_1 z \quad (2.23)$$

$$\dot{z} = -2\zeta_1 \omega_1 z - \omega_1 y + \frac{F_N}{\omega_1 M_1} \mu_n(V_r) \text{ where } V_r = \omega_1 z - V_b \quad (2.24)$$

Then, seeing the definition (2.19) of  $\mu_n(V_r)$ , we define three auxiliary variables to obtain quadratic nonlinearities :

$$R = \sqrt{V_r^2 + \frac{\varepsilon}{n^2}} \quad (2.25)$$

$$S = V_r^2 + \frac{1}{n^2} \quad (2.26)$$

## 2.5. Periodic solutions using a regularized friction law

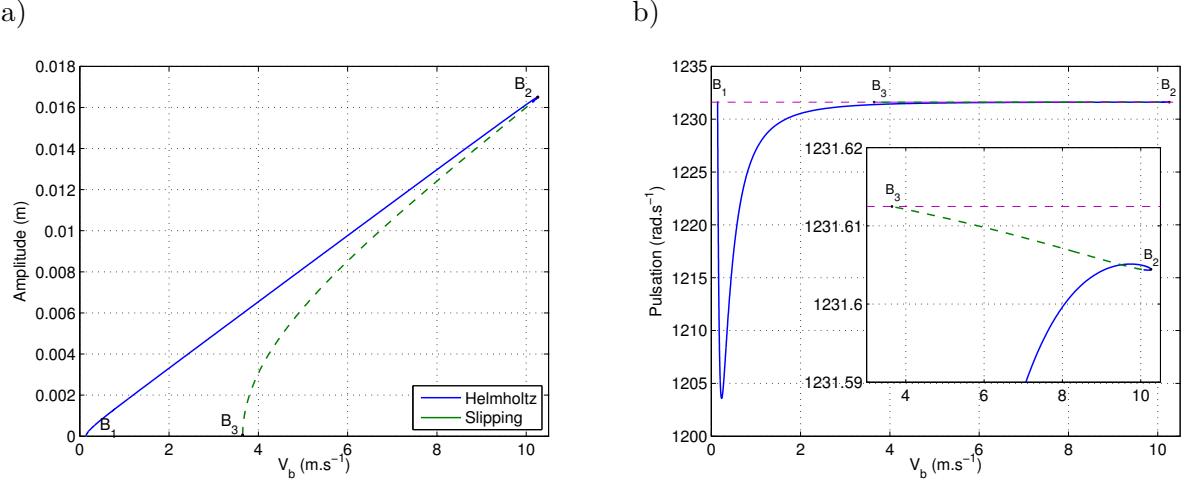


FIGURE 2.4 – Bifurcation diagram with the continuation parameter  $\lambda = V_b$ , and  $n = 10$ ,  $F_N = 5$  N. The branch is plotted in solid line if it is stable, and dashed otherwise; Helmholtz motion is in blue, slipping in green. HBM truncation order :  $H = 70$ . a) Peak-to-peak amplitude versus the belt velocity. b) Pulsation versus the belt velocity. Natural pulsation  $\omega_1$  is plotted in purple. A zoom window shows the branch between bifurcations  $B_2$  and  $B_3$ .

$$\mu_n = \frac{-\mu_d V_r R - 2 \frac{\alpha}{n} V_r}{S} \quad (2.27)$$

The definition of  $R$  is then recasted as

$$R^2 = V_r^2 + \frac{\varepsilon}{n^2} \quad (2.28)$$

The latter, (2.28), is not equivalent to the previous definition, (2.25), and the positiveness of  $R$  has to be checked.

### 2.5.2 Continuation with respect to the belt speed

A first continuation study is carried out with the belt speed  $V_b$  being the continuation parameter  $\lambda$ , while the normal force is fixed ( $F_N = 5$  N). The quadratic recast, emphasizing the operators of Eq. (2.22), and based on Eq. (2.23), (2.24), (2.26), (2.27) and (2.28), is :

$$0 = -\lambda + \omega_1 z - V_r \quad + 0 \quad (2.29a)$$

$$0 = \frac{\varepsilon}{n^2} + 0 \quad + V_r^2 - R^2 \quad (2.29b)$$

$$0 = \frac{1}{n^2} - S \quad + V_r^2 \quad (2.29c)$$

$$0 = 0 + 2 \frac{\alpha}{n} V_r \quad + \mu_n S + \mu_d V_r R \quad (2.29d)$$

$$\dot{y} = 0 + \omega_1 z \quad + 0 \quad (2.29e)$$

$$\underbrace{\dot{z}}_{\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}} = 0 - \underbrace{2\zeta_1 \omega_1 z - \omega_1 y + \frac{F_N}{\omega_1 M_1} \mu_n}_{l_0 \mathbf{u} + \lambda l_1 \mathbf{u}} + 0 \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})}_{(2.29f)}$$

For  $n = 10$ , the bifurcation diagram is given in Figure 2.4 (left) with stability analysis and movement description. Amplitude refers to peak-to-peak amplitude of the displacement  $y$ .

The upper stable branch starts with a supercritical Hopf bifurcation ( $B_1$  on the diagram) around  $V_b = 0.14 \text{ m.s}^{-1}$ , reaching a maximal belt speed ( $B_2$ ) around  $V_b = 10.25 \text{ m.s}^{-1}$ . From there, the lower branch is unstable, and ends on a subcritical Hopf bifurcation ( $B_3$ ) around  $V_b = 3.65 \text{ m.s}^{-1}$ . This stability analysis is performed with Hill's method [LT10]. This method is efficiently combined with the Harmonic Balance Method, provided that the Jacobian matrix of the nonlinear differential system  $(y, z)' = \mathcal{F}(y, z)$  (*i.e.* Eq. (2.23), (2.24)) is also quadratically recasted. In our case, this requires three additional variables, which means that the computation of the bifurcation diagram is slightly slowed down, then the stability analysis is almost immediate. This is a good compromise, and is preferred to the integration of the Jacobian matrix over one period to obtain the monodromy matrix, which is much more time consuming.

Some authors consider that using a regularized law prevents any real stick phase (for example, [Ber02 ; PHO96]). We refine this by defining the movement type as follows : let  $V_n$  be such that  $\mu_n(V_n) = \max_v \mu_n(v)$ , then

$$|V_r(t)| \leq |V_n| \Rightarrow \text{stick}, \quad |V_r(t)| > |V_n| \Rightarrow \text{slip} \quad (2.30)$$

Then, a solution is called either « slipping » if a period contains no sticking interval, or « Helmholtz motion », if there is exactly one sticking interval and one slipping interval. The plot in Figure (2.4) can be summed up as : Helmholtz motion on the upper branch, slipping on the lower branch. There are two details : around bifurcation  $B_1$ , the mass is only slipping ; the Helmholtz motion is still present on the lower branch near  $B_2$ .

We now choose greater values of  $n$ , the regularization parameter, namely 25, 50 and 100. The bifurcation diagram is altered (Figure 2.5) :

- Hopf bifurcations  $B_1$  and  $B_3$  happen at lower belt speeds ;
- the maximal belt speed decreases ;
- the amplitude gap between the stable and the unstable branches decreases.

For belt speeds close to the first Hopf bifurcation, the motion amplitude is small and relative speed  $V_r$  oscillates very slightly around  $V_n$ . In other words,  $\mu_n$  stays close to its maximum  $\mu_s$ . In Coulomb's case, the amplitude of the stick-slip solution tends to a strictly positive value when the belt speed tends to 0. There is a discontinuity at  $V_b = 0$ , where the amplitude is zero since there is no motion. Examples of Helmholtz motion, in the regularized case and in Coulomb's case, are shown in Figure 2.6, a.

For Coulomb's law the pulsation is an increasing function of the belt speed (Figure 2.8) that tends to 0 when the belt speed tends to 0. For the regularized law, pulsation starts at the natural pulsation at  $B_1$ , then decreases to similar values to the unregularized case, in a steep way for great values of  $n$ . From then on, it is also a function of  $V_b$  increasing towards its final value  $\omega_1$ , reached at the second Hopf bifurcation  $B_3$ .

With greater values of  $n$  (highly nonlinear system), for instance for  $n = 150$ , the pulsation steep decreases near the first bifurcation  $B_1$  ranges over a short interval, while the amplitude is a steep increasing function of the belt speed. In this interval, it is difficult for numerical methods to find the expected periodic solution. The Harmonic Balance Method predicts an hysteresis over a very short interval ; the size of this interval diminishes when more harmonics are used (Figure 2.9). The Orthogonal Collocation at Gauss points [DS73] does not exhibit this behaviour and describes amplitude and pulsation as functions of the continuation parameter  $V_b$ .

To confirm the continuation results, we can extract a periodic solution (from one of the two bifurcation diagrams, HBM or Collocation), and start a numerical solver with initial conditions  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$ . Among the solvers available in Matlab ODE suite [SR97] designed for stiff systems,

## 2.5. Periodic solutions using a regularized friction law

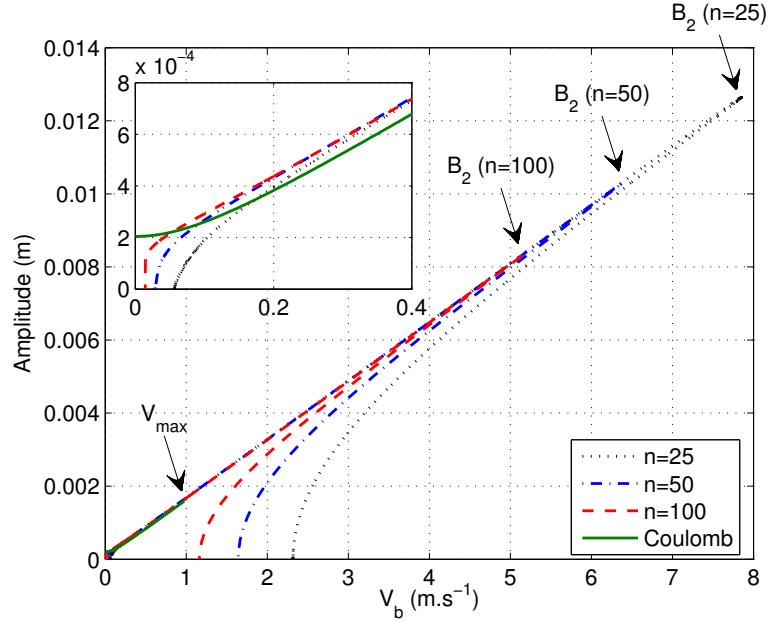


FIGURE 2.5 – Bifurcation diagram (axes : belt speed, peak-to-peak amplitude of displacement) with the regularized friction law and  $n = 25$  (black ;  $H = 100$ ),  $n = 50$  (blue ;  $H = 125$ ),  $n = 100$  (red ;  $H = 175$ ) ; with Coulomb’s law (green). The position of the bifurcation points  $B_1$ ,  $B_2$  and  $B_3$  change for each value of  $n$ . The maximal belt speed, examined in Section 2.3.3, is shown as  $V_{\max}$ .

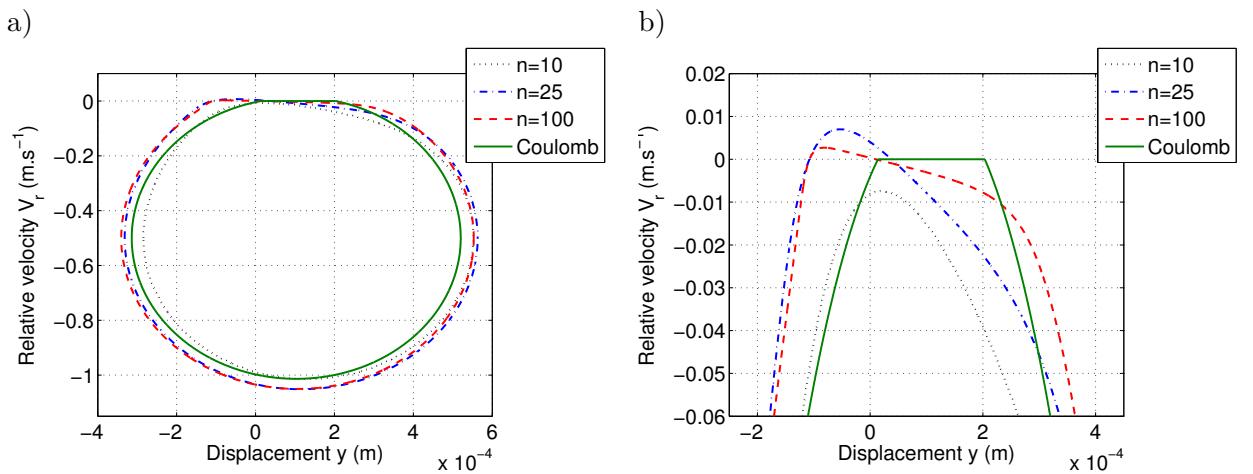


FIGURE 2.6 – Phase diagrams, examples of stick-slip, for  $V_b = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ . Regularized law :  $n = 10$ ,  $H = 70$ , black ;  $n = 25$ ,  $H = 100$ , blue ;  $n = 100$ ,  $H = 175$ , red. Coulomb’s law : green.  
a) Entire phase diagram. b) Zoom around the sticking part.

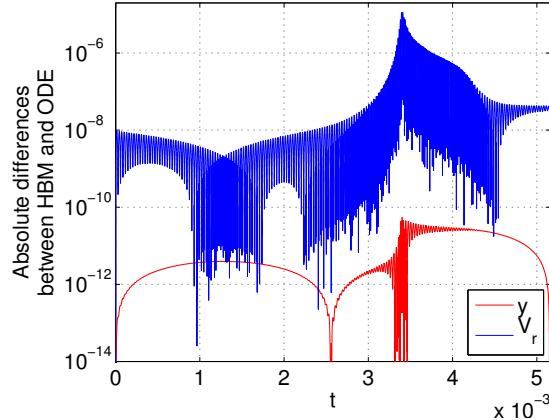


FIGURE 2.7 – Validation with `ode15s` of the HBM solution, for  $n = 100$  and  $H = 175$ , for  $V_b = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  : absolute differences between the two solutions, for  $y$  and  $V_r$ .

`ode15s` was found to be reliable and faster than others on this system. Such a validation is presented for  $n = 100$  in Fig. 2.7. However, for  $n = 150$  and in the  $V_b$  interval described above, the absolute error tolerance of the function `ode15s` (parameter `AbsTol`) must be set as low as  $10^{-14}$  (this worsens as  $n$  increases since the system becomes stiffer). Otherwise, it does not converge to the same periodic solution.

### 2.5.3 Continuation with respect to the normal force

We now choose the continuation parameter  $\lambda = F_N$  and a fixed belt speed ( $V_b = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$ ). Changing  $\lambda$  requires a new quadratic formulation similar to Eqs. (2.29). It is not given here for sake of brevity.

For small values of  $n$ , for example  $n = 10$ , the bifurcation diagram (Figure 2.10, a) shows a stable branch with a supercritical Hopf bifurcation. For higher values of  $n$  ( $n = 25$  is enough), the Hopf bifurcation becomes subcritical (Fig. 2.10, b).

Comparisons with Coulomb's law, for the amplitude (Figure 2.11) and the pulsation (fig. 2.12) show a qualitative agreement between regularized law and Coulomb's law. For either law, the mass can be carried away as far as desired during the stick phase, provided that the normal force  $F_N$  is great enough. This phase becomes longer when  $F_N$  increases, and therefore the pulsation decreases. Nevertheless, the agreement is less compelling than for the belt speed continuation. For small values of the regularization parameter  $n$ , the amplitude is close to the amplitude occurring with Coulomb's law. For  $n = 50$  or  $n = 100$  and high values of normal force  $F_N$ , there is still a large difference between pulsation with Coulomb's law and the one with regularized law.

## 2.6 Conclusion

In this paper we investigated the periodic solutions of a mass-spring-damper-belt system, and compared two different friction laws, Coulomb's law and a regularized law. In the Coulomb case, the stick-slip solution is constructed sequentially, giving access to limit values for the belt speed and the normal force. In the regularized case, the bifurcation diagrams, obtained by numerical continuation with respect to the belt speed or to the normal force, and for several values of the regularization parameter, fulfilled two goals. They prove the robustness of the association of the

## 2.6. Conclusion

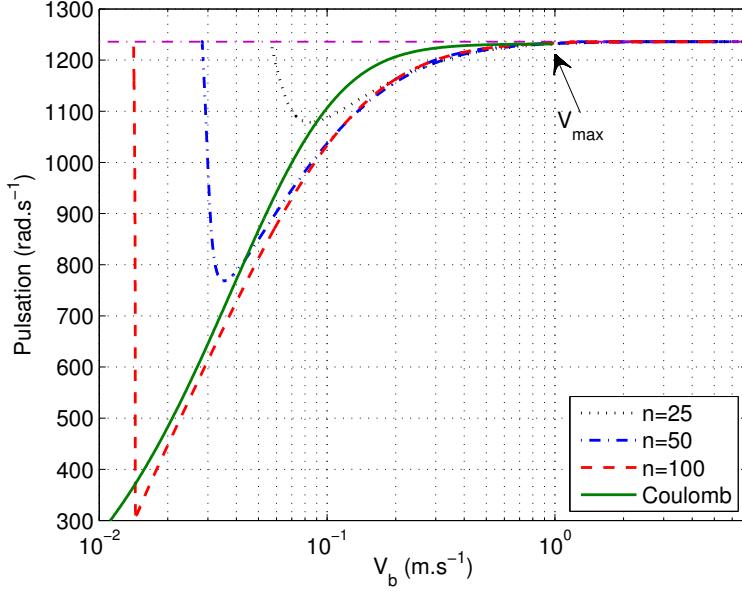


FIGURE 2.8 – Pulsation versus belt speed, with the regularized friction law and  $n = 25$  (black ;  $H = 100$ ),  $n = 50$  (blue ;  $H = 125$ ),  $n = 100$  (red ;  $H = 175$ ) ; with Coulomb’s law (green). Natural pulsation  $\omega_1$  is drawn in purple. The branch between  $B_2$  and  $B_3$  is not visible at this scale.

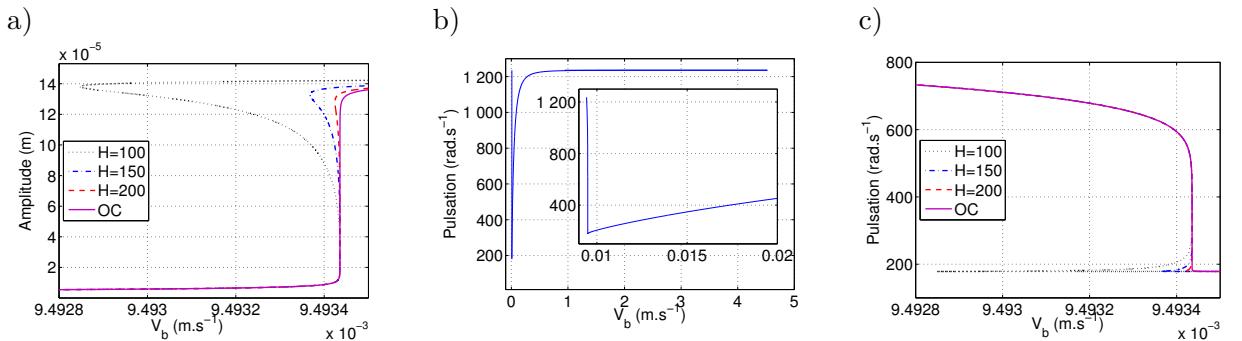


FIGURE 2.9 – For  $n = 150$ , comparison of the Harmonic Balance Method with  $H = 100$  (black), 150 (blue), 200 harmonics (red), and Orthogonal Collocation (OC) with  $N_{int} = 151$  subintervals. a) Peak-to-peak amplitude versus the belt velocity, for the interval  $I = [9.4928 \times 10^{-3}; 9.4935 \times 10^{-3}]$ . b) Pulsation versus the belt velocity, entire diagram with a zoom window on the interval  $[0.009; 0.02]$ . c) Pulsation versus the belt velocity, zoom of the previous one on the interval  $I = [9.4928 \times 10^{-3}; 9.4935 \times 10^{-3}]$ , comparison of the HBM and the OC.

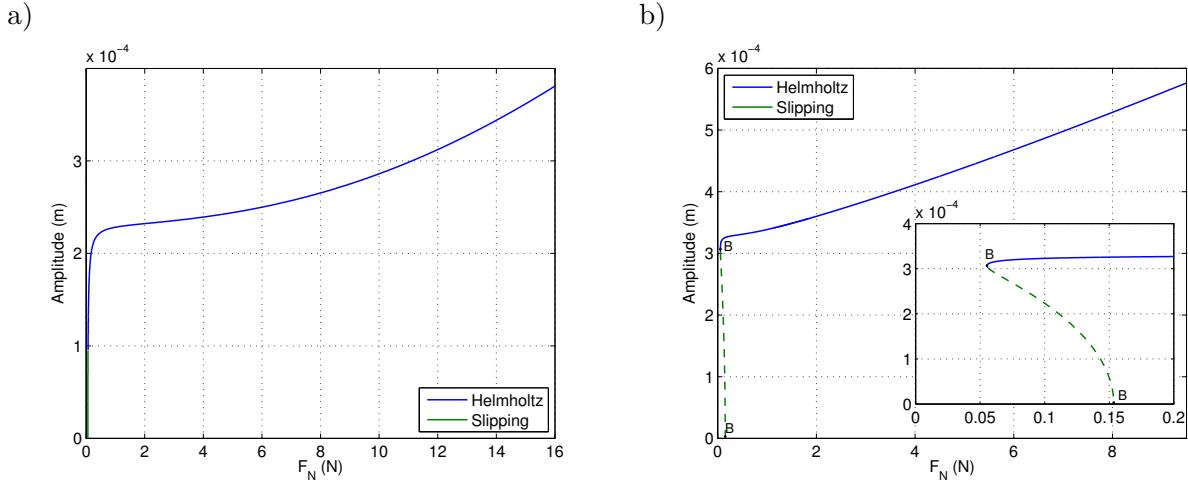


FIGURE 2.10 – Bifurcation diagram with the continuation parameter  $\lambda = F_N$ . The branch is plotted in solid line if it is stable, and dashed otherwise ; Helmholtz motion is in blue, slipping in green. a) Weakly nonlinear system,  $n = 10$ . HBM truncation order :  $H = 70$ . b) Stiff nonlinear system,  $n = 100$ .  $H = 300$ .

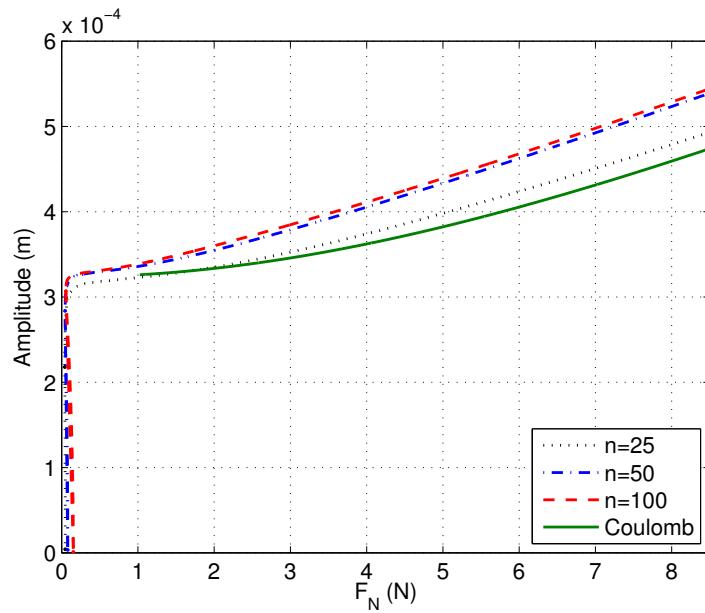


FIGURE 2.11 – Peak-to-peak amplitude versus normal force, with the regularized friction law and  $n = 25$  (black,  $H = 70$ ),  $n = 50$  (blue,  $H = 150$ ),  $n = 100$  (red,  $H = 300$ ) ; with Coulomb's law (green).

## 2.6. Conclusion

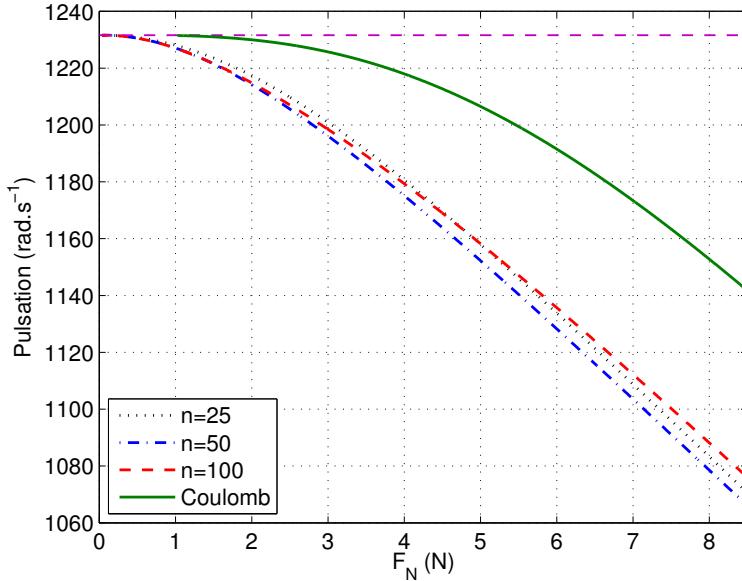


FIGURE 2.12 – Pulsation versus normal force, with the regularized friction law and  $n = 25$  (black,  $H = 70$ ),  $n = 50$  (blue,  $H = 150$ ),  $n = 100$  (red,  $H = 300$ ) ; with Coulomb’s law (green). Natural pulsation  $\omega_1$  is shown in purple.

Asymptotic Numerical Method and the HBM confronted with a highly nonlinear law ; they give a comprehensive description of the stick-slip branch and of the slipping branch, as well as their evolution when the system becomes highly nonlinear. Formulations from the Coulomb case give the means of a comparison between the regularized solutions and a standard reference.

The present study highlights that several qualitative aspects of friction are preserved with the smooth function of relative velocity chosen as the friction law. With an appropriate definition, stick-slip motion exists, its amplitude increases with respect to the belt speed and its pulsation decreases with respect to the normal force. There are limit values for the belt speed and the normal force beyond which this periodic motion ceases to exist. However, with the regularized law some unstable branches of solution can exist, and have no counterpart with Coulomb’s law. For example, the continuation with respect to the belt speed shows a branch of slipping solution.

Thanks to its important nonlinearity, this regularized system serves as a benchmark for our methods of time discretization. A future companion paper will compare the Harmonic Balance Method and the Orthogonal Collocation at Gauss points, for several values of the regularization parameter  $n$ . Future works based on this regularized system can feature more complete models, either for the string or the friction law.

## Acknowledgements

This work has been carried out in the framework of the Labex MEC (ANR-10-LABX-0092) and of the A\*MIDEX project (ANR-11-IDEX-0001-02), funded by the *Investissements d’Avenir* French Government program managed by the French National Research Agency (ANR).

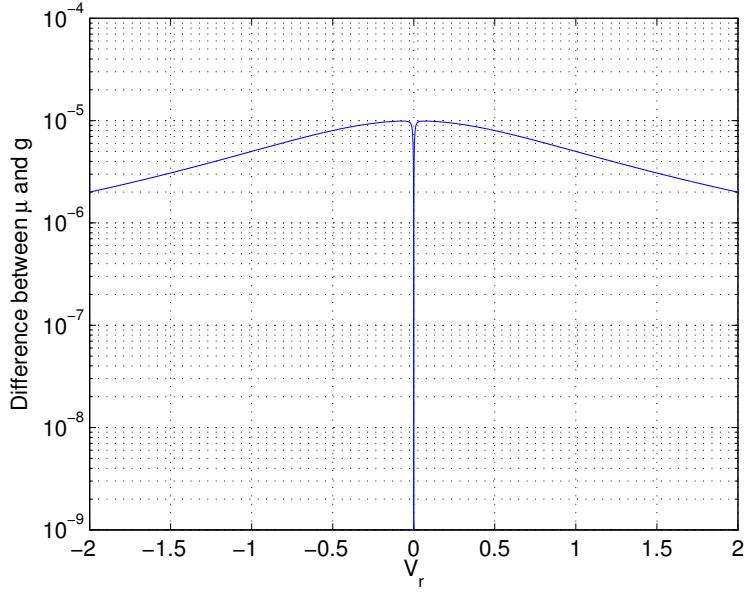


FIGURE 2.13 – Absolute difference between the smooth function  $g$ , defined in Eq. (2.18), and the function  $\mu$  defined in Eq.(2.32), for  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

## Annexes

### 2.A Regularization construction

The regularized law  $\mu$  can be designed as follows :  $\mu$  is an odd, analytical function, with a (single) maximum value  $\mu_s$  on  $\mathbb{R}_-$ , and its asymptotic value is  $\mu_d$  (when  $V_r \rightarrow -\infty$ ). The definition

$$\forall V_r \leq 0, \quad \mu(V_r) = \frac{-\mu_d V_r^2 - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1}, \quad (2.31)$$

verifies our constraints, provided that  $\alpha = \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)}$ . Since  $V_r \leq 0$  with Coulomb's law, it may seem sufficient to define  $\mu$  with Eq. (2.31). Yet, using this definition, numerical simulation shows that  $V_r$  does not stay negative over one period, for large intervals of belt speed and normal force. Since the expression given in Eq. (2.31) is not odd, the friction coefficient is incorrect over a fraction of the period. A satisfying replacement would be, for all  $V_r$

$$\mu(V_r) = \frac{-\mu_d V_r |V_r| - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1} \quad (2.32)$$

Unfortunately the modulus  $|V_r|$  in Eq. (2.32) is not smooth enough for the continuation study, so we choose  $\sqrt{V_r^2 + \varepsilon}$  instead. The constant  $\alpha$  gives the correct maximum  $\mu_s$  only for  $\varepsilon = 0$ , and small values of  $\varepsilon$  engender slightly exaggerated values for the maximum. Numerically, the difference between the smooth function  $g$ , defined in Eq. (2.18), and the function  $\mu$  defined in Eq.(2.32), is one order of magnitude smaller than  $\varepsilon$ . Thus, the chosen value  $\varepsilon = 10^{-4}$  in this paper gives  $g$  a maximum value of  $0.4 + 10^{-5}$ , close to  $\mu_s = 0.4$ , as shown in figure 2.13 by computing the difference between  $g$  and  $\mu$ .

## 2.B Jacobian matrix

The first-order differential system (Eqs. (2.23), (2.24)) reads

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(y, z) \\ \mathcal{F}_2(y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \omega_1 z \\ -2\zeta_1\omega_1 z - \omega_1 y + \frac{F_N}{\omega_1 M_1} \mu_n \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

The partial derivatives of  $\mathcal{F}_1$  and  $\mathcal{F}_2$  are

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z} = \omega_1 \quad (2.34a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial y} = -\omega_1, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z} = -2\zeta_1\omega_1 + \frac{F_N}{\omega_1 M_1} \frac{dV_r}{dz} \frac{d\mu_n(V_r)}{dV_r} \quad (\text{chain rule}) \quad (2.34b)$$

where

$$\frac{dV_r}{dz} = \omega_1, \quad \frac{d\mu_n}{V_r} = \frac{1}{S} \left( -\mu_d R - \mu_d \frac{V_r^2}{R} - 2\frac{\alpha}{n} - 2V_r \mu_n \right) \quad (2.35)$$

Three auxiliary variables are defined :

$$U_R = \frac{V_r^2}{R}, \quad U_S = \frac{1}{S}, \quad U_M = V_r \mu_n \quad (2.36)$$

The Jacobian matrix of system (2.33) can then be written with the following constant, linear and quadratical matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & -2\zeta_1\omega_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\frac{F_N \alpha}{M_1 n} U_S \end{pmatrix} + \frac{F_N}{M_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu_d U_S R - \mu_d U_S U_R - 2U_S U_M \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Fin de l'article

## 2.C Remarques

Pour la friction de Coulomb, le système masse-ressort-amortisseur-tapis a un cycle de stick-slip en quatre étapes :

1. adhérence, augmentation progressive de  $\mu = \mu_d$  à  $\mu = \mu_s$
2. lorsque  $\mu_s$  est atteint, saut instantané de  $\mu$  à la valeur  $\mu_d$  et début du glissement
3. glissement de la masse dans une direction
4. changement de direction de la masse, la vitesse relative  $V_r$  change de monotonie jusqu'à s'annuler, ce qui marque le début de l'adhérence, retour à la première étape.

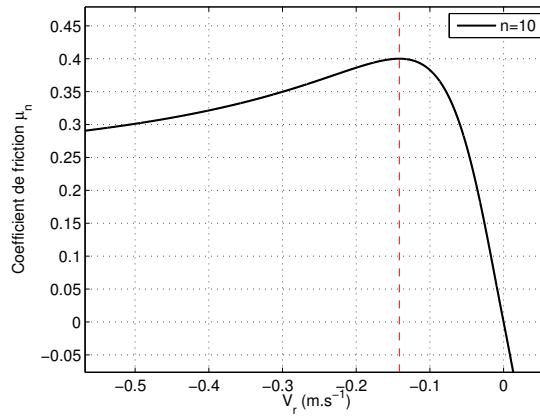


FIGURE 2.14 – Coefficient de friction régularisée  $\mu_n$  ( $n = 10$ ), zoom sur le maximum de la courbe en  $V_r = V_n$  (tirets rouges). En  $V_r < V_n$  on considère l'objet en glissement, pour  $|V_r| < V_n$  en adhérence.

Pour la friction régularisée, il n'y a plus l'étape instantanée 2 ( $\mu$  diminue continuement), tandis qu'il faut que  $\mu$  croisse lors de l'étape 4 puis diminue lors d'une étape additionnelle pour revenir au point de départ, pour lequel  $V_r$  est comprise entre 0 et  $V_n$ . Un cycle de stick-slip régularisé contient ainsi deux passages par le sommet  $\mu_s$  de la courbe de  $\mu_n$  (cf. fig. 2.14).

La friction régularisée souffre de certains défauts : par exemple, la simulation d'une masse sur un plan incliné ne peut pas être correctement reproduite, puisque la masse glisse toujours (« dérive à l'infini »). Cependant, l'étude précédente conclut à la conservation de plusieurs propriétés de la solution stick-slip de Coulomb : existence de vitesse maximale  $V_{\max}$  (et force minimale  $F_{\min}$ ), décroissance de la pulsation avec la force normale  $F_N$ , croissance de l'amplitude avec la vitesse de tapis  $V_b$ . Si l'on souhaitait simuler avec une certaine précision une loi de Coulomb, une perspective serait de chercher un système régularisé « quasi-équivalent », pour lequel les paramètres de masse, amortissement et la loi de friction régularisée seraient choisis pour optimiser certaines propriétés comme la valeur de  $V_{\max}$  ou encore l'amplitude de la solution sur un intervalle utile de vitesse  $V_b$ . Cette recherche n'a pas été menée ici car la loi de Coulomb n'était pas un objectif à atteindre<sup>4</sup> mais simplement une référence connue.

## 2.D Cycle stick-slip pour $n$ grand

L'étude qui a précédé est globale et permet une compréhension synthétique de l'évolution des solutions selon  $\lambda = V_b$  ou  $F_N$  lorsque  $n$  croît. Mais les outils de continuation employés sont inadaptés pour traiter des cas avec  $n$  très grand, nécessitant que  $H$  soit lui-même grand, donc que la taille des systèmes à inverser et le temps de calcul associé augmentent fortement. Une observation locale du stick-slip régularisé (à  $n$ ,  $V_b$ ,  $F_N$  fixés) est cependant rapidement accessible par intégration numérique. Ainsi, pour des valeurs croissantes de  $n$ , et à  $V_b = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  et  $F_N = 5 \text{ N}$ , la figure 2.15 montre que l'adhérence forme un plateau de moins en moins incliné (ce qui se voyait déjà sur la Fig. 2.6, b), et que le début et la fin du plateau se rapprochent de ceux pour la solution de Coulomb. Ces solutions régularisées ont été obtenues en intégrant sur 5 secondes puis en gardant la dernière demi-seconde de la solution.

4. La question du modèle retenu pour la friction corde-archet sera abordée de nouveau avec le modèle thermique.

## Références

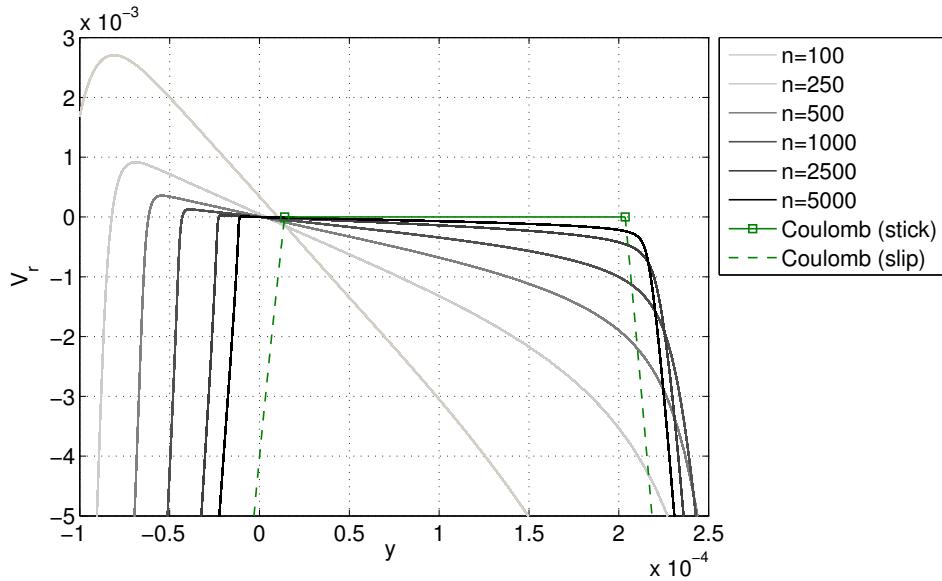


FIGURE 2.15 – Comparaison de la solution stick-slip avec loi de Coulomb (vert), et la solution avec la loi régularisée  $\mu_n$  selon des valeurs croissantes de  $n$  (du gris clair au noir,  $n = 100, 250, 500, 1000, 2500, 5000$ ). Diagramme de phase ( $y, V_r$ ), zoom autour de la partie en adhérence.

## Références

- [Aka02] A. AKAY. « Acoustics of friction ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 111.4 (2002), p. 1525–1548.
- [AC01] U. ANDREAUS et P. CASINI. « Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force ». In : *Journal of Sound and Vibration* 245.4 (2001), p. 685–699.
- [BB05] P. BALLARD et S. BASSEVILLE. « Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with Coulomb friction : a model problem ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 39.1 (2005), p. 59–77.
- [Bas13] J. BASTIEN. « Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions ». In : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 64.4 (2013), p. 955–966.
- [Ber02] E. J. BERGER. « Friction modeling for dynamic system simulation ». In : *Applied Mechanics Reviews* 55.6 (2002), p. 535–577.
- [CV09] B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), p. 243–262.
- [DS73] C. DE BOOR et B. SWARTZ. « Collocation at Gaussian points ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10.4 (1973), p. 582–606.

- [DB14] C. DESVAGES et S. BILBAO. « Physical modeling of nonlinear player-string interactions in bowed string sound synthesis using finite difference methods ». In : *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics (ISMA), Le Mans, France*. 2014, p. 7–12.
- [Fee+98] B. FEENY, A. GURAN, N. HINRICHES et K. POPP. « A historical review on dry friction and stick-slip phenomena ». In : *Applied Mechanics Reviews* 51.5 (1998), p. 321–341.
- [FM94] B. FEENY et F.C. MOON. « Chaos in a forced dry-friction oscillator : experiments and numerical modelling ». In : *Journal of Sound and Vibration* 170.3 (1994), p. 303–323.
- [GN01] L. GAUL et R. NITSCHE. « The role of friction in mechanical joints ». In : *Applied Mechanics Reviews* 54.2 (2001), p. 93–106.
- [IA07] O. INÁCIO et J. ANTUNES. « A linearized modal analysis of the bowed string ». In : *Proceedings of the International Congress of Acoustics. SEA, Madrid*. 2007.
- [Kar+] S. KARKAR, R. ARQUIER, B. COCHELIN, C. VERGEZ, A. LAZARUS et O. THOMAS. *Manlab : An interactive path-following and bifurcation analysis software*.
- [KCV13] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332.4 (2013), p. 968–977.
- [KCV14] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 333.12 (2014), p. 2554–2567.
- [Kar85] D. KARNOPP. « Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems ». In : *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 107.1 (1985), p. 100–103.
- [Kla90] A. KLARBRING. « Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction ». In : *Ingenieur-Archiv* 60.8 (1990), p. 529–541.
- [LT10] A. LAZARUS et O. THOMAS. « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510–517.
- [LN06] R. LEINE et H. NIJMEIJER. *Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems*. T. 18. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Lei+98] R.I. LEINE, D.H. VAN CAMPEN, A. DE KRAKER et L. VAN DEN STEEN. « Stick-slip vibrations induced by alternate friction models ». In : *Nonlinear dynamics* 16.1 (1998), p. 41–54.
- [MO83] J.A.C. MARTINS et J.T. ODEN. « A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 40.3 (1983), p. 327–360.
- [MSW83] M. E. MCINTYRE, R. T. SCHUMACHER et J. WOODHOUSE. « On the oscillations of musical instruments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 74.5 (1983), p. 1325–1345.
- [OM85] J.T. ODEN et J.A.C. MARTINS. « Models and computational methods for dynamic friction phenomena ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 52.1-3 (1985), p. 527–634.

## Références

- [Pap+02] A. PAPINNIEMI, J. C.S. LAI, J. ZHAO et L. LOADER. « Brake squeal : a literature review ». In : *Applied acoustics* 63.4 (2002), p. 391–400.
- [Pen+16] E. PENNESTRÌ, V. ROSSI, P. SALVINI et P. P. VALENTINI. « Review and comparison of dry friction force models ». In : *Nonlinear Dynamics* 83.4 (2016), p. 1785–1801.
- [PHO96] K. POPP, N. HINRICHES et M. OESTREICH. « Analysis of a self-excited friction oscillator with external excitation ». In : *Dynamics with friction : Modeling analysis and experiment* 7 (1996), p. 1–35.
- [Qui04] D. D. QUINN. « A new regularization of Coulomb friction ». In : *Journal of vibration and acoustics* 126.3 (2004), p. 391–397.
- [SGA08] E. SCHOONDERWALDT, K. GUETTLER et A. ASKENFELT. « An empirical investigation of bow-force limits in the Schelleng diagram ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 94.4 (2008), p. 604–622.
- [SR97] L. F. SHAMPINE et M. W. REICHELT. « The Matlab ODE suite ». In : *SIAM journal on scientific computing* 18.1 (1997), p. 1–22.
- [SW00] J. H. SMITH et J. WOODHOUSE. « The tribology of rosin ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), p. 1633–1681.
- [VVD99] B.L. VAN DE VRANDE, D.H. VAN CAMPEN et A. DE KRAKER. « An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure ». In : *Nonlinear Dynamics* 19.2 (1999), p. 159–171.
- [Vig+15] P. VIGUÉ, B. COCHELIN, S. KARKAR et C. VERGEZ. « Investigation of periodic solutions of a bowed string toy model ». In : *M02 Mini symposium Mécanique des Instruments de Musique*. URL <<http://hdl.handle.net/2042/56983>>. Association Française de Mécanique. 2015.
- [Vig+17] P. VIGUÉ, C. VERGEZ, S. KARKAR et B. COCHELIN. « Regularized friction and continuation : Comparison with Coulomb’s law ». In : *Journal of Sound and Vibration* 389 (2017), p. 350–363.
- [Wen06] C. WENSRICHT. « Slip-stick motion in harmonic oscillator chains subject to Coulomb friction ». In : *Tribology international* 39.6 (2006), p. 490–495.
- [Woo93] J. WOODHOUSE. « Idealised models of a bowed string ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 79.3 (1993), p. 233–250.
- [WG04] J. WOODHOUSE et P. M. GALLUZZO. « The bowed string as we know it today ». In : *Acta Acustica United with Acustica* 90.4 (2004), p. 579–589.



## Chapitre 3

# Assessment of the harmonic balance method on a self-oscillating one degree-of-freedom system with regularized friction

### Sommaire

---

Résumé . . . . .	81
Abstract . . . . .	82
3.1 Introduction . . . . .	82
3.2 Model and theoretical background . . . . .	84
3.2.1 Model equations . . . . .	84
3.2.2 Numerical methods . . . . .	85
3.3 Comparison protocol . . . . .	86
3.3.1 Reference solution . . . . .	86
3.3.2 Norm . . . . .	86
3.3.3 Test solution . . . . .	87
3.4 Error results . . . . .	87
3.4.1 Case W1 : weakly nonlinear system, situation 1 . . . . .	87
3.4.2 Case W2 : weakly nonlinear system, situation 2 . . . . .	90
3.4.3 Case S1 : stiff system, situation 1 . . . . .	91
3.4.4 Case S2 : stiff system, situation 2 . . . . .	91
3.5 Conclusion . . . . .	94

---

### Résumé

La continuation des solutions périodiques d'un système différentiel peut être réalisée après une étape de discrétisation permettant d'obtenir un système adapté à la méthode de continuation choisie. L'article qui suit, soumis à *Nonlinear Dynamics*, teste la capacité de l'équilibrage harmonique à calculer les solutions périodiques du système étudié au chapitre 2 (masse, ressort, amortisseur et tapis avec loi de friction régularisée). La méthode de l'EH a une convergence uniforme exponentielle [GO77], ce qui signifie que si  $\mathbf{u}$  désigne la solution exacte du problème et à chaque  $H$  un nombre d'harmoniques des séries de Fourier,  $\mathbf{u}_H$  désigne l'estimation à  $H$

harmoniques donnée par EH, il existe une constante  $c > 1$ , un rang  $H_0$  et une constante  $C_0$ , tels que

$$\forall H > H_0, \quad \|\mathbf{u}_H - \mathbf{u}\|_\infty < C_0 c^{-H}$$

Les nombres  $c$ ,  $H_0$  et  $C_0$  dépendent évidemment du système considéré et ne sont pas connus à l'avance. Si  $c$  est trop proche de 1 la convergence ainsi décrite est lente ; si  $H_0$  est très grand, ce comportement asymptotique ne sera pas observé en pratique pour des nombres plus faibles d'harmoniques. La convergence de la méthode justifie son usage pourvu que l'utilisateur soit disposé à résoudre le problème avec un nombre *suffisant* d'harmoniques. On s'intéresse ici au comportement de l'EH avec un nombre raisonnable d'harmoniques. En effet, la taille des systèmes confiés à la MAN est proportionnelle au nombre d'harmoniques, et gagne à rester modeste pour limiter le temps de calcul. En pratique,  $H$  reste donc inférieur à quelques centaines.

L'erreur de l'EH est calculée selon le nombre d'inconnues et les résultats sont comparés avec une autre méthode, dans le domaine temporel, la Collocation Orthogonale aux points de Gauss à maillage régulier. L'erreur de l'EH est à la fois relativement faible (comparée à la collocation), décroissante et atteint rapidement des taux de décroissance exponentielle (son comportement asymptotique). Sans nécessiter d'optimisation particulière, l'EH est donc adaptée à l'étude de la friction régularisée.

## Abstract

Time-periodic solutions of dynamical systems can be looked for using a discretization method. This paper tests the Harmonic Balance Method (HBM) on a one-degree-of-freedom system (mass, damper, spring, belt) with a regularized friction law. Its relative error is computed with respect to the number of discretization unknowns. Despite the widespread idea that frequency methods are hardly applicable to friction problems, the HBM compares well with a classical time-domain method for this nonlinear system. The main conclusion of this article is that the HBM, without any specific optimization, is well suited for regularized friction.

### 3.1 Introduction

For nonlinear systems, the study of time-periodic solutions, and their evolution with respect to a parameter, is called the continuation of periodic solutions. For systems of Partial Differential Equations, continuation studies may follow two successive discretization methods : a spatial discretization to transform PDE into Ordinary Differential Equations (for instance, a modal projection) ; then a second procedure to transform ODE systems into algebraic systems. Thus, time discretization methods are an important ingredient in periodic solutions continuation, either in the time domain or in the frequency domain.

One of them is the harmonic balance method, where a solution  $\mathbf{x}$  of a nonlinear differential system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \tag{3.1}$$

is sought after as :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{x}_{c,k} \cos(k\omega t) + \mathbf{x}_{s,k} \sin(k\omega t) \tag{3.2}$$

The new unknowns are the Fourier coefficients ( $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_{c,k}$ ,  $\mathbf{x}_{s,k}$ ) and  $\omega$ . One must compute the Fourier coefficients of  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)$  given those of  $\mathbf{x}$ . First attempts, especially when carried out by hand, were limited to a few terms in the sum (3.2), that is,  $H$  small (often,  $H = 1$ ). To overcome this

### 3.1. Introduction

issue the Alternating Frequency/Time Domain method (AFT) [CG89] computes the nonlinear terms in the time domain. Then, Cochelin and Vergez [CV09] showed that the computation of Fourier coefficients can be performed automatically for an arbitrary number of harmonics  $H$ , in the frequency domain, provided the differential system follows a specific formalism. Then, this can be coupled efficiently to a robust continuation technique, the Asymptotic Numerical Method (ANM) since the system obtained on Fourier coefficients follows the requirements of the ANM.

The main available results for a class of problems of a certain regularity are asymptotic convergence rates. As already underlined in [KCV14], the lack of theoretical results on preasymptotic error analysis is problematic for applications and motivates numerical study. Indeed, convergence rates describe how methods behave when the number of discretization unknowns (for instance, the number of coefficients in Fourier series) tends to infinity. However, what are realistic error expectations for a given number of discretization unknowns ? As recalled later, for  $\mathbf{f}$  a continuous function in eq. (3.1), the HBM has a uniform convergence rate of  $\mathcal{O}(c^{-H})$ , where  $c > 1$  and  $H$  is the number of harmonics [GO77]. Although it is satisfying to have a convergence result, the definition of this exponential convergence merely means that if  $\mathbf{u}$  denotes the exact solution and  $\mathbf{u}_H$  the HBM estimate with  $H$  harmonics, there exists  $c > 1$ , a rank  $H_0$  and a constant  $C_0$ , such that

$$\forall H > H_0, \quad \|\mathbf{u}_H - \mathbf{u}\|_\infty < C_0 c^{-H}$$

Obviously, the numbers  $c$ ,  $H_0$  and  $C_0$  depend on the system of interest and are not known in advance. If  $c$  is too close to unity the convergence will be rather slow ; if  $H_0$  is large the asymptotic behaviour will not be observed for practical (small) numbers  $H$ .

Another practical difficulty is the monotonicity of the error. If a solution is suspected to be inaccurate (for instance, it presents spurious oscillations), will the solution be improved by adding discretization unknowns ? In order to compute approximate values of convergent series, increasing the number of terms in the partial sum is not always reliable. Although it may seem at this point a « worst case scenario », non-monotone error is a phenomenon encountered in the current study, and the authors wish to underline its importance.

The issues mentioned above stress the need for more theoretical results on preasymptotic error analysis. In the absence of such results, it is valuable to carry out numerical benchmarks. The case of regularized impact has been studied in [KCV14]. Another numerically demanding interaction in nonlinear mechanics is friction, with a great variety of models developed for specific needs [ADD94 ; AO05]. The present paper focuses on a regularized friction law. The solutions branches for this law and their similarities with Coulomb's friction law are examined in [Vig+17].

As a reference method, the Orthogonal Collocation at Gauss points with regular meshing is also used to solve for periodic solutions of this model since it is a widely used and accepted method for non linear or even piecewise-smooth systems. The aim of the current assessment is to evaluate the capacity of the HBM to deal with regularized friction. It is known that there are refinements which can be deployed and tried whenever necessary. The HBM can be more efficient using harmonic selection techniques (for instance, [GT12]). The OC can benefit from adaptive meshing (although it can also be defective, as mentioned in Section 5.3 of [Eng+01]). Our results show that, without optimization, on regularized friction, the error for the HBM has at least two interesting properties : it is relatively small ; it is monotonically decreasing. In some cases, it can also reach its asymptotic rate with few unknowns.

The present paper is organised as follows : in section 3.2, model equations are given and numerical methods are recalled. Section 3.3 presents the protocol used to evaluate the numerical accuracy of the method. Section 3.4 presents the results of this error analysis, for two types of nonlinearity (weakly nonlinear or stiff, depending on the regularization parameter), and each time for two types of solutions.

Symbol	Signification	Numerical value (if applicable)
$\lambda$	Continuation parameter	.
$V_b$	Belt speed	.
$F_N$	Normal force	5 N
$\zeta_1$	Damping	$1.3096 \times 10^{-3}$
$\omega_1$	Natural pulsation	$1.2316 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$
$M_1$	Modal mass	$6.42 \times 10^{-3} \text{ kg}$
$\mu_s$	Static friction coefficient	0.4
$\mu_d$	Dynamic friction coefficient	0.2
$\varepsilon$	Modulus smoothing parameter	$10^{-4}$
$\alpha$	Friction constant	$\alpha = \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)} \simeq 0.283$
$n$	Regularization parameter	.

TABLE 3.1 – Parameters used for the mass-spring-damper-belt system with regularized friction.

## 3.2 Model and theoretical background

### 3.2.1 Model equations

The model studied in this paper is a mass-spring-damper-belt system (Fig. 3.1, a). This mechanical device is a bowed string toy model. If  $y$  denotes the transverse displacement of a string at the bowing point  $x = x_b$ , a projection of the equation of motion on the first bending mode leads to a mass-spring-damper equation. Namely, if  $V_r$  denotes the relative velocity between the mass and the belt,  $V_b$  the belt velocity,  $F_N$  the normal force,  $M_1$  the modal string mass,  $\zeta_1$  the damping,  $\omega_1$  the natural pulsation,

$$\ddot{y} + 2\zeta_1\omega_1\dot{y} + \omega_1^2 y = \frac{F_N}{M_1}\mu_n(V_r) \quad (3.3)$$

$$\text{where } V_r = \dot{y} - V_b \quad (3.4)$$

The contact law between the mass and the belt is a regularized friction law  $\mu_n(V_r)$ . It is based on an analytical mother function,  $g$ , and a regularization parameter,  $n$ .  $g$  is defined as

$$g(V_r) := \frac{-\mu_d V_r \sqrt{V_r^2 + \varepsilon} - 2\alpha V_r}{V_r^2 + 1}, \quad \alpha = \sqrt{\mu_s(\mu_s - \mu_d)} \quad (3.5)$$

where  $\mu_s$  and  $\mu_d$  are static and dynamic friction coefficients ( $\mu_s > \mu_d$ ). Then,  $\mu_n$  is defined as

$$\mu_n(V_r) := g(nV_r) = \frac{-\mu_d V_r \sqrt{V_r^2 + \frac{\varepsilon}{n^2}} - 2\frac{\alpha}{n} V_r}{V_r^2 + \frac{1}{n^2}} \quad (3.6)$$

For small values of  $n$  the system is weakly nonlinear ; for great values of  $n$  it becomes stiff. This regularized law  $\mu_n$  is studied in [Vig+17]. A plot of the function  $\mu_n$  is given in Fig. 3.1, b, for  $n = 10$  (weakly nonlinear system) and  $n = 100$  (stiff system). For this regularized law, the movement type is classified as follows : let  $V_n$  be such that

$$\mu_n(V_n) = \max_v \mu_n(v) \simeq \mu_s \quad (3.7)$$

then

$$|V_r(t)| \leq |V_n| \Rightarrow \text{stick}, \quad |V_r(t)| > |V_n| \Rightarrow \text{slip} \quad (3.8)$$

A period containing exactly one interval of stick motion and one of slip motion is called stick-slip.

### 3.2. Model and theoretical background

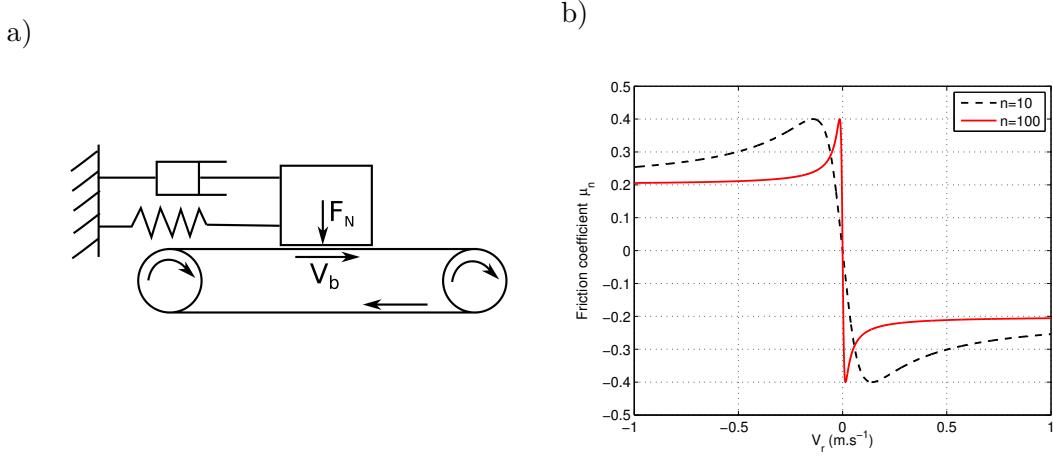


FIGURE 3.1 – a) Mass-spring-damper system with a conveyor belt. b) Regularized friction law for  $n = 10$  (black, dash) and  $n = 100$  (red, solid).

#### 3.2.2 Numerical methods

The association of the HBM and the Asymptotic Numerical Method (ANM), or of the OC and the ANM, is implemented in the Matlab toolbox MANLAB [Kar+]. It requires what is called quadratic formulation. By adding auxiliary variables, the derivation order is lowered to 1 and the nonlinearities are recast into quadratic ones, so that  $\mathbf{u}$ , the vector of all unknown variables, is solution of

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (3.9)$$

where  $\lambda$  is the continuation parameter,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}_0$ ,  $\mathbf{l}_1$  are matrices,  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}_1$  vectors,  $\mathbf{q}_0$  a bilinear operator [CV09]. We recall here the quadratic formulation of equations (3.3), (3.4), (3.6) chosen in [Vig+17] :

$$0 = -\lambda + \omega_1 z - V_r \quad (3.10a)$$

$$0 = \frac{\varepsilon}{n^2} + V_r^2 - R^2 \quad (3.10b)$$

$$0 = \frac{1}{n^2} - S + V_r^2 \quad (3.10c)$$

$$0 = +2\frac{\alpha}{n}V_r + \mu_n S + \mu_d V_r R \quad (3.10d)$$

$$\dot{y} = +\omega_1 z \quad (3.10e)$$

$$\dot{z} = -2\zeta_1\omega_1 z - \omega_1 y + \frac{F_N}{\omega_1 M_1} \mu_n \quad (3.10f)$$

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \mathbf{q}_0(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

The operators from eq. (3.9) are recalled ( $\mathbf{l}_1$  is null). The 6 variables are concatenated into a vector  $\mathbf{u} = (V_r, R, S, \mu_n, y, z)^t$ .

We also recall briefly the two time-discretization methods, the HBM and the OC.

In the HBM, the solution is sought after as a truncated Fourier series :

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}_0 + \sum_{k=1}^H \mathbf{u}_{c,k} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^H \mathbf{u}_{s,k} \sin(k\omega t) \quad (3.11)$$

New unknowns are vectors  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_{c,k}$  and  $\mathbf{u}_{s,k}$ , and angular frequency  $\omega$ . The HBM has a uniform asymptotic convergence rate of  $\mathcal{O}(c^{-H})$ , where  $c > 1$  and  $H$  is the number of harmonics [GO77]. The main difficulty in using the HBM with a large number of harmonics is to find Fourier coefficients of nonlinear terms. In our case that is the purpose of the quadratic formulation, as proposed in [CV09].

In the OC method, the solution is approximated by a periodic, continuous, piecewise polynomial of order  $p$ . The (unknown) period is divided into  $N_{int}$  subintervals  $[t_i, t_{i+1}]$ . In each subinterval, equidistant time-steps  $t_i^j$  and the samples of the solution  $\mathbf{u}_i^j$  are defined as

$$t_i^j := t_i + \frac{j}{p} h, \quad \mathbf{u}_i^j := \mathbf{u}(t_i^j), \quad 0 \leq j \leq p \quad (3.12)$$

The approximate solution  $\hat{\mathbf{u}}$  is interpolated with  $\mathcal{L}_i^j$ , the Lagrange polynomials of order  $p$  based on the time-steps  $t_i^j$ :

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad \hat{\mathbf{u}}(t) = \sum_{j=0}^p \mathbf{u}_i^j \mathcal{L}_i^j(t) \quad (3.13)$$

The solution is then assumed continuous and periodic, which gives constraints at  $t = t_i$  and  $t = 0$ . An algebraic system on the unknowns  $\omega$  and vectors  $\mathbf{u}_i^j$  is obtained by evaluation at the Gauss-Legendre points (*i.e* the zeros of the Legendre polynomial of order  $p$  on each subinterval). Using regular meshing, the OC has a uniform asymptotic convergence rate of  $\mathcal{O}(N_{int}^{-(p+1)})$  [DS73]. As usual the convergence is obtained by increasing the number of subintervals, since it is cumbersome to increase the degree of polynomials (this would require computing zeroes of Legendre polynomials). From now on the polynomials order is set to  $p = 3$ .

The number of discretization unknowns for each variable,  $N_{dis}$ , is defined as :  $N_{dis} = 2H + 1$ , for the HBM,  $N_{dis} = 3N_{int} + 1$  for the OC.

### 3.3 Comparison protocol

#### 3.3.1 Reference solution

Since both methods converge for  $C^\infty$  problems, we can use as a reference the solution given by one method with a great number of discretization unknowns. We use here the HBM with  $H = 500$  harmonics. Numerical integration, though it would provide an independent reference, has accuracy limitations and preliminary tests showed that it was not always reliable. For instance, for  $n$  sufficiently large, in a portion of the bifurcation diagram near the first Hopf bifurcation, where the amplitude and the pulsation of the solution are steep functions of the continuation parameter  $V_b$  (see [Vig+17]), usual numerical integration schemes seem unable to compute periodic solutions.

#### 3.3.2 Norm

Two kinds of results about numerical error are displayed below. First, one can focus on each variable separately by computing relative errors. A comparison between the six variables can then be carried out. However, this comparison is meaningful only if all variables have the same (null) mean value. One can notice for instance that equation (3.10a) brings an offset between  $z$  and  $V_r$ , which would yield different relative errors. Therefore, for each variable  $X$  in the vector  $\mathbf{u}$ , its mean value is removed before computing the relative error.

For each variable  $X$ , after evaluating  $X_{ref}$  and  $X_{test}$  in  $N_t = 10^5$  points regularly spaced over their respective periods, which creates two vectors  $(X_{ref}(t_j))_j$ ,  $(X_{test}(t_j))_j$ , its mean value  $M(X)$

### 3.4. Error results

is defined by

$$M(X) := \frac{1}{N_t} \sum_{k \geq 0} X_{\text{ref}}(t_k) \quad (3.14)$$

The relative error without bias is defined by

$$\epsilon_r(X) := \frac{\| (X_{\text{ref}}(t_j))_j - (X_{\text{test}}(t_j))_j \|_2}{\| (X_{\text{ref}}(t_j))_j - M(X) \|_2} \quad (3.15)$$

The second kind of results is scalar and uses a single norm. It has already been highlighted that using the ANM makes necessary the introduction of 4 auxiliary variables, namely  $V_r, R, S, \mu_n$ , instead of using just 2,  $y$  and  $z$ , as a numerical integration method would. For the sake of a complete assessment of the error, the second norm takes the 6 variables into account. Thus, with  $\mathbf{u} = (V_r, R, S, \mu_n, y, z)^t$ , vector of the 6 variables,  $(\mathbf{u}^i(t_j))_{1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq N_t}$  the matrix of its time evaluations,  $M_{\mathbf{u}}$  the mean values of each variable, mean relative error  $\epsilon_{r,m}$  is now defined as

$$\epsilon_{r,m} := \frac{\| (\mathbf{u}_{\text{ref}}^i(t_j))_{i,j} - (\mathbf{u}_{\text{test}}^i(t_j))_{i,j} \|_2}{\| (\mathbf{u}_{\text{ref}}^i(t_j))_{i,j} - M_{\mathbf{u}} \|_2} \quad (3.16)$$

#### 3.3.3 Test solution

When the number of discretization unknowns (*i.e.*  $H$  or  $N_{\text{int}}$ ) changes, the solution branch is altered. To compare two solutions, a reference on the one hand, and a test solution with less harmonics or less subintervals on the other hand, a criterion is needed to perform a relevant comparison. As in a previous comparison protocol [KCV14], an energy criterion is chosen. In the test solution, the mass needs to have the same kinetic energy (over a period) as in the reference.

At last, branches of solutions are available. Where should tests be performed, *i.e.* which solutions should be chosen as references? Preliminary tests lead the authors to select two different representative situations for two values of  $n$ . Four cases will then be studied :

1. « Weakly nonlinear system, situation 1 », denoted W1 : low value of  $n$  ( $n = 10$ ),  $V_r$  stays negative (section 3.4.1)
2. « Weakly nonlinear system, situation 2 », denoted W2 : low value of  $n$ ,  $V_r$  briefly changes sign (section 3.4.2)
3. « Stiff system, situation 1 », denoted S1 : high value of  $n$  ( $n = 100$ ),  $V_r$  stays negative (section 3.4.3)
4. « Stiff system, situation 2 », denoted S2 : high value of  $n$ ,  $V_r$  briefly changes sign (section 3.4.4).

## 3.4 Error results

### 3.4.1 Case W1 : weakly nonlinear system, situation 1

For a low value of the regularization parameter ( $n = 10$ ), which means, for a weakly nonlinear system, the case W1 focuses on a reference solution with a small belt velocity ( $V_b = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ ). For this first choice of  $n$  and  $V_b$ , fig. 3.2, left, shows one period of the displacement  $y$ , relative velocity  $V_r$ , friction coefficient  $\mu_n$ . Fig. 3.2, right, shows the cycle in the phase space  $(y, V_r)$ . An important characteristic of this solution is that  $V_r$  is negative during the period, unlike the solution presented in case W2 (section 3.4.2).

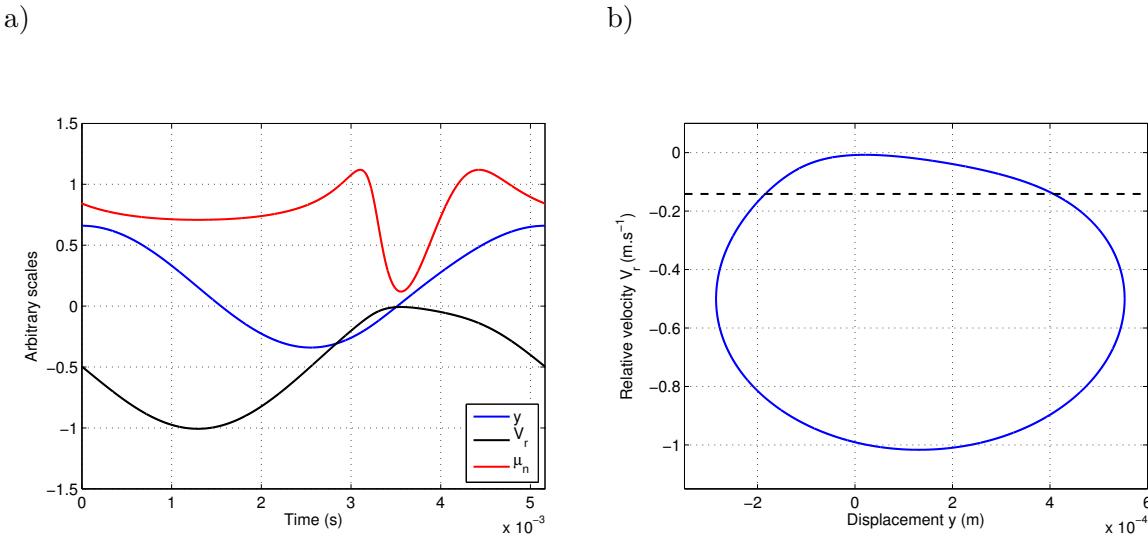


FIGURE 3.2 – Reference solution (computed with HBM,  $H = 500$ ), in Case W1 (as defined in section 3.4.1) :  $n = 10$ ,  $V_b = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ , other parameters values are given in Table 3.1. a) One period of the displacement  $y$ , relative velocity  $V_r$  and friction coefficient  $\mu_n$  with arbitrary vertical scales. b) Phase diagram ( $y, V_r$ ) in blue, limit velocity between stick and slip  $V_n$  in black dashed (see equation (3.8)).

For any number of discretization unknowns  $N_{\text{dis}}$ ,  $y$  is more accurately computed than  $z$ , which is more precise than  $\mu_n$  (Fig. 3.3). When the friction law is Coulomb's law, defined as :

$$\mu(V_r) = \begin{cases} -\mu_d \operatorname{sign}(V_r) & \text{if } V_r \neq 0 \text{ (slip)} \\ \mu_0 \text{ with } |\mu_0| \leq \mu_s, & \text{if } V_r = 0, \text{ (stick)} \end{cases} \quad (3.17)$$

then during a stick-slip cycle, the acceleration and the friction coefficient have a discontinuity between sticking and slipping. The velocity is continuous with two singular points over a period, and differentiable elsewhere. Although the regularization process makes every variable analytical with respect to the continuation parameter, the regularized variables  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$  have different spectral content. This can explain a better accuracy for some variables compared to others, even if they are all smooth.

For  $z$  and  $\mu_n$  the errors for the HBM are straight lines in the semilog plot (in agreement with the asymptotic convergence rate  $\mathcal{O}(c^{-H})$ ,  $c > 1$ ) for small values of  $N_{\text{dis}}$ . The variable  $y$  is very accurately represented with the HBM (more than the five others); but from  $N_{\text{dis}} = 43$  to 163, small ripples appear very regularly (as displayed in the zoom window around  $N_{\text{dis}} = 80$ ) and the ripples span 3 or 4 steps. This intriguing behaviour does not undermine the precision of this method since it is a small effect on the most accurately computed variable.

The OC exhibits up to two stages in the preasymptotic range for each variable (Fig. 3.3b). At first, the error can be a non-monotone function of  $N_{\text{dis}}$ . Then, the error is strictly decreasing, and its slope coefficient in log-log scale converges to its expected value  $-(p+1) = -4$  for an asymptotic convergence rate of  $\mathcal{O}(N_{\text{int}}^{-(p+1)})$ .

The transition between these two stages depends on the stiffness of the variables. The error is immediately a monotone function of  $N_{\text{dis}}$  for  $y$ ; it becomes monotone for  $z$  when  $N_{\text{dis}} \geq 130$ ; for  $\mu_n$ , this happens when  $N_{\text{dis}} \geq 238$ .

In terms of mean relative error, the HBM shows a uniform convergence rate  $\mathcal{O}(c^{-H})$ , which means a linear fit in semilog scale (Fig. 3.4, left). For  $61 \leq N_{\text{dis}} \leq 183$  the linear coefficient is

### 3.4. Error results

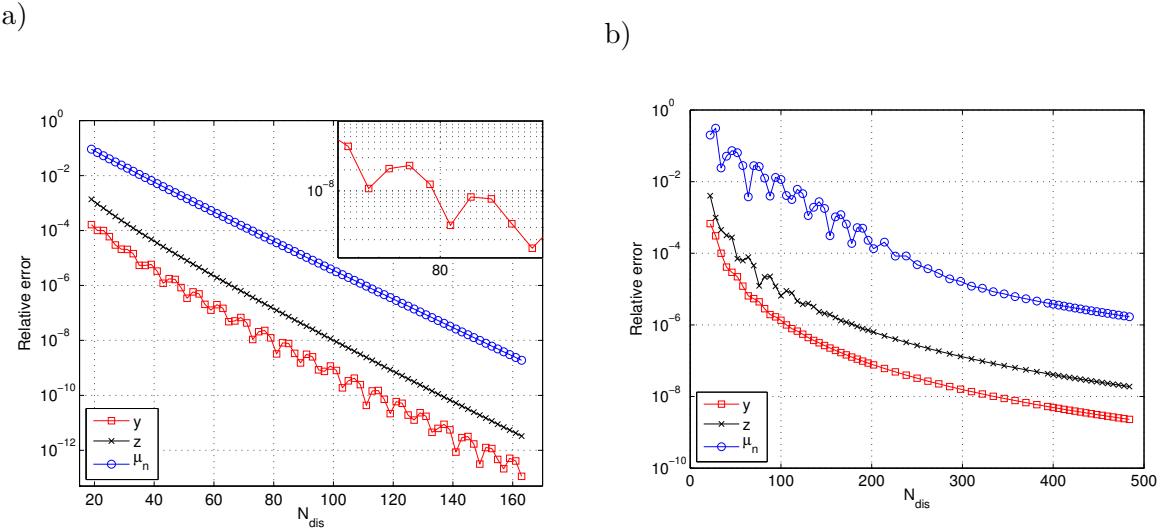


FIGURE 3.3 – Relative errors (eq. 3.15) for three specific variables  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$ , in case W1 (as defined in section 3.4.1). a) HBM, semilog scale, with a zoom window on  $y$  around  $N_{\text{dis}} = 80$ . b) OC, semilog scale. Note that axis limits are different between the two figures.

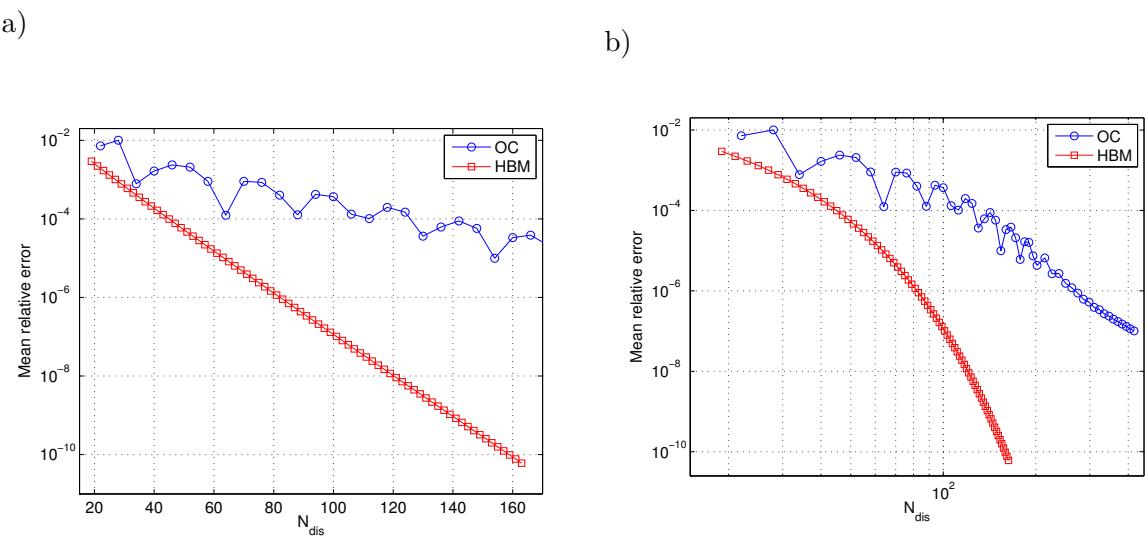


FIGURE 3.4 – Mean relative error (eq. 3.16) for the HBM and the OC, in case W1. a) Semilog scale. b) Log-log scale.

$-0.052$ ; since  $N_{\text{dis}} = 2H + 1$ ,  $c = \exp(2 * 0.052 * \ln(10)) = 1.27$ .

The asymptotic polynomial convergence of the OC appears later. At first sight there is an almost straight line in log-log scale from  $N_{\text{dis}} \geq 250$ , but the slope coefficient may be different from the asymptotic rate when the error starts being monotone. A linear regression fits the curve with coefficient  $-4.3$  for  $394 \leq N_{\text{dis}} \leq 484$ .

The accuracy of the chosen reference solution can be checked *a posteriori*. Indeed, for a variable  $X$ , let  $X_e$  be the exact solution,  $X_{\text{test}}$  and  $X_{\text{ref}}$  being the test and the reference as above. Then :

- $\epsilon_1 = \|X_{\text{test}} - X_e\|$  is the error that is searched for ;
- $\epsilon_2 = \|X_{\text{ref}} - X_e\|$  has to be a small error ;
- $\epsilon_3 = \|X_{\text{test}} - X_{\text{ref}}\|$  is actually measured.

Reverse triangle inequality gives  $|\epsilon_1 - \epsilon_3| \leq \epsilon_2$  and means that as long as  $\epsilon_3$  is much greater than  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  is close to  $\epsilon_1$ . If the HBM mean error is still a straight line (in semilog scale) when  $N_{\text{dis}}$  increases, the test solution is still much less accurate than the reference, and the assumption of a small error  $\epsilon_2$  is correct. On the contrary, if machine precision prevents the error  $\epsilon_2$  from being small (compared with  $\epsilon_3$ ), the test and the reference become close. In that case, from a certain  $N_{\text{dis}}$ , there is a plateau, with an almost constant error beyond this number of unknowns. This plateau, not shown in figures, is not an issue of the convergence process, but one of its features : it indicates when the test reaches the same accuracy as the reference. For the HBM and  $n = 10$ , this plateau appears beyond  $N_{\text{dis}} = 200$  for  $y$ ,  $N_{\text{dis}} = 220$  for  $z$ , and  $N_{\text{dis}} = 260$  for  $\mu_n$ .

A comparison with numerical integration over the variables  $y$  and  $z$  was used to confirm our results. Let's call ODE the solution provided by the solver `ode15s` from Matlab ODE suite [SR97]. Since the relative error between ODE and the HBM reference solution (with  $H = 500$  harmonics) is about  $10^{-11}$  (resp.  $10^{-10}$ ) for  $y$  (resp.  $z$ ), choosing ODE instead of HBM as a reference gives extremely close error curves for those variables.

### 3.4.2 Case W2 : weakly nonlinear system, situation 2

For the same value of the regularization parameter ( $n = 10$ ), the case W2 focuses on a reference solution with a greater belt velocity ( $V_b = 2 \text{ m.s}^{-1}$ ). The reference solution is plotted in Fig. 3.5. On the right, phase diagram  $(y, V_r)$  is zoomed during the stick motion ( $|V_r| \leq V_n$ ). The sign of  $V_r$  changes during a period. It is the main difference with the previous case W1. This property of the solution has significant consequences on the preasymptotic error (as shown below), but the underlying reasons are still unclear.

Note that as underlined in [Vig+17], this sign change is a difference with the stick-slip cycles obtained using Coulomb's law, where the relative velocity has a constant sign. It is caused by the regularization process and has no physical interpretation.

In this case (Fig. 3.6), the HBM error decreases at a fast rate for small values of  $N_{\text{dis}}$ , then reaches a slower asymptotic convergence (straight lines in the semilog plot). Similarly to the first case, the relative error on  $y$  is smaller than the one on  $z$ , itself smaller than the error on  $\mu_n$ . Ripples on the error curves now affect the three variables, not only  $y$ .

The OC error curves exhibit spurious oscillations, especially for the variables  $y$  and  $\mu_n$  until large values of  $N_{\text{dis}}$ . This time, the six error curves are presented on the same figure to highlight that for small number of unknowns, the error curves are close for the two methods. The computation of mean errors (Fig. 3.7) gives a synthetic measure, where the error on  $\mu_n$  appears predominantly.

### 3.4. Error results

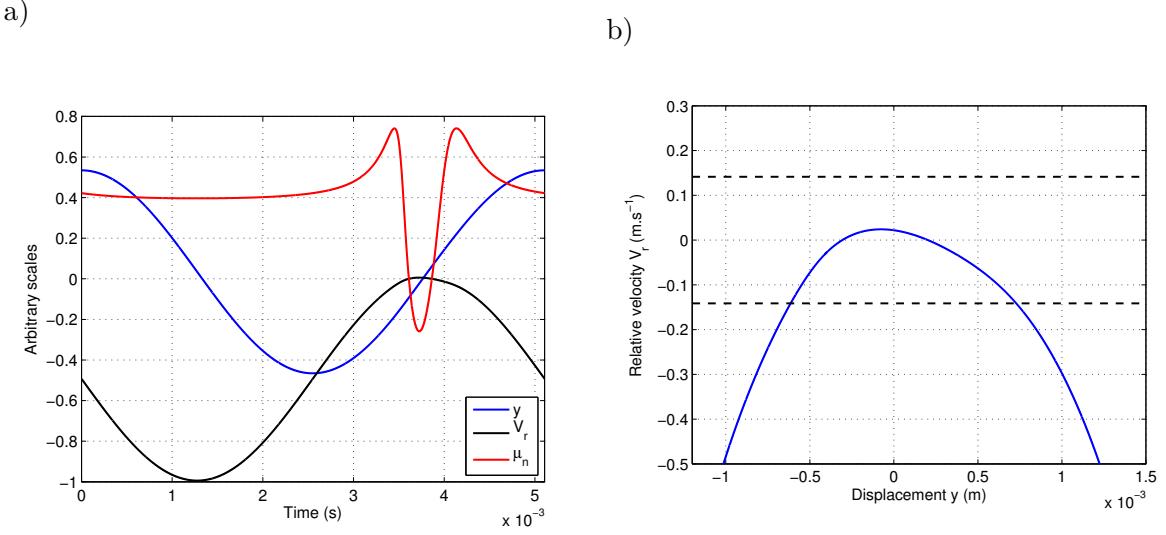


FIGURE 3.5 – Reference solution (computed with HBM,  $H = 500$ ), in Case W2 (as defined in section 3.4.2) :  $n = 10$ ,  $V_b = 2 \text{ m.s}^{-1}$ , other parameters values are given in Table 3.1. a) One period of the displacement  $y$ , relative velocity  $V_r$  and friction coefficient  $\mu_n$ , with arbitrary vertical scales. b) Zoom in the phase diagram ( $y, V_r$ ) in blue ; limit velocities between stick and slip,  $V_n$  and  $-V_n$ , are black dashed lines (see equation (3.8)).

#### 3.4.3 Case S1 : stiff system, situation 1

For increasing values of  $n$ , the system becomes stiffer (Fig. 3.1, b). The chosen value here is  $n = 100$ , and in this first situation S1, similarly to case W1,  $V_r$  stays negative over one period (for the reference solution  $V_b = 0.05 \text{ m.s}^{-1}$ ). The relative errors over  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$  are ordered as before :  $y$  has the smallest relative error,  $\mu_n$  the largest. The two methods have closer error curves than before (Fig. 3.9). The HBM is already exponentially convergent, with monotone errors on  $z$  and  $\mu_n$  (and small ripples on  $y$ ). The OC mean error is non-monotone in the tested range (Fig. 3.9). Going further should show the asymptotic convergence of the OC mean error, as observed for  $n = 10$  in case W1.

The stiffness of the system, compared with case W1 ( $n = 10$ ), is highlighted by the number of discretization unknowns needed to reach a specific accuracy. Let's consider the variable  $y$ . In case W1, the error was inferior to  $10^{-4}$  when  $N_{\text{dis}} \geq 21$  for the HBM, when  $N_{\text{dis}} \geq 34$  for the OC. When  $n = 100$  in this analogous case S1, more discretization unknowns are needed to keep the error on  $y$  lower than  $10^{-4}$  ( $N_{\text{dis}} \geq 97$  for the HBM,  $N_{\text{dis}} \geq 148$  for the OC).

#### 3.4.4 Case S2 : stiff system, situation 2

In this last case S2, the system is stiff ( $n = 100$ ) ; and for the reference solution, the value of  $V_b = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$  is chosen so that the sign of  $V_r$  changes shortly during the period (analogous of W2, section 3.4.2). The errors on the three variables  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$  are shown in Fig. 3.10. The HBM converges with monotone errors. The rates slow down for large number of discretization unknowns. The OC errors exhibit important spikes for small  $N_{\text{dis}}$ , and errors are non-monotone in the tested range. Once more, mean error curves (not displayed here) only reflect the predominant error on  $\mu_n$ . In Fig. 3.10 the HBM error curves start at  $N_{\text{dis}} = 145$  and the OC curves start at  $N_{\text{dis}} = 82$ . If  $N_{\text{dis}}$  is too small, the HBM cannot be used to continue the whole branch. On the contrary, the OC is able to continue the branch but computed solutions can be inaccurate.

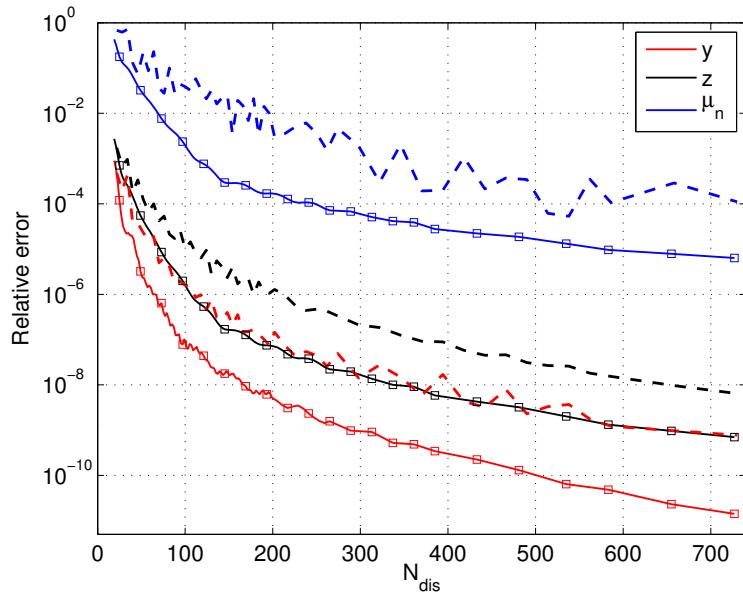


FIGURE 3.6 – Relative errors (eq. (3.15)) for three specific variables  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$ . Weakly nonlinear system ( $n = 10$ ), case W2 (as defined in section 3.4.2). Solid lines with squares : HBM, dashed lines : OC. Semilog scale.

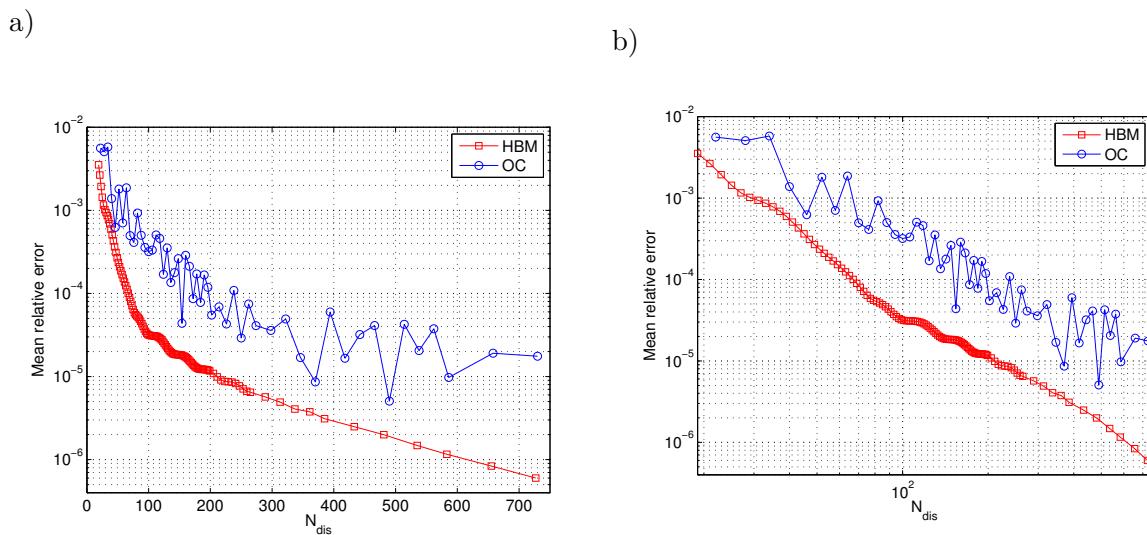


FIGURE 3.7 – Mean relative error (eq. (3.16)) for the HBM and the OC, for a weakly nonlinear system ( $n = 10$ ) in case W2 (as defined in section 3.4.2). a) Semilog scale. b) Log-log scale.

### 3.4. Error results

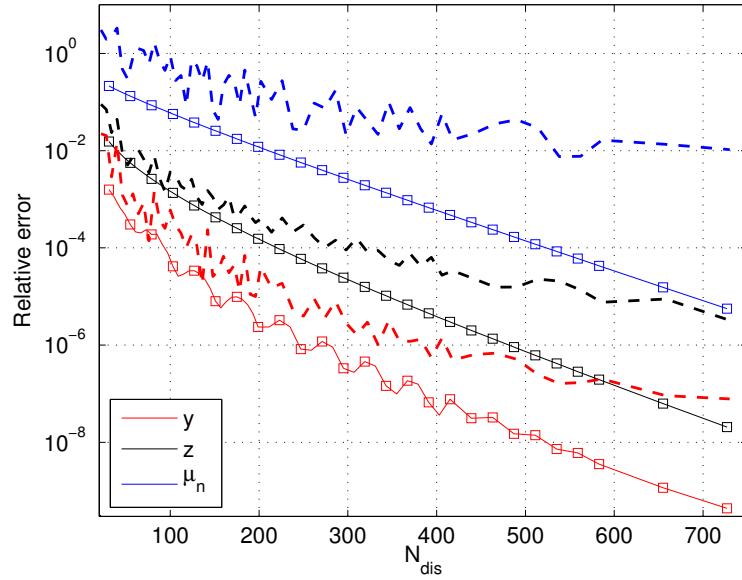


FIGURE 3.8 – Relative errors (eq. 3.15) for three specific variables  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$ . Case S1 (as defined in section 3.4.3). Solid lines with squares : HBM, dashed lines : OC. Semilog scale.

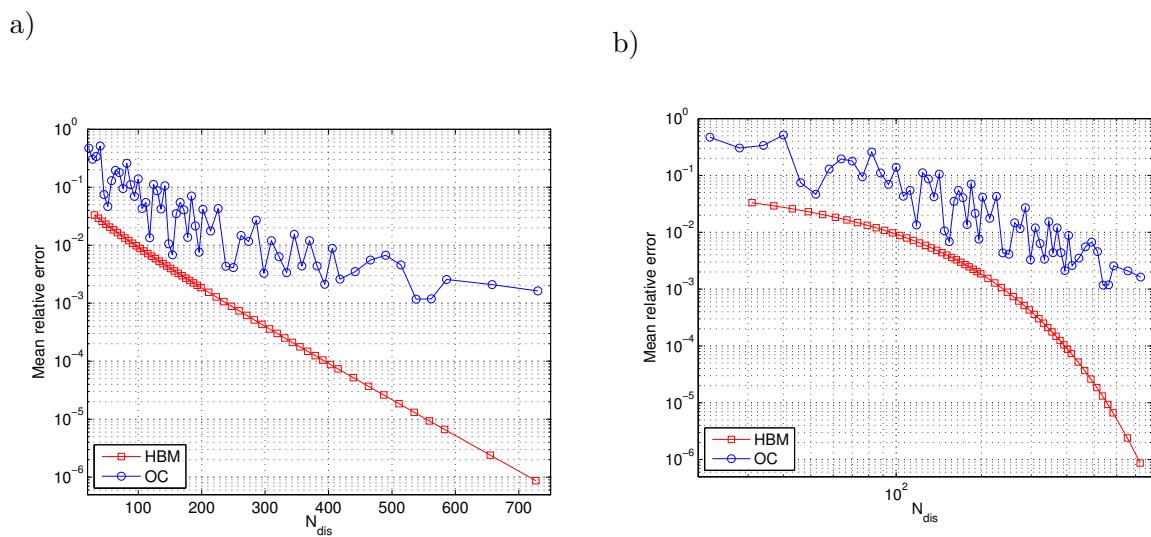


FIGURE 3.9 – Mean relative error (eq. (3.16)), for the HBM and the OC, for case S1 (as defined in section 3.4.3). a) Semilog scale. b) Log-log scale.

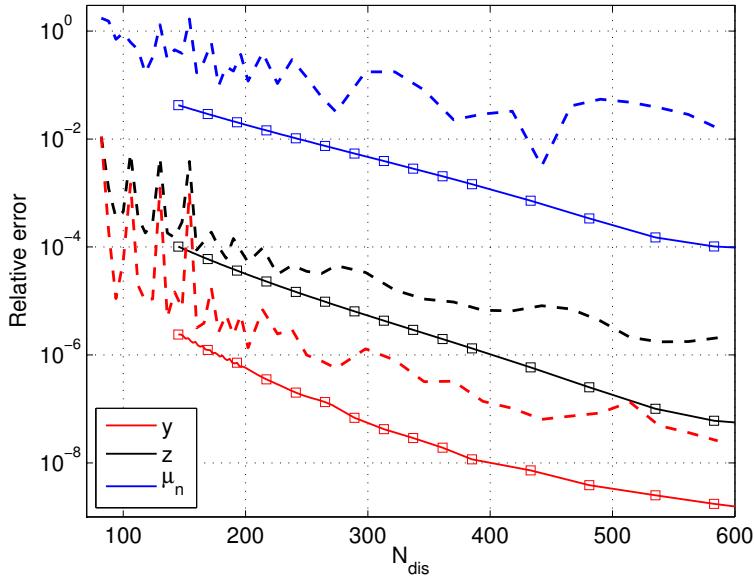


FIGURE 3.10 – Relative errors (eq. (3.15)) for three specific variables  $y$ ,  $z$  and  $\mu_n$ , for case S2 (defined in Section 3.4.4). Solid lines with squares : HBM, dashed lines : OC. Semilog scale.

### 3.5 Conclusion

In this paper, the Harmonic Balance Method (HBM) is assessed on a nonlinear system with a regularized friction law. A numerical evaluation of the error with respect to the number of discretization unknowns is performed for four different cases (either a weakly or highly nonlinear system ; either a constant sign for the relative velocity or a varying sign). The Orthogonal Collocation at Gauss points with regular meshing (OC) is used to put results into context.

In cases where the relative velocity keeps a constant sign, the HBM immediately starts converging at an asymptotic rate. That rate is slower for a stiff system than for a weakly nonlinear system. The OC presents non-monotone errors for small numbers of discretization unknowns, and the asymptotic convergence of the OC can be difficult to observe when the system is stiff.

In cases where the sign of the relative velocity shortly changes over a period, the HBM does not converge at its asymptotic rate from the beginning, and the OC errors exhibit more important oscillations. The HBM presents satisfactorily low error values.

The authors in [KCV14] had found that the HBM was well suited for regularized impact. We conclude that the HBM, without any specific optimization, is well suited for regularized friction.

### Acknowledgements

This work has been carried out in the framework of the Labex MEC (ANR-10-LABX-0092). The project leading to this publication has received funding from Excellence Initiative of Aix-Marseille University - A\*MIDEX, a French « Investissements d’Avenir » programme.

## Références

- [ADD94] B. ARMSTRONG-HÉLOUVRY, P. DUPONT et C. C. DE WIT. « A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction ». In : *Automatica* 30.7 (1994), p. 1083–1138.
- [AO05] J. AWREJCEWICZ et P. OLEJNIK. « Analysis of dynamic systems with various friction laws ». In : *Applied Mechanics Reviews* 58.6 (2005), p. 389–411.
- [CG89] T.M. CAMERON et J.H. GRIFFIN. « An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149–154.
- [CV09] B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), p. 243–262.
- [DS73] C. DE BOOR et B. SWARTZ. « Collocation at Gaussian points ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10.4 (1973), p. 582–606.
- [Eng+01] K. ENGELBORGHHS, T. LUZYANINA, KJ In't HOUT et D. ROOSE. « Collocation methods for the computation of periodic solutions of delay differential equations ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 22.5 (2001), p. 1593–1609.
- [GO77] D. GOTTLIEB et S. A. ORSZAG. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. SIAM, 1977.
- [GT12] A. GROLET et F. THOUVEREZ. « On a new harmonic selection technique for harmonic balance method ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012), p. 43–60.
- [Kar+] S. KARKAR, R. ARQUIER, B. COCHELIN, C. VERGEZ, A. LAZARUS et O. THOMAS. *Manlab : An interactive path-following and bifurcation analysis software*.
- [KCV14] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems ». In : *Journal of Sound and Vibration* 333.12 (2014), p. 2554–2567.
- [SR97] L. F. SHAMPINE et M. W. REICHELT. « The Matlab ODE suite ». In : *SIAM journal on scientific computing* 18.1 (1997), p. 1–22.
- [Vig+17] P. VIGUÉ, C. VERGEZ, S. KARKAR et B. COCHELIN. « Regularized friction and continuation : Comparison with Coulomb's law ». In : *Journal of Sound and Vibration* 389 (2017), p. 350–363.



## Chapitre 4

# Vers un modèle de corde plus réaliste

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>97</b>
<b>4.2</b>	<b>Amortissement visqueux</b>	<b>100</b>
4.2.1	Continuation selon la vitesse d'archet	100
4.2.2	Continuation selon la force normale	108
<b>4.3</b>	<b>Amortissement modal constant</b>	<b>113</b>
<b>4.4</b>	<b>Raideur de la corde</b>	<b>113</b>
<b>4.5</b>	<b>Extension de la base modale</b>	<b>115</b>
4.5.1	Combien de modes ?	115
4.5.2	Modification de l'équilibrage harmonique	117
4.5.3	Exploitation des résultats	118

---

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 2 nous avons réalisé la continuation des solutions périodiques obtenues sur le modèle de corde frottée dont la base modale est tronquée à un seul mode. À présent, la base modale est étendue : on conserve les deux premiers modes. Le système différentiel s'écrit :

$$\text{pour } k = 1, 2, \quad \ddot{q}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \frac{F_N}{m_1} \mu_n(V_r) \sin\left(\frac{k\pi x_b}{L}\right) \quad (4.1)$$

$$\text{où } V_r = \sum_{j=1}^2 \sin\left(\frac{j\pi x_b}{L}\right) \dot{q}_j - V_b \quad (4.2)$$

Dans l'implémentation, nous avons pris une écriture adimensionnée : en posant

$$Q_k^0 := \frac{F_N \mu_s}{m_0 \omega_k^2}, \quad P_k^0 := \omega_k Q_k^0 = \frac{F_N \mu_s}{m_0 \omega_k} \quad (4.3)$$

qui ont respectivement la dimension d'une longueur et d'une vitesse, puis les inconnues :

$$Q_k := \frac{q_k}{Q_k^0}, \quad P_k := \frac{\dot{q}_k}{P_k^0}, \quad (4.4)$$

le système (4.1)-(4.2) se réécrit à l'ordre 1 :

$$\text{pour } k = 1, 2, \quad \dot{Q}_k = \omega_k P_k \quad (4.5)$$

$$\dot{P}_k = -2\zeta_k \omega_k P_k - \omega_k Q_k + \frac{F_N}{m_1 P_k^0} \mu_n(V_r) \sin\left(\frac{k\pi x_b}{L}\right) \quad (4.6)$$

$$\text{où } V_r = \sum_{j=1}^2 \sin\left(\frac{j\pi x_b}{L}\right) P_j^0 P_j - V_b \quad (4.7)$$

Pour la continuation selon la vitesse d'archet ( $\lambda = V_b$ ) la reformulation quadratique s'écrit :

$$0 = -\lambda + \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right) P_1^0 P_1 + \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right) P_2^0 P_2 - V_r + 0 \quad (4.8a)$$

$$0 = \frac{\varepsilon}{n^2} + 0 + V_r^2 - R^2 \quad (4.8b)$$

$$0 = \frac{1}{n^2} - S + V_r^2 \quad (4.8c)$$

$$0 = 0 + 2\frac{\alpha}{n} V_r + \mu_n S + \mu_d V_r R \quad (4.8d)$$

$$\dot{Q}_1 = 0 + \omega_1 P_1 + 0 \quad (4.8e)$$

$$\dot{Q}_2 = 0 + \omega_2 P_2 + 0 \quad (4.8f)$$

$$\dot{P}_1 = 0 - 2\zeta_1 \omega_1 P_1 - \omega_1 Q_1 + \frac{F_N}{m_1 P_1^0} \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right) \mu_n + 0 \quad (4.8g)$$

$$\dot{P}_2 = 0 - 2\zeta_2 \omega_2 P_2 - \omega_2 Q_2 + \frac{F_N}{m_1 P_2^0} \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right) \mu_n + 0 \quad (4.8h)$$

Des calculs similaires au cas à un seul mode (section 2.B, p. 75) donnent l'expression de la Jacobienne du système différentiel (4.8e)-(4.8h). À l'aide des trois variables auxiliaires

$$U_R = \frac{V_r^2}{R}, \quad U_S = \frac{1}{S}, \quad U_M = V_r \mu_n \quad (4.9)$$

la Jacobienne s'écrit comme somme des matrices constante, linéaire et quadratique suivantes :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & -2\zeta_1 \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & -2\zeta_2 \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$J_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right)^2 & \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right) \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right) \frac{\omega_2}{\omega_1} & \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right)^2 \end{pmatrix} \left(-\frac{2F_N \alpha}{m_1 n} U_S\right) \quad (4.11)$$

$$J_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right)^2 & \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right) \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi x_b}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right) \frac{\omega_2}{\omega_1} & \sin\left(\frac{2\pi x_b}{L}\right)^2 \end{pmatrix} \left(-\frac{F_N U_S}{m_1}\right) (\mu_d R + \mu_d U_R + 2U_M) \quad (4.12)$$

Plusieurs cas vont être étudiés pour déterminer l'influence de paramètres du modèle :

## 4.2. Amortissement visqueux

- dans la section 4.2, l'amortissement retenu dérive d'un terme d'amortissement visqueux dans l'EDP initiale (ce qui mène à un amortissement du second mode environ moitié de celui du premier mode) ;
- dans la section 4.3, l'amortissement modal est constant ( $\zeta_2 = \zeta_1$ )
- dans la section 4.4, la raideur de la corde est augmentée.

Puis on aborde dans la section 4.5 le problème plus général d'un nombre de modes plus élevé. À partir de quel nombre de modes la description de la corde pourrait atteindre un certain réalisme ? Face à l'augmentation de la taille des systèmes différentiels, quelles modifications des méthodes numériques seraient à envisager pour conserver des temps de calcul raisonnables ? À quels obstacles pratiques l'approche par continuation fait-elle face ?

Le type de mouvement est défini à l'aide du même critère qu'au chapitre 2 : soit  $V_n$  tel que  $\mu_n(V_n) = \max_v \mu_n(v)$ , alors

$$|V_r(t)| \leq |V_n| \Rightarrow \text{ADHÉRENCE}, \quad |V_r(t)| > |V_n| \Rightarrow \text{GLISSEMENT} \quad (4.13)$$

Par la suite, le long d'une branche de solution, la solution est reconstruite dans le domaine temporel, puis elle est classée selon le nombre d'intervalles d'adhérence par période : zéro (solution en glissement), un (régime de Helmholtz, ou *stick-slip*), deux (double stick-slip). Si la solution est de pulsation proche de la première (resp. seconde) pulsation  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$ ) elle sera qualifiée de premier (resp. deuxième) registre.

Enfin, l'amplitude crête-à-crête du déplacement  $y$  de la corde sous l'archet s'obtient après avoir reconstruit dans le domaine temporel

$$y(x_b, t) = \sum_{j=1}^2 \sin\left(\frac{j\pi x_b}{L}\right) Q_j^0 Q_j(t) \quad (4.14)$$

Paramètre de continuation	Amortissement	Force normale	Module d'Young
$\lambda = V_b$	$\zeta_2 \simeq 6.5 \times 10^{-4} \simeq 0.5\zeta_1$	$F_N = 5\text{N}$	$E = 5 \text{ GPa}$

(a) Paramètres utilisés pour la section 4.2.1.

Paramètre de continuation	Amortissement	Vitesse d'archet	Module d'Young
$\lambda = F_N$	$\zeta_2 \simeq 6.5 \times 10^{-4} \simeq 0.5\zeta_1$	$V_b = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$ $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$	$E = 5 \text{ GPa}$

(b) Paramètres utilisés pour la section 4.2.2.

Paramètre de continuation	Amortissement	Force normale	Module d'Young
$\lambda = V_b$	$\zeta_2 = \zeta_1 \simeq 1.3 \times 10^{-3}$	$F_N = 5\text{N}$	$E = 5 \text{ GPa}$

(c) Paramètres utilisés pour la section 4.3.

Paramètre de continuation	Amortissement	Force normale	Module d'Young
$\lambda = V_b$	$\zeta_2 = \zeta_1 \simeq 1.3 \times 10^{-3}$	$F_N = 5\text{N}$	$E = 20 \text{ GPa}$

(d) Paramètres utilisés pour la section 4.4.

TABLE 4.1 – Valeurs de paramètres pour les différents diagrammes de bifurcation, avec  $N = 2$  modes. Les valeurs non rappelées sont celles du modèle général (table 1.1, page 24).

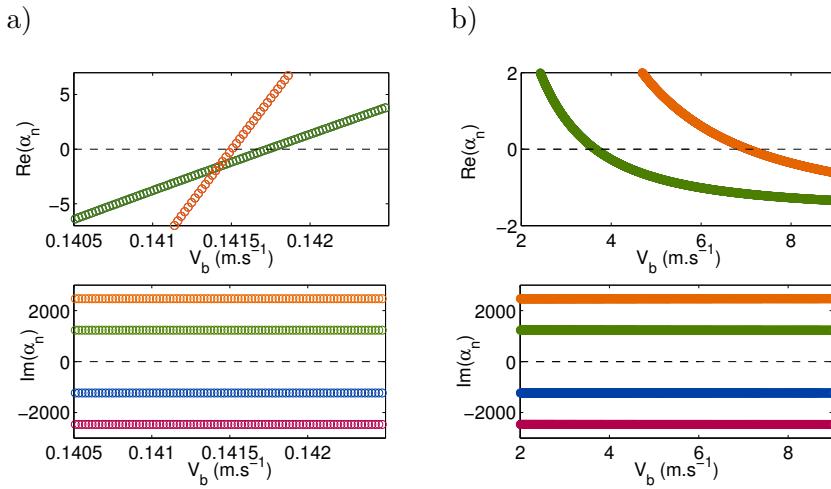


FIGURE 4.1 – Valeurs propres de la Jacobienne du système différentiel en fonction de  $\lambda = V_b$ .  
a) Zoom autour des deux premières bifurcations de Hopf. b) Zoom autour des deux dernières bifurcations de Hopf.

## 4.2 Amortissement visqueux

### 4.2.1 Continuation selon la vitesse d'archet

La figure 4.1 présente les valeurs propres de la Jacobienne du système différentiel, en fonction du paramètre de continuation. Il y a deux bifurcations de Hopf très proches :

- à  $V_b = 0.1415 \text{ m.s}^{-1}$ , de pulsation émergente proche de  $\omega_2$
- à  $V_b = 0.1417 \text{ m.s}^{-1}$ , de pulsation émergente proche de  $\omega_1$

puis deux bifurcations à plus grandes vitesses d'archet :

- à  $V_b = 3.65 \text{ m.s}^{-1}$ , de pulsation émergente proche de  $\omega_1$
- à  $V_b = 7.04 \text{ m.s}^{-1}$ , de pulsation émergente proche de  $\omega_2$ .

On peut donc réaliser la continuation de ces branches de premier et second registres issues de la branche stationnaire (fig. 4.2). La branche de premier registre est instable. La branche de second registre, stable à l'émergence en  $V_b = 0.1415$ , présente presque immédiatement une bifurcation de doublement de période et devient un régime de Helmholtz instable, jusqu'à une nouvelle bifurcation de doublement de période à  $V_b = 2.66 \text{ m.s}^{-1}$  où elle devient stable. Son amplitude croît jusqu'à la vitesse maximale de  $25.72 \text{ m.s}^{-1}$ . Après avoir passé ce point limite elle redevient instable et le mouvement devient un glissement seul. Une dernière bifurcation de doublement de période se présente sans changer la stabilité de la branche, à  $V_b = 10.04 \text{ m.s}^{-1}$ .

À présent, nous pouvons réaliser la continuation des branches issues des bifurcations de doublement de période. On obtient les branches présentées en fig. 4.3. Enfin, la figure 4.4 présente le diagramme de bifurcation obtenu en rassemblant les figures 4.2, 4.3. Après la description faite du point de vue de la continuation et des bifurcations, nous donnons d'autres descriptions pour éclairer la large famille de solutions périodiques obtenues.

Le domaine d'existence et l'amplitude des branches de solution évoluent par rapport au cas à un mode (fig. 2.4, page 67). La vitesse maximale d'archet permettant l'existence de solutions périodiques augmente de  $10.25 \text{ m.s}^{-1}$  à  $25.72 \text{ m.s}^{-1}$ . L'amplitude crête-à-crête du déplacement augmente de  $1.65 \times 10^{-2} \text{ m}$  à  $2.26 \times 10^{-2} \text{ m}$ .

La description peut être axée sur les registres présents. Le premier registre comporte deux branches à petites vitesses d'archet, et une à grande vitesse. À petite vitesse d'archet, une

#### 4.2. Amortissement visqueux

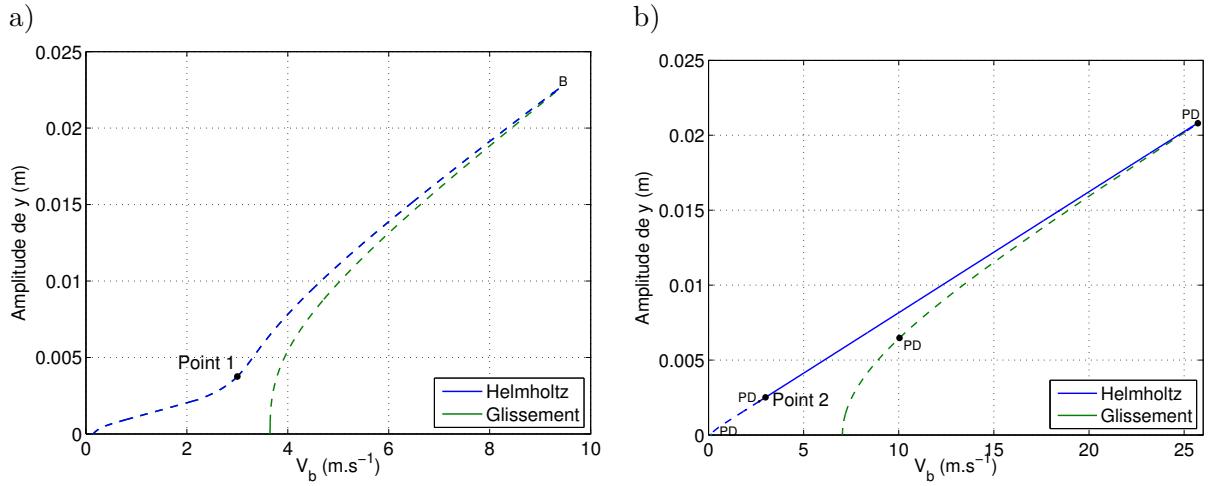


FIGURE 4.2 – Branches issue de la branche stationnaire. Trait plein : solution stable, tirets : solution instable. Bleu : régime de Helmholtz, vert : glissement. B : bifurcation où un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité en +1, PD : bifurcation *period doubling* (doublement de période). Les points 1 et 2 seront analysés en détail en fig 4.6. a) Branche de premier registre. b) Branche de second registre.

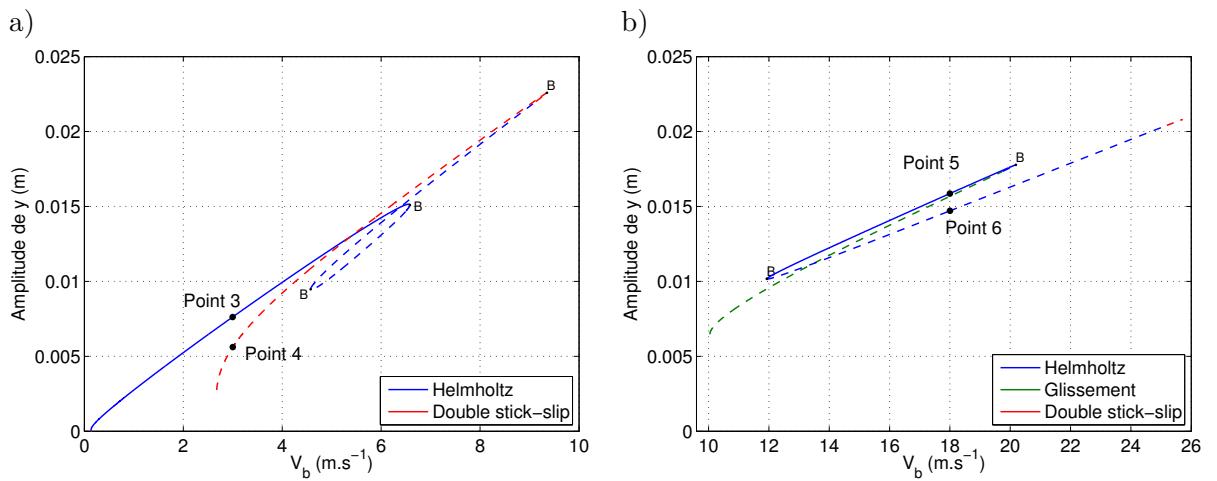
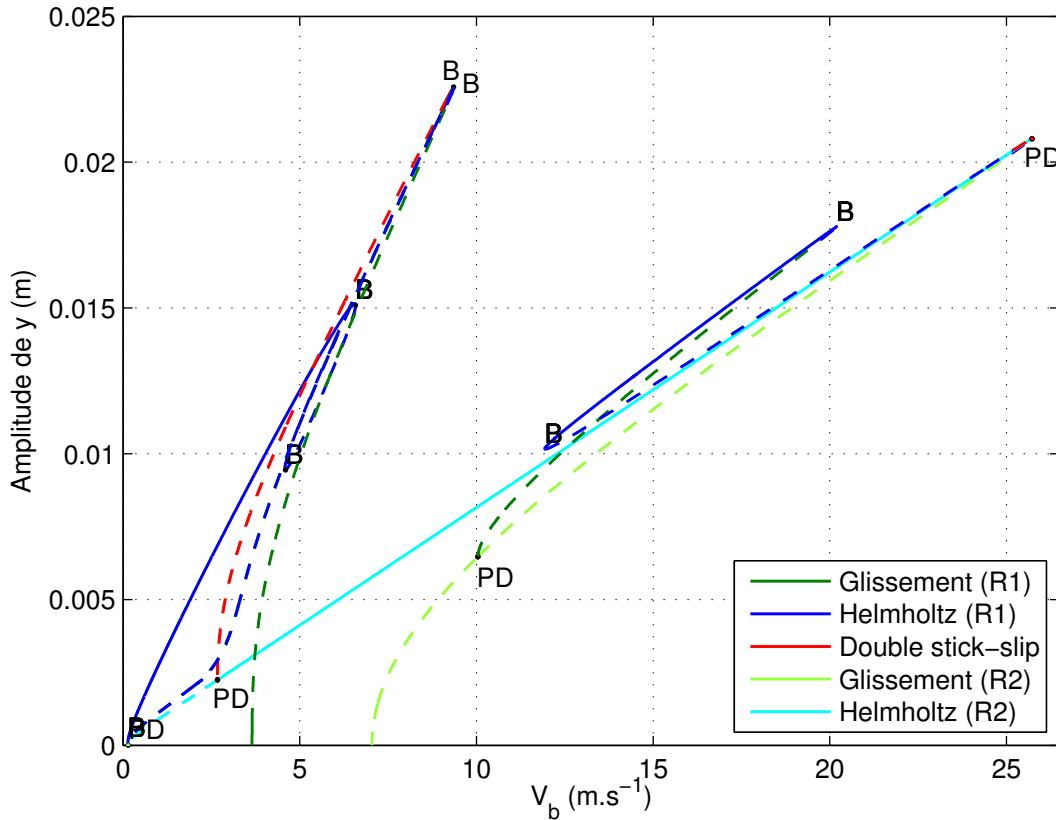
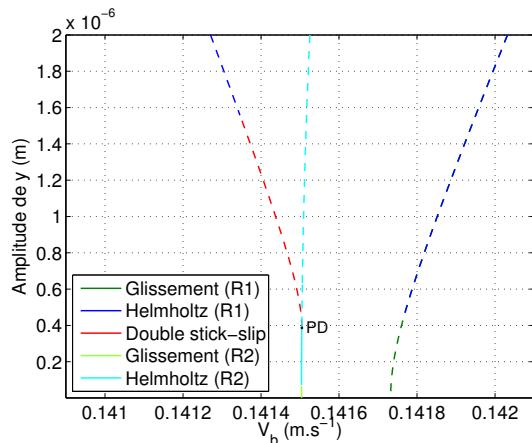


FIGURE 4.3 – Branches de premier registre issues des bifurcations de doublement de période (fig. 4.2 b). Bleu : régime de Helmholtz, vert : glissement, rouge : double stick-slip. B : bifurcation où un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité en +1 (ici : bifurcations de cycle limite). Les points 3 à 6 seront analysés en détail en fig 4.6. a) Branche de premier registre aux petites vitesses d'archet. b) Branche de premier registre aux grandes vitesses d'archet.

a)



b)



c)

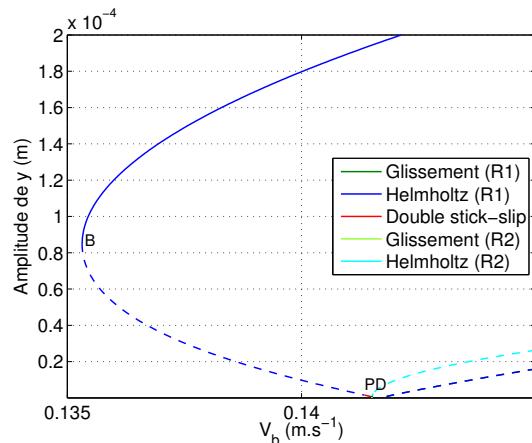


FIGURE 4.4 – Diagramme de bifurcation, rassemblant les 4 branches présentées en fig. 4.2, 4.3. Glissement en vert ; Registre 1 (R1) en vert foncé, Registre 2 (R2) en vert clair. Régime de Helmholtz en bleu (R1 en bleu foncé, R2 en bleu clair). Double stick-slip en rouge. B : bifurcation où un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité en +1, PD : bifurcation *period doubling* (doublement de période). a) Diagramme complet. b-c) Zooms autour des deux premières bifurcations de Hopf.

## 4.2. Amortissement visqueux

branche, d'amplitude maximale, contient un régime de Helmholtz stable ; une autre est instable. La branche du second registre est issue du régime stationnaire par deux bifurcations de Hopf (directe à  $V_b = 0.1415 \text{ m.s}^{-1}$ , inverse à  $V_b = 7.04 \text{ m.s}^{-1}$ ). Au-delà de la bifurcation de doublement de période à  $V_b = 2.66 \text{ m.s}^{-1}$ , elle devient stable. Elle présente deux bifurcations de doublement de période (à  $V_b = 10.04 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_b = 25.72 \text{ m.s}^{-1}$ ) qui mènent à la troisième branche de premier registre.

Une description centrée sur les régimes stables donne une figure restreinte à trois portions de branches (fig. 4.5). Elle met en valeur un résultat important de ce modèle simple : pour la force normale retenue et pour certaines vitesses d'archet (pour  $V_b$  entre  $2.66$  et  $6.58 \text{ m.s}^{-1}$ , puis pour  $V_b$  entre  $12$  et  $20 \text{ m.s}^{-1}$ ), un régime de Helmholtz stable peut être obtenu au premier ou au second registre. C'est en accord avec l'expérience du musicien sur une véritable corde de violon : après avoir effleuré la corde avec un doigt au milieu tout en la frottant de l'archet pour obtenir le son harmonique (deuxième registre), le régime d'oscillation obtenu peut persister lorsqu'on soulève le doigt en continuant à frotter la corde<sup>1</sup>. Cette coexistence des deux régimes stables indique une dépendance aux conditions initiales que le diagramme de bifurcation ne peut pas élucider seul : l'ensemble des conditions initiales permettant de converger vers ces régimes stables n'est pas déterminé<sup>2</sup>. La question de l'accès à ces régimes est aussi ouverte d'un point de vue musical : les types de gestes pouvant favoriser leur obtention restent à décrire.

Si seules les solutions stables sont commentées, cela revient à décrire d'un point de vue plus expérimental (si on tire des conditions initiales au hasard pour une intégration numérique par exemple) les seules solutions périodiques vers lesquelles le système va converger. Un raccourci consiste à dire que ce sont donc les seules solutions physiques, ou observables, ce qui est imprécis. En effet, si l'on choisit des conditions initiales dans le voisinage d'un des cycles instables, la solution va s'écartez de ce cycle, au premier ordre, comme la perturbation amplifiée que décrit la théorie de Floquet. Tant que l'on reste dans un voisinage du cycle instable, une perturbation bien choisie a une croissance menée par l'exposant de Floquet de plus grande partie réelle. Il est donc possible, si cette partie réelle est assez proche de zéro, de voir une croissance initiale assez lente. On conçoit donc que dix ou vingt pseudo-périodes dans un petit voisinage du cycle instable sont possibles, avant que la solution ne converge vers une solution stable. Le régime transitoire peut ainsi occuper un temps important. Une représentation<sup>3</sup> plus nuancée de la stabilité des solutions pourrait ainsi être préférée, donnant pour la branche de solution une teinte claire ou foncée suivant la partie réelle du plus grand exposant de Floquet.

Musicalement, un transitoire de vingt pseudo-périodes correspond à une attaque impropres, trop longue, que les musiciens essaient d'éviter. Une piste d'explication de la difficulté pour l'instrumentiste à produire des transitoires brefs serait peut-être le grand nombre de solutions instables, parmi lesquelles des solutions « faiblement instables ». Nous donnons plus bas des exemples de telles solutions. La discussion est menée ici avec un modèle rudimentaire de corde ; nous conjecturons que le nombre de solutions, notamment instables, augmente avec l'extension de la base modale.

Des exemples de régimes observés sont donnés en fig. 4.6. Pour chaque point issu du diagramme, on dispose initialement des coefficients de Fourier des différentes variables du système quadratique (4.8). La reconstruction temporelle des variables  $y$  et  $V_r$  permet de tracer des diagrammes de phase. On peut aussi observer pour la variable  $V_r$  la répartition d'énergie selon le rang des harmoniques en calculant

1. Lien vers une vidéo de cette expérience : [http://www.lma.cnrs-mrs.fr/media/theses/vigue/harmonic\\_violin.mp4](http://www.lma.cnrs-mrs.fr/media/theses/vigue/harmonic_violin.mp4)

2. Hormis évidemment une initialisation sur la solution en question.

3. Inspirée des diagrammes de Guettler, qui représentent la durée des régimes transitoires.

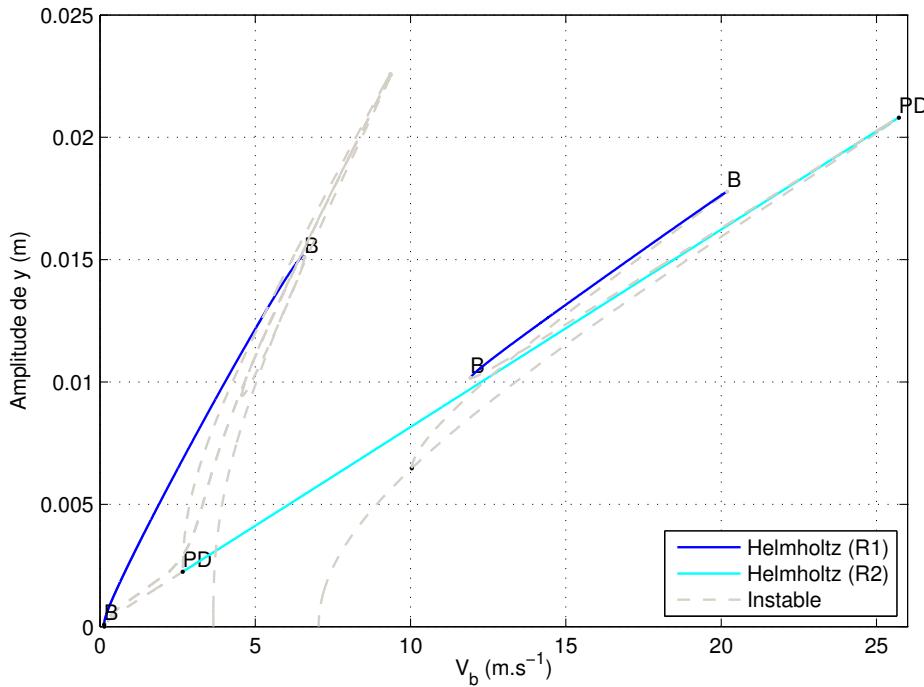


FIGURE 4.5 – Diagramme de bifurcation de la fig. 4.4, en conservant les solutions stables en couleur, solutions instables en tirets gris.

$$V_{c,k}^2 + V_{s,k}^2, \quad \text{pour } V_r(t) = V_0 + \sum_{k=1}^H V_{c,k} \cos(k\omega t) + V_{s,k} \sin(k\omega t) \quad (4.15)$$

Les points 1 à 4 sont les quatre différentes solutions à  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ . Les points 2 et 3 sont des régimes de Helmholtz stables, respectivement de second et premier registre. Le point 1 est un régime de Helmholtz de premier registre, instable. Son diagramme de phase diffère de celui des points 2 et 3 (adhérence prématûrement interrompue) ; l'énergie du deuxième harmonique est supérieure à celle du premier. Le point 4 est un double stick-slip, de premier registre, instable.

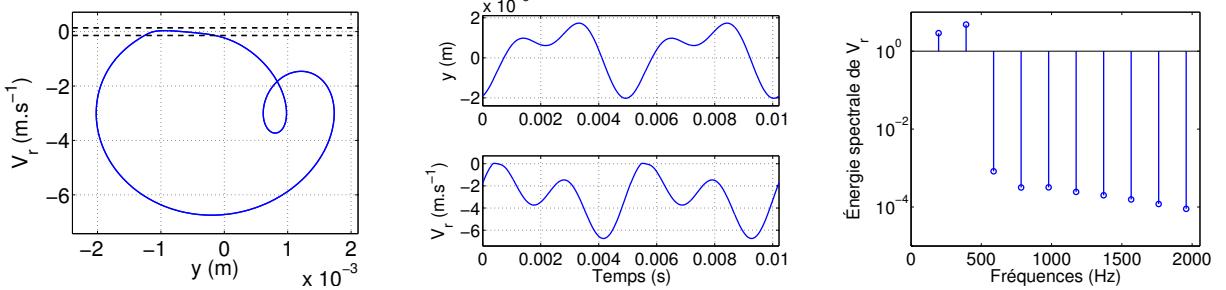
Les points 5 et 6 sont situés sur la branche de premier registre issue des bifurcations de doublement de période aux grandes vitesses d'archet. Le point 5 est stable, le point 6 est instable. Ils sont tous deux obtenus à  $V_b = 18 \text{ m.s}^{-1}$ , et ce sont des régimes de Helmholtz selon la définition 4.13. Cependant, leurs diagrammes diffèrent dans le plan de phase du régime de Helmholtz classique (point 3), le point 6 formant quasiment un double stick-slip. L'énergie spectrale pour le point 6 montre aussi que les coefficients pairs sont prépondérants sur les impairs. Cette dominance des coefficients de Fourier pairs est particulièrement marquée au voisinage des bifurcations de doublement de période (fig. 4.7).

Les solutions des points 1 et 4 ont été analysées comme instables car ayant (au moins) un exposant de Floquet de partie réelle positive. Cependant, même les plus grandes parties réelles positives s'avèrent être proches de zéro ; les multiplicateurs de Floquet correspondants sont particulièrement proches de 1 (respectivement, 1.05 et 1.005). La théorie de Floquet prévoit ainsi qu'une perturbation choisie pour déstabiliser le cycle périodique<sup>4</sup> n'est que faiblement amplifiée

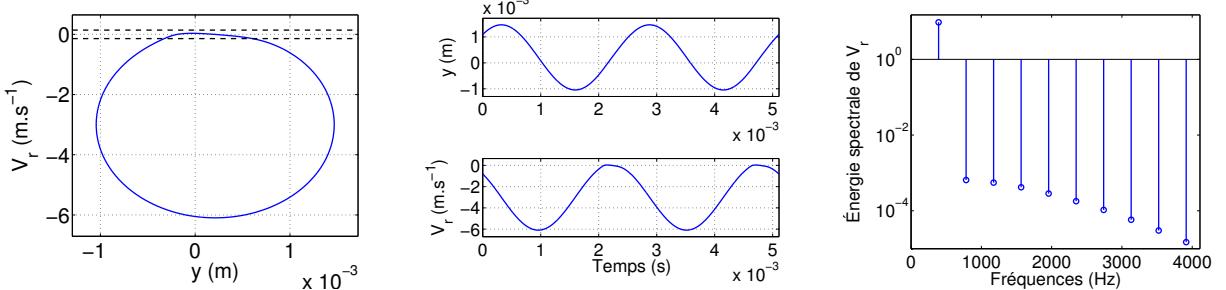
4. Dans la direction d'un vecteur propre associé à un exposant de Floquet de partie réelle positive.

#### 4.2. Amortissement visqueux

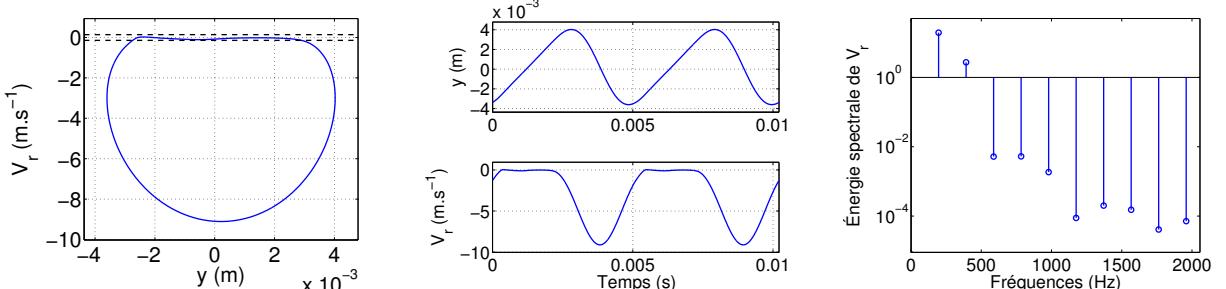
Point 1



Point 2



Point 3



Point 4

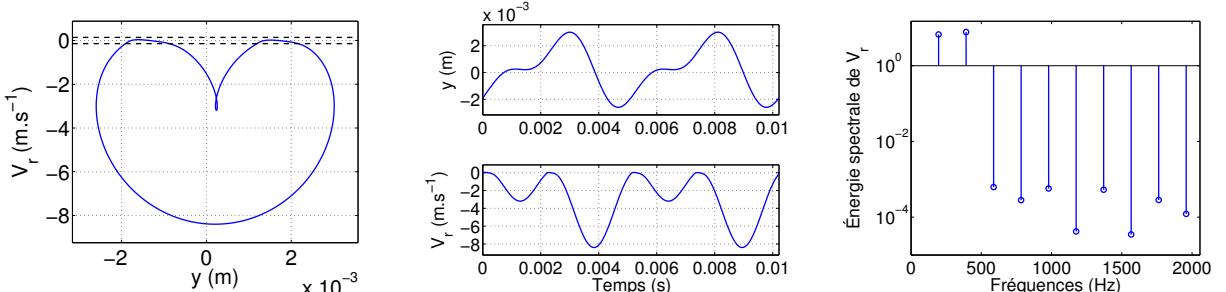
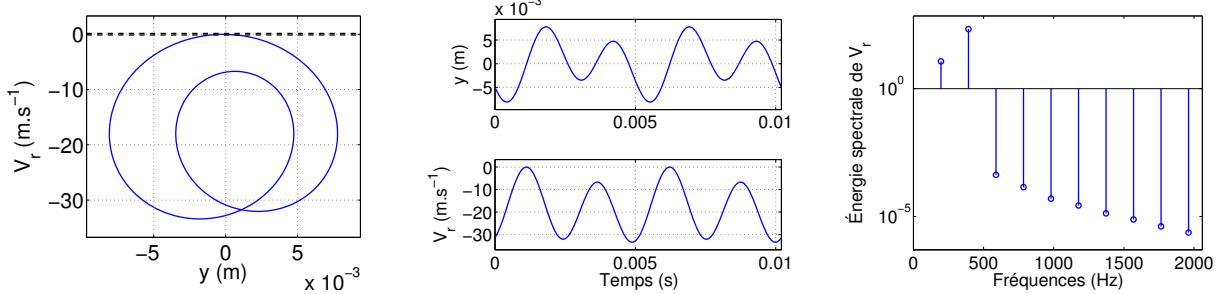


FIGURE 4.6 – Pour les points 1 à 4 (cf. fig. 4.2, 4.3), de gauche à droite : diagrammes ( $y, V_r$ ) (trait plein, bleu), avec les limites d'adhérence  $\pm V_n$  (def. (4.13)) (tirets, noir) ; deux périodes de  $y$  et de  $V_r$  ; énergie spectrale de  $V_r$  (def. (4.15)).

Point 5



Point 6

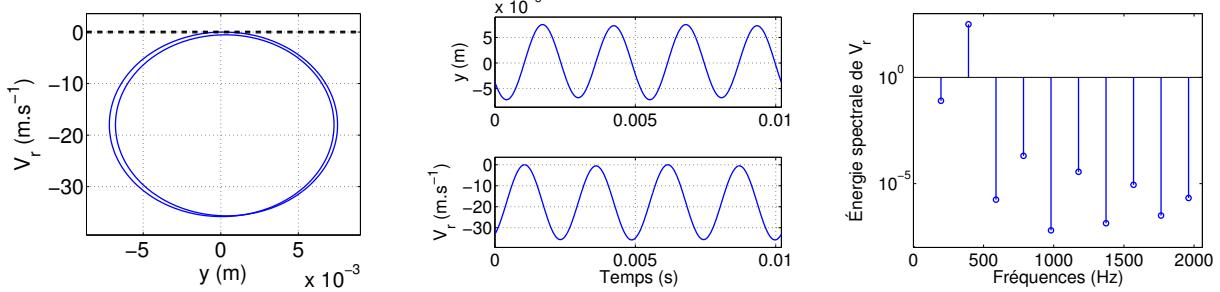


FIGURE 4.6 (suite) – Points 5 et 6.

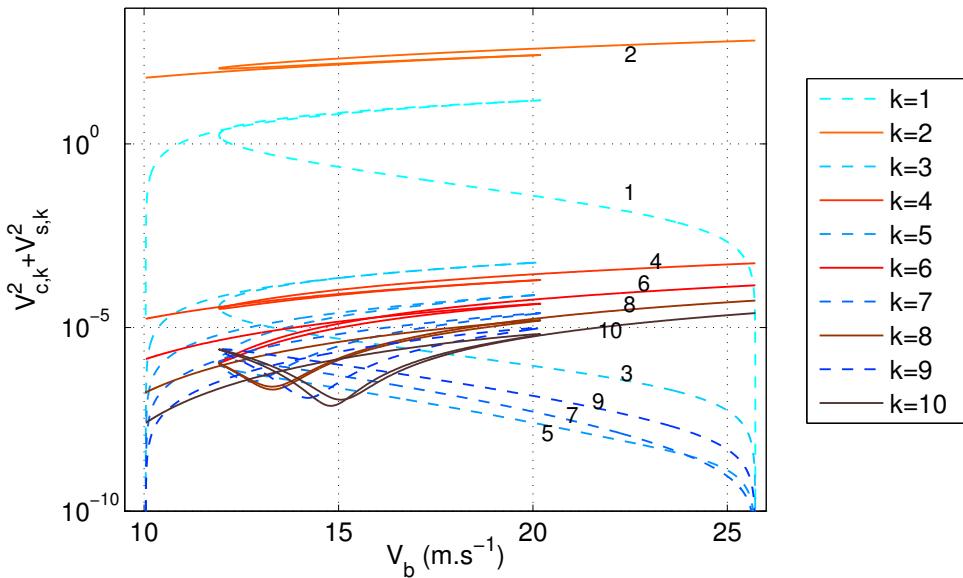


FIGURE 4.7 – Énergie spectrale, aux rangs pairs (trait plein, de l'orange au brun) et impairs (tirets, du bleu clair au foncé), le long de la branche de premier registre à grande vitesse d'archet. En ordonnée, pour  $k$  entre 1 et 10, énergie spectrale au rang  $k$  de la variable  $V_r$  (def. (4.15)). Aux deux extrémités de la branche, qui sont des bifurcations vers le second registre, les coefficients impairs deviennent négligeables.

#### 4.2. Amortissement visqueux

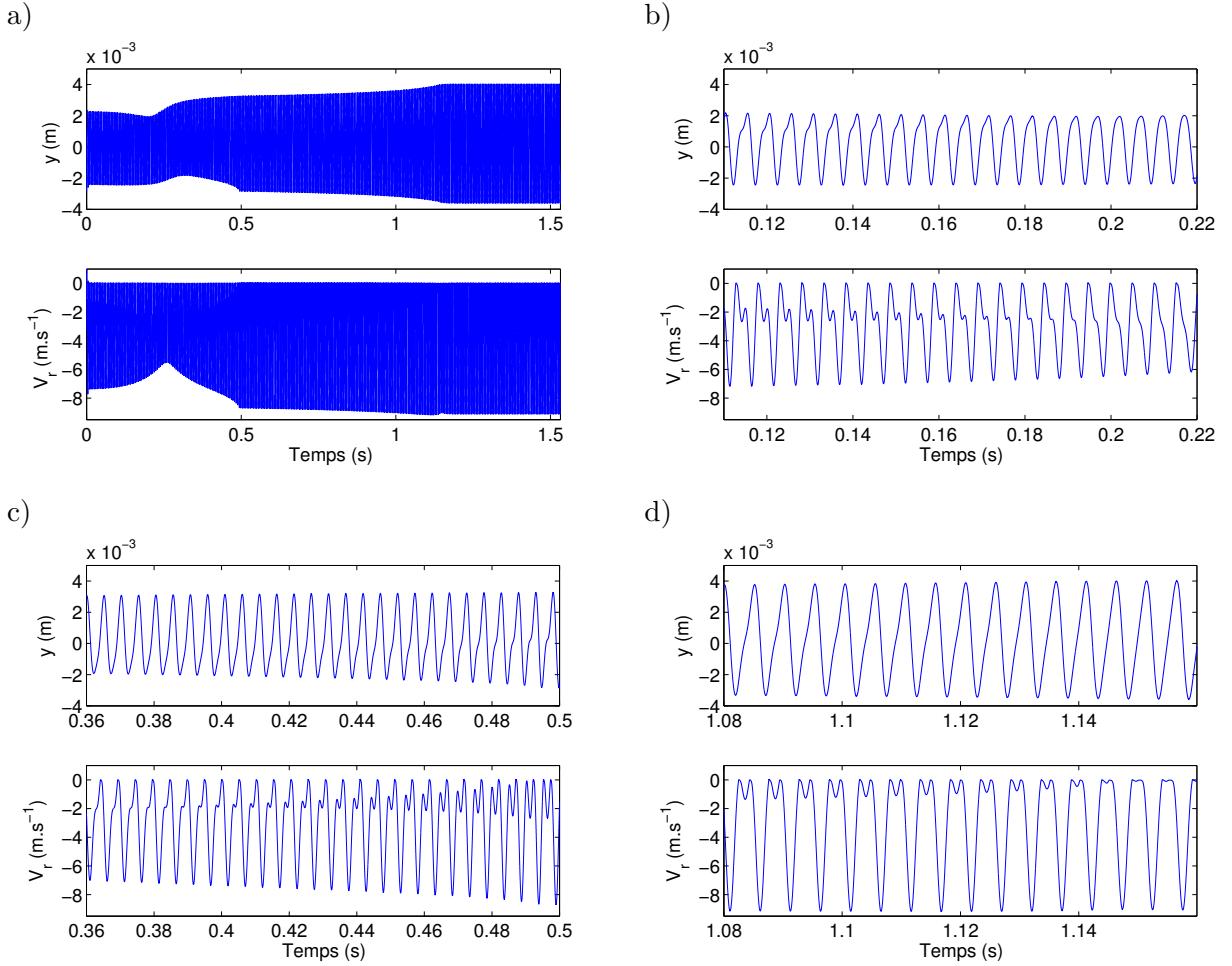


FIGURE 4.8 – Intégration numérique pour des conditions initiales proches du point 1, tracés du déplacement  $y$  et de la vitesse relative  $V_r$ . a) Durée totale (environ 1.5 s). b) Zoom : disparition du régime proche du point 1. c) Zoom : apparition d'un régime proche du point 4. d) Zoom : convergence vers le régime stable du point 3.

au bout d'une période. En prenant des conditions initiales dans le voisinage<sup>5</sup> du point 1, une intégration numérique<sup>6</sup> sur une durée d'environ 1.5 s (soit 300 périodes pour la solution du point 1) donne même un résultat surprenant, représenté en fig. 4.8 : la solution s'approche d'abord (en une centaine de pseudo-périodes) de la solution du point 4, et persiste dans son voisinage pendant un temps long (d'une centaine de pseudo-périodes), avant de converger vers la solution (stable) du point 3 (régime de Helmholtz). La solution instable du point 4, dont le multiplicateur de Floquet le plus grand est remarquablement proche de l'unité, a ainsi semblé être une solution attractive (stable) pendant un temps assez long.

Nous commentons à présent la période des solutions stables. À présent que l'on se rapproche de modèles musicaux, il est intéressant de représenter l'écart de période non plus en terme de

5. Nous avons pris le vecteur  $1.5 \cdot [Q_1(0), Q_2(0), P_1(0), P_2(0)]$ . On rappelle que les points 1 à 4 sont les quatre différentes solutions à  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ .

6. À l'aide du programme **ode15s**. Par précautions les tolérances d'erreur **RelTol**, **AbsTol** ont été fixées à  $10^{-12}$ .

pulsation (absolue, en rad.s<sup>-1</sup>, ou relative en la divisant par  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ ), mais plutôt en terme de fréquence relative, en utilisant comme unité le cent. Un cent est le centième du demi-ton du tempérament égal ; comme une octave contient 12 demi-tons (soit 1200 cents) et qu'elle correspond à un doublement de fréquence, l'écart fréquentiel en cents d'une solution du premier registre, de pulsation  $\omega$ , par rapport à la fréquence de résonance  $f_1 := 2\pi\omega_1$  est défini par

$$\ln\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \frac{1200}{\ln(2)} \quad (4.16)$$

et de même pour le second registre et  $f_2 = 2\pi\omega_2$ . La figure 4.9 montre les écarts en cents pour le diagramme de bifurcation obtenu. Le diagramme est particulièrement enchevêtré lorsque toutes les solutions, stables et instables, sont tracées. Il est donc délaissé au profit d'un tracé restreint aux trois portions stables identifiées auparavant et dont l'amplitude a été tracée en fig. 4.5. Pour la solution de premier registre à petite vitesse d'archet, on constate que la fréquence connaît un creux de 140 cents (plus d'un demi-ton) près de son émergence à petite vitesse d'archet, ce qui semble plus important que ce qui est observé en pratique sur un violon. Cependant, sur une véritable corde de violon, jouer avec une vitesse d'archet trop faible (la force normale étant plutôt haute) engendre couramment des sons de grattement (zone *rasure* du diagramme de Schelleng). La comparaison avec l'expérience musicale est donc délicate sur le modèle encore très réduit considéré ici. Dans le cas à un seul mode, cette chute de la fréquence à petite vitesse d'archet était moins importante (40 cents au lieu de 140), ce que nous n'avons pas pu justifier.

Les deux autres branches (premier registre à grande vitesse d'archet, second registre) sont bien moins affectées. Pour ces branches, l'écart en fréquence reste inférieur à 5 cents, ce qui est considéré comme « assez juste »<sup>7</sup>.

#### 4.2.2 Continuation selon la force normale

Les solutions obtenues par continuation selon un paramètre peuvent être utilisées comme point de départ pour une continuation selon un autre paramètre. On obtient ainsi une cartographie plus complète des régimes possibles et de leurs caractéristiques. Ainsi, dans cette section nous retenons successivement deux vitesses d'archet, tout d'abord  $V_b = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$  puis  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ . Si l'on choisit en même temps d'imposer la force normale  $F_N = 5 \text{ N}$ , nous connaissons les solutions présentes grâce aux diagrammes précédents. Puis le paramètre  $F_N$  devient paramètre de bifurcation, et ces solutions sont à présent continuées.

Le diagramme obtenu (fig. 4.10) montre que l'amplitude du déplacement augmente avec la force normale. La branche de premier registre instable et celle de second registre sont issues du régime stationnaire par bifurcation de Hopf. Celle de second registre présente une bifurcation de doublement de période, menant à la branche de premier registre stable. Le diagramme a été calculé avec  $H = 150$  harmoniques, mais la même difficulté que pour un mode se pose pour calculer les solutions lorsque  $F_N$  devient plus grande : le nombre d'harmoniques doit être augmenté pour assurer une bonne précision de la solution calculée (notamment de sa stabilité).

Un effet observé pour un seul mode était l'accroissement de la période (fig. 2.12, p. 73), ou la diminution de la fréquence, s'expliquant simplement par un placage contre le tapis (ou l'archet) d'autant plus long que la force normale était importante. La période pouvait devenir arbitrairement longue (et la fréquence arbitrairement proche de 0) pourvu que la force normale soit assez importante. Pour une véritable corde frottée, l'effet expérimental attendu est le *pitch flattening*, dont l'importance est certes audible mais bien moins marquée : pour des valeurs de paramètres compatibles avec le régime de Helmholtz, l'abaissement mesuré dans [Sch09] est de

7. Deux notes à un écart de 5 cents peuvent cependant produire un battement très audible si elles sont jouées ensemble. La considération de justesse n'est valable ici qu'en tons purs, joués isolés.

#### 4.2. Amortissement visqueux

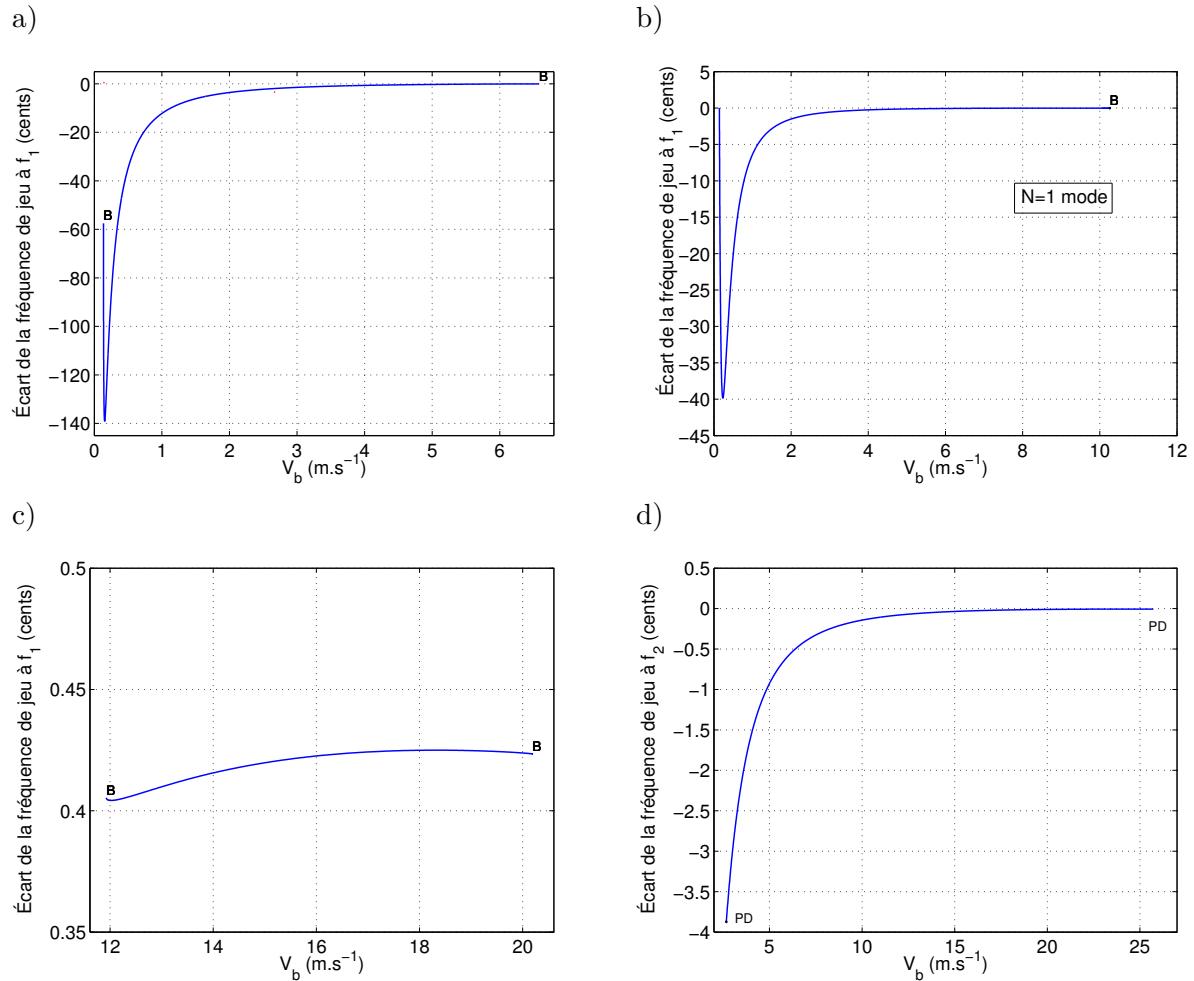


FIGURE 4.9 – Écart en cents de la fréquence de la solution de Helmholtz stable de premier (resp. second) registre par rapport à la première (resp. seconde) fréquence de résonance  $f_1$  (resp.  $f_2$ ). a) Registre 1, aux petites vitesses d'archet. b) Comparaison avec le cas à  $N = 1$  mode (version en cents de la figure 2.4 b, p. 67). c) Registre 1, aux grandes vitesses d'archet. d) Second registre.

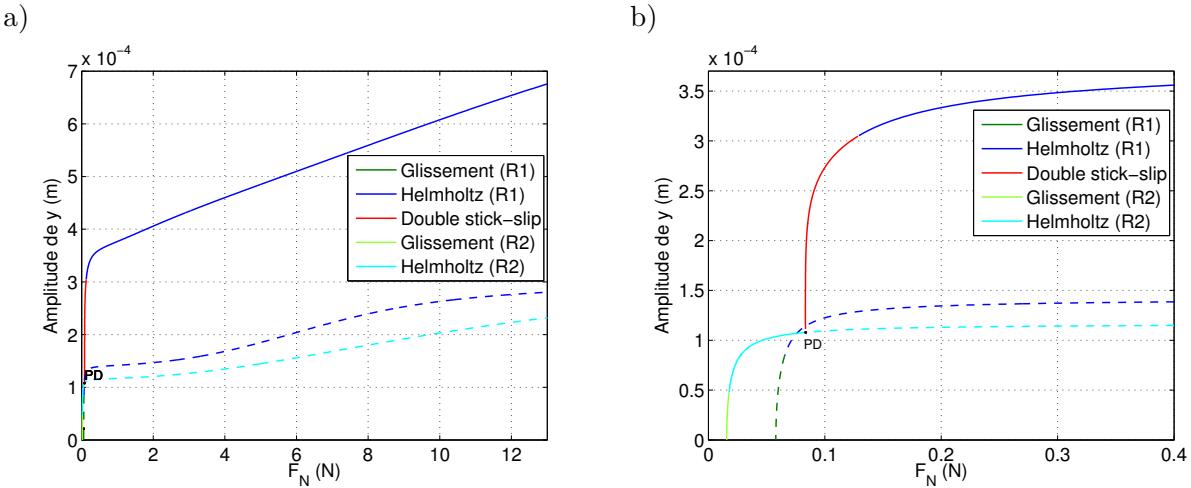


FIGURE 4.10 – Diagramme de bifurcation : amplitude crête-à-crête du déplacement  $y$  en fonction de  $F_N$ , pour  $V_b = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$ . Trait plein : solution stable, tirets : solution instable. Glissement en vert ; Registre 1 (R1) en vert foncé, Registre 2 (R2) en vert clair. Régime de Helmholtz en bleu (R1 en bleu foncé, R2 en bleu clair). Double stick-slip en rouge. PD : bifurcation de doublement de période. a) Vue générale. b) Zoom sur les bifurcations de Hopf.

25 à 75 cents, suivant la vitesse d'archet employée. Le pitch flattening est plus important pour des vitesses d'archet plus élevées.

Pour le modèle utilisé ici (fig. 4.11), l'abaissement en fréquence reste similaire jusqu'à  $F_N = 20$  N (environ 500 cents). Au-delà, dans le cas à un mode, la fréquence continue à décroître, quasi-linéairement, et en s'inspirant du modèle avec friction de Coulomb nous conjecturons qu'elle tendrait vers 0. On constate que ceci change avec l'ajout du deuxième mode de corde : la fréquence du régime de Helmholtz ne décroît plus jusqu'à 0 mais jusqu'à une valeur asymptotique non nulle, avec un écart d'environ -734 cents à  $F_N = 70$  N.

Si l'on choisit désormais  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ , à  $F_N = 5 \text{ N}$  le diagramme comporte quatre solutions possibles (les exemples de solutions 1 à 4) : deux régimes de Helmholtz stables (registres 1 et 2), deux solutions instables de registre 1 (Helmholtz, double stick-slip). Le diagramme d'amplitude de  $y$  en fonction de  $F_N$  est représenté en fig. 4.12. On note qu'il se forme une brève nouvelle branche de solution, de premier registre, issue du second registre par bifurcations de doublement de période en  $F_N = 0.26 \text{ N}$  et  $F_N = 0.45 \text{ N}$ . Les diagrammes obtenus pour  $V_b = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$  présentent des similitudes à grande force normale, avec le même type de solutions, de stabilité identiques, mais une allure différente pour  $F_N < 7 \text{ N}$ . Dans le deuxième cas ( $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ ), les bifurcations (de Hopf ou de doublement de période) deviennent inverses, et l'allure des branches de solutions périodiques émergentes est donc fortement affectée. La pulsation des solutions décroît à nouveau avec la force normale, mais moins rapidement ; un calcul spécifique avec  $H = 450$  harmoniques (fig. 4.13), pour la solution de Helmholtz de premier registre stable, permet d'aller jusqu'à des forces normales importantes. On trouve que pour le système étudié ici, le *pitch flattening* est plus rapide (soit, sur un même intervalle de force normale, plus important) à une faible vitesse d'archet qu'à une vitesse d'archet moyenne (contrairement aux résultats expérimentaux cités plus haut).

#### 4.2. Amortissement visqueux

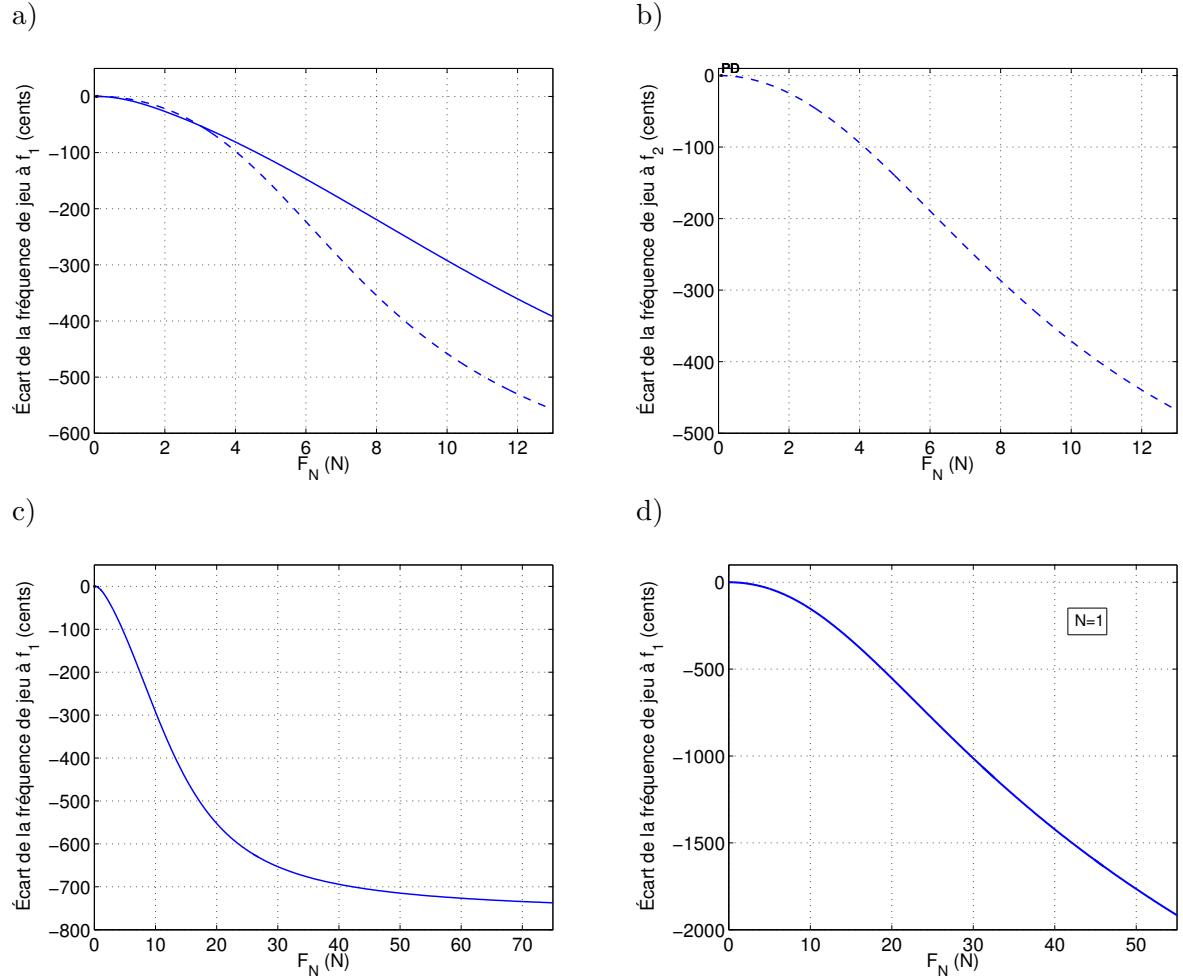


FIGURE 4.11 – Diagramme de bifurcation : écarts en cents en fonction de  $F_N$ , pour  $V_b = 0.2 \text{ m.s}^{-1}$ . a) Solutions de premier registre. b) Solution de second registre. c) Nouveau calcul de continuation de la branche de premier registre stable, avec  $H = 450$  harmoniques. d) Cas à  $N = 1$  mode.

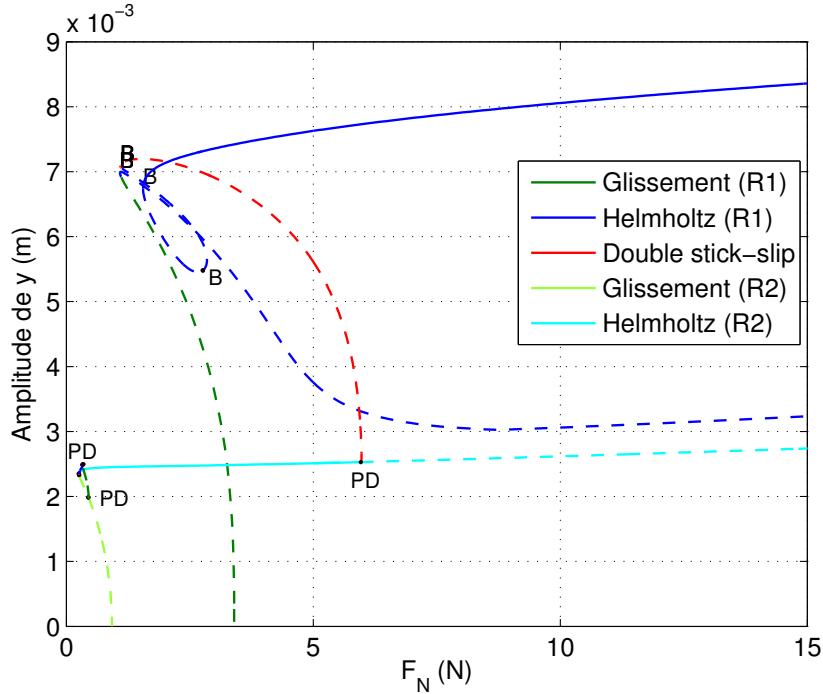


FIGURE 4.12 – Diagramme de bifurcation : amplitude crête-à-crête du déplacement  $y$  en fonction de  $F_N$ , pour  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ . Glissement en vert ; Registre 1 (R1) en vert foncé, Registre 2 (R2) en vert clair. Régime de Helmholtz en bleu (R1 en bleu foncé, R2 en bleu clair). Double stick-slip en rouge. PD : bifurcation de doublement de période, B : bifurcation de cycle limite.

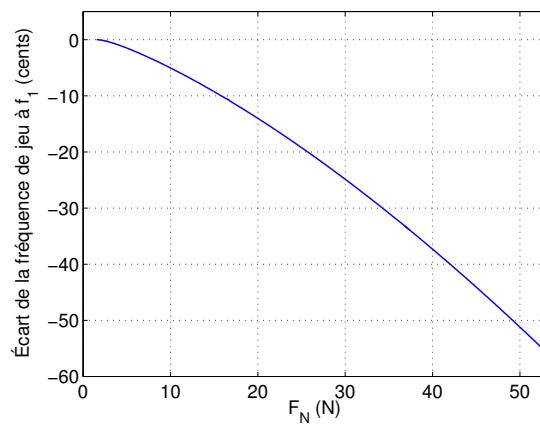


FIGURE 4.13 – Écart en cents en fonction de  $F_N$ , pour la branche de premier registre stable, pour  $V_b = 3 \text{ m.s}^{-1}$ .

### 4.3. Amortissement modal constant

Un aspect remarquable du modèle étudié plus haut est la présence d'un mouvement de Helmholtz, de second registre, stable et ayant un large domaine d'existence. Cependant, même pour un seul mode, la valeur retenue pour l'amortissement est cruciale : c'est parce que les pertes d'énergie lors du glissement ne compensent plus l'énergie accumulée lors de l'adhérence que le système masse-ressort-amortisseur cesse d'osciller périodiquement selon un régime de Helmholtz au-delà d'une certaine vitesse de tapis ou en-dessous d'une certaine force normale. L'EDP introduite au chapitre 1 avec un terme d'amortissement visqueux conduisait à un amortissement modal décroissant selon le rang du mode, et nous observons à présent les conséquences sur le diagramme de bifurcation lorsque l'on choisit un amortissement modal aussi élevé pour le second mode que pour le premier (les paramètres sont donnés en table 4.1c).

De manière similaire au premier cas étudié, nous obtenons deux branches issues du régime stationnaire (fig. 4.14, à comparer à la fig. 4.2), l'une de premier registre, instable, l'autre de second registre, partiellement stable. La première est qualitativement, et même quantitativement, extrêmement semblable à celle obtenue en fig. 4.2 a. La seconde comporte à nouveau deux paires de bifurcations de doublement de période, qui mènent à deux branches de premier registre, l'une à petites vitesses d'archet, l'autre à grandes vitesses d'archet (fig. 4.15, à comparer à la fig. 4.3). Pour cette nouvelle valeur d'amortissement du second mode de corde, qui est deux fois supérieure à la précédente valeur, les diagrammes obtenus sont qualitativement identiques au premier cas. Les différences quantitatives les plus remarquables sont les déplacements des bifurcations, ce qui veut dire aussi les domaines d'existence des différentes portions de branches. Par exemple, la solution de Helmholtz, stable, de second registre, qui existait auparavant pour  $V_b$  entre 2.66 et 25.72 m.s<sup>-1</sup> (fig. 4.2 b), existe dans ce diagramme pour  $V_b$  entre 2.73 et 15.82 m.s<sup>-1</sup> (fig. 4.14 b). On note aussi le changement de sens d'une bifurcation de Hopf, sur la branche de premier registre instable (fig. 4.14 a). La branche de solution périodique (glissement instable) émerge d'une bifurcation de Hopf, à  $V_b = 3.65$  m.s<sup>-1</sup>, désormais dirigée vers  $V_b$  décroissant, puis bifurque vers  $V_b$  croissant (bifurcation de cycle limite à  $V_b = 3.63$  m.s<sup>-1</sup>). Dans l'ensemble, la famille des branches de solutions et leurs caractéristiques globales (stabilité, registre, monotonie) ont été conservées, ce qui est remarquable vu l'amplitude de la modification du paramètre d'amortissement. La corde est un résonateur faiblement amorti (comparé à la colonne d'air des instruments à vents, par exemple). Il semble que, dans une gamme de valeurs raisonnables (respectant ce critère de faible amortissement), les valeurs numériques retenues pour les coefficients d'amortissement modaux ont une importance qualitative mineure sur les solutions obtenues.

## 4.4 Raideur de la corde

Comme expliqué au chapitre 1 c'est la raideur de la corde qui est responsable du décalage des pulsations modales ( $\omega_k > k\omega_1$ ), appelé l'inharmonicité. Or, il est plus difficile de mettre en mouvement synchrone (par l'interaction non linéaire de friction) des oscillateurs dont les pulsations propres, « désaccordées », ne sont pas en rapports simples. Lorsque la période du mouvement d'ensemble favorise un oscillateur (résonance) elle n'est pas favorable aux autres (hors de la résonance). Par conséquent il est raisonnable que les solutions obtenues soient affectées par l'inharmonicité.

Nous pouvons faire une brève comparaison qualitative avec les instruments à vents comme la trompette ou la clarinette, où la discussion peut être menée en termes d'impédance d'entrée (qui comporte des pics de résonance et des creux d'anti-résonance). Pour ces instruments, au-delà des premiers pics, le rapport  $\frac{\omega_k}{k\omega_1}$  est quasiment constant, et l'amortissement modal important

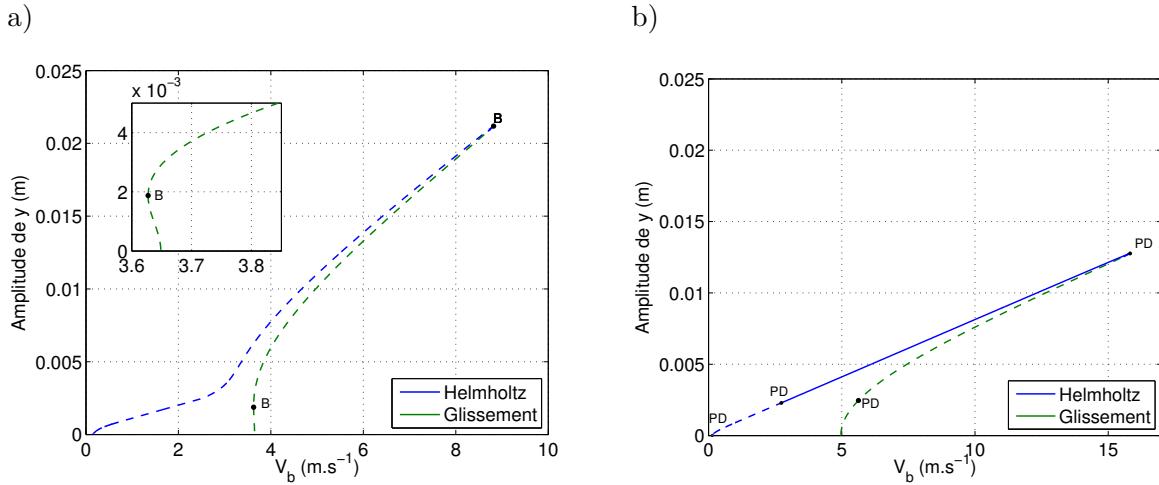


FIGURE 4.14 – Branches issues de la branche stationnaire, pour un amortissement modal constant (section 4.3). Trait plein : solution stable, tirets : solution instable. Bleu : régime de Helmholtz, vert : glissement. B : bifurcation de cycle limite, PD : bifurcation de doublement de période. a) Branche de premier registre. b) Branche de second registre.

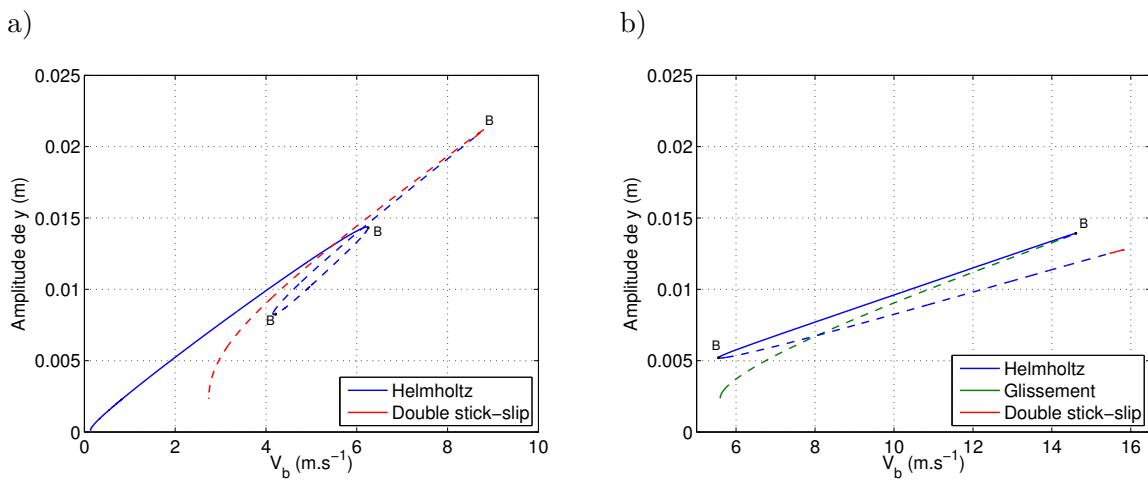


FIGURE 4.15 – Branches issues des bifurcations de doublement de période (fig. 4.14 b). a) Premier registre aux petites vitesses d'archet. b) Premier registre aux grandes vitesses d'archet.

## 4.5. Extension de la base modale

élargit les pics de résonance. Pour la corde, le rapport  $\frac{\omega_k}{k\omega_1}$  vaut  $\sqrt{1+k^2B}$  ( $B$  une constante proportionnelle à  $E$ ), et l'amortissement modal est faible (pics de résonance étroits). Il semble donc plus difficile de coupler les modes élevés au mouvement des premiers modes pour la corde frottée que pour les instruments à vents ; l'étroitesse des pics de résonance est aussi la raison pour laquelle la corde frottée joue juste alors que la fréquence de jeu d'un cuivre est assez libre autour d'un pic donné (et repose sur l'expertise du musicien).

Afin de voir l'importance de l'inharmonicité du modèle dans une gamme de variation raisonnable, nous choisissons une nouvelle valeur de raideur de corde,  $E = 20$  GPa (les autres paramètres sont en table 4.1d). C'est un exemple de valeur maximale telle qu'estimée par [Per13] pour les cordes de *Sol* du violon.

La figure 4.16 montre les deux branches issues de la branche stationnaire. La branche de premier registre, qui était habituellement entièrement instable, comporte à présent une portion stable, dont les extrémités sont des bifurcations de Neimark-Sacker. Comparée à la pulsation  $\omega_P$  de la solution périodique, la seconde pulsation émergente  $\omega_E$  à la bifurcation est dans les deux cas très faible :

- en  $V_b = 3.64 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\omega_P \simeq 1231 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_E \simeq 1.34 \text{ rad.s}^{-1}$  ;
- en  $V_b = 4.52 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\omega_P \simeq 1232 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_E \simeq 0.04 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Sur la branche de second registre, une bifurcation de Neimark-Sacker est présente, en  $V_b = 6.62 \text{ m.s}^{-1}$ . Elle est située à proximité d'une bifurcation de doublement de période (en  $V_b = 6.78 \text{ m.s}^{-1}$ ). De plus, la solution périodique a pour pulsation  $\omega_P \simeq 2466.4 \text{ rad.s}^{-1}$ , tandis que la seconde pulsation émergente vaut  $\omega_E \simeq 1232.7 \text{ rad.s}^{-1}$ , ce qui est proche de  $\frac{\omega_P}{2}$ . Hormis cette nouvelle bifurcation l'allure de la branche (type de régime, stabilité, amplitude) est très proche de celle obtenue dans le cas précédent (en fig. 4.14 b). Des deux paires de bifurcations de doublement de période (en  $V_b = 0.14$  et  $2.64 \text{ m.s}^{-1}$  d'une part, en  $V_b = 6.78$  et  $15.81 \text{ m.s}^{-1}$  d'autre part) émergent deux branches de premier registre (fig. 4.17). Elles restent très similaires au cas précédent (en fig. 4.15), mais il existe à présent deux bifurcations de Neimark-Sacker sur la branche de premier registre aux grandes vitesses d'archet. On constate qu'elles présentent également des pulsations émergentes faibles :

- en  $V_b = 6.84 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\omega_P \simeq 1233 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_E \simeq 0.37 \text{ rad.s}^{-1}$  ;
- en  $V_b = 7.81 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\omega_P \simeq 1233 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_E \simeq 0.02 \text{ rad.s}^{-1}$  ;

## 4.5 Extension de la base modale

### 4.5.1 Combien de modes ?

Le diagramme de bifurcation pour le modèle retenu de corde frottée a été fortement affecté lors du passage d'un à deux modes de cordes<sup>8</sup>, et la convergence selon le nombre de modes, n'est pas entièrement élucidée : nous ne connaissons pas le nombre de modes requis pour atteindre le stade où les évolutions du diagramme de bifurcation deviennent marginales (par exemple quant au nombre, à la stabilité et au registre des solutions). Nous soulignons cependant que certains phénomènes observés sur une véritable corde frottée ont été pour certains reproduits qualitativement avec deux modes : citons l'abaissement de la fréquence de jeu avec la force normale ou la coexistence de régimes de Helmholtz stables de premier et second registre. La

8. Il semble que la situation soit assez différente de la clarinette, étudiée dans la thèse de S. Karkar [Kar12], et pour laquelle chaque ajout d'un mode de résonateur apporte une nouvelle branche de solution périodique qui se connecte à la branche stationnaire (par bifurcation de Hopf) mais apparemment pas aux autres branches. Le diagramme obtenu de proche en proche lorsque la base modale est étendue semble ainsi évoluer de manière prévisible.

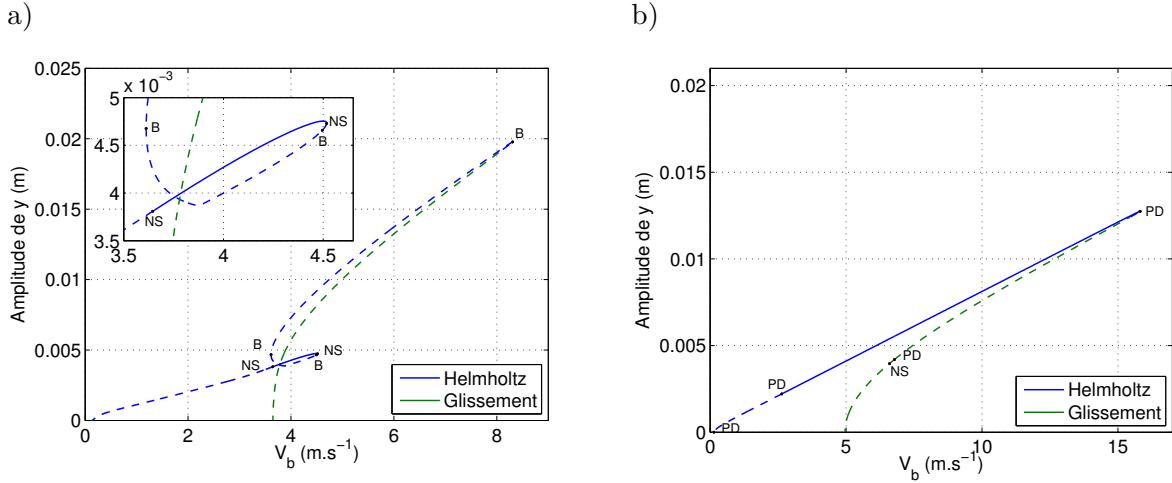


FIGURE 4.16 – Branches issues de la branche stationnaire, pour une corde plus raide (section 4.4). Trait plein : solution stable, tirets : solution instable. Bleu : régime de Helmholtz, vert : glissement. a) Branche de premier registre, avec une fenêtre de zoom autour des bifurcations de Neimark-Sacker (notées NS). b) Branche de second registre.

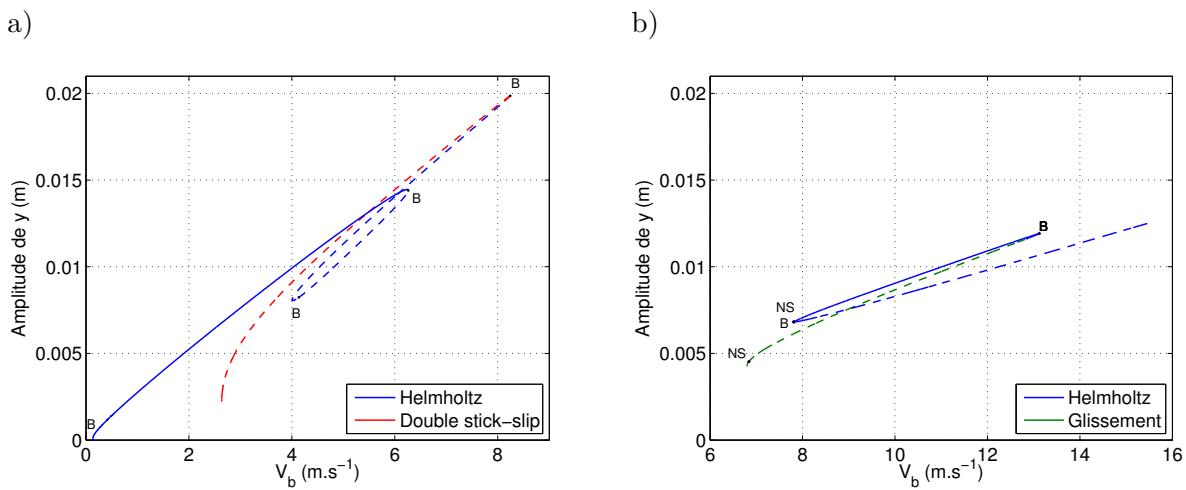


FIGURE 4.17 – Branches issues des bifurcations de doublement de période (fig. 4.16 b). NS : bifurcation de Neimark-Sacker. a) Premier registre aux petites vitesses d'archet. b) Premier registre aux grandes vitesses d'archet.

#### 4.5. Extension de la base modale

question du nombre de modes à retenir peut alors être reformulée en termes quantitatifs sur certaines propriétés des solutions.

Un critère de convergence pourrait être d'approcher la solution archétype, à savoir le mouvement de Helmholtz de premier registre, à une certaine précision. Un inconvénient théorique est que cela ne garantit pas que l'ensemble de solutions (inconnu, et qui comprend des solutions variées dès deux modes) est également bien approché. Un problème pratique est que, si dans le cas sans raideur, le coin de Helmholtz, triangulaire, est une solution exacte et explicite de la corde frottée, dans le cas avec raideur, le coin s'arrondit et à notre connaissance n'a pas d'expression analytique qui pourrait servir de référence.

Un autre critère de convergence pourrait être la valeur asymptotique de la fréquence en fonction de la force normale. Pour un seul mode la fréquence décroissait jusqu'à zéro ; pour deux modes, elle prend une valeur asymptotique vers 800 Hz. Des tests préliminaires semblent montrer que la valeur asymptotique est croissante avec le nombre de modes. L'ajout de modes pourrait être arrêté lorsque cette valeur asymptotique de la fréquence cesse de varier fortement.

##### 4.5.2 Modification de l'équilibrage harmonique

Le diagramme de bifurcation à deux modes contient plusieurs branches continues dont l'obtention complète requiert un temps de calcul important, à la fois par la longueur des branches en nombre de pas, et par le temps de calcul de chaque pas. Ainsi, le diagramme complet présenté en fig. 4.4 a été obtenu avec un millier de pas de continuation et environ 80 h de calcul sur un ordinateur portable standard. Le temps de calcul par pas augmente avec la taille  $N_{inc}$  des systèmes linéaires à inverser. Pour l'EH et la reformulation quadratique employée,

$$N_{inc} = N_{eq}(2H + 1) + 2, \quad N_{eq} = 2N + 7 \quad (4.17)$$

où  $H$  est le nombre d'harmoniques par variable et  $N_{eq}$  le nombre de variables. Le temps de calcul dépend aussi du raffinement demandé pour la méthode de stabilité : la méthode de Hill est appliquée en un certain nombre de points par tronçon, fixé par l'utilisateur (vingt par défaut). La continuation du modèle à deux modes a ainsi demandé environ 5 minutes par pas pour  $H = 150$  harmoniques (soit  $N_{inc} = 3313$ ) et l'appel de la méthode de Hill en vingt points par tronçon. Nous discutons à présent du choix du nombre d'harmoniques  $H$  et des stratégies qui pourraient être adoptées pour réduire la taille des systèmes et le temps de calcul par pas.

Lorsque le nombre  $H$  est suffisamment grand pour le problème traité, la convergence attendue signifie que les *derniers* termes de la somme de Fourier sont négligeables devant les *premiers*, et ceci peut être quantifié comme nous l'illustrons à présent. Pour une variable  $x$ , représentée par la série de Fourier tronquée à  $H$  harmoniques :

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^H x_{c,k} \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^H x_{s,k} \sin(k\omega t) \quad (4.18)$$

nous calculons les sommes

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{k=0}^H x_{c,k}^2 + x_{s,k}^2, \quad \mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^H |x_{c,k}| + |x_{s,k}| \quad (4.19)$$

puis le rang  $H_{X,2}$  (resp.  $H_{X,1}$ ) où une certaine proportion, par exemple 99.5 %, de la somme  $\mathcal{S}_2$  (resp.  $\mathcal{S}_1$ ) est atteint :

$$\mathcal{S}_{2,H_{X,2}} = \sum_{k=0}^{H_{X,2}} x_{c,k}^2 + x_{s,k}^2 = 0.995\mathcal{S}_2, \quad \mathcal{S}_{1,H_{X,1}} = \sum_{k=0}^{H_{X,1}} |x_{c,k}| + |x_{s,k}| = 0.995\mathcal{S}_1 \quad (4.20)$$

En pratique,  $H_{X,2}$  (resp.  $H_{X,1}$ ) est le rang à partir duquel on peut considérer les *derniers* termes de la somme négligeables, au sens de la norme 2 (resp. norme 1). On obtient ainsi le nombre d'harmoniques nécessaires pour approcher  $x$  avec une bonne précision, sans créer de phénomène de repliement spectral. Empiriquement, lorsque ce nombre devient proche de  $H$  la solution présente quelques oscillations incorrectes. Ce critère est donc utile en cours de calcul pour signaler qu'une branche peut nécessiter d'être calculée à nouveau pour une valeur de  $H$  plus élevée.

Les seuils  $H_{X,2}, H_{X,1}$  sont présentés pour deux points du diagramme en fig. 4.18. On remarque que :

1. la norme 2 suggère un rang de troncature toujours inférieur à la norme 1.
2. en certains points de la branche (comme le point 4 défini auparavant), quelques variables présentent des seuils  $H_{X,2}, H_{X,1}$  nettement plus élevés que la majorité des variables (elles nécessitent plus d'harmoniques pour être correctement approchées).
3. en d'autres points (comme au voisinage d'une bifurcation de Hopf) toutes les variables nécessitent peu d'harmoniques.

Une stratégie d'accélération des calculs envisageable est donc d'attribuer un nombre d'harmoniques différent à chaque variable (sélection harmonique). Cette approche a été l'objet de différents travaux [Map+04; JSP10; GT12]. La version la plus simple consisterait à choisir pour chaque variable, un certain nombre d'harmoniques, par exemple après avoir mené des tests préliminaires avec  $H$  grand pour toutes les variables. Ces choix seraient fixés pour le calcul de continuation. Dans une version plus élaborée, le programme testerait le long de la branche de solution si le nombre d'harmoniques pour chaque variable peut être diminué ou doit être augmenté.

Le calcul de la stabilité par la méthode de Hill ajoute cependant une certaine difficulté. Nous avons observé en général que celui-ci n'était fiable que pour un nombre d'harmoniques au moins aussi élevé que celui estimé via le critère précédent en norme 1. D'une part, il faut donc souligner que nous n'avons pas encore de critère directement issu des coefficients de Fourier pour estimer le nombre d'harmoniques requis par la méthode de Hill, de manière analogue à ce qui précède pour la solution elle-même. D'autre part, une réduction du nombre d'harmoniques peut conserver l'allure de la solution de manière satisfaisante, tout en ayant des effets importants sur le calcul de stabilité. Les critères de stabilité et de détection des bifurcations reposent sur une évaluation numérique : en théorie un exposant de Floquet franchit l'axe imaginaire ; en pratique, sa partie réelle est comparée à zéro à une tolérance près. Pouvoir interpréter ces résultats de manière fiable, en particulier si la solution est dégradée par une sélection harmonique, reste donc un enjeu important.

### 4.5.3 Exploitation des résultats

Comme nous l'avons vu, l'extension d'un à deux modes modifie fortement le diagramme de bifurcation. L'ajout de modes entraîne l'apparition de nouvelles branches périodiques. Pour  $N$  modes de cordes, la branche stationnaire comporte  $N$  paires de bifurcations de Hopf en fonction de  $\lambda = V_b$  (un exemple est donné pour  $N = 5$  modes en fig. 4.19), d'où émergent  $N$  branches périodiques. Des bifurcations entre branches périodiques peuvent aussi se produire et donner naissance à de nouvelles branches détachées du régime stationnaire : nous l'avons observé pour deux modes avec des doublements de période du second vers le premier registre, et ce type de situation pourrait être plus fréquent encore avec plus de modes (doublements de période du quatrième vers le deuxième registre par exemple).

La continuation est un outil de choix pour obtenir ces riches ensembles de solutions - et conjecturer qu'ils sont complets, à l'exception de solutions isolées que des techniques spécifiques

#### 4.5. Extension de la base modale

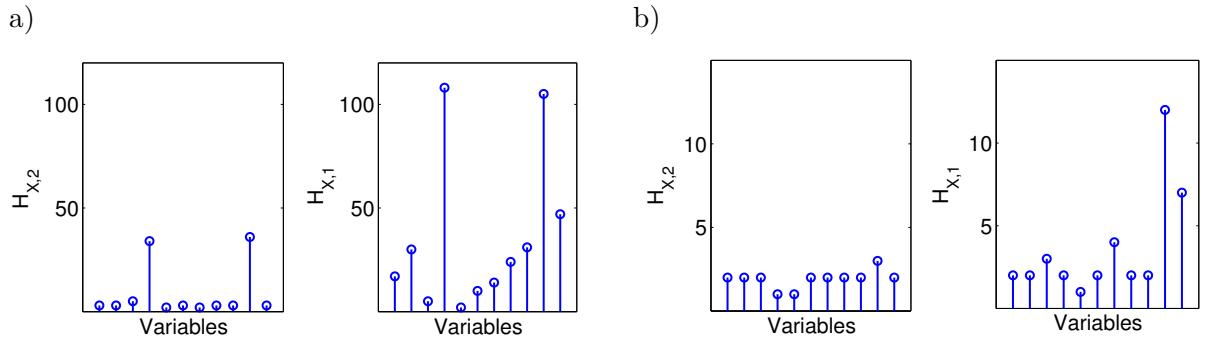


FIGURE 4.18 – Exemples représentatifs des seuils  $H_{X,2}$  et  $H_{X,1}$ , pour les différentes variables, en deux points différents. a) Point 4. b) Point sur la branche de second registre, à  $V_b = 7.2 \text{ m.s}^{-1}$  à proximité de la bifurcation de Hopf  $V_b = 7.04 \text{ m.s}^{-1}$ .

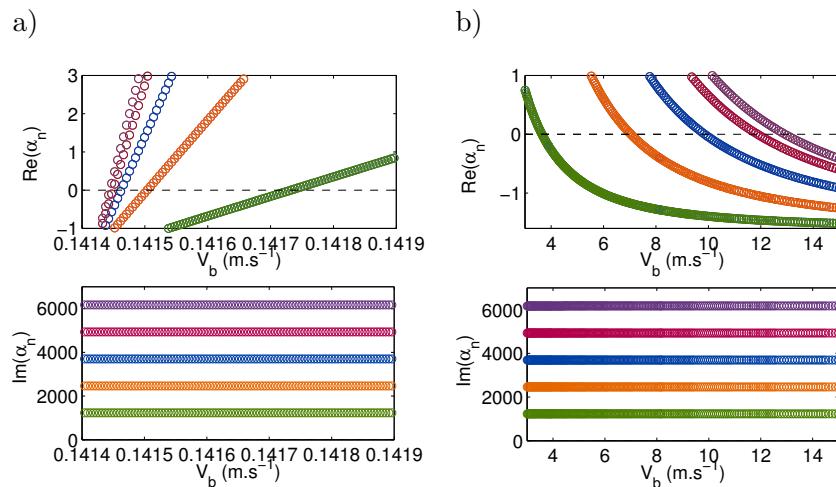


FIGURE 4.19 – Valeurs propres de la Jacobienne du système différentiel en fonction de  $\lambda = V_b$ , pour  $N = 5$  modes de corde. a) Zoom autour des cinq premières bifurcations de Hopf. b) Zoom autour des cinq dernières bifurcations de Hopf.

peuvent déceler, comme le suivi de bifurcation (voir [Det+15], en particulier la figure 8). Cependant, si les branches obtenues ont des intervalles d’existence très restreints, ou sont des solutions très instables<sup>9</sup>, l’exhaustivité de la continuation peut sembler un désavantage plus qu’une force : pour dépeindre la situation sans nuance, la continuation mettrait en évidence des solutions trop extraordinaires, obscurcissant les diagrammes de bifurcation et la compréhension du système, et à un coût de calcul prohibitif.

Il est cependant possible qu’un autre modèle de friction, soit par une autre fonction pour le coefficient de frottement régularisé, soit par le modèle thermique qui sera présenté au chapitre 8, donne des résultats très différents et réduise la difficulté rencontrée ici d’un foisonnement de solutions évoluant fortement lors de l’extension de la base modale.

## Références

- [Det+15] T. DETROUX, L. RENSON, L. MASSET et G. KERSCHEN. « The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 296 (2015), p. 18–38.
- [GT12] A. GROLET et F. THOUVEREZ. « On a new harmonic selection technique for harmonic balance method ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012), p. 43–60.
- [JSP10] V. JAUMOILLÉ, J.-J. SINOU et B. PETITJEAN. « An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems—application to bolted structures ». In : *Journal of Sound and Vibration* 329.19 (2010), p. 4048–4067.
- [Kar12] S. KARKAR. « Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2012.
- [Map+04] R. C. MAPLE, P. I. KING, P. D. ORKWIS et J. M. WOLFF. « Adaptive harmonic balance method for nonlinear time-periodic flows ». In : *Journal of Computational Physics* 193.2 (2004), p. 620–641.
- [Per13] G. K. PERCIVAL. « Physical modelling meets machine learning : performing music with a virtual string ensemble ». Thèse de doct. University of Glasgow, 2013.
- [Sch09] E. SCHOOENDERWALDT. « The violinist’s sound palette : spectral centroid, pitch flattening and anomalous low frequencies ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 95.5 (2009), p. 901–914.

---

9. Au sens proposé plus haut : un exposant de Floquet a une partie réelle très supérieure à zéro.

**Deuxième partie**

**Solutions quasi-périodiques**

## Avant-propos

Dans cette partie on aborde les solutions quasi-périodiques à deux fréquences. Notre motivation initiale dans le cas du violon (ou du violoncelle, qui en est plus souvent victime) est la note du loup. Lors de ce phénomène, décrit comme une note « qui roule » par les musiciens, la note jouée présente un battement : le son est à la fréquence fondamentale prévue par la longueur de corde, tandis que son amplitude est d'enveloppe oscillante.

Dans le chapitre 5, nous reproduisons l'article *Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency Harmonic Balance Method*, publié dans le *Journal of Sound and Vibration*. Ce travail a commencé à l'occasion du stage de Master 1 de Louis Guillot au LMA (été-automne 2015), que j'ai co-encadré. Il nous a fallu séparer la méthode de continuation de solutions quasi-périodiques, qui présente ses propres difficultés, des blocages techniques (liés à la non-linéarité, qui est propre à chaque système). Par conséquent, l'article applique la méthode à des systèmes assez rudimentaires.

Dans le chapitre 6, des discussions sont menées sur la démarche et les résultats obtenus dans l'article, notamment le phénomène des résonances périodiques (*frequency-locking*) le long de la branche quasi-périodique.

Enfin, comme la taille des systèmes linéaires utilisés croît rapidement (en  $H^2$ , au lieu de  $H$  pour le cas périodique), leur construction doit être accélérée pour que la méthode fonctionne assez rapidement. Nous présentons dans le chapitre 7 la réécriture du calcul de la Jacobienne utilisant des constructeurs matriciels qui permet une accélération importante de la méthode.

## Chapitre 5

# Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency Harmonic Balance Method

### Sommaire

---

Résumé . . . . .	123
Abstract . . . . .	124
5.1 Introduction . . . . .	124
5.2 Asymptotic Numerical Method (ANM) . . . . .	125
5.3 Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM . . . . .	127
5.3.1 Coupling HBM and ANM : a sketch of the method . . . . .	127
5.3.2 Description of the periodic HBM coupled with the ANM . . . . .	127
5.3.3 Quasi-periodic HBM . . . . .	129
5.4 Forced Van der Pol oscillator . . . . .	132
5.4.1 Quadratic formulations, continuation of periodic solution . . . . .	132
5.4.2 Frequency-locking regions . . . . .	135
5.5 Coupled Van der Pol oscillators . . . . .	140
5.6 Conclusion . . . . .	144

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous reproduisons [Gui+17], article publié dans le *Journal of Sound and Vibration*. Une nouvelle formulation de l'équilibrage harmonique, en coefficients de Fourier complexes (plutôt que réels, comme dans [CV09]), a été proposée. Testée pour les solutions périodiques, elle se prête à une extension théorique aisée au cas quasi-périodique. Il ne faut pas sous-estimer cependant cette modification, qui n'est pas transparente : en pratique tous les codes d'équilibrage harmonique ont dû être réécrits.

L'article qui suit présente la continuation des solutions quasi-périodiques pour des systèmes non linéaires autonomes ou forcés. L'association de la HBM à la MAN, déjà réalisée dans le cas périodique [CV09], est à présent étendue au cas quasi-périodique à deux pulsations. Comme pour le cas périodique, il n'est pas nécessaire d'avoir de connaissance *a priori* de la solution recherchée : les deux pulsations peuvent être inconnues, et les séries doubles de Fourier sont calculées sans stratégie de sélection harmonique adaptée à la solution. Les séries doubles sont tronquées à un même indice  $H$ . Similairement au cas périodique, l'observation *a posteriori* de la

norme des coefficients de Fourier permet d'estimer la précision de la branche de solution calculée : lorsque celle-ci est fiable, les coefficients d'indices élevés sont petits devant les coefficients de bas indice.

Pour le cas forcé, il faut considérer un oscillateur non linéaire (sinon les solutions en forçage périodique sont aussi périodiques). Ce cas donne des exemples de résonances périodiques (*frequency-locking*) le long de la branche quasi-périodique. Grâce à la robustesse de la méthode employée (MAN), les résonances ne bloquent pas la continuation, entraînant seulement un raccourcissement de la longueur des pas et une perte de précision de la solution dans l'intervalle de résonance.

Pour le cas autonome, il faut au minimum deux degrés de liberté [BPV88], et nous avons choisi deux oscillateurs de type Van der Pol couplés. Il s'inspire d'une précédente étude [DVM14] qui avait montré la capacité d'un modèle simple de saxophone (où seuls les deux premiers modes du résonateur, le tuyau du saxophone, sont pris en compte) à produire des régimes quasi-périodiques à deux pulsations. Nous avons pris ici une simplification supplémentaire : la relation non linéaire entre pression et débit à l'entrée du tuyau est remplacée par son développement de Taylor à l'ordre 3 ([CK16], section 9.3.3.3).

Nous avons isolé deux types de difficultés : construire une méthode de continuation de solutions quasi-périodiques ; l'appliquer à des systèmes non linéaires variés. L'article qui suit traite de la méthode, puis l'applique à des systèmes assez rudimentaires, dont les non-linéarités (polynomiales) demandent peu d'harmoniques. Le cas de la friction pose un problème technique : le nombre d'harmoniques nécessaire pour approcher cette non-linéarité dépasse largement ce qui peut être traité par notre méthode à l'heure actuelle.

## Abstract

The continuation of quasi-periodic solutions for autonomous or forced nonlinear systems is presented in this paper. The association of the Asymptotic Numerical Method, a robust continuation method, and a two-frequency Harmonic Balance Method, is performed thanks to a quadratic formalism. There is no need for *a priori* knowledge of the solution : the two pulsations can be unknown and can vary along the solution branch, and the double Fourier series are computed without needing a harmonic selection. A norm criterion on Fourier coefficients can confirm *a posteriori* the accuracy of the solution branch. On a forced system, frequency-locking regions are approximated, without blocking the continuation process. The continuation of these periodic solutions can be done independently. On an autonomous system an example of solution is shown where the number of Fourier coefficients is increased to improve the accuracy of the solution.

## 5.1 Introduction

Time-periodic solutions are commonly investigated in dynamical systems. They can be a source of nuisance, causing noise or potentially destructive motions (for example in rotating machinery) or they can be sought after (for example in many musical instruments relying on auto-oscillations : winds, bowed strings, etc). The well-known continuation of periodic solutions aims at producing bifurcation diagrams representing the existence, stability and other characteristics of such periodic solutions (amplitude, pulsation, etc) with respect to some parameters of the nonlinear system.

However, other solutions can arise, among which, quasi-periodic solutions. Our aim in this paper is the continuation of two-pulsation, quasi-periodic solutions. The direct computation of

## 5.2. Asymptotic Numerical Method (ANM)

quasi-periodic solutions through numerical integration can be difficult. Because of dependence on initial conditions, some solutions may be overlooked (as in the periodic case). Moreover, performing integration on long intervals to get rid of transient solutions - a brute force, expensive tactic when studying periodic solutions - needs a new kind of stopping criterion since one cannot easily determine if the steady-state solution is reached when non periodic solutions are considered. These drawbacks have lead to different approaches to the study of quasi-periodicity.

Chua and Ushida [CU81] adapted the Harmonic Balance Method (HBM) to compute the steady-state response to a quasi-periodic forcing. Another early work based on a frequency-domain approach was the incremental HBM devised by Lau *et al.* [LCW83]. Kaas-Petersen [Kaa85 ; Kaa87] reformulated the problem in the time domain in terms of Poincaré maps. An interesting advantage to this approach is that it provides a stability analysis [CN92 ; Kim96].

The Alternating Frequency-Time method proposed in [CG89] was an important breakthrough, allowing the consideration of strong nonlinearities by computing them in the time domain. Several works used it to find quasi-periodic solutions [CNS09] and coupled it with arc-length continuation [GST08 ; Pel+14].

Finally, instead of computing a trajectory on an invariant tori, the continuation of these tori was performed independently in [Ras03] and Schilder *et al.* [SOV05 ; Sch+06].

The method of obtaining and continuing quasi-periodic solutions presented in this paper is different and original. The aim is to create a resilient method that is capable of coping with either forced or autonomous systems, and is fast enough to tackle algebraic systems with a few thousand unknowns. The association of the Asymptotic Numerical Method (ANM), a continuation technique based on Taylor series, with the Harmonic Balance Method (HBM), proved its effectiveness to continue periodic solutions of forced or autonomous systems [CV09]. This framework requires a quadratic formalism, which can be obtained for most problems thanks to auxiliary variables. The present paper extends the principle of coupling ANM and HBM to the quasi-periodic case. The ANM is briefly recalled in section 5.2. It is a very robust continuation method and its choice, differing from the widespread arc-length continuation, aims to deal appropriately with difficult situations, for instance frequency-locking.

Several aspects of the HBM are presented in section 5.3. After a general sketch of its association with the ANM, an original implementation of the periodic HBM is given in section 5.3.2. It is based on the complex representation of the Fourier basis. Then, its adaptation for quasi-periodic solutions is presented in section 5.3.3. The method is capable of dealing with periodically forced systems as well as autonomous systems, illustrated respectively in sections 5.4 and 5.5. In this last case, the two pulsations are both unknown. The method presented here does not need to select specific spectral contributions, and to the authors' knowledge it is able to compute solutions with more harmonics than existing methods.

## 5.2 Asymptotic Numerical Method (ANM)

Let us consider a vector-valued, smooth function :

$$\mathbf{R} : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (\mathbf{X}, \lambda) \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) \quad (5.1)$$

Assuming that a first regular solution  $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$  is known, the aim of the Asymptotic Numerical Method (ANM) is to follow the solution branch of the equation :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = 0 \quad (5.2)$$

with respect to  $\lambda$ . Without a great loss of generality  $\mathbf{R}$  can be considered quadratic, meaning that there are  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1$  real  $N \times N$  matrices,  $\mathbf{Q}_0$  a bilinear application of  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,

so that :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{C}_0 + \lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0 \mathbf{X} + \lambda \mathbf{L}_1 \mathbf{X} + \mathbf{Q}_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \quad (5.3)$$

As noted when the method was designed, the transformation from a general function  $\mathbf{R}$  to the quadratic formalism required in Eq. (5.3) is possible for usual smooth functions, adding auxiliary variables [DP90; Azr+93; CDP94]. The continuation parameter is now treated as an unknown ; thus, a vector of all unknowns is defined as  $\mathbf{V} := (\mathbf{X}, \lambda)$ , and the idea of the ANM is to develop the solution branch as a (truncated) power series of a path parameter  $a$ , in the vicinity of a known solution  $\mathbf{V}_0$ . Let  $\mathbf{V}_1$  be a tangent vector at  $\mathbf{V}_0$  and let  $a$  be defined as :

$$a := (\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)^t \mathbf{V}_1 \quad (5.4)$$

Then  $\mathbf{V}$  is developed to the order  $n$  ( $n = 15$  or  $20$  in applications) :

$$\mathbf{V}(a) = \mathbf{V}_0 + a \mathbf{V}_1 + a^2 \mathbf{V}_2 + \dots + a^n \mathbf{V}_n \quad (5.5)$$

Operators are combined as follows :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0, \quad \mathbf{L}(\mathbf{V}) = \lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0 \mathbf{X}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \lambda \mathbf{L}_1 \mathbf{X} + \mathbf{Q}_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \quad (5.6)$$

so Eq. (5.3) now reads as :

$$\mathbf{R}(\mathbf{V}) = \mathbf{Q}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \mathbf{L}(\mathbf{V}) + \mathbf{C} \quad (5.7)$$

The series of Eq. (5.5) is substituted in Eq. (5.2), and powers of  $a$  are collected to obtain a family of linear systems on all  $\mathbf{V}_i$  :

- Order 0 :  $\mathbf{Q}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_0) + \mathbf{L}(\mathbf{V}_0) + \mathbf{C} = 0$  which is true since  $\mathbf{V}_0$  is a solution of Eq. (5.2).
- Order 1 :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1) + \mathbf{Q}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_0) + \mathbf{L}(\mathbf{V}_1) = 0 \quad (5.8a)$$

$$\text{path parameter definition (5.4) leads to } \mathbf{V}_1^t \mathbf{V}_1 = 1 \quad (5.8b)$$

If  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0}$  denotes the Jacobian matrix of  $\mathbf{R}$  evaluated at  $\mathbf{V}_0$ , *i.e.*

$$\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0} := \mathbf{Q}(\mathbf{V}_0, \cdot) + \mathbf{Q}(\cdot, \mathbf{V}_0) + \mathbf{L}(\cdot) \quad (5.9)$$

then Eq. (5.8a) can be written  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0} \mathbf{V}_1 = 0$ , and forms with Eq. (5.8b) an invertible system.

- Order  $2 \leq p \leq n$  :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0} \mathbf{V}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{p-i}) = 0 \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{V}_p^t \mathbf{V}_1 = 0 \quad (5.10b)$$

The  $n$  linear systems (Eq. (5.8) and Eq. (5.10)) can all be solved once the Jacobian matrix  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}_0}$  is computed and inverted.

The series is computed from  $\mathbf{V}_0$  to  $\mathbf{V}(a_{max})$ , from which another continuation step can start (after a correction process if the residual norm is too large) to continue iteratively the solution branch. The choice of  $a_{max}$  has been discussed in other papers, for example [CP04] ; given a tolerance criterion  $\varepsilon_R$  on the residual norm, a simple estimate is

$$a_{max} = \left( \frac{\varepsilon_R}{\| \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{n+1-i}) \|} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (5.11)$$

### 5.3. Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM

## 5.3 Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM

A sketch of the Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM is first given in section 5.3.1, in order to understand the approach and its different steps. Then an original implementation of the method is detailed in section 5.3.2 in the periodic case. Finally the extension that allows to deal with quasi-periodic solutions is presented in section 5.3.3.

### 5.3.1 Coupling HBM and ANM : a sketch of the method

Let us consider an autonomous system with a real parameter  $\lambda$  (continuation parameter) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (5.12)$$

where  $\mathbf{x} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{N_d}$  and  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{N_d} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_d}$ . The principle of the Harmonic Balance Method is to replace  $\mathbf{x}$  by its truncated Fourier series in Eq. (5.12), in order to solve a new algebraic problem on the Fourier coefficients and the pulsation.

First, it is assumed that thanks to auxiliary variables, Eq. (5.12) is recast quadratically as :

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (5.13)$$

where  $\mathbf{u}$  is the vector of all variables (including auxiliary variables if required), of length  $N_{eq}$ ;  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^{N_{eq}}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}_0$  and  $\mathbf{l}_1$  are  $N_{eq} \times N_{eq}$  matrices, and  $\mathbf{q}$  is a bilinear operator, from  $\mathbb{R}^{N_{eq}} \times \mathbb{R}^{N_{eq}}$  to  $\mathbb{R}^{N_{eq}}$ .

Then, larger operators on the complex Fourier coefficients of  $\mathbf{u}$  and the pulsation are built. Finally, a system on real and imaginary parts of the Fourier coefficients plus the pulsation is formed. When read as  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda)$ , it verifies the assumptions of the ANM, namely :

- there are  $N + 1$  unknowns and  $N$  equations ;
- thanks to the underlying quadratic formalism, the Jacobian matrix of  $\mathbf{R}$  evaluated at  $(\mathbf{X}, \lambda)$ , is computed exactly.

The next section describes the periodic HBM. Though the method is already known, and its efficient coupling with the ANM (thanks to a quadratic formulation) was already described in [CV09], this section describes an original implementation and serves as a model for the quasi-periodic HBM, for which little modifications will be made.

### 5.3.2 Description of the periodic HBM coupled with the ANM

Assuming the quadratic recast of Eq. (5.13), the truncated Fourier series of  $\mathbf{u}$  is denoted as :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=-H}^H \mathbf{U}_k e^{ik\omega t} \quad (5.14)$$

The problem is now to find the complex vectors  $\mathbf{U}_k$  and the pulsation  $\omega$ . Since  $\mathbf{u}(t)$  is real,

$$\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{U}_{-k} = \overline{\mathbf{U}_k} \quad (5.15)$$

Thus only  $2H + 1$  real vectors need to be stored :  $\mathbf{U}_0$ , and  $\text{Re}(\mathbf{U}_k)$ ,  $\text{Im}(\mathbf{U}_k)$  (real and imaginary parts) for  $k \in \llbracket 1, H \rrbracket$ . This represents  $(2H + 1)N_{eq}$  real coefficients. The pulsation  $\omega$  is also an unknown, so the total number of real unknowns  $N_P$  is :

$$N_P = (2H + 1)N_{eq} + 1 \quad (5.16)$$

With  $\mathbf{U}$  defined as  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_0 \mathbf{U}_1 \dots \mathbf{U}_H]^t$ , operators acting on  $\mathbf{U}$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$  are now defined to transform Eq. (5.13) into a quadratic system on these unknowns. First of all, since :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{k=-H}^H ik\omega \mathbf{U}_k e^{ik\omega t} = i\omega \sum_{k=-H}^H k \mathbf{U}_k e^{ik\omega t} \quad (5.17)$$

the left-hand side of Eq. (5.13) is transformed into  $i\omega \mathbf{M}\mathbf{U}$ , where  $\mathbf{M}$  is defined as a diagonal block matrix  $\text{Diag}(k\mathbf{m}, 0 \leq k \leq H)$ . Secondly, operators  $\mathbf{c}_0$  and  $\mathbf{c}_1$  do not act on Fourier series, so  $\mathbf{C}_0$  (respectively  $\mathbf{C}_1$ ) is defined by concatenation of  $\mathbf{c}_0$  (resp.  $\mathbf{c}_1$ ) and  $H N_{eq}$  zeros. Thirdly, linear operators  $\mathbf{l}_0$  and  $\mathbf{l}_1$  act linearly on Fourier series, so  $\mathbf{L}_0$  (resp.  $\mathbf{L}_1$ ) is defined as a diagonal block matrix  $\text{Diag}(\mathbf{l}_0, 0 \leq k \leq H)$  (resp.  $\mathbf{l}_1$ ), *i.e.*  $H + 1$  times the same block. Finally, the Fourier series of a product of two variables can be obtained by convolution. This approach differs from [CV09], where the authors give the explicit expression for the Fourier coefficients of variables products. The advantage of the approach below is that it will require little adaptation for the quasi-periodic case. A function (denoted as **Conv**) is dedicated to computing the Fourier series of a product, and reads as follows :

### **Conv**

1. Entries :  $\mathbf{U}^i$ ,  $\mathbf{U}^j$  Fourier coefficients (from  $k = 0$  to  $H$ ) of the  $i$ -th and  $j$ -th variables of  $\mathbf{u}$
2. Recreate the respective coefficients vectors  $U^i$ ,  $U^j$  by conjugation and symmetry (Eq. (5.15)).
3. Compute the central part of the convolution of  $U^i$  and  $U^j$  : for two vectors  $U^i$  and  $U^j$  of length  $2H + 1$ , the convolution has length  $4H + 1$ . Only its central part of length  $2H + 1$  is kept.
4. Return the vector starting from the central one (constant coefficient)

The third step of the function **Conv** may use existing convolution procedures efficiently. For instance, in Matlab, it is performed through the instruction `conv(Ui, Uj, 'same')`. Then an operator  $\mathbf{Q}_0$  is defined, giving the Fourier series of each variables product specified in  $\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  thanks to **Conv**.

The system can be autonomous or forced. If it is autonomous, when  $\mathbf{u}$  is solution then  $\mathbf{u}(\cdot + \tau)$  is also solution. Another equation is then added to determine a unique solution, called phase condition. Examples of such conditions include : a variable is null at  $t = 0$ ; the first sine coefficient of a variable is null. They often read as a simple linear combination of complex Fourier coefficients, for instance  $\text{Im}(\mathbf{U}_1^1) = 0$ . Given a solution  $\mathbf{u}$ , since :

$$\mathbf{u}(t + \varphi) = \sum_{k=-H}^H \mathbf{U}_k e^{ik\omega(t+\varphi)} = \sum_{k=-H}^H e^{ik\omega\varphi} \mathbf{U}_k e^{ik\omega t} \quad (5.18)$$

a phase condition of the form  $\text{Im}(\mathbf{U}_1^1) = 0$  is satisfied exactly with the right choice of  $\varphi$ . If a solution has been obtained, its Fourier series can be time-shifted exactly in order to satisfy the required phase condition. This will not be the case with quasi-periodic solutions (section 5.3.3).

If the system is forced, there are two ways to deal with it : including the forcing term in the constant operator  $\mathbf{c}_0$  since it does not depend on the variables in  $\mathbf{u}$ , or adding a nonlinear differential system that admits the forcing term as a unique solution. More details are given in section 5.4.

### 5.3. Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM

Either for autonomous or forced systems, the complex operators are combined :

$$\mathbf{Z} := (\mathbf{U}, \omega, \lambda) \quad (5.19a)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbb{C}} := \mathbf{C}_0 \quad (5.19b)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}) := \lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0 \mathbf{U} \quad (5.19c)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) := \mathbf{Q}_0(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - i\omega \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (5.19d)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}) := \mathbf{C}_{\mathbb{C}} + \mathbf{L}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}) + \mathbf{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \quad (5.19e)$$

and so Eq. (5.13) now reads for periodic solutions  $\mathbf{R}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}) = 0$ . Let  $\mathbf{X}$  the vector of real unknowns be defined as :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{U}_0 \operatorname{Re}(\mathbf{U}_1) \dots \operatorname{Re}(\mathbf{U}_H) \operatorname{Im}(\mathbf{U}_1) \dots \operatorname{Im}(\mathbf{U}_H) \omega]^t \in \mathbb{R}^{N_P}, \quad (5.20)$$

the real quadratic system  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = 0$  for the ANM is defined as the collection of equations on constant, cosine and sine Fourier coefficients plus the phase condition :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \left( \begin{array}{l} \text{lines 1 to } N_{eq} \text{ of } \operatorname{Re}(\mathbf{R}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z})) \\ \text{lines } N_{eq} + 1 \text{ to } (H+1)N_{eq} \text{ of } \operatorname{Re}(\mathbf{R}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z})) \\ \text{lines } N_{eq} + 1 \text{ to } (H+1)N_{eq} \text{ of } \operatorname{Im}(\mathbf{R}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z})) \\ \text{phase condition} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Size :} \\ N_{eq} \\ HN_{eq} \\ HN_{eq} \\ 1 \\ \text{total size : } (2H+1)N_{eq} + 1 = N_P \end{array} \quad (5.21)$$

Similarly, the Jacobian matrix  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}}$  of  $\mathbf{R}$  evaluated at  $\mathbf{V} := (\mathbf{X}, \lambda)$  is computed in two steps, first in its complex form, then sorting real and imaginary parts.

#### 5.3.3 Quasi-periodic HBM

Similarly to the periodic HBM, the differential system is assumed to fit in the formalism of Eq. (5.13), recalled here :

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u} + \lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (5.13)$$

and the quasi-periodic HBM looks for the solution as a double Fourier sum :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{U}_{k_1, k_2} e^{i(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)t} \quad (5.22)$$

In this development, since  $\mathbf{u}(t)$  is real,

$$\mathbf{U}_{0,0} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{U}_{-k_1, -k_2} = \overline{\mathbf{U}_{k_1, k_2}} \quad (5.23)$$

Several steps of implementation are now presented as they differ from the periodic case : the enumeration of Fourier coefficients, the derivation operator, the computation of variables products, and the phase conditions.

#### Enumeration of coefficients

Thanks to Eq. (5.23), only half of the coefficients plus the central one need to be stored. More precisely, in the indexes table  $k_1, k_2 \in [-H, H]$ , half of the table can be found applying complex conjugation and central symmetry (with respect to the coefficient  $0,0$ ) to the other half.

Then, let the letter  $C$  represent coefficients that are left out ; the right half of the table is kept, starting from the central coefficient, enumerating column after column :

$C$	$\dots$		$C$	$1, -H$		$H, -H$
$\vdots$			$\vdots$	$\downarrow$		$\downarrow$
			$C$			
$C$			$\mathbf{0}, \mathbf{0}$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$			$0, 1$			
			$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
$C$			$0, H$	$1, H$		$H, H$

Then  $\mathbf{U}$  is defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{U}_{0,0} \quad \mathbf{U}_{0,1} \dots \mathbf{U}_{0,H} \quad \mathbf{U}_{1,-H} \dots \mathbf{U}_{1,H} \dots \mathbf{U}_{H,H}]^t \\ &= [\underbrace{\mathbf{U}_{0,0}}_{\substack{\text{one block} \\ \text{of size } N_{eq}}} \quad \underbrace{(\mathbf{U}_{0,k_2})_{1 \leq k_2 \leq H}}_{\substack{H \text{ blocks of size } N_{eq}}} \quad \underbrace{(\mathbf{U}_{k_1,k_2})_{\substack{1 \leq k_1 \leq H \\ -H \leq k_2 \leq H}}}_{\substack{H(2H+1) \text{ blocks of size } N_{eq}}} ]^t \end{aligned} \quad (5.24)$$

The vector of all real unknowns, denoted  $\mathbf{X}$ , is

$$\mathbf{X} = [\mathbf{U}_{0,0} \quad \text{Re}(\mathbf{U}_{0,k_2})_{1 \leq k_2 \leq H} \quad \text{Re}(\mathbf{U}_{k_1,k_2})_{\substack{1 \leq k_1 \leq H \\ -H \leq k_2 \leq H}} \quad \text{Im}(\mathbf{U}_{0,k_2}) \quad \text{Im}(\mathbf{U}_{k_1,k_2}) \quad \omega_1 \quad \omega_2]^t \in \mathbb{R}^N, \quad (5.25)$$

$$\text{where } N = \underbrace{N_{eq}}_{0,0} + 2 \left( \underbrace{H}_{0,k_2} N_{eq} + \underbrace{H(2H+1)}_{k_1,k_2} N_{eq} \right) + \underbrace{2}_{\text{pulsations}} = (4(H+1)H+1)N_{eq} + 2 \sim 4N_{eq}H^2 \quad (5.26)$$

Since the number of unknowns grows as  $H^2$ , increasing the number of harmonics (to improve the accuracy of the solution, for example) is much more expensive in computation time than in the periodic case (where  $N_P \sim 2N_{eq}H$ ).

## Derivation operator

To define a derivation operator  $\mathbf{M}$  so that  $\mathbf{MU}$  is the Fourier series of  $\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}$ , one recalls that :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) \mathbf{U}_{k_1,k_2} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t} \quad (5.27)$$

thus the following diagonal block matrix  $\mathbf{M}$  is defined as follows :

$$\mathbf{M} = i\text{Diag}(\mathbf{0m} \quad \omega_2\mathbf{m} \dots H\omega_2\mathbf{m} \quad (\omega_1 - H\omega_2)\mathbf{m} \dots (\omega_1 + H\omega_2)\mathbf{m} \dots (H\omega_1 + H\omega_2)\mathbf{m}) \quad (5.28)$$

One notices that  $\mathbf{M}$  depends on  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . Like in the periodic case, where  $\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}$  is turned into  $i\omega\mathbf{MU}$ , it is more efficient to leave the unknowns  $\omega_1$  and  $\omega_2$  out of constant matrices that

### 5.3. Harmonic Balance Method (HBM) coupled with the ANM

can thus be computed once and combined when needed. That is why two constant, diagonal block matrices  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  are defined as follows :

$$\mathbf{M}_1 = \text{Diag}(\underbrace{0\mathbf{m} \dots 0\mathbf{m}}_{H+1 \text{ blocks}}, \underbrace{1\mathbf{m} \dots 1\mathbf{m}}_{2H+1 \text{ blocks}}, \dots, \underbrace{H\mathbf{m} \dots H\mathbf{m}}_{2H+1 \text{ blocks}}) \quad (5.29a)$$

of size  $N_{eq}$

$$\mathbf{M}_2 = \text{Diag}(\underbrace{0\mathbf{m} \dots H\mathbf{m}}_{H+1 \text{ blocks}}, \underbrace{-H\mathbf{m} \dots H\mathbf{m}}_{2H+1 \text{ blocks}}, \dots, \underbrace{-H\mathbf{m} \dots H\mathbf{m}}_{2H+1 \text{ blocks}}) \quad (5.29b)$$

where the sequence of  $2H + 1$  blocks,  $-H\mathbf{m} \dots H\mathbf{m}$ , is repeated  $H$  times so that the Fourier series of  $\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}$  is  $(i\omega_1\mathbf{M}_1 + i\omega_2\mathbf{M}_2)\mathbf{U}$ .

#### Computation of variables products

Similarly to the periodic case, the double Fourier series of a product of two variables can be computed through a two-dimensional convolution of the matrices of their Fourier coefficients. The function **Conv2** dedicated to computing the Fourier series of a product reads almost the same as in the periodic case :

##### **Conv2**

1. Entries :  $\mathbf{U}^i$ ,  $\mathbf{U}^j$  vector of Fourier coefficients of the  $i$ -th and  $j$ -th variables of  $\mathbf{u}$
2. Recreate the respective coefficients matrices  $U^i$ ,  $U^j$  by conjugation and symmetry (Eq. (5.23))
3. Compute the central part of the convolution of  $U^i$  and  $U^j$
4. Return the vector version of this list of coefficients, starting from the central one (Eq. (5.24))

Once again, the third step may use existing convolution procedures efficiently. For instance, the 2D convolution of matrices is performed in Matlab through the instruction `conv2(Ui, Uj, 'same')`, and it is fast (compared, for instance, to the linear algebra computations involved for continuation, on  $N \times N$  systems).

#### Phase conditions

In the periodic case, for an autonomous system, the pulsation of the solution is unknown, and one equation, called phase condition, is added to the system. As explained above, a phase shift of a solution gives a solution verifying exactly the phase condition. For a quasi-periodic solution, the two incommensurable pulsations  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are unknown, so two equations must be added. These are supposed to affect the  $j$ -th and  $k$ -th variables and to be for instance of the form :  $\text{Im}(\mathbf{U}_{1,0}^j) = 0$ ,  $\text{Im}(\mathbf{U}_{0,1}^k) = 0$ . One could consider the real parts instead, or any linear combination of real and imaginary parts. Let us assume a solution  $\mathbf{u}$  is known. A time shift now reads :

$$\mathbf{u}(t+\varphi) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{U}_{k_1,k_2} e^{i(k_1\omega_1+k_2\omega_2)(t+\varphi)} = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H e^{i(k_1\omega_1+k_2\omega_2)\varphi} \mathbf{U}_{k_1,k_2} e^{i(k_1\omega_1+k_2\omega_2)t} \quad (5.30)$$

The coefficient  $\mathbf{U}_{1,0}$  is multiplied by  $e^{i\omega_1\varphi}$ , and  $\mathbf{U}_{0,1}$  is multiplied by  $e^{i\omega_2\varphi}$ . When the two pulsations are assumed incommensurable two remarks can be proved :

1. for all  $\varepsilon > 0$ , there exists a phase shift  $\varphi$  so that

$$|\operatorname{Im}(e^{i\omega_1\varphi}\mathbf{U}_{1,0}^j)| < \varepsilon, \quad |\operatorname{Im}(e^{i\omega_2\varphi}\mathbf{U}_{0,1}^k)| < \varepsilon \quad (5.31)$$

2. almost surely, there is no phase shift that implies the exact phase conditions.

*Demonstration.* Let  $\theta_{1,0}$  (resp.  $\theta_{0,1}$ ) denote the argument of  $\mathbf{U}_{1,0}^j$  (resp.  $\mathbf{U}_{0,1}^k$ ).

$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{Im}(\mathbf{U}_{1,0}^j e^{i\omega_1\varphi}) = 0 \\ \operatorname{Im}(\mathbf{U}_{0,1}^k e^{i\omega_2\varphi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}, \begin{cases} \theta_{1,0} + \omega_1\varphi \equiv 0[\pi] \\ \theta_{0,1} + \omega_2\varphi \equiv 0[\pi] \end{cases} \quad (5.32)$$

$$\Leftrightarrow \exists n_{1,0}, n_{0,1} \in \mathbb{Z}, \quad \varphi = \frac{n_{1,0}\pi - \theta_{1,0}}{\omega_1} = \frac{n_{0,1}\pi - \theta_{0,1}}{\omega_2} \quad (5.33)$$

$$\Leftrightarrow \exists n_{1,0}, n_{0,1} \in \mathbb{Z}, \quad n_{1,0}\pi\omega_2 - \theta_{1,0}\omega_2 = n_{0,1}\pi\omega_1 - \theta_{0,1}\omega_1 \quad (5.34)$$

$$\Leftrightarrow (\theta_{1,0}; \theta_{0,1}) \in \mathcal{A}, \text{ where} \quad (5.35)$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \left( x ; \frac{\omega_2}{\omega_1}x + \frac{n_{0,1}\pi\omega_1 - n_{1,0}\pi\omega_2}{\omega_1} \right), x \in \mathbb{R}, n_{1,0}, n_{0,1} \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

The set  $\mathcal{A}$  is a dense, null subset of  $\mathbb{R}^2$ . This can be seen more clearly using the linear map  $(x, y) \mapsto \left( x, y - \frac{\omega_2}{\omega_1}x \right)$ . This map transforms  $\mathcal{A}$  into the product of  $\mathbb{R}$  and a dense, countable subset of  $\mathbb{R}$ . Therefore, Eq. (5.32) has no solution, almost surely. However, for any  $(\theta_{1,0}; \theta_{0,1}) \in \mathbb{R}^2$ , there are elements in  $\mathcal{A}$  arbitrarily close to them.

These two remarks highlight a theoretical difference between the periodic and the quasi-periodic cases. However, it is not entirely relevant to numerical applications, where the ratio of the two pulsations,  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ , is bound to be rational (since the pulsations are rational too). More details will be given when necessary (see for instance section 5.4.2). In examples studied here, to find an initial solution verifying phase conditions, the authors found that a solution can be shifted to verify them approximately, in the sense of Eq. (5.31), provided that  $\varepsilon$  is not chosen too small. Corrections (*e.g.* Newton-Raphson corrections) can then be applied to provide a solution, at any given tolerance on the residual norm.

## 5.4 Forced Van der Pol oscillator

### 5.4.1 Quadratic formulations, continuation of periodic solution

An example of a forced system that exhibits periodic and quasi-periodic solutions is a forced Van der Pol oscillator :

$$\ddot{x} - \mu_1 \dot{x} + \mu_2 x \dot{x} + \mu_3 x^2 \dot{x} + a_1 x = \cos(\lambda t) \quad (5.36)$$

Values of dimensionless parameters are chosen as :  $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$ ,  $\mu_3 = a_1 = 1$ . A first quadratic formulation, emphasizing the operators of Eq. (5.13), is :

$$\dot{x} = 0 \quad + y \quad + 0 \quad (5.37a)$$

$$\dot{y} = \cos(\lambda t) \quad + \mu_1 y - a_1 x \quad - \mu_2 x y - \mu_3 y z \quad (5.37b)$$

$$\underbrace{\dot{z} = 0}_{\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}} \quad \underbrace{+ z}_{\mathbf{l}_0 \mathbf{u}} \quad \underbrace{- x^2}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (5.37c)$$

#### 5.4. Forced Van der Pol oscillator

Operators  $\mathbf{c}_1$  and  $\mathbf{l}_1$  are null. Similarly to example 4 in [CV09], the forcing term  $\cos(\lambda t)$  is placed in the second line of the constant operator. It means that its constant amplitude (1) is added to the second equation on  $\cos(\omega t)$  (line  $N_{eq} + 2$  in the system of Eq. (5.21)). The additional equation is then simply :  $\omega = \lambda$ . The drawback is that if the system, forced at a pulsation  $\lambda$ , is able to adopt a pulsation  $\omega \neq \lambda$ , the additional condition must be changed manually to reflect that : an *a priori* knowledge of the solution becomes necessary.

Another way (cited in [KO07]) of including a forcing term is to consider the following nonlinear differential system :

$$\dot{c} = c + \lambda s - c(c^2 + s^2) \quad (5.38a)$$

$$\dot{s} = s - \lambda c - s(c^2 + s^2) \quad (5.38b)$$

with the phase equation  $s(t = 0) = 0$ , admitting  $c = \cos(\lambda t)$ ,  $s = -\sin(\lambda t)$  as a unique stable solution in the steady state regime. Hence, a second possible quadratic formulation is :

$$\dot{x} = y \quad + 0 \quad + 0 \quad (5.39a)$$

$$\dot{y} = c + \mu_1 y - a_1 x \quad + 0 \quad - \mu_2 xy - \mu_3 yz \quad (5.39b)$$

$$0 = z \quad + 0 \quad - x^2 \quad (5.39c)$$

$$\dot{c} = c \quad + \lambda s \quad - cr \quad (5.39d)$$

$$\dot{s} = s \quad - \lambda c \quad - sr \quad (5.39e)$$

$$\underbrace{0}_{\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}} = \underbrace{-r}_{\mathbf{l}_0\mathbf{u}} \quad \underbrace{+ 0}_{\lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u}} \quad \underbrace{+ c^2 + s^2}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (5.39f)$$

In this second formulation, constant operators  $\mathbf{c}_0$  and  $\mathbf{c}_1$  are null. Both formulations (Eq. (5.37), (5.39)) can be used for the continuation of periodic or quasi-periodic solutions. However, in the second one, variables  $c$ ,  $s$  and  $r$  must be developed in Fourier series although they are expected to have only one non-zero coefficient.

The periodic solution at pulsation  $\omega = \lambda$  is continued, and the bifurcation diagram is presented in fig. 5.1. The stability is computed thanks to Hill's method [LT10]. The solution is stable for low forcing pulsations, then a Neimark-Sacker bifurcation occurs at  $\lambda \simeq 1.798$ , the solution becomes unstable and there is an emerging quasi-periodic solution branch that will be continued.

The quadratic formulation of Eq. (5.37) is used to continue the quasi-periodic solution, now with the following additional equations :

$$\lambda = \omega_1, \quad \text{Im}(x_{0,1}) = 0 \quad (5.40)$$

The first condition is the same forcing condition as before, while the second condition means : the coefficient of  $\sin((0\omega_1 + 1\omega_2)t)$  for the variable  $x$  is null. In fig. 5.2, the coefficient of  $\cos(0\omega_1 + 1\omega_2)t$  of the variable  $x$  (*i.e.*  $\text{Re}(x_{0,1})$ ) is plotted versus the forcing pulsation  $\omega_1$ . Following the concept of a secondary Hopf bifurcation, in the vicinity of the Neimark-Sacker bifurcation, the new (quasi-periodic) branch diverges from the previous periodic branch with a first Fourier coefficient growing as a square root.

A criterion proves useful to verify the accuracy of the solution branch avoiding costly comparisons to time integration. One can use an energy criterion : how many terms in the Fourier series must be retained to find an arbitrary percentage, *e.g.* 99.5 %, of the 2-norm of a reference solution ? For a variable, *e.g.*  $x$ , let us define the 2-norms of the partial sums :

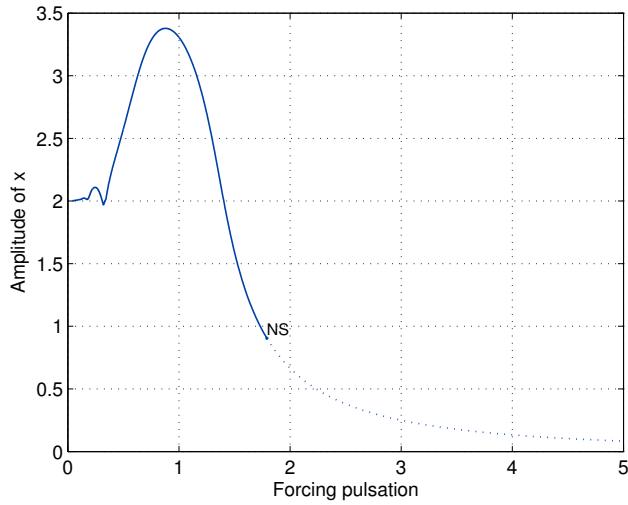


FIGURE 5.1 – Forced Van der Pol system (Eq. (5.36)), continuation (with  $H = 25$ ) of the periodic solution that has the same pulsation as the forcing pulsation, peak-to-peak amplitude of  $x$  versus the forcing pulsation. Solid line indicates a stable solution, dashed line, unstable. The dot with letters NS indicates a Neimark-Sacker bifurcation.

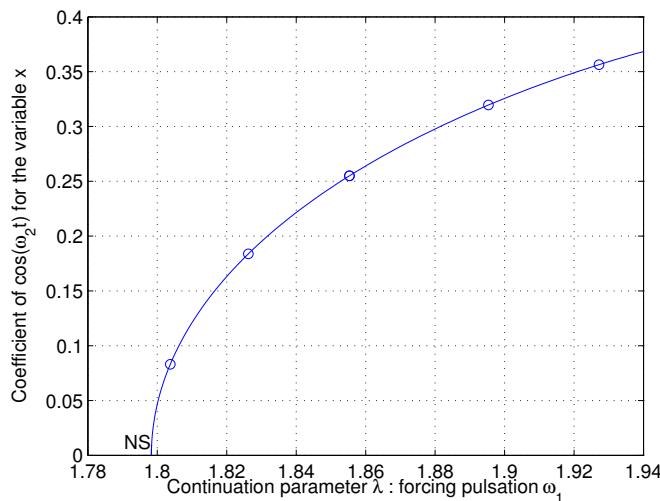


FIGURE 5.2 – Forced Van der Pol (Eq. (5.36)), continuation of the quasi-periodic solution with  $H = 6$ , coefficient of  $\cos(\omega_2 t)$  for the variable  $x$  versus the continuation parameter  $\lambda$ , that is, the forcing pulsation  $\omega_1$ . Solid blue line : solution branch ; blue dots : ends of continuation steps. Letters NS indicate a Neimark-Sacker bifurcation.

#### 5.4. Forced Van der Pol oscillator

$$\forall k \in \llbracket 0, H \rrbracket, \|x\|_k^2 = \sum_{k_1=-k}^k \sum_{k_2=-k}^k |x_{k_1, k_2}|^2, \|x\|^2 = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H |x_{k_1, k_2}|^2 \quad (5.41)$$

and the threshold  $H_x \in \llbracket 1, H \rrbracket$  so that :

$$\|x\|_{H_x}^2 \geq \frac{99.5}{100} \|x\|^2, \|x\|_{H_x-1}^2 < \frac{99.5}{100} \|x\|^2 \quad (5.42)$$

Then, a handful of behaviors are observed. If the number  $H$  is large enough, the Fourier decomposition has numerically converged, and  $H_x$ , small before  $H$ , represents the number of harmonics needed to produce a (likely) relevant solution. For the forced Van der Pol, this criterion is applied to the solution branch computed with  $H = 6$ . It gives  $H_x = 2$  for all three variables ( $x, y, z$ ), suggesting that an approximation of the quasi-periodic solution can be computed with  $H = 2$ . As an illustration, fig. 5.3 presents solutions computed with  $H = 2$  and compares them with time integration (using Matlab ODE suite [SR97]) on a long time interval. By *long*, the authors mean with respect to the meaningful time scales here, the two periods  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  and  $\frac{2\pi}{\omega_2}$ . It is observed that the solution with  $H = 2$  may be slightly incorrect pointwise, which means that each curve (HBM and time integration) can be distinguished in the phase diagram : they leave slightly different areas empty ; they have different self-intersections and so, different moiré patterns. But the approximate shape of the solution is obtained (enveloppe in the phase diagram, time between two extrema).

If  $H_x$  is close to  $H$  it is observed that :

- either  $H$  should be increased to compute accurately the solution ;
- or the branch is going through a strong frequency-locking region, which will be studied in section 5.4.2.

#### 5.4.2 Frequency-locking regions

As the branch of quasi-periodic solution is continued, the pulsation  $\omega_2$  varies slightly but stays close to the natural pulsation  $a_1 = 1$ . The pulsation ratio  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  is thus roughly equal to  $\omega_1 = \lambda$ , and so a difficulty arises : what happens when the pulsation ratio is rational ? It is a major assumption of the method that  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are incommensurable, so one could expect the method to fail. Indeed, if there are  $p, q \in \mathbb{N}^*$  such that  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ , it can introduce redundancy in the Fourier decomposition, meaning :

$$\exists k_1, k_2, h_1, h_2 \in \llbracket -H, H \rrbracket, (k_1, k_2) \neq (h_1, h_2), k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 \quad (5.43)$$

and then the problem is ill-posed : at least two coefficients in the Fourier series are assigned to the same frequency. For a given ratio  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ , Eq. (5.43) admitting solutions is equivalent to :

$$\exists k_1, k_2, h_1, h_2 \in \llbracket -H, H \rrbracket, (k_1, k_2) \neq (h_1, h_2), (k_1 - h_1)\omega_1 + (k_2 - h_2)\omega_2 = 0 \quad (5.44)$$

$$\Leftrightarrow \exists k_1, k_2, h_1, h_2 \in \llbracket -H, H \rrbracket, (k_1, k_2) \neq (h_1, h_2), (k_1 - h_1)p\omega_1 + (k_2 - h_2)q\omega_1 = 0 \quad (5.45)$$

$$\Leftrightarrow \exists k_1 \neq h_1, k_2 \neq h_2 \in \llbracket -H, H \rrbracket, \frac{h_2 - k_2}{k_1 - h_1} = \frac{p}{q} \quad (5.46)$$

$$\Leftrightarrow \exists j_1, j_2 \in \llbracket -2H, 2H \rrbracket \setminus \{0\}, \frac{j_1}{j_2} = \frac{p}{q} \quad (5.47)$$

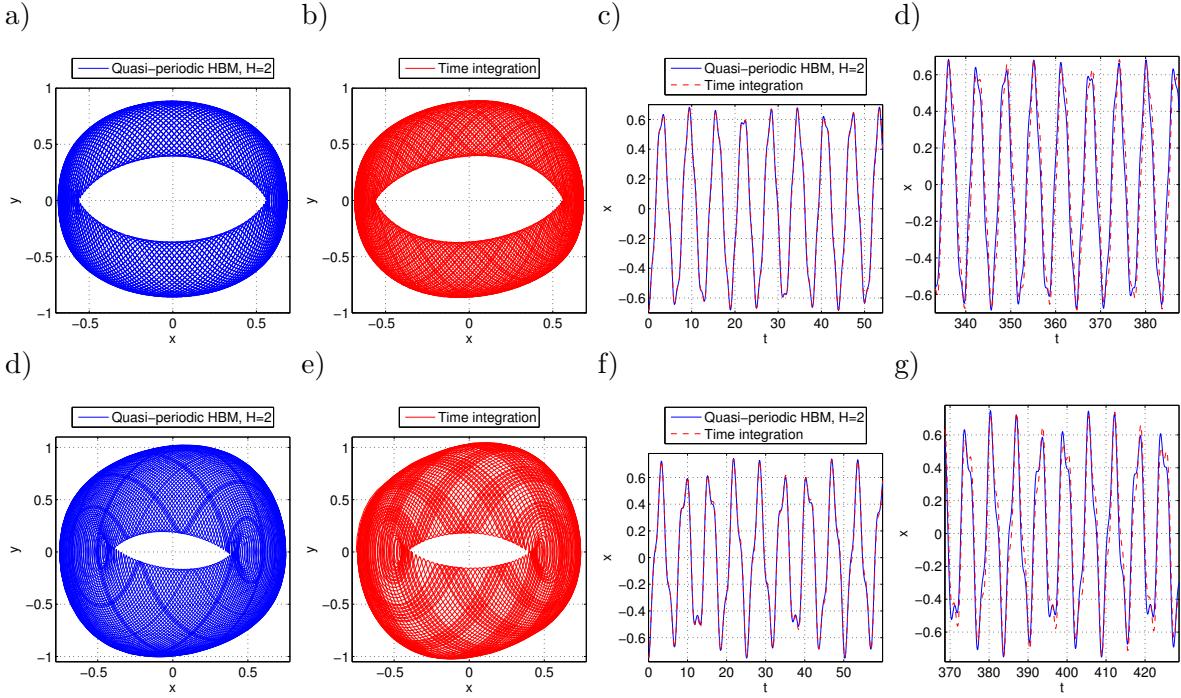


FIGURE 5.3 – Forced Van der Pol, two examples of solutions from the quasi-periodic solution branch computed with  $H = 2$ . From a) to d) : for  $\lambda \simeq 4.29$ , quasi-periodic HBM ( $H = 2$ ) in blue, time integration (ODE suite from Matlab) in red. a, b) Phase diagram ( $x, \dot{x} = y$ ). c, d) Time comparison of the quasi-periodic HBM ( $H = 2$ ) and time integration. From e to g) : similarly for  $\lambda \simeq 2.75$ . e, f) Phase diagram. g, h) Time comparison.

Thus, for a given  $H$ , there is a finite number of potentially problematic values  $\frac{j_1}{j_2}, j_1, j_2 \in [-2H, 2H]$ . Displayed on the same graph as the pulsation ratio (fig. 5.4 with  $H = 6$ ), they enlighten the continuation process : in their vicinity, the ANM reduces the step size to deal appropriately with ill-conditioned systems. We observe in this example that the major part of the issue is caused by the rationals  $\frac{j_1}{j_2}$  with small integers  $j_1$  and  $j_2$ , namely, in  $[-H, H]$  instead of  $[-2H, 2H]$ . Only two other values,  $\frac{7}{2}$  and  $\frac{7}{3}$ , called here additional values, engender a shortening of the continuation steps. However, it is less important, and solutions in these regions agree with time integration (not shown here). The choice of  $H$  is essential : for a given ratio  $\frac{p}{q}$ , choosing a smaller number  $H$  can remove solutions in Eq. (5.43). The energy criterion (Eq. (5.42)) can then be used to confirm the relevance of this choice. For instance, it was shown in a previous section that instead of  $H = 6$ , the solution branch can be computed with  $H = 2$ . Then, as shown in fig. 5.5, continuation steps are significantly shortened only around  $\lambda = 2$  and 3.

The most important cases of frequency-locking observed on this system are subharmonic resonances, *i.e.*

$$\exists q \in [1, 2H], \frac{\omega_1}{\omega_2} = q \quad \text{i.e.} \quad \omega_2 = \frac{\omega_1}{q} \quad (5.48)$$

Then any combination  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$  can be read as  $(qk_1 + k_2)\omega_2$ , and so the development in double Fourier series is likely to be highly redundant. Thanks to the robustness of the ANM, the continuation of the branch through these values ( $q = 2, 3, 4$  for  $H = 6$ ) is possible. For a

### 5.4. Forced Van der Pol oscillator

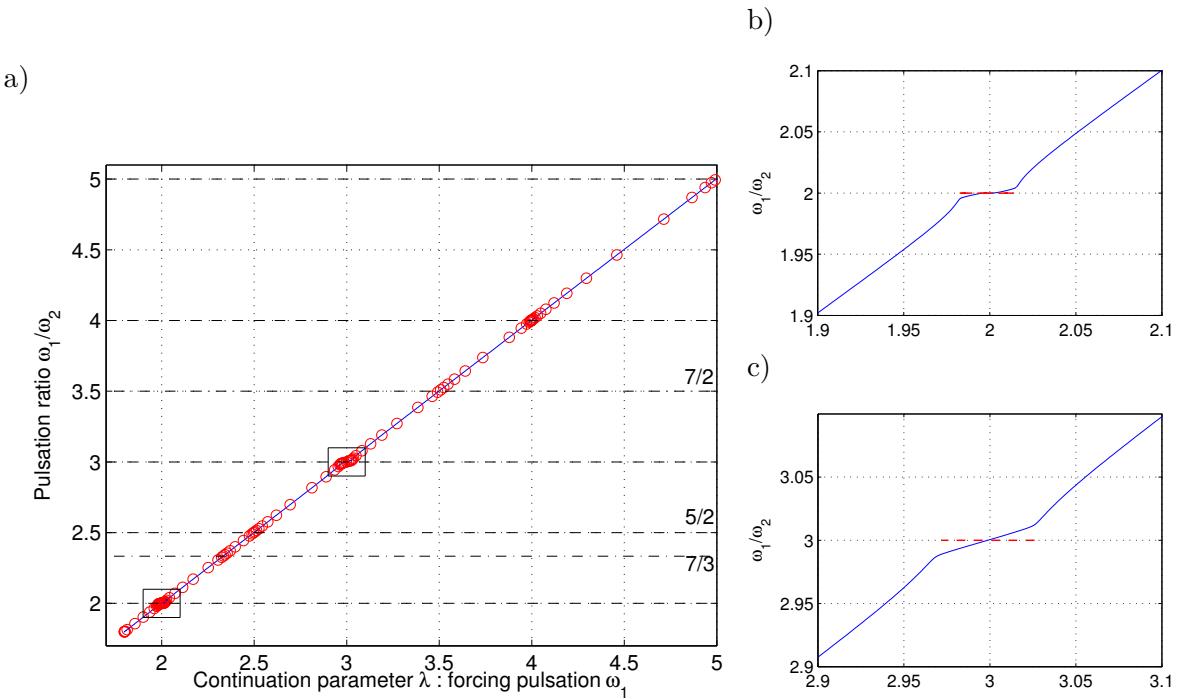


FIGURE 5.4 – Forced Van der Pol, quasi-periodic solution branch computed with  $H = 6$ . a) Pulsation ratio  $\omega_1/\omega_2$  versus the forcing pulsation  $\omega_1$ . Solid blue line : solution branch ; red dots : ends of continuation steps ; dashed black lines : rational values  $\frac{j_1}{j_2}$ ,  $j_1, j_2 \in \llbracket -H, H \rrbracket$  ; mixed black lines : additional values,  $\frac{7}{2}$  and  $\frac{7}{3}$ . b) Zoom window : around the subharmonic resonances  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$ , pulsation ratio computed by the quasi-periodic HBM (blue, solid) and by the periodic HBM (red, dashed). c) Zoom window : similar to b), around  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{3}$ .

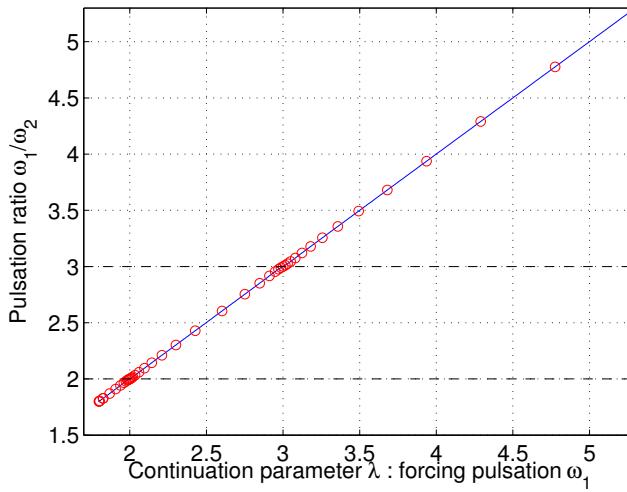


FIGURE 5.5 – Forced Van der Pol, quasi-periodic solution branch computed with  $H = 2$ . Pulsation ratio  $\omega_1/\omega_2$  versus the forcing pulsation  $\omega_1$ . Solid blue line : solution branch ; red dots : ends of continuation steps ; dashed black lines emphasize the two rational values (integers 2 and 3) where a reduction in continuation step size is observed.

given integer  $q$ , the size of the continuation steps, though small, stops decreasing and there is a continuation step crossing the boundary, the pulsation ratio being either superior or inferior to the rational number at the endpoints of the step. New periodic solutions that were not displayed on the bifurcation diagram of the periodic solution  $\omega = \lambda$  (fig. 5.1) can now be found easily and investigated.

Figure 5.6 a, shows that in the vicinity of the subharmonic resonance  $\lambda = 2$ , the quasi-periodic HBM gives qualitatively good results, with an approximate shape of the solution in the phase diagram  $(x, \dot{x})$ . However, time integration starting from this solution converges to a slightly different periodic solution. A comparison is made between three versions of the solution : as obtained with the quasi-periodic method ; with the periodic method ; steady-state of time integration. The two last ones are superposed on the figure.

In case the first quadratic formulation was chosen (Eq. (5.37)) the additional condition has to be modified into  $\omega = \frac{\lambda}{2}$ . No change is needed if the second quadratic formulation (Eq. (5.39)) is used. A short isolated solution branch is continued. Presented in fig. 5.6 the heart-shaped bifurcation diagram exhibits two solutions, one stable, one unstable, for  $\lambda$  comprised between 1.982 and 2.016. Therefore, an ideal continuation of the quasi-periodic branch should exhibit a plateau  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$ , for this interval of  $\lambda$ . Although this cannot be achieved by definition (redundancy in Fourier decomposition), it is not an issue. Once an « approximate plateau » has been observed it is easy to go back to a continuation algorithm dedicated to periodic solutions in order to compute it accurately. Fig. 5.4 displays a (smoothed) example of a pattern known as devil's staircase<sup>1</sup> : a monotonous function exhibiting steps of finite length for all rational values.

In a similar manner, isolated branches of periodic solutions are found when the quasi-periodic solution branch passes through  $\lambda = 3$  and 4. The bifurcation diagrams of these periodic solutions are presented in figure 5.7. Once more, the stable periodic solution has a narrow range of existence. The case  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{4}$  is different from the previous two cases. The branch spreads over a shorter

1. See for instance [NB08], section 4.2.

#### 5.4. Forced Van der Pol oscillator

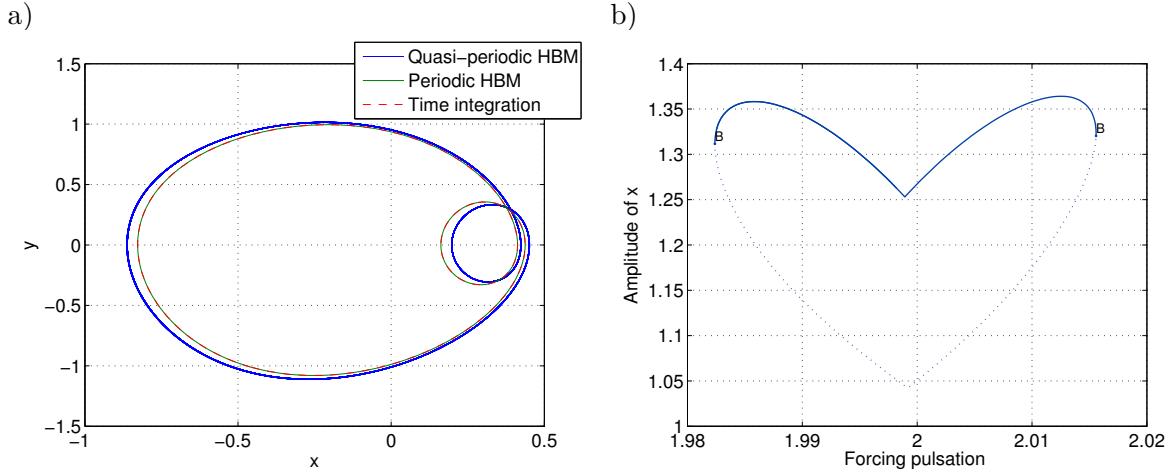


FIGURE 5.6 – Forced Van der Pol. a) Phase diagram ( $x, \dot{x} = y$ ) in the vicinity of the subharmonic resonance  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$ . Comparison of the quasi-periodic HBM (blue), periodic HBM (green) and time integration (red). b) Bifurcation diagram of the periodic solution  $2\omega = \lambda$  (solid line : stable solution, dashed : unstable, B : bifurcation).

interval (a few  $10^{-4}$  instead of a few  $10^{-2}$ ), which is consistent with the theory<sup>2</sup> : larger (coprime) integers  $p, q$  in a rational pulsation ratio are associated with smaller frequency-locking regions. One can notice that the existence interval does not include the integer value  $\lambda = 4$ .

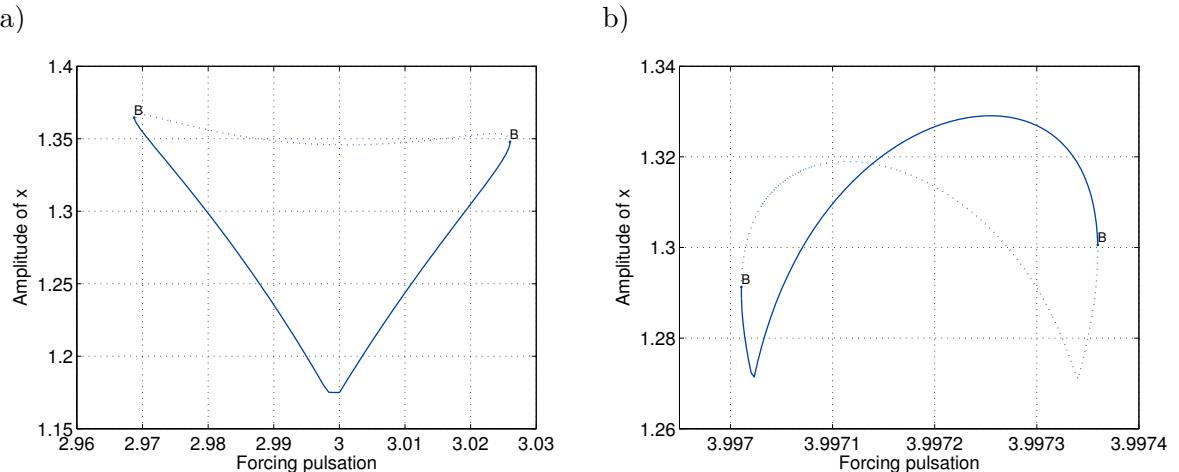


FIGURE 5.7 – Forced Van der Pol, bifurcation diagrams for two periodic subharmonic resonances. Solid line : stable solution, dashed : unstable, B : bifurcation. a) Subharmonic resonance  $3\omega = \lambda$ . b)  $4\omega = \lambda$ .

On this example, when the number  $H$  is large enough to engender issues in the vicinity of subharmonic resonances (for instance,  $H \geq 2$  around the subharmonic resonance  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{3}$ ), the norm of the Fourier coefficients exhibits important variation, with hills or valleys around the resonances. Figure 5.8 presents the 2-norm and 1-norm of  $x$ , around the subharmonic resonance 3, for  $H = 2$  and  $H = 6$ . It is observed that the hills or valleys tend to be greater for  $H = 6$  than for  $H = 2$ .

2. See for instance [NB08], section 4.2.

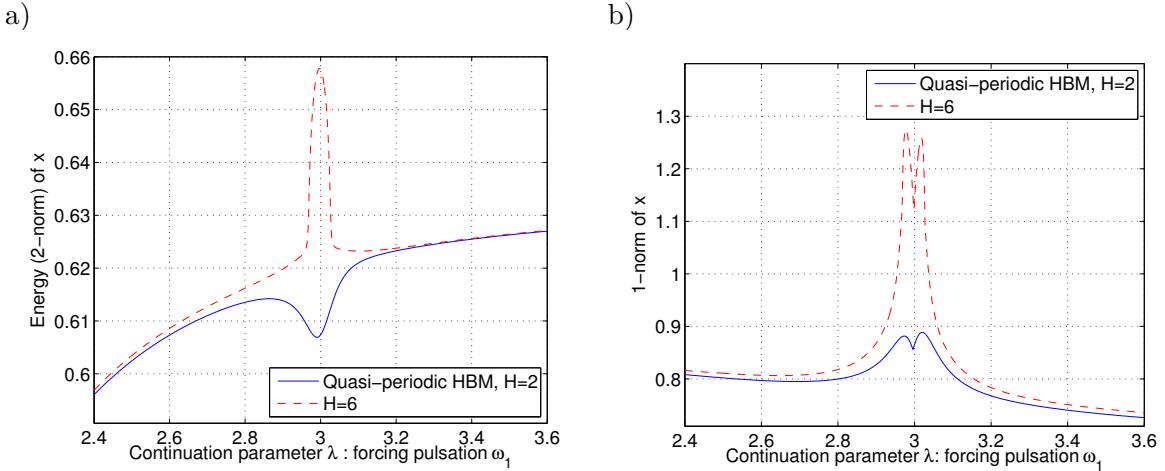


FIGURE 5.8 – Forced Van der Pol, norm of  $x$  versus the forcing pulsation for the quasi-periodic HBM, around the subharmonic resonance  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{3}$ , for  $H = 2$  (solid blue line) and  $H = 6$  (dashed red line). a) 2-norm. b) 1-norm.

The existence of redundancy in the Fourier decomposition can also be observed directly on the matrix of coefficients. Figure 5.9 presents the modulus of Fourier coefficients for the variable  $x$ , around the subharmonic resonances 2 and 3, for  $H = 6$ . A block surrounding the central coefficient ( $k_1 = k_2 = 0$ ) is almost replicated, following a simple pattern since  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{q} \Leftrightarrow \forall k_1, k_2, (k_1 + 1)\omega_1 + (k_2 - q)\omega_2 = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ . For instance, in the vicinity of the resonance 2, the pulsations 0,  $\omega_1 - 2\omega_2$ ,  $2\omega_1 - 4\omega_2$  and  $3\omega_1 - 6\omega_2$  are almost equal. The central coefficient  $(k_1, k_2) = (0, 0)$  and its replications  $(1, -2)$ ,  $(2, -4)$  and  $(3, -6)$  are marked with black squares. Similarly for other coefficients, we observe that a right-shift of 2 columns and up-shift of 1 row links similarly close coefficients.

## 5.5 Coupled Van der Pol oscillators

Two coupled Van der Pol oscillators constitute an autonomous system exhibiting quasi-periodicity. The equations are :

$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = a_2 \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - a_3 \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2) - a_4 \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2)^2 \quad (5.49a)$$

$$\ddot{x}_2 + b_1 \dot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = b_2 \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - b_3 \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2) - b_4 \lambda(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(x_1 + x_2)^2 \quad (5.49b)$$

Values of dimensionless parameters are chosen as :  $\Omega_1 = 1$ ,  $a_1 = 0.01$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $a_3 = a_4 = 2$ ;  $\Omega_2 = 2.5$ ,  $b_1 = 0.025$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = b_4 = 4$ . A quadratic formulation, emphasizing the operators of Eq. (5.13), is :

## 5.5. Coupled Van der Pol oscillators

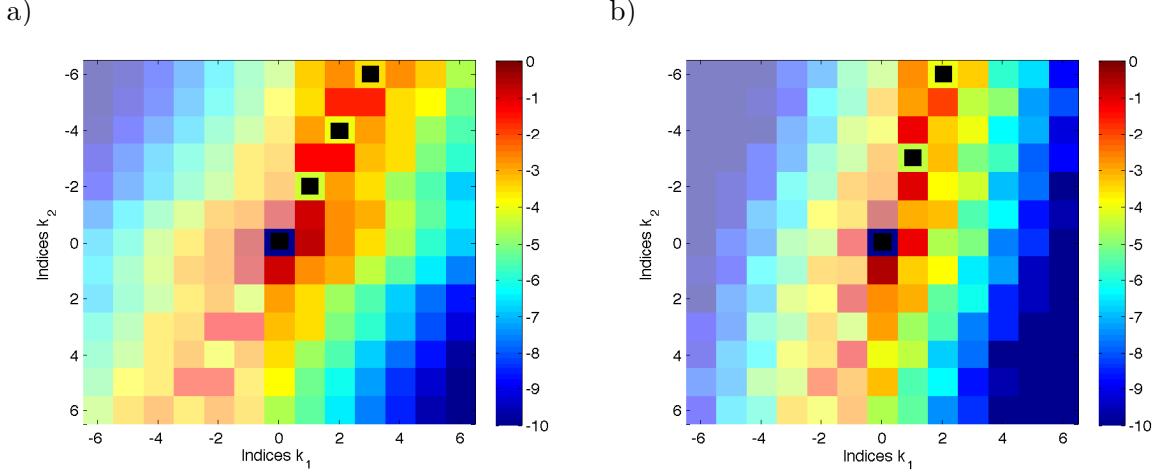


FIGURE 5.9 – Forced Van der Pol, modulus of the coefficients for the variable  $x$ , for  $H = 6$ , log color scale. a) Around the resonance  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$ . Black squares highlight the central coefficient  $(k_1, k_2) = (0, 0)$  and its replications  $(1, -2)$ ,  $(2, -4)$  and  $(3, -6)$ . b) Around the resonance  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{3}$ . This time, black squares highlight the central coefficient  $(0, 0)$  and its replications  $(1, -3)$  and  $(2, -6)$ . A translucent mask is added on the left halves to remind that they are only the complex conjugate of the right halves, according to section 5.3.3. Only the right half is computed. The left half illustrates that in the double Fourier series, indices  $k_1$  and  $k_2$  span  $[-H, H]$ .

$$\dot{x}_1 = y_1 \quad + 0 \quad (5.50a)$$

$$\dot{y}_1 = -a_1 y_1 - \Omega_1^2 x_1 \quad + a_2 \lambda(y_1 + y_2) - a_3 \lambda w - a_4 \lambda v \quad + 0 \quad (5.50b)$$

$$\dot{x}_2 = y_2 \quad + 0 \quad (5.50c)$$

$$\dot{y}_2 = -b_1 y_2 - \Omega_2^2 x_2 \quad + b_2 \lambda(y_1 + y_2) - b_3 \lambda w - b_4 \lambda v \quad + 0 \quad (5.50d)$$

$$0 = r \quad + 0 \quad - (x_1 + x_2)^2 \quad (5.50e)$$

$$0 = w \quad + 0 \quad - (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \quad (5.50f)$$

$$\underbrace{0}_{\mathbf{m}\mathbf{u}} = \underbrace{v}_{\mathbf{l}_0\mathbf{u}} \quad + \underbrace{0}_{\lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u}} \quad - \underbrace{r(y_1 + y_2)}_{\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad (5.50g)$$

In this formulation, constant operators  $\mathbf{c}_0$  and  $\mathbf{c}_1$  are null. The bifurcation diagram of the periodic solution is shown in fig. 5.10. The first periodic branch, with a pulsation close to  $\Omega_1$  and a great amplitude for the first oscillator  $x_1$ , is stable for small values of  $\lambda$ . It has a NS bifurcation (called NS1) at  $\lambda \simeq 0.35$  where it becomes unstable. The second periodic branch, with a pulsation close to  $\Omega_2$  and a great amplitude for the second oscillator  $x_2$ , is unstable at first, between a Hopf bifurcation (at  $\lambda = 0.025$ ) and a NS bifurcation (at  $\lambda \simeq 0.03$ , called NS2), where it becomes stable.

The quasi-periodic solution branch is continued using the quadratic formulation (Eq. (5.50)), now with the following phase conditions :

$$\text{Im}(x_{1,(0,1)}) = 0, \quad \text{Im}(x_{2,(1,0)}) = 0 \quad (5.51)$$

These conditions mean that the coefficient of  $\sin(\omega_2 t)$  for  $x_1$  and the coefficient of  $\sin(\omega_1 t)$  for  $x_2$  are null. Therefore, in the vicinity of the NS1 (respectively NS2) bifurcation, the rise of the quasi-periodic branch, starting from the periodic branch, is lead by a  $\cos(\omega_2 t)$  for  $x_1$ , and by

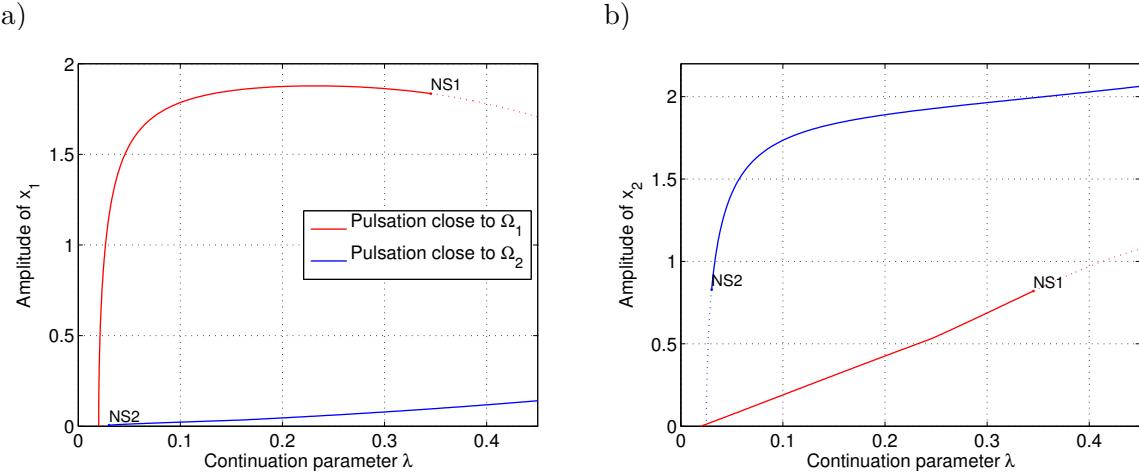


FIGURE 5.10 – Coupled Van der Pol oscillators, periodic bifurcation diagram. Solid line : stable solution ; dashed : unstable ; NS : Neimark-Sacker bifurcation. The first periodic branch, with a pulsation close to  $\Omega_1$  and a great amplitude for the first oscillator  $x_1$ , is plotted in red. The second periodic branch, with a pulsation close to  $\Omega_2$  and a great amplitude for the second oscillator  $x_2$ , is plotted in blue. a) Peak-to-peak amplitude of  $x_1$  versus the continuation parameter  $\lambda$ . b) Amplitude of  $x_2$  versus  $\lambda$ .

$\cos(\omega_1 t)$  for  $x_2$ . As shown in fig. 5.11, similarly to fig. 5.2, one notices square-root growths of these coefficients around Neimark-Sacker bifurcations. Note that around NS1 (resp. NS2) the coefficient of  $\cos(\omega_1 t)$  for the variable  $x_2$  (resp. the coefficient of  $\cos(\omega_2 t)$  for the variable  $x_1$ ) is not null : the periodic branch of  $x_2$  (resp.  $x_1$ ) affected by the NS bifurcation is of pulsation close to  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ).

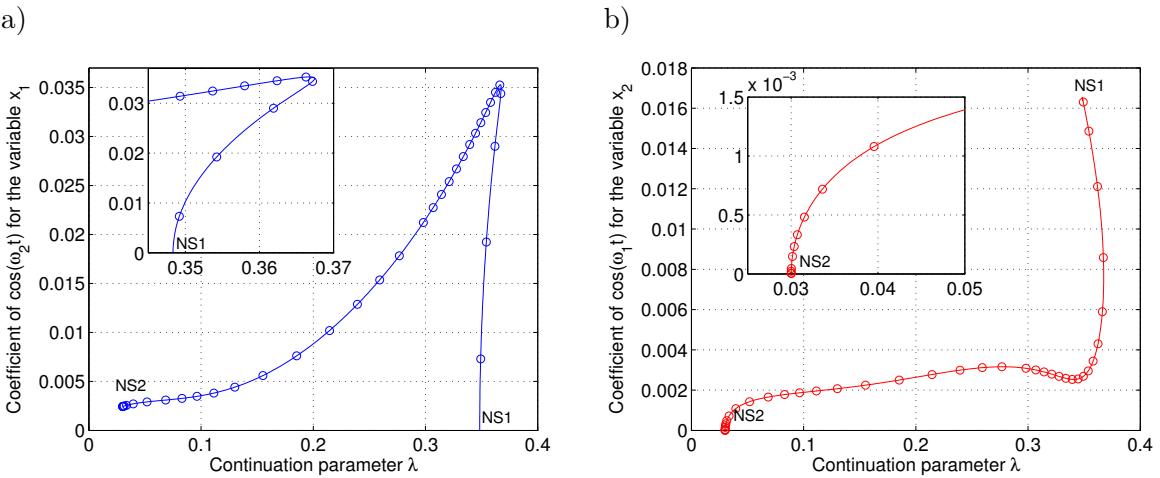


FIGURE 5.11 – Coupled Van der Pol oscillators, quasi-periodic solution branch. Some significant Fourier coefficients exhibit a square-root growth starting from Neimark-Sacker bifurcations. a) Coefficient of  $\cos(\omega_2 t)$  for  $x_1$ . b) Coefficient of  $\cos(\omega_1 t)$  for  $x_2$ .

Near NS2, the pulsation ratio  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  (fig. 5.12) is slightly inferior to the ratio  $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{1}{2.5}$  and starts increasing when  $\lambda$  increases. The 2-norm criterion (Eq. (5.42)), tested with  $H = 7$ , suggests that  $H = 3$  is sufficient to continue the branch at least from NS2 to  $\lambda = 0.2$ , where the number  $H$  can be increased. Thus, there is no problematic frequency-locking phenomenon when the pulsation

### 5.5. Coupled Van der Pol oscillators

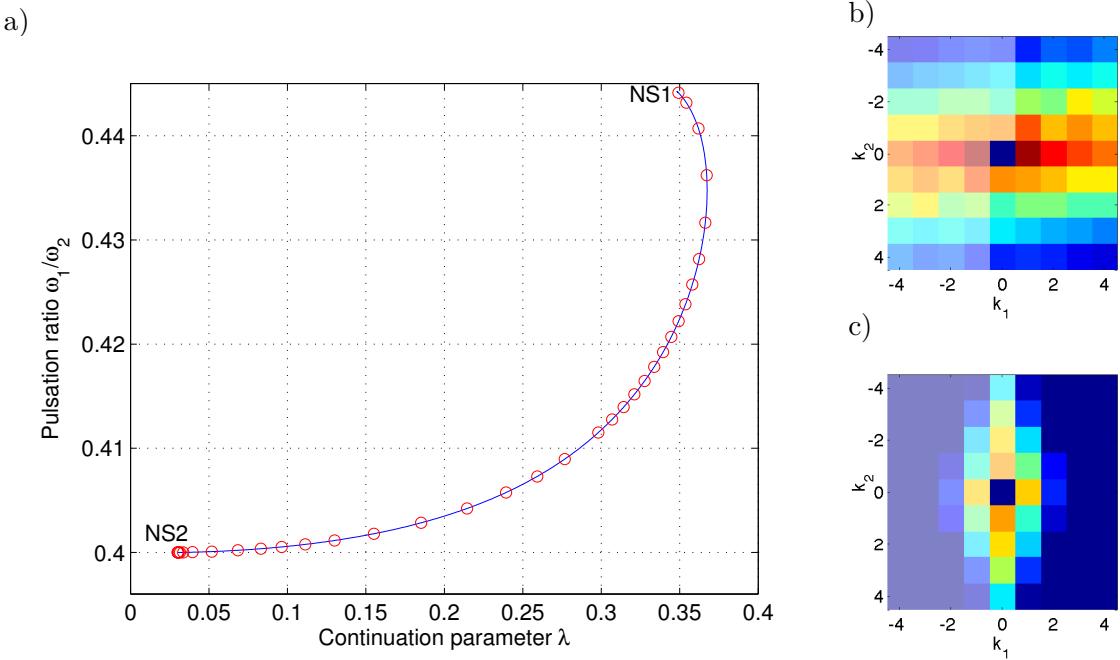


FIGURE 5.12 – Coupled Van der Pol oscillators, quasi-periodic solution branch computed with  $H = 4$ . a) Pulsation ratio  $\omega_1/\omega_2$  versus the continuation parameter  $\lambda$ . Solid blue line : solution branch ; red dots : ends of continuation steps. b) Modulus of the coefficients for the variable  $x_1$ , log color scale (see also fig. 5.9), at the Neimark-Sacker bifurcation NS1 : close to the periodic branch, the quasi-periodic solution has few coefficients with significant amplitude, and almost all have indices of the form  $(k_1, 0)$  near NS1. c) Similar to b), modulus of coefficients for  $x_1$  near NS2. Significant coefficients have indices of the form  $(0, k_2)$ .

ratio  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  goes through the rational value  $\frac{2}{5}$ . Comparisons with time integration, between NS2 and  $\lambda \simeq 0.07$ , confirm that this portion of the branch is computed accurately with  $H = 3$ . For  $\lambda$  between 0.07 and 0.2, comparison with time integration is not meaningful on long intervals, as the quasi-periodic solution seems to be unstable<sup>3</sup> : starting from the quasi-periodic solution, time integration eventually converges to one or the other periodic solutions found above, and this is still true with a more accurate quasi-periodic solution (*i.e.* with  $H$  greater than 3).

As the continuation process keeps moving towards increasing values of  $\lambda$  (and near NS1), the 2-norm criterion and comparisons with time integration both suggest an increase of the number  $H$ . A low number provides only rough approximations of the solutions : in the phase diagram  $(x_1, \dot{x}_1 = y_1)$  (fig. 5.13, a) the envelope matches the one from time integration but there is an important pointwise divergence as time increases (fig. 5.13, c, d). Adding terms in the Fourier series quickly increases the size of the systems ( $N \sim 4N_{eq}H^2$ ) and therefore it slows computations down. However, it is possible for this system to continue the branch with  $H = 10$  on a standard laptop. Agreement between the quasi-periodic HBM and time integration is then excellent (fig. 5.13, e, f).

3. The authors prefer not to assert that as a fact, since no stability analysis has been performed.

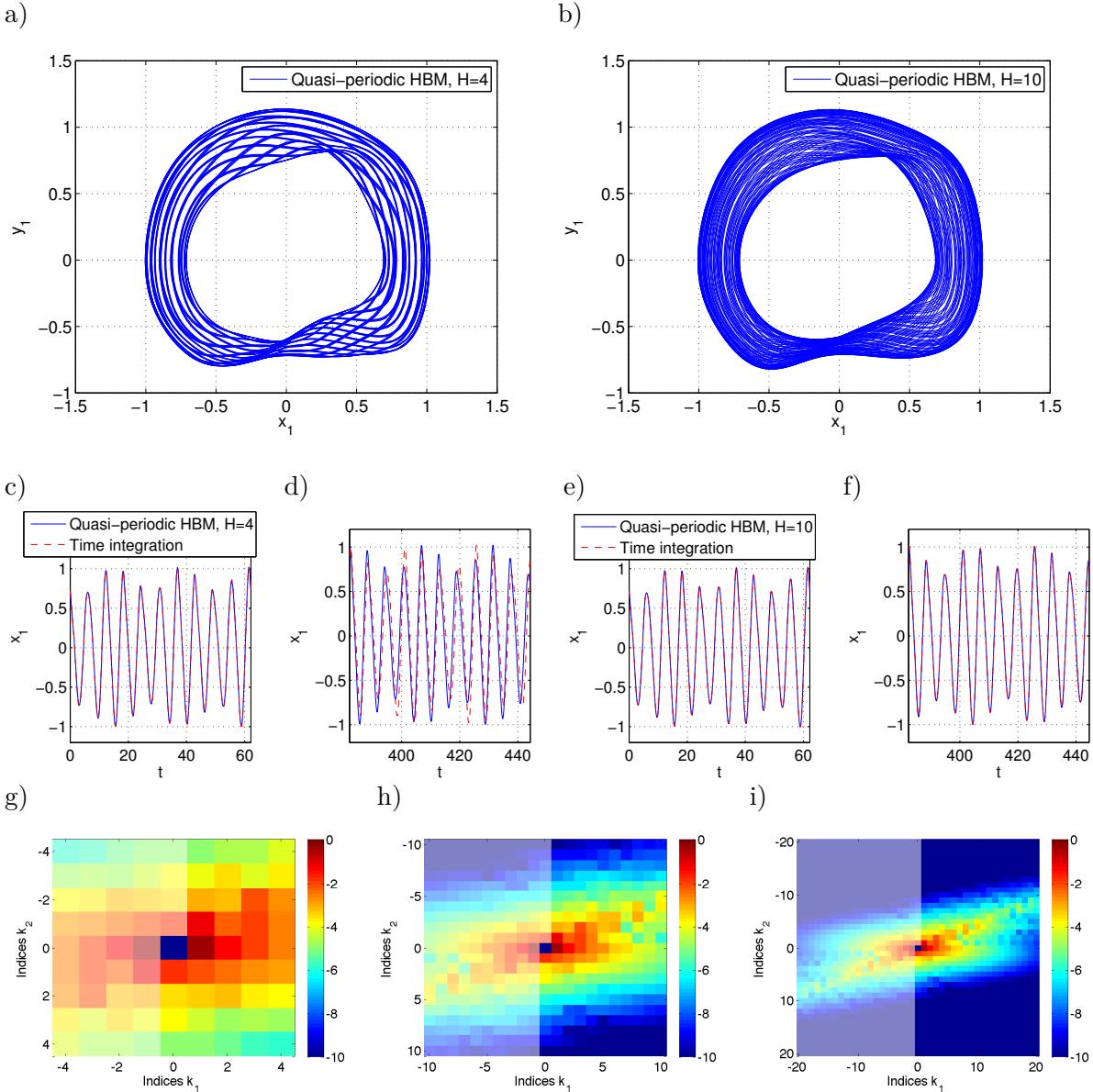


FIGURE 5.13 – Coupled Van der Pol oscillators,  $\lambda = 0.36$ , an example of quasi-periodic solution, comparison of different computations. a) Phase diagram ( $x_1, \dot{x}_1 = y_1$ ), for the quasi-periodic HBM with  $H = 4$ . b) Diagram ( $x_1, \dot{x}_1 = y_1$ ),  $H = 10$ . c, d) Comparison between the quasi-periodic HBM ( $H=4$ , blue solid line) and time integration (red dashed line). e, f) Comparison between  $H = 10$  and time integration. g to i) Modulus of the coefficients for the variable  $x_1$ , log color scale. g)  $H = 4$ . h)  $H = 10$ . i)  $H = 20$ .

## 5.6 Conclusion

An original implementation of the HBM, coupled with the ANM continuation, is presented and extended to a two-frequency HBM. The continuation of branches of quasi-periodic solutions is thus made possible. As in the periodic case, the quasi-periodic HBM coupled with the ANM is able to compute and continue solutions without need for prior knowledge, *i.e.* the two pulsations can be unknown and can vary along the solution branch, and there is no optimized harmonic selection. The method is applied successfully on a forced system and on an autonomous system,

## Références

and the results are confirmed by time integration. The accuracy of the solution can be estimated *a posteriori* by computing 2-norms of Fourier coefficients.

The ANM is very robust and allows the branch to be computed even when the pulsation ratio encounters simple rational values. If necessary, the periodic solution that it represents can be continued on its own. Around these points the number of terms in Fourier series can be reduced in order to improve the behavior of the algorithm.

## Acknowledgements

This work has been carried out in the framework of the Labex MEC (ANR-10-LABX-0092) and of the A\*MIDEX project (ANR-11-IDEX-0001-02), funded by the *Investissements d'Avenir* French Government program managed by the French National Research Agency (ANR).

## Références

- [Azr+93] L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. « An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36.8 (1993), p. 1251–1277.
- [BPV88] P. BERGER, Y. POMMEAU et C. VIDAL. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, Paris, 1988.
- [CG89] T.M. CAMERON et J.H. GRIFFIN. « An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 56.1 (1989), p. 149–154.
- [CK16] A. CHAIGNE et J. KERGOMARD. *Acoustics of musical instruments*. T. 844. Springer, 2016.
- [CN92] S.K. CHOI et S.T. NOAH. « Response and stability analysis of piecewise-linear oscillators under multi-forcing frequencies ». In : *Nonlinear Dynamics* 3.2 (1992), p. 105–121.
- [CU81] L. CHUA et A. USHIDA. « Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies ». In : *IEEE Transactions on circuits and systems* 28.10 (1981), p. 953–971.
- [CDP94] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. « The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics ». In : *Revue européenne des éléments finis* 3.2 (1994), p. 281–297.
- [CP04] B. COCHELIN et F. PÉRIGNON. « Résolution de petits systèmes algébriques par la MAN sous Matlab ». In : *Revue Européenne des Eléments* 13.1-2 (2004), p. 79–96.
- [CV09] B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), p. 243–262.
- [CNS09] N. COUDEYRAS, S. NACIVET et J.J. SINOU. « Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal ». In : *Journal of Sound and Vibration* 328.4 (2009), p. 520–540.
- [DP90] N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. « A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures ». In : *International Journal of Engineering Science* 28.9 (1990), p. 943–957.

- [DVM14] J.-B. DOC, C. VERGEZ et S. MISSOUM. « A minimal model of a single-reed instrument producing quasi-periodic sounds ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 100.3 (2014), p. 543–554.
- [Gui+17] L. GUILLOT, P. VIGUÉ, C. VERGEZ et B. COCHELIN. « Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency Harmonic Balance Method ». In : *Journal of Sound and Vibration* 394 (2017), p. 434–450.
- [GST08] M. GUSKOV, J.J. SINOU et F. THOUVEREZ. « Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics ». In : *Mechanics Research Communications* 35.8 (2008), p. 537–545.
- [Kaa85] C. KAAS-PETERSEN. « Computation of quasi-periodic solutions of forced dissipative systems ». In : *Journal of Computational Physics* 58.3 (1985), p. 395–408.
- [Kaa87] C. KAAS-PETERSEN. « Computation, continuation, and bifurcation of torus solutions for dissipative maps and ordinary differential equations ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 25.1-3 (1987), p. 288–306.
- [Kim96] Y.B. KIM. « Quasi-periodic response and stability analysis for non-linear systems : A general approach ». In : *Journal of Sound and Vibration* 192.4 (1996), p. 821–833.
- [KO07] B. KRAUSKOPF et H. M. OSINGA. « Computing invariant manifolds via the continuation of orbit segments ». In : *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer, 2007, p. 117–154.
- [LCW83] S.L. LAU, Y.K. CHEUNG et S.Y. WU. « Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 50.4a (1983), p. 871–876.
- [LT10] A. LAZARUS et O. THOMAS. « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510–517.
- [NB08] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [Pel+14] L. PELETAN, S. BAGUET, M. TORKHANI et G. JACQUET-RICHARDET. « Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics ». In : *Nonlinear Dynamics* 78.4 (2014), p. 2501–2515.
- [Ras03] B. M. RASMUSSEN. « Numerical methods for the continuation of invariant tori ». Thèse de doct. Georgia Institute of Technology, 2003.
- [SOV05] F. SCHILDER, H. M. OSINGA et W. VOGT. « Continuation of quasi-periodic invariant tori ». In : *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 4.3 (2005), p. 459–488.
- [Sch+06] F. SCHILDER, W. VOGT, S. SCHREIBER et H. M. OSINGA. « Fourier methods for quasi-periodic oscillations ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67.5 (2006), p. 629–671.
- [SR97] L. F. SHAMPINE et M. W. REICHELT. « The Matlab ODE suite ». In : *SIAM journal on scientific computing* 18.1 (1997), p. 1–22.

## Chapitre 6

# Discussions sur le calcul des branches de solutions quasi-périodiques

### Sommaire

---

6.1	Branche de solution . . . . .	147
6.2	Troncature de la série double . . . . .	148
6.3	Cas pathologiques : petits entiers, sous-harmoniques . . . . .	148
6.4	Que fait le rapport des pulsations ? . . . . .	149
6.5	Perspectives : stabilité, coexistence . . . . .	152

---

### 6.1 Branche de solution

Soit un système régulier de paramètre de continuation  $\lambda$ . On cherche à décrire sa solution par une série double de Fourier, faisant intervenir des combinaisons linéaires de deux pulsations  $\omega_1, \omega_2$  :

$$x(t) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x_{k_1, k_2} e^{i(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)t} \quad (6.1)$$

où les coefficients  $x_{k_1, k_2}$  et les pulsations  $\omega_1, \omega_2$  dépendent de  $\lambda$ . La solution est quasi-périodique lorsque  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont incommensurables, *i.e.* le rapport des pulsations  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  n'appartient pas à  $\mathbb{Q}$ .

Le rapport des pulsations est une fonction de  $\lambda$ , en général non constante, et régulière (comme le système considéré l'est aussi). Dès que le rapport n'est pas constant il passe nécessairement par des valeurs rationnelles. Dans le cas périodique, une « branche de solution périodique » est littéralement un continuum régulier en fonction de  $\lambda$ , dont les solutions sont toutes périodiques. Pour les solutions quasi-périodiques, nous commettons un abus de langage classique en parlant de « branche de solution quasi-périodique » : la solution n'est pas tout le temps quasi-périodique, même si on peut continuer les coefficients de Fourier et les pulsations selon le paramètre  $\lambda$ .

La régularité du système permet cependant une évolution régulière, selon  $\lambda$ , de la solution quasi-périodique vers une solution périodique. La représentation temporelle de la solution pour deux valeurs très proches de  $\lambda$  est très similaire, et ce pour des intervalles temporels d'autant plus longs que ces deux valeurs sont proches. Cette comparaison temporelle met en avant la notion de continuité, mais elle est imparfaite : même les solutions périodiques gagnent à être visualisées autrement, par exemple en diagramme de phase. Pour certains auteurs, la représentation des solutions (ou même leur recherche [Ras03 ; SOV05 ; Sch+06]) se fait à l'aide de tores sur lesquels

s'enroulent les solutions. Lorsque la solution est quasi-périodique pour un certain  $\lambda$ , le tore est densément parcouru par la solution. Si  $\lambda$  évolue à une valeur proche où la solution est périodique, il existe des ouverts sur la surface du tore qui ne sont pas parcourus. Ce qui est préservé de manière continue, c'est la géométrie du tore. Nous reparlons de l'aspect sous lequel la solution est recherchée dans les sections 6.2 et 6.4.

## 6.2 Troncature de la série double

On considère à présent la continuation numérique de la série tronquée

$$x(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H x_{k_1, k_2} e^{i(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)t} \quad (6.2)$$

On souligne deux propriétés importantes en pratique :  $H$  est fini ;  $\omega_1$  et  $\omega_2$  rationnels. La résonance a été définie par l'éq. (5.43). Dans ce cas, le problème est mal posé : au moins deux coefficients dans la série double,  $x_{k_1, k_2}$  et  $x_{h_1, h_2}$ , sont associés à la même fréquence. Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont incommensurables, l'équation (5.43) n'a pas de solution, il n'y a pas de résonance. Si  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}$ , nous avons montré que à  $H$  donné, il existe un nombre fini de résonances, décrit par l'équation (5.47).

La fonction  $\lambda \mapsto \frac{\omega_1(\lambda)}{\omega_2(\lambda)}$  est à image dans un intervalle de  $\mathbb{R}_+$ . À  $H$  fixé, les valeurs rationnelles de l'éq. (5.47) créent une partition de cet intervalle en intervalles ouverts. Il est déjà acquis que si le rapport reste dans un de ces intervalles il n'y a pas de résonance. Expérimentalement la situation est même plus favorable. La continuation peut passer d'un tel intervalle à l'intervalle voisin, avec une réduction de la taille des pas (fig. 5.4, p. 137) mais sans phénomène d'accumulation : lors d'un certain pas de continuation, la branche franchit la valeur rationnelle frontière. Ce type de comportement de la MAN, qui lui vaut d'être habituellement qualifiée de méthode de continuation « robuste » [CP04], est ici encore une qualité indéniable.

## 6.3 Cas pathologiques : petits entiers, sous-harmoniques

Nous examinons dans cette section deux cas pathologiques. Nous avons vu que la branche peut être calculée avec  $H$  petit pour éviter les résonances, puis que les solutions grossièrement approchées peuvent être raffinées en augmentant  $H$  (fig. 5.13, p. 144). Lorsque le rapport de pulsations rencontre une valeur  $\frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  des petits entiers, choisir  $H$  suffisamment petit pour ignorer la résonance peut être difficile, ou conduire à une trop forte dégradation de la solution trouvée.

Ainsi, pour les deux oscillateurs de Van der Pol couplés, la résonance  $\frac{2}{5}$  est difficile à traiter. Si l'on choisit  $H = 4$  (au risque d'approcher trop grossièrement la solution) la résonance est franchie avec  $\lambda$  toujours croissant. À  $H = 5$ , les pas de continuation raccourcissent mais le sens de parcours est préservé. À  $H = 6$ , il se forme une boucle en  $\lambda$  (voir fig. 6.1). Les solutions de ce quasi-plateau  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \simeq \frac{2}{5}$  ne peuvent être confirmées par intégration numérique car cette dernière converge vers une des deux solutions périodiques stables. Cependant, ce comportement de l'intégration numérique ne permet pas d'infirmer ou confirmer que ce quasi-plateau est un artefact de calcul. En effet, le long de la branche quasi-périodique, nous avons obtenu d'une part des solutions où l'intégration numérique est identique sur des temps longs, d'autre part

#### 6.4. Que fait le rapport des pulsations ?

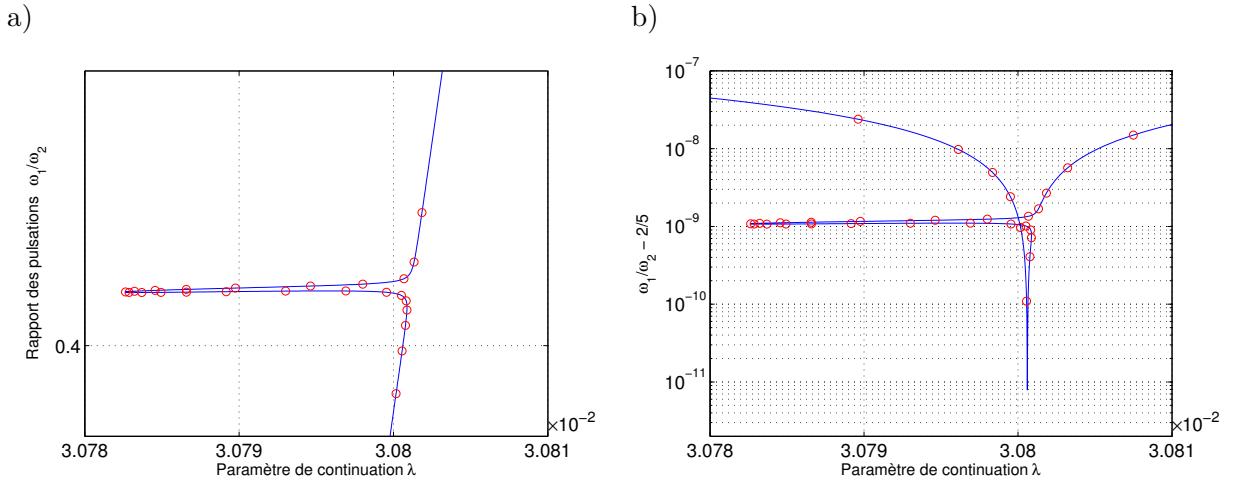


FIGURE 6.1 – Oscillateurs de Van der Pol couplés (section 5.5), calcul de la branche quasi-périodique à  $H = 6$  autour de la résonance  $\frac{2}{5}$ . a) Rapport des pulsations  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ . b) Différence entre  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  et  $\frac{2}{5}$  en valeur absolue (échelle log).

des solutions où l'intégration converge vers une solution périodique. Notons que par rapport au diagramme global (fig. 5.12, p. 143) où  $\lambda$  varie d'environ 0.3 le long de la branche, le phénomène observé ici reste circonscrit à un petit intervalle, de longueur inférieure à  $4 \times 10^{-5}$ .

Le second cas pathologique que nous discutons est lié aux sous-harmoniques. On appelle sous-harmonique le cas où une pulsation est multiple de l'autre, soit  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = q$  ou  $\frac{1}{q}$ . On a par exemple en prenant  $\omega_2 = q\omega_1$

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = (k_1 + q)\omega_1 + (k_2 - 1)\omega_2$$

donc deux lignes voisines ( $k_2$  et  $k_2 - 1$ ) de la matrice de coefficients de Fourier peuvent être redondantes (si  $k_1$  et  $k_1 + q$  sont tous les deux des indices de la matrice). D'où deux sous-cas en pratique :

1.  $q$  est grand devant  $H$ , la résonance est ignorée.  $q > 2H$  est une condition suffisante pour que  $k_1$  et  $k_1 + q$  ne soient pas tous deux dans  $[-H, H]$ . Exemple : pour le Van der Pol forcé, les résonances  $q > 4$  sont ignorées avec  $H = 2$ .
2.  $q$  est petit devant  $H$ . Exemple : pour le Van der Pol forcé,  $H = 6$ ,  $q = 2, 3, 4$ . La représentation pertinente de la solution périodique est une série simple : sous forme de série double, on a observé en fig. 5.9 la redondance des coefficients de Fourier d'une colonne à l'autre. La description quasi-périodique donne un bon point de départ pour la continuation périodique via Manlab.

#### 6.4 Que fait le rapport des pulsations ?

L'allure du rapport des pulsations appelle quelques commentaires. Théoriquement, il peut y avoir existence d'intervalles en  $\lambda$  où la solution est périodique - *i.e.* le rapport a une valeur constante rationnelle sur un intervalle de  $\lambda$ .

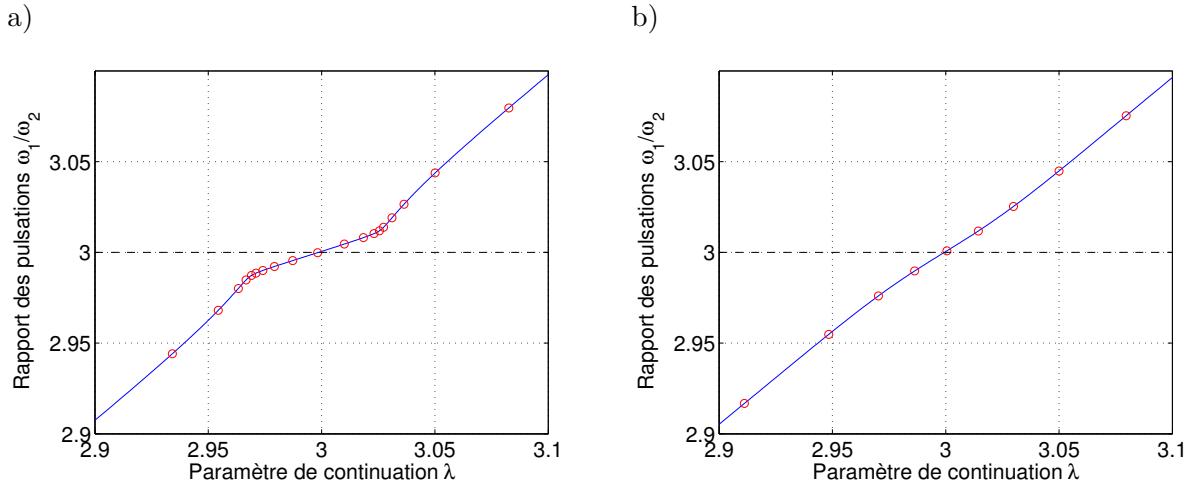


FIGURE 6.2 – Rapport des pulsations de la branche quasi-périodique en fonction de  $\lambda$  la pulsation de forçage, pour le Van der Pol forcé (section 5.4, p. 132), au voisinage de la résonance  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 3$ . Bleu : rapport des pulsations, cercles rouges : extrémités des pas de continuation. a) Branche calculée avec  $H = 6$ . b) Branche calculée avec  $H = 2$ .

Dans la pratique numérique, cela doit être tempéré par deux remarques :

- dans un algorithme de recherche des solutions quasi-périodiques comme le nôtre, le rapport ne vaudra pas (et ne doit pas valoir) cette constante rationnelle, sinon le système serait mal posé. Il en sera proche. Autour d'une résonance sous-harmonique  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = q$  ( $q = 2, 3, 4$ ) pour le Van der Pol forcé, par exemple, Manlab (dans sa version périodique, avec la formulation (5.39) qui laisse la pulsation évoluer librement) prédit un rapport exactement  $q$  (à la précision machine) sur un intervalle en  $\lambda$ . Sur le même intervalle, l'algorithme quasi-périodique donne un rapport voisin de ces valeurs (cf. fig. 5.4 b, c, p. 137).
- suivant l'ordre de troncature  $H$  retenu, la courbe du rapport, notamment dans les intervalles où le rapport est quasi-constant, évolue. D'une certaine manière, le choix de  $H$  revient à lisser plus ou moins de résonances ; nous donnons un exemple en fig. 6.2.

La description du rapport de pulsations peut faire appel à la notion d'escalier du diable (*Devil's staircase*). Ce type de fonctions, dont un cas particulier est la fonction de Cantor<sup>1</sup>, prend des valeurs constantes rationnelles sur des intervalles de longueur non nulle et croît continûment en ayant une dérivée nulle presque partout. Dans le pire cas théorique, le rapport de pulsations aussi peut présenter une infinité de plateaux, non ponctuels, de valeurs rationnelles ; et la continuation numérique telle que nous l'avons effectuée ne ferait qu'approcher ce phénomène. Dans [NB08], section 4.2, un exemple de suite est donné :

$$x_{n+1} = F(x_n) := x_n + \Omega - \frac{\sin(2\pi x_n)}{2\pi} \pmod{1} \quad (6.3)$$

Nous reproduisons en fig. 6.3 un escalier du diable selon le paramètre de continuation  $\Omega$ . Dès que la suite est périodique, elle l'est sur un ouvert ; la suite n'est quasi-périodique que pour des  $\Omega$  irrationnels isolés.

1. Voir par ex. Weisstein, E. W. : *Cantor Function*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CantorFunction.html>

#### 6.4. Que fait le rapport des pulsations ?

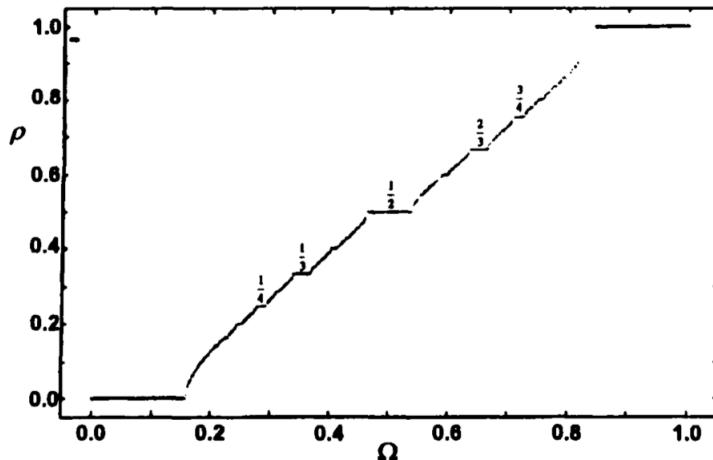


FIGURE 6.3 – L’escalier du diable pour la suite (6.3) (figure 4.2.2, p. 247 de [NB08]). En ordonnée,  $\rho$  est le *rotation number*, défini par  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_0}{n}$ . Si  $\rho \in \mathbb{Q}$  la suite est périodique, sinon, elle est quasi-périodique.

À plusieurs reprises lors d’exposés nous avons évoqué la périodicité des solutions rencontrées. Cela a inspiré à plusieurs interlocuteurs la question suivante : pourquoi ne pas chercher la branche comme des solutions périodiques ? Après tout, une branche quasi-périodique contient essentiellement des solutions périodiques ; même lorsqu’elles sont théoriquement quasi-périodiques, le calcul numérique que nous effectuons attribue des valeurs de pulsations à une précision finie, ce qui revient à un rapport de pulsations rationnel ; et la méthode de Hill est adaptée au calcul de stabilité de solutions périodiques. Nous n’avons pas exploré cette voie, et ce qui suit tente d’expliquer pourquoi cela ne semble pas pouvoir fonctionner.

Commençons à suivre une branche quasi-périodique à une bifurcation de Neimark-Sacker, où une deuxième pulsation  $\omega_2$  a émergé,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des fonctions de  $\lambda$ . Supposons qu’à chaque  $\lambda$  où elles sont commensurables, on reformule la solution en une solution périodique (de période longue). Si  $T_1 := \frac{2\pi}{\omega_1}$  (idem  $T_2$ ) sont les périodes, pour  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux, la période (minimale) est  $qT_1 (= pT_2)$ .

Visualisons à présent le comportement des rationnels entre 0 et 1, avec un pas de taille  $N^{-1}$ ,  $N = 10^3$ . Chaque rationnel  $k/N$  est réécrit sous forme irréductible (en simplifiant la fraction par le pgcd de  $k$  et  $N$ ), et l’on s’intéresse au dénominateur ainsi obtenu. Avec Matlab :

```
N=1e3;
G=gcd( (1:N), N); % pgcd de k avec N
F=N./G; % dénominateur de k/N
```

On représente en fig. 6.4 a) les dénominateurs  $F$  des fractions  $k/N$  écrites sous forme irréductible. Les deux faits que l’on peut discerner sont :

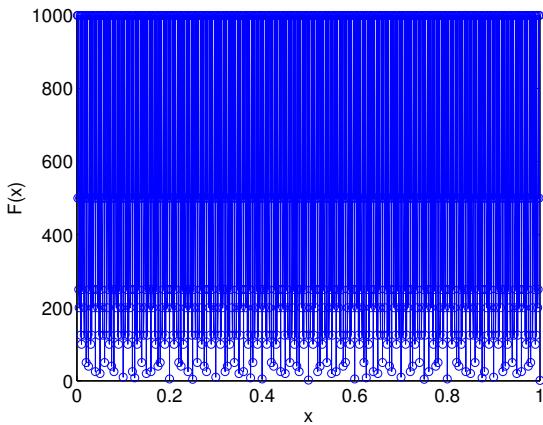
- le majorant est  $N$  : en effet, si  $\frac{k}{N}$  irréductible,  $F\left(\frac{k}{N}\right) = N$ .
- ce majorant semble souvent atteint.

On réalise le tri des valeurs prises par  $F$  et le décompte de leur nombre d’occurrences :

```
[Fcount, Fvalues]=hist (F, unique(F));
```

La figure 6.4 b) montre les valeurs de  $F$  (`Fvalues`) et leur nombre d’occurrences (`Fcount`), confirmant que la valeur  $N$  est atteinte très souvent. Si on choisit  $N$  un nombre premier, elle

a)



b)

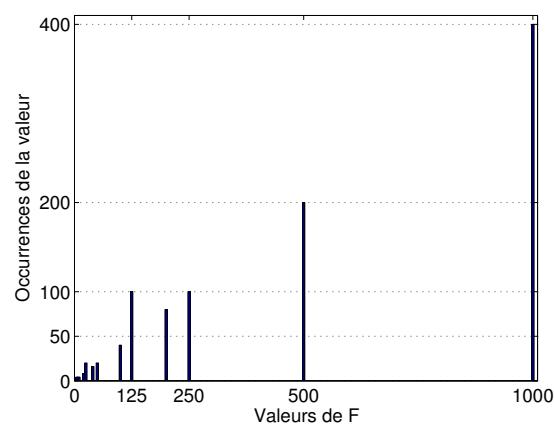


FIGURE 6.4 – Visualisation des rationnels de  $[0, 1]$ , à la précision  $N^{-1}$ ,  $N = 10^3$ . a) Fonction  $F$  : dénominateur  $q$  pour chaque rationnel  $x$  écrit sous forme irréductible  $\frac{p}{q}$ . b) Nombre d'occurrences de chaque valeur de  $F$ .

est prise tout le temps (hormis en 0 et 1). Si on prend  $N$  un produit de facteurs premiers (tous distincts ou non), l'allure des figures reste proche de notre exemple  $N = 1000 = 2^3 5^3$ . Si on prend  $N = k^n$  une puissance d'un nombre premier,  $\text{Fcount}$  est une fonction croissante (linéaire) de  $\text{Fvalues}$  : plus la valeur de  $F$  est élevée plus elle est rencontrée fréquemment.

Aussi proche que souhaité d'un rationnel  $\frac{p}{q}$  où  $p$  et  $q$  sont petits, il existe  $\frac{P}{Q}$  avec  $P \gg p$ ,  $Q \gg q$ ,  $P$  et  $Q$  premiers entre eux. Supposons donc que lorsque  $T_1$  évolue continûment selon  $\lambda$  en une valeur  $T'_1$ , le rapport  $\frac{p}{q}$  devient un tel  $\frac{P}{Q}$ . Alors la période commune passe de  $qT_1$  à  $QT'_1$ .

Or  $T_1$  proche de  $T'_1$  tandis que  $Q$  est très supérieur à  $q$ . À cause des nombreux sauts entre des petites valeurs et des valeurs arbitrairement grandes (dépendant de la taille du pas choisi)  $F$  ne peut pas être approchée numériquement par une fonction régulière : la période des solutions périodiques rencontrées le long de la branche quasi-périodique ne constitue pas un bon paramètre de continuation.

L'exception serait lorsque la taille du pas est l'inverse de  $N$  un nombre premier. Puisqu'alors toutes les fractions sont irréductibles ( $F$  est constante), on peut supposer qu'une méthode de continuation de type prédicteur-correcteur qui imposerait aux extrémités des pas d'appartenir à la grille des  $k/N$ ,  $N$  premier, donnerait un échantillonnage de la courbe de la période commune qui semblerait assez régulier. Mais il serait faux de relier ces points les uns aux autres puisqu'entre deux points, la période prend des valeurs arbitrairement longues.

## 6.5 Perspectives : stabilité, coexistence

Lorsque pour le Van der Pol forcé étudié, avec notre algorithme de continuation quasi-périodique, le rapport des pulsations franchit la résonance  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{3}$ , que signifie la solution obtenue ? Soulignons déjà que contrairement à ce que l'on observe à l'extérieur de cet intervalle de résonance, à l'intérieur de l'intervalle l'intégration numérique ne confirme pas la solution quasi-périodique obtenue. Lorsqu'un point de la solution quasi-périodique est choisi comme

## Références

condition initiale pour l'intégration numérique, celle-ci converge vers la solution périodique stable. Il peut y avoir plusieurs raisons : soit la solution quasi-périodique calculée est fausse ; soit elle est instable. L'étude de la stabilité des solutions quasi-périodiques est un sujet riche, qui n'a pas été abordé ici. Pour certains systèmes conservatifs et des perturbations suffisamment régulières, d'après le théorème KAM<sup>2</sup>, le système perturbé admet un nouveau tore de solutions quasi-périodiques qui est « proche » du tore avant perturbation.

Une question liée est celle de la coexistence : peut-il y avoir, sur le même intervalle que celui d'existence d'une résonance périodique, une branche de solution quasi-périodique, que notre algorithme n'a pas trouvé ? La coexistence de solutions périodiques et quasi-périodiques pour un même paramètre de continuation n'est pas en soi aberrante - c'est le cas dans notre exemple des deux oscillateurs couplés (section 5.5, p. 140). Pour l'oscillateur de Van der Pol forcé étudié, la solution périodique de pulsation égale à celle du forçage est stable aux faibles pulsations de forçage, puis une bifurcation de Neimark-Sacker advient à  $\lambda \simeq 1.798$  (fig. 5.1, p. 134), au-delà de laquelle la solution est instable, où une branche quasi-périodique émerge. (La branche périodique principale ne contient pas d'autre bifurcation au-delà.) Les bifurcations aux extrémités des résonances périodiques  $\frac{1}{q}$  (fig. 5.6, 5.7) sont différentes : on quitte les solutions périodiques par bifurcation de point limite (multiplicateurs de Floquet +1). On peut donc penser n'avoir pas franchi d'autre bifurcation engendrant des régimes quasi-périodiques, pour  $\lambda > 1.798$ . Si on suppose n'avoir pas franchi de bifurcation, il y a un seul tore, parcouru densément ou non (quasi-périodique ou périodique). Pour répondre à cette question de coexistence de régimes, d'autres outils seraient peut-être plus adaptés, par exemple la construction des langues d'Arnold [BBJ85 ; GS94 ; MP94].

## Références

- [BBJ85] P. BAK, T. BOHR et M. H. JENSEN. « Mode-locking and the transition to chaos in dissipative systems ». In : *Physica Scripta* 1985.T9 (1985), p. 50–58.
- [CP04] B. COCHELIN et F. PÉRIGNON. « Résolution de petits systèmes algébriques par la MAN sous Matlab ». In : *Revue Européenne des Eléments* 13.1-2 (2004), p. 79–96.
- [GS94] L. GLASS et J. SUN. « Periodic forcing of a limit-cycle oscillator : Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations ». In : *Physical Review E* 50.6 (1994), p. 5077–5084.
- [MP94] R. P. McGHEE et B. B. PECKHAM. « Resonance surfaces for forced oscillators ». In : *Experimental Mathematics* 3.3 (1994), p. 221–244.
- [NB08] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [Ras03] B. M. RASMUSSEN. « Numerical methods for the continuation of invariant tori ». Thèse de doct. Georgia Institute of Technology, 2003.
- [SOV05] F. SCHILDER, H. M. OSINGA et W. VOGT. « Continuation of quasi-periodic invariant tori ». In : *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 4.3 (2005), p. 459–488.
- [Sch+06] F. SCHILDER, W. VOGT, S. SCHREIBER et H. M. OSINGA. « Fourier methods for quasi-periodic oscillations ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67.5 (2006), p. 629–671.

---

2. Voir par ex. Weisstein, E. W. : *Kolmogorov-Arnold-Moser Theorem*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Kolmogorov-Arnold-MoserTheorem.html>.



## Chapitre 7

# Algorithme rapide de calcul de la Jacobienne

### Sommaire

---

7.1	Motivation et principe général . . . . .	155
7.2	Notations : complexes et réels . . . . .	157
7.3	Application linéaire : passage en réels . . . . .	157
7.4	Opérateur de dérivation . . . . .	158
7.5	Petit opérateur quadratique : autour de la matrice de convolution .	159
7.5.1	Suppression de lignes . . . . .	160
7.5.2	Opérations sur les colonnes . . . . .	160
7.5.3	Concaténation, permutation, passage en réels . . . . .	162
7.6	Temps de calcul . . . . .	162

---

Dans ce chapitre, nous présentons le travail inédit qui a suivi la première version du code, pour calculer rapidement la matrice Jacobienne que nécessite la MAN. La section 7.1 présente la motivation de ce travail, et les différentes pistes pouvant être envisagées pour calculer la Jacobienne. La section 7.2 introduit des notations, permettant de définir les transformations entre complexes et réels. Les sections suivantes présentent la construction de la Jacobienne, puis une comparaison des temps de calcul entre la première et la seconde version.

### 7.1 Motivation et principe général

Soit la reformulation quadratique

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0\mathbf{u} + \lambda\mathbf{l}_1\mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (7.1)$$

Soit  $N_{eq}$  le nombre d'équations (la taille de  $\mathbf{u}$ ) ;  $\mathbf{u}$  est recherché comme somme double :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k_1=-H}^H \sum_{k_2=-H}^H \mathbf{U}_{k_1, k_2} e^{i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)t} \quad (7.2)$$

Notons  $\mathbf{U}$  la concaténation des vecteurs de coefficients de Fourier complexes :

$$\mathbf{U} := \left( \mathbf{U}_{0,0} \ (\mathbf{U}_{0,k_2})_{1 \leq k_2 \leq H} \ (\mathbf{U}_{k_1,k_2})_{\substack{1 \leq k_1 \leq H \\ -H \leq k_2 \leq H}} \right)^t \quad (7.3)$$

$\mathbf{U}$  est de taille  $N_C N_{eq}$  ( $N_C$  vecteurs, chacun de taille  $N_{eq}$ ), en posant :

$$N_C := 1 + H + H(2H + 1) = 2H(H + 1) + 1 \quad (7.4)$$

Vu ce qui précède (section 5.3.3, p. 129) on a défini des opérateurs complexes agissant sur les coefficients de Fourier complexes  $\mathbf{U}$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , et  $\lambda$ . Par simplicité le calcul du résidu a été implémenté en complexes, et défini par :

$$\mathbf{R}_{\mathbb{C}}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}, \lambda) := (\omega_1 \mathbf{M}_1 + \omega_2 \mathbf{M}_2) \mathbf{U} - \mathbf{L}(\mathbf{U}, \lambda) - \mathbf{Q}((\mathbf{U}, \lambda), (\mathbf{U}, \lambda)) - \mathbf{C} \quad (7.5)$$

Or, la MAN est définie pour des applications réelles. Pour la fonction réelle de résidu  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}(\cdot) := \mathbf{C}_{\mathbb{R}} + \mathbf{L}_{\mathbb{R}}(\cdot) + \mathbf{Q}_{\mathbb{R}}(\cdot, \cdot) \quad (7.6)$$

sa Jacobienne en  $Y$ , dont on a besoin pour la MAN, s'écrit

$$\mathbf{JR}_Y = \mathbf{L}_{\mathbb{R}} + \mathbf{Q}_{\mathbb{R}}(Y, \cdot) + \mathbf{Q}_{\mathbb{R}}(\cdot, Y) \quad (7.7)$$

ou, quitte à rendre  $\mathbf{Q}_{\mathbb{R}}$  symétrique,

$$\mathbf{JR}_Y = \mathbf{L}_{\mathbb{R}} + 2\mathbf{Q}_{\mathbb{R}}(Y, \cdot) \quad (7.8)$$

En définissant la « Jacobienne complexe en  $(\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}, \lambda)$  » :

$$\mathbf{JR}_{\mathbf{U}} := (\omega_1 \mathbf{M}_1 + \omega_2 \mathbf{M}_2) - \mathbf{L} - \mathbf{Q}((\mathbf{U}, \lambda), \cdot) - \mathbf{Q}(\cdot, (\mathbf{U}, \lambda)) \quad (7.9)$$

on verra en section 7.3 qu'une des étapes pour obtenir la Jacobienne réelle (7.8) à partir de la Jacobienne complexe (7.9) est simple : exprimer la matrice d'une application linéaire agissant sur les coefficients de Fourier réels, connaissant celle de l'application linéaire agissant sur les coefficients complexes. La difficulté découle en fait particulièrement de l'opérateur quadratique. Nous disposons pour le moment d'un algorithme pour le calcul des images  $\mathbf{Q}((\mathbf{U}_1, \lambda_1), (\mathbf{U}_2, \lambda_2))$ . Or on a besoin de connaître la matrice de l'application linéaire  $\mathbf{Q}((\mathbf{U}, \lambda), \cdot)$  (et finalement, la matrice de l'application réelle correspondante).

Trois approches sont envisageables :

1. la matrice d'une application linéaire a pour coefficients les images de la base canonique. En donnant en entrée à  $\mathbf{JR}_{\mathbf{U}}$  les vecteurs de la base canonique<sup>1</sup>, les sorties sont les lignes de la matrice  $\mathbf{JR}_{\mathbf{U}}$ . Puis on peut calculer  $\mathbf{JR}_Y$  en prenant les parties réelle et imaginaire. Cette approche par énumération de la base canonique, utilisée (en réels) pour Manlab 1 et 2, a été la première mise en œuvre ici vue sa simplicité. Il faut réaliser une boucle `for`, ce qui est lent, et la longueur de la boucle est la taille de la base, qui augmente en  $H^2$  pour le cas quasi-périodique.
2. la matrice de l'application linéaire «  $\mathbf{Q}_{\mathbb{R}}$  à un argument fixé » est rapidement calculable si l'on connaît le tenseur d'ordre 3  $\mathbf{Q}$  tel que  $\mathbf{Q}_{\mathbb{R}}(X, Y) = X^t Q Y$ . La construction de ce tenseur est l'approche proposée dans le cas périodique par S. Karkar dans sa thèse ([Kar12], section 4.3) et implémentée dans Manlab 3. Elle n'a pas été suivie ici car les formules sont pressenties plus difficiles à trouver que dans le cas périodique, et en pratique la correction du code peut s'avérer longue. Un autre inconvénient est le temps requis pour la construction initiale des tenseurs, qui repose à nouveau sur une boucle `for` de même longueur que la base canonique.

---

1. La famille de vecteurs nuls sauf un coefficient égal à 1 ou à  $i$ .

## 7.2. Notations : complexes et réels

3. l'opérateur  $\mathbf{Q}$  décrit des produits de variables, et son image est calculée par convolution (cf. section 5.3.3, p. 131). Or la « convolution à un argument fixé » est une opération (linéaire) dont la matrice peut être obtenue immédiatement par un constructeur matriciel dans Matlab. Ce sera l'élément clé de cette troisième approche, que nous détaillons à présent.

## 7.2 Notations : complexes et réels

On définit  $\mathbf{W}$  les coefficients de Fourier réels :

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0,0} & 2\Re(\mathbf{U}_{0,k_2})_{1 \leq k_2 \leq H} & 2\Re(\mathbf{U}_{k_1,k_2})_{\substack{1 \leq k_1 \leq H \\ -H \leq k_2 \leq H}} & -2\Im(\mathbf{U}_{0,k_2})_{1 \leq k_2 \leq H} & -2\Im(\mathbf{U}_{k_1,k_2})_{\substack{1 \leq k_1 \leq H \\ -H \leq k_2 \leq H}} \end{pmatrix}^t \quad (7.10)$$

On pose

$$N_T := 1 + 2(H + H(2H + 1)) = (2H + 1)^2 \quad (7.11)$$

Le vecteur  $\mathbf{W}$  est la concaténation de  $N_T$  vecteurs de taille  $N_{eq}$ .

Si on note

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_{1 \leq i \leq N_{eq}} \quad (\text{constantes}) \quad (7.12a)$$

$$\mathbf{W}_C = \mathbf{W}_{N_{eq}+1 \leq i \leq N_{eq}N_C} \quad (\text{cosinus}) \quad (7.12b)$$

$$\mathbf{W}_S = \mathbf{W}_{i > N_{eq}N_C} \quad (\text{sinus}) \quad (7.12c)$$

on définit le passage des coefficients réels aux coefficients complexes via :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \left[ \frac{1}{2}\mathbf{W}_C - \frac{i}{2}\mathbf{W}_S \right] \end{pmatrix} \quad (7.13a)$$

$$\text{donc } \Re(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{W}_C \end{pmatrix}, \quad \Im(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N_{eq} \times 1} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{W}_S \end{pmatrix} \quad (7.13b)$$

tandis qu'on définit l'écriture réelle d'un vecteur  $\mathbf{U}$  par le vecteur :

$$\mathbf{W} = (\Re(\mathbf{U}_{1 \leq i \leq N_{eq}}) \quad 2\Re(\mathbf{U}_{N_{eq}+1 \leq i \leq N_{eq}N_C}) \quad -2\Im(\mathbf{U}_{N_{eq}+1 \leq i \leq N_{eq}N_C}))^t \quad (7.14)$$

## 7.3 Application linéaire : passage en réels

Cette section est à portée générale : nous allons nous ramener successivement pour les différents opérateurs de l'éq. (7.9) au calcul suivant (le cas particulier de l'opérateur  $\mathbf{L}$  est évoqué en fin de section). Étant donnée une matrice complexe d'une application linéaire agissant sur les coefficients de Fourier complexes :

$$\mathbf{A} : \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_{eq}N_C} \rightarrow \mathbb{C}^{N_{eq}N_C},$$

construire la matrice réelle de  $\mathbf{B} : \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_{eq}N_T} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{eq}N_T}$ , application linéaire agissant sur les coefficients de Fourier réels, telle que l'écriture en réels (au sens de la définition (7.14)) de  $\mathbf{AU}$  soit égale à  $\mathbf{BW}$ .

On construit la matrice  $\mathbf{B}$  par blocs, en utilisant un découpage par blocs de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right), \quad (7.15)$$

$$A_1 := \mathbf{A}_{\substack{1 \leq i \leq N_{eq} \\ 1 \leq j \leq N_{eq}}}, \quad A_2 := \mathbf{A}_{\substack{1 \leq i \leq N_{eq} \\ j > N_{eq}}}, \quad A_3 := \mathbf{A}_{\substack{i > N_{eq} \\ 1 \leq j \leq N_{eq}}}, \quad A_4 := \mathbf{A}_{\substack{i > N_{eq} \\ j > N_{eq}}}$$

dont on assemble les parties réelle et imaginaire. Nous montrons le principe sur le bloc  $A_4$ . On note

$$A_R = \Re(A_4), \quad A_I = \Im(A_4) \quad (7.16)$$

Alors

$$A_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{W}_C - \frac{i}{2} \mathbf{W}_S \right) = A_R \frac{1}{2} \mathbf{W}_C - A_I \left( -\frac{1}{2} \mathbf{W}_S \right) + i \left[ A_R \left( -\frac{1}{2} \mathbf{W}_S \right) + A_I \frac{1}{2} \mathbf{W}_C \right] \quad (7.17)$$

Ce résultat a pour écriture réelle :

$$\begin{pmatrix} A_R \mathbf{W}_C + A_I \mathbf{W}_S \\ A_R \mathbf{W}_S - A_I \mathbf{W}_C \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

(le double de la partie réelle, l'opposé du double de la partie imaginaire). La matrice notée

$$B_4 := \left( \begin{array}{c|c} B_{4,1} & B_{4,2} \\ \hline B_{4,3} & B_{4,4} \end{array} \right) \quad (7.19)$$

telle que

$$B_4 \begin{pmatrix} \mathbf{W}_C \\ \mathbf{W}_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R \mathbf{W}_C + A_I \mathbf{W}_S \\ A_R \mathbf{W}_S - A_I \mathbf{W}_C \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

a pour blocs :

$$B_{4,1} = A_R, \quad B_{4,2} = A_I, \quad B_{4,3} = -A_I, \quad B_{4,4} = A_R \quad (7.21)$$

Sur ce principe, la construction de l'opérateur réel correspondant à  $\mathbf{L}$  est relativement directe. Elle est même simplifiée par le fait que cet opérateur est construit par plusieurs concaténations des petits opérateurs  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{l}_1$ , qui sont réels. La matrice de  $\mathbf{L}$  est donc une matrice réelle : ainsi, les parties imaginaires utilisées plus haut pour le cas général deviennent simplement des blocs de zéros.

À présent, nous allons détailler le traitement des autres opérateurs de l'éq. (7.9) ( $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{Q}$ ).

## 7.4 Opérateur de dérivation

Le grand opérateur de dérivation  $\mathbf{M}$ , basé sur deux matrices constantes imaginaires pures  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$ , est défini par

$$\mathbf{M}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}) = (\omega_1 \mathbf{M}_1 + \omega_2 \mathbf{M}_2) \mathbf{U}$$

Posons

$$\widetilde{\mathbf{M}} \left[ \begin{pmatrix} \omega_{1,A} \\ \omega_{2,A} \\ \mathbf{U}_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_{1,B} \\ \omega_{2,B} \\ \mathbf{U}_B \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} (\omega_{1,A} \mathbf{M}_1 + \omega_{2,A} \mathbf{M}_2) \mathbf{U}_B + \frac{1}{2} (\omega_{1,B} \mathbf{M}_1 + \omega_{2,B} \mathbf{M}_2) \mathbf{U}_A \quad (7.22)$$

## 7.5. Petit opérateur quadratique : autour de la matrice de convolution

On vérifie que  $\widetilde{\mathbf{M}}$  est une application bilinéaire symétrique, et que

$$\widetilde{\mathbf{M}} \left[ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \right] = \mathbf{M}(\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}) \quad (7.23)$$

$\mathbf{M}$  est un des opérateurs quadratiques, donc dans la Jacobienne (eq. (7.8)), il donne un terme de la forme  $2Q(Y, \cdot)$ . C'est-à-dire que l'on souhaite connaître l'application linéaire  $\widetilde{\mathbf{M}}_{\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}}$ , définie comme  $\widetilde{\mathbf{M}}$  à une entrée fixée :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}} := \widetilde{\mathbf{M}} \left[ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \bullet \right] \quad (7.24)$$

et agissant sur  $(\omega_1 \ \omega_2 \ \mathbf{U})^t$ . Sa matrice de  $N_{eq}N_C$  lignes et  $N_{eq}N_C + 2$  colonnes se construit par concaténation :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{\omega_1, \omega_2, \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{M}_1\mathbf{U} & \frac{1}{2}\mathbf{M}_2\mathbf{U} & \frac{1}{2}(\omega_1\mathbf{M}_1 + \omega_2\mathbf{M}_2) \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

La version réelle de cette application est obtenue de la même manière que pour  $\mathbf{L}$ .

## 7.5 Petit opérateur quadratique : autour de la matrice de convolution

Le petit opérateur quadratique  $\mathbf{q}$  et le grand opérateur associé  $\mathbf{Q}$  sont calculés par convolution (section 5.3.3, p. 131). Soit deux matrices carrées  $A, B$  de taille  $n = 2H + 1$ , contenant respectivement les coefficients de Fourier complexes de deux variables  $x$  et  $y$ , énumérés de  $k_1 = k_2 = -H$  jusqu'à  $k_1 = k_2 = H$ . C'est une énumération *avec redite*, puisqu'on rappelle que la moitié de la matrice des coefficients peut être omise :

$$\forall i, j, A_{i,j} = \overline{A_{n-i+1, n-j+1}}, \text{ et en particulier le coefficient central } A_{H+1, H+1} \in \mathbb{R}$$

Le produit de convolution de  $A$  et  $B$ , noté  $A * B$ , est une matrice carrée de taille  $(2n - 1)$ . Matlab le calcule via l'instruction :

$$\text{conv2}(A, B, 'full') = A * B \quad (7.26)$$

La convolution étant bilinéaire, elle s'écrit comme une application linéaire dépendant de  $A$  agissant sur  $B$ , ce que fait Matlab par l'instruction `convmtx2` :

$$\text{reshape}(\text{convmtx2}(A, n, n) \times B(:), [2n - 1 \ 2n - 1]) = A * B \quad (7.27)$$

En détail :

- `convmtx2(A, n, n)` est une matrice  $(2n - 1)^2 \times n^2$  ;
- $B(:)$  désigne la matrice  $B$  lue colonne après colonne, devenant un vecteur-colonne de longueur  $n^2$  ;
- le produit des deux objets précédents est donc licite, il forme un vecteur-colonne de longueur  $(2n - 1)^2$ , et il est remis en forme de matrice carrée (instruction `reshape`) en concaténant par colonne successive les  $(2n - 1)$  blocs successifs de  $(2n - 1)$  de coefficients.

### 7.5.1 Suppression de lignes

Le résultat souhaité pour l'équilibrage harmonique n'est pas l'intégralité<sup>2</sup> du produit de convolution, *i.e.* une matrice carrée de taille  $4H + 1$  décrivant les indices de  $(-2H, -2H)$  à  $(2H, 2H)$ . On ne veut conserver, au sein de la partie centrale<sup>3</sup> de taille  $n = 2H + 1$  (indices  $(-H, -H)$  à  $(H, H)$ ), que la moitié droite en partant du coefficient central. Sur le schéma suivant, la partie rouge est à exclure :

-2H, -2H					H lignes
	-H,-H		1,-H H,-H		H lignes
		<b>0,0</b>			1 ligne
		0,H	1,H H,H		H lignes
					2H,2H
H colonnes	H colonnes	1 col.	H colonnes	H colonnes	

Le produit  $\text{convmtx2}(A, n, n) \times B(:)$  étant la version colonne par colonnes du tableau ci-dessus, pour en supprimer certaines lignes, on supprime certaines lignes de la matrice  $\text{convmtx2}(A, n, n)$ . Plus spécifiquement, partant de cette dernière on construit la matrice  $P_x$  comme suit :

- on supprime les  $(4H + 1)(2H) + 2H$  premières lignes ;
- on garde les  $H + 1$  lignes suivantes ;
- puis,  $H$  fois de suite,
  - on supprime  $2H$  lignes,
  - puis on en garde  $2H + 1$ .

### 7.5.2 Opérations sur les colonnes

La matrice  $P_x$  obtenue est de taille  $N_C \times N_T$ . Son produit avec un vecteur-colonne  $N_T \times 1$  (coefficients de la variable  $y$  énumérés avec redite) donne les coefficients de Fourier du produit  $z = xy$ , sans redite cette fois (colonne  $N_C \times 1$ ) :

$$\underbrace{P_x}_{N_C \times N_T} \underbrace{(y_{-H,-H} \dots y_{0,0} \dots y_{H,H})^t}_{\mathbb{C}^{N_T \times 1}} = \underbrace{(z_{0,0} \dots z_{H,H})^t}_{\mathbb{C}^{N_C \times 1}}$$

Dans un premier temps, nous allons modifier les colonnes pour obtenir l'application

$$(y_{0,0} \Re(y_{k_1,k_2}) \Im(y_{k_1,k_2}))^t \in \mathbb{R}^{N_T} \mapsto (z_{0,0} \dots z_{H,H})^t \in \mathbb{C}^{N_C}$$

Nous formerons (section 7.5.3) la grande matrice complexe agissant sur  $(\mathbf{U} \lambda)^t$ , puis de manière similaire à ce qui a été réalisé pour  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{M}$  nous en modifierons les lignes pour obtenir

2. Dans `conv2`, c'est l'instruction '`full`'.

3. Dans `conv2`, c'est l'instruction '`same`'.

### 7.5. Petit opérateur quadratique : autour de la matrice de convolution

l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^{N_{eq}N_T+1}$  :

$$\mathbf{Q}_{\mathbb{R}, \mathbf{W}_1, \lambda_1} : \begin{pmatrix} \mathbf{W}_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{Q}_{\mathbb{R}} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{W}_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right)$$

On découpe la matrice  $P_x$  en deux blocs et une colonne centrale :

$$P_x = \left( \begin{array}{c|cc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \right), \quad M_1, M_3 \text{ de taille } N_C \times (N_C - 1), M_2 \text{ de taille } N_C \times 1 \quad (7.28)$$

Ainsi,

$$P_x \begin{pmatrix} y_{-H, -H} \\ \vdots \\ y_{0, -1} \\ y_{0, 0} \\ y_{0, 1} \\ \vdots \\ y_{H, H} \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} y_{-H, -H} \\ \vdots \\ y_{0, -1} \end{pmatrix} + y_{0, 0} M_2 + M_3 \begin{pmatrix} y_{0, 1} \\ \vdots \\ y_{H, H} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Or pour tous  $k_1, k_2 \in \llbracket 1, H \rrbracket$ ,  $y_{-k_1, -k_2} = \overline{y_{k_1, k_2}}$  : dans l'équation (7.29) le premier vecteur est le conjugué du second, énuméré à rebours. On note  $M_{1,r}$  la matrice  $M_1$  dont on réordonne les colonnes à rebours. Alors,

$$P_x \begin{pmatrix} y_{-H, -H} \\ \vdots \\ y_{0, 0} \\ \vdots \\ y_{H, H} \end{pmatrix} = M_{1,r} \begin{pmatrix} \overline{y_{0, 1}} \\ \vdots \\ \overline{y_{H, H}} \end{pmatrix} + y_{0, 0} M_2 + M_3 \begin{pmatrix} y_{0, 1} \\ \vdots \\ y_{H, H} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$= y_{0, 0} M_2 + (M_{1,r} + M_3) \begin{pmatrix} \Re(y_{0, 1}) \\ \vdots \\ \Re(y_{H, H}) \end{pmatrix} + (-M_{1,r} + M_3) \begin{pmatrix} \Im(y_{0, 1}) \\ \vdots \\ \Im(y_{H, H}) \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

En posant

$$P_{x,r} := \left( \begin{array}{c|cc} M_2 & M_{1,r} + M_3 & -M_{1,r} + M_3 \end{array} \right) \quad (7.32)$$

on a

$$P_{x,r} \begin{pmatrix} y_{0, 0} \\ \Re(y_{0, 1}) \\ \vdots \\ \Re(y_{H, H}) \\ \Im(y_{0, 1}) \\ \vdots \\ \Im(y_{H, H}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{0, 0} \\ z_{0, 1} \\ \vdots \\ z_{H, H} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

### 7.5.3 Concaténation, permutation, passage en réels

Le petit opérateur quadratique  $\mathbf{q}$  mène à définir par blocs un grand opérateur. On prend ici un exemple pour montrer le principe : supposons qu'à la ligne  $i \in [1, N_{eq}]$  du petit système quadratique, il y ait un produit  $ax_jx_k$ , où  $a$  est une constante réelle,  $x_j$  et  $x_k$  deux variables (dont l'indice correspond à leur place dans le vecteur des variables). Alors, on place dans un grand opérateur, à la  $i$ -ème « ligne de blocs », à la  $k$ -ème « colonne de blocs », un bloc  $P_{x_j,r}$  (le bloc  $P_{\dots,r}$  de la variable  $x_j$  de la def. (7.32)) affecté du coefficient  $a$ .

Cette façon de définir le grand opérateur, de manière assez transparente depuis  $\mathbf{q}$ , est effectuée en construisant, à l'initialisation, une version tensorielle<sup>4</sup> de  $\mathbf{q}$ . La définition du grand opérateur au paragraphe précédent est donc automatique (et rapide) une fois que l'utilisateur a fourni le petit système quadratique.

Ce grand opérateur a l'avantage de la grande ressemblance avec le petit ; mais il a l'inconvenient de ne pas encore répondre à la question : définir un grand opérateur linéaire  $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}_1}$  tel que  $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}_1}\mathbf{W}_2$  soit le vecteur des coefficients de  $\mathbf{q}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  (avec  $\mathbf{U}_1$  coefficients de  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$  coefficients réels de  $\mathbf{u}_2$ ). Le principal obstacle (hormis définir l'opérateur réel agissant bien sur  $\mathbf{W}_2$  et non  $\mathbf{U}_2$ ) est que les coefficients de Fourier ne sont pas groupés par variable dans un vecteur  $\mathbf{U}$  mais par harmonique.

Le grand opérateur défini plus haut contient verticalement  $N_{eq}$  blocs de  $N_C$  lignes, et horizontalement  $N_{eq}$  blocs de  $N_T$  colonnes. On réalise les permutations de lignes et de colonnes, et on obtient  $N_C$  blocs de  $N_{eq}$  lignes d'une part,  $N_T$  blocs de  $N_{eq}$  colonnes d'autre part.

Enfin, on opère un dernier passage en réels.

L'insertion de l'opérateur  $\mathbf{l}_1$  est similaire à ce qui a été détaillé auparavant.

## 7.6 Temps de calcul

La figure 7.1 montre le temps de calcul requis pour un pas de continuation<sup>5</sup>. Le temps présenté par pas est une moyenne du temps pour 10 pas. Les tests sont réalisés sur le Van der Pol forcé dans la formulation (5.37) à  $N_{eq} = 3$  équations. Comme la taille des matrices réelles à inverser est  $N_T N_{eq} + 3$ , utiliser un modèle avec un autre nombre d'équations modifiera les valeurs des temps de calcul<sup>6</sup> mais pas l'allure des courbes.

Nous montrons le temps, au cours d'un pas de calcul, lié à la MAN seule (formation des seconds membres, inversion de la Jacobienne), et le temps pour un pas (MAN+Jacobienne, selon chaque méthode pour la Jacobienne). On constate que l'obtention de la Jacobienne par notre nouvelle approche (constructeurs matriciels) fait chuter le temps de calcul par rapport à la première approche directe (image de la base canonique, boucle `for`). Cela est si marqué que les calculs des seconds membres dans la MAN deviennent prépondérants, les traits rouges et noirs étant quasi-confondus. Les coefficients des pentes n'impliquent pas nécessairement que les algorithmes aient atteint une vitesse asymptotique. Cependant, ces coefficients montrent à la fois que la nouvelle méthode est plus rapide et que ses temps de calcul augmentent moins vite avec  $H$ . Doubler le nombre d'harmoniques multiplie environ<sup>7</sup> le nombre d'inconnues par 4, et

4. En réalité, une collection de  $N_{eq}$  matrices  $N_{eq} \times N_{eq}$ .

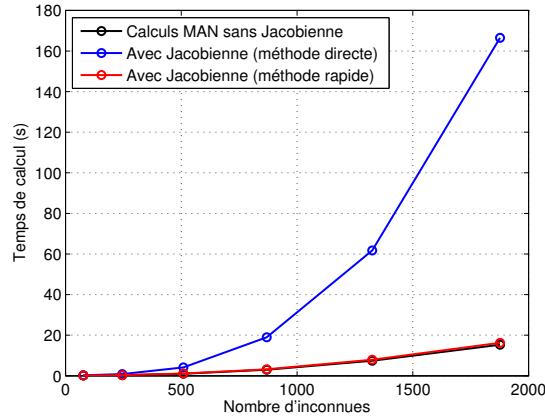
5. Tests réalisés sur un ordinateur portable datant de 2012, processeur 2.5 GHz Intel Core i5, RAM 4 Go 1600 Hz DDR3.

6. Remarque : la taille des fichiers créés croît également plus vite qu'en équilibrage harmonique périodique. Nous avons atteint lors de tests de continuation les limites d'ordinateurs non dotés de *solid state drive* : les fichiers créés lors des calculs saturent la RAM, le fichier d'échange devient important (ex : 70 Go), et les échanges disque dur-RAM sont rédhibitoires.

7. Si  $H_{\text{new}} = 2H$ ,  $N_{T,\text{new}} = (2H_{\text{new}} + 1)^2 \simeq 4H_{\text{new}}^2 = 4 \times 4H^2 \simeq 4N_T$ .

## Références

a)



b)

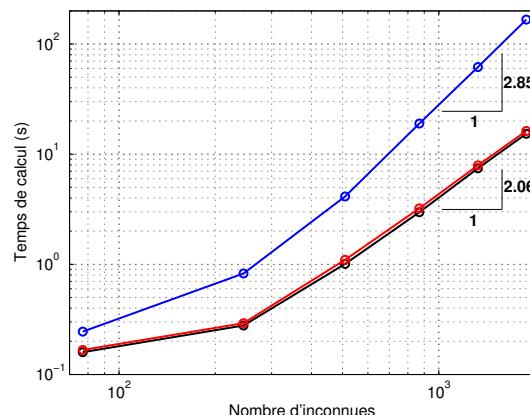


FIGURE 7.1 – Temps de calcul de la matrice Jacobienne. Noir : temps lié à la MAN seule. Bleu : MAN+EH, avec la méthode directe (image de la base canonique). Rouge : MAN+EH, avec la méthode rapide (constructeurs matriciels).

$4^{2.06} < 18$  tandis que  $4^{2.85} > 50$  : la nouvelle méthode demande<sup>8</sup> moins de 20 fois plus de temps pour doubler  $H$ , l'ancienne méthode, plus de 50 fois.

## Références

- [Kar12] S. KARKAR. « Méthodes numériques pour les systèmes dynamiques non linéaires : application aux instruments de musique auto-oscillants ». Thèse de doct. Aix-Marseille Université, 2012.

---

8. Dans le domaine de validité de ces pentes.



## **Troisième partie**

# **Modèle thermique de colophane, opérateurs fractionnaires**

## Avant-propos

Dans le chapitre 8, nous présentons le modèle de colophane proposé par J. Smith et J. Woodhouse, qui prend en compte la température de la zone de contact entre la corde et l'archet. Nous montrons qu'il peut être reformulé partiellement à l'aide d'une dérivée fractionnaire, ce qui motive d'étendre le cadre de notre travail aux systèmes différentiels contenant des opérateurs fractionnaires. Puis nous donnons des résultats complémentaires sur le modèle thermique appliqué à un modèle de corde frottée.

Dans le chapitre 9, nous reprenons un article, soumis à *Nonlinear Dynamics*, décrivant une nouvelle méthode pour la continuation de solutions périodiques des systèmes différentiels comportant des opérateurs fractionnaires. Deux cas sont traités : continuation avec ordre fractionnaire constant, et continuation selon l'ordre fractionnaire. La méthode est appliquée sur deux exemples simples (oscillateurs de type Van der Pol). Nous établissons également des conditions sous lesquelles appliquer notre méthode dans un cadre théorique plus large.

## Chapitre 8

# Du modèle thermique à la dérivation fractionnaire

### Sommaire

---

8.1	Introduction	167
8.2	Formulation initiale du modèle thermique de Smith et Woodhouse	168
8.3	Une première implémentation : convolution discrète	169
8.4	Introduction de la dérivée fractionnaire	171
8.5	Second terme de convolution	173
8.6	Transformées de Fourier des opérateurs fractionnaires	174

---

### 8.1 Introduction

Les crins de l'archet sont préalablement enduits de colophane par le musicien. Ce solide à température ambiante, raffiné à partir de sève de conifères (tels que le pin), est constitué principalement d'acide abiétique<sup>1</sup> aussi appelé acide sylvitique<sup>2</sup>. Lorsque le bloc de colophane (fig. 8.1) est frotté contre l'archet, une partie se colle aux crins, une autre se détache sous forme de fine poussière blanche ; et il en est de même lorsque le musicien joue : une partie de la colophane enduit la corde, une autre se détache et tombe sur la table d'harmonie. Lorsque l'on chauffe la colophane<sup>3</sup>, elle se ramollit progressivement : vers 60°C on peut la marquer de la pointe d'un couteau, vers 75° elle forme un liquide très épais et collant, et sa viscosité diminue jusqu'à aboutir à un liquide facile à verser vers 93°C. Ces considérations sont importantes puisque quand l'archet est en glissement contre la corde, la température augmente, ce qui fait diminuer la viscosité de la colophane donc modifie le coefficient de frottement. On peut ainsi s'attendre à une boucle de rétroaction entre la température de la zone de contact et la vitesse relative entre corde et archet.

Ce changement de température, mesuré par Askenfelt par caméra infrarouge, pourrait être une hausse de quelques degrés par rapport à la température ambiante [Ask95]. Il souligne un désaccord avec de précédents résultats de Pickering (10 à 25 degrés de hausse de température dans la zone de contact).

J. Smith et J. Woodhouse montrent, dans [SW00], que pour des surfaces enduites de colophane, le coefficient de frottement n'est pas une fonction de la vitesse relative, mais forme nettement

---

1. Du latin *abies*, le sapin.

2. Du latin *silva*, bois, forêt, arbre.

3. Observations issues de [SW00], p. 1649.



FIGURE 8.1 – Un bloc de colophane pour archet de violon.

une boucle d'hystérésis. Puis ils proposent un modèle prenant en compte la température de la zone de contact, que nous rappelons ici et qui constitue le point de départ de ce chapitre. Une reformulation partielle, à l'aide de la dérivation fractionnaire, est ensuite introduite. Puis nous donnons des résultats complémentaires sur le modèle thermique appliqué à la corde frottée. Nous remercions à cette occasion chaleureusement J. Woodhouse, qui a promptement accepté de répondre à nos questions sur l'obtention des résultats de l'article [Woo03]. Nous concluons par un résultat théorique classique sur la dérivée et l'intégrale fractionnaire, qui est fondamental pour le chapitre suivant et démontré ici par souci d'exhaustivité.

## 8.2 Formulation initiale du modèle thermique de Smith et Woodhouse

Nous rappelons dans cette section les principes du modèle thermique de colophane publié dans [SW00]. Pour

- $F_N$  la force normale appliquée sur l'archet
- $T$  la différence de température au-dessus de la température ambiante (fixée à 20°C)
- $\mu$  le coefficient de frottement, fonction de la température
- $V_r$  la vitesse relative entre la corde et l'archet
- $f$  la force de friction résultant de l'interaction entre la corde et l'archet :

$$f = F_N \text{sign}(V_r) \mu(T) \quad (8.1)$$

- $a$  le rayon de la zone de contact supposée circulaire, dépendant de  $F_N$
- $\rho_r$  la masse volumique de la colophane
- $c_r$  sa capacité thermique
- $\delta$  l'épaisseur de colophane dans la zone de contact
- $g$  une fonction de Green sur laquelle nous allons revenir

le bilan de puissance calorique s'écrit

### 8.3. Une première implémentation : convolution discrète

$$|fV_r| = a\delta\rho_r c_r |V_r| T + \pi a^2 \delta\rho_r c_r \dot{T} + \int_{-\infty}^t g(t-\tau) T(\tau) d\tau \quad (8.2)$$

Le membre de gauche est la puissance calorique produite par friction. Dans le membre de droite la dissipation est assurée par trois effets, dans l'ordre de l'équation : convection (transport de colophane froide dans la zone de contact, et chaude hors de celle-ci), absorption de chaleur dans le volume considéré, et enfin conduction de chaleur dans les solides adjacents (la corde, la mèche d'archet).

Via le calcul de la température interne d'un matériau soumis à un échelon de température en surface, puis en remarquant que la fonction de Green désirée doit décrire la réponse à un Dirac (qui est la dérivée de l'échelon), les auteurs de [SW00] souhaitent dériver (à un facteur multiplicatif près dépendant du matériau : corde, crin) la fonction

$$Q = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad 0 \text{ sinon} \quad (8.3)$$

C'est cependant délicat à cause de la discontinuité en 0. En fixant un petit pas de temps  $h$ , ils obtiennent une expression approchée de la dérivée de  $Q$ , la fonction  $g_a$  :

$$g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{h\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t < h \\ \frac{1}{h\sqrt{t}} - \frac{1}{h\sqrt{t-h}} & \text{si } t > h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.4)$$

La conduction de chaleur dans l'archet et dans la corde est différente. On note les fonctions  $g_1$  et  $g_2$ , égales à  $g_a$  à des constantes multiplicatives près qui sont propres aux matériaux (corde, crin). Puis on remarque que la zone de corde frottée est toujours la même alors la zone de mèche d'archet en contact change au cours du temps. Par conséquent, le modèle (8.2) s'écrit de manière plus détaillée :

$$|fV_r| = a\delta\rho_r c_r |V_r| T + \pi a^2 \delta\rho_r c_r \dot{T} + \int_{I_1} g_1(t-\tau) T(\tau) d\tau + \int_{I_2} g_2(t-\tau) T(\tau) d\tau \quad (8.5)$$

où

- la première convolution entre  $T$  et  $g_1$ , la fonction de Green pour la corde, est calculée sur l'intervalle  $I_1 = ]-\infty, t[$
- la seconde convolution entre  $T$  et  $g_2$ , la fonction de Green pour l'archet, est calculée sur un intervalle borné, de durée variable et finissant à l'instant courant  $t$ .

Nous allons nous concentrer sur la première convolution dans les sections suivantes, avant de discuter de la seconde en section 8.5.

### 8.3 Une première implémentation : convolution discrète

Nous commençons par présenter la discréttisation de la convolution qui avait été proposée dans [SW00]. Puis nous montrons les conséquences dans les simulations (sur un modèle de corde).

La convolution de  $g_1$  et  $T$  est approchée deux fois de suite :

1. le support temporel de la convolution est tronqué : la température est prise nulle avant  $t = 0$ , la simulation est effectuée sur une durée  $t_{max}$ , et

$$g_1 * T(t) = \int_{-\infty}^t g_1(t-\tau) T(\tau) d\tau \quad \text{devient} \quad \int_{t-t_{max}}^t g_1(t-\tau) T(\tau) d\tau \quad (8.6)$$

Puis, étant donné le pas de temps  $h$ , pour tout entier  $m$ , la seconde intégrale de l'eq. (8.6) à l'instant  $t = mh$  vaut

$$\int_{mh-t_{max}}^{mh} g_1(mh-\tau)T(\tau) \, d\tau = \int_0^{t_{max}} g_1(\tau)T(mh-\tau) \, d\tau \quad (8.7)$$

$$= \sum_{k=0}^{n_{max}-1} \int_{kh}^{(k+1)h} g_1(\tau)T(mh-\tau) \, d\tau \quad (8.8)$$

$$\text{où } n_{max} = \frac{t_{max}}{h}$$

2. Donc, si  $T$  est environ constant durant chaque pas de temps<sup>4</sup>, alors la somme (8.8) peut être approchée par :

$$\sum_{k=0}^{n_{max}-1} T((m-k)h) \int_{kh}^{(k+1)h} g_1(\tau) \, d\tau \quad (8.9)$$

qui est l'expression retenue pour le terme de conduction de chaleur dans la corde. On définit :

$$\forall k \geq 0, \quad g_k := \int_{kh}^{(k+1)h} g_1(\tau) \, d\tau \quad (8.10)$$

Le terme  $g_1 * T(mh)$  est donc remplacé par :

$$\sum_{k=0}^{n_{max}-1} g_k T((m-k)h)$$

On remarque d'après (8.10) et (8.4) que

$$g_0 > 0, \quad \text{et } \forall k > 0, \quad g_k < 0 \quad (8.11)$$

et que par la définition (8.4),

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k = \int_0^{+\infty} g_a(t) \, dt = 0 \quad i.e. \quad \lim_{n_{max} \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n_{max}} g_k = 0 \quad (8.12)$$

qui est une propriété physique importante, soulignée par Smith et Woodhouse : « when a steady temperature is imposed at  $x = 0$  for a long time, the heat flux there tends to zero since the temperature gradient becomes arbitrarily small » ([SW00], p. 1658).

Suivant les eqs. (8.11), (8.12),

$$\forall n_{max} \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n_{max}} := \sum_{k=0}^{n_{max}} g_k > 0 \quad (8.13)$$

On note qu'il y a donc plusieurs difficultés pratiques pour cette approche.

La première est qu'une simulation sur une durée importante demande de conserver en mémoire l'historique grandissant de la solution, tandis que les produits de convolutions discrètes sont de plus en plus coûteux en temps de calcul. Ceci peut représenter un frein important pour une étude des régimes établis par cette technique de simulation temporelle.

La seconde est l'obtention de ces régimes. Nous avons ainsi fait une brève étude selon  $t_{max}$  en utilisant les codes ayant servi à l'article [Woo03] transmis par J. Woodhouse. On montre en fig. 8.2 quelques périodes de la solution  $T$ , tronquée en fin de simulation, pour un  $t_{max}$  initialement choisi à  $t_0 := 0.4$  s, puis pour les multiples  $2t_0, 4t_0, 8t_0, 16t_0$  (à ce moment-là, le calcul devient très long). La tendance qui émerge est intéressante :

4. Ce qui est vérifié en pratique dès que  $h$  est petit devant les autres temps caractéristiques du système. Ici,  $h = 1 \times 10^{-5}$  s convient. Par comparaison, les solutions périodiques obtenues ont une période de quelques  $10^{-3}$  s.

#### 8.4. Introduction de la dérivée fractionnaire

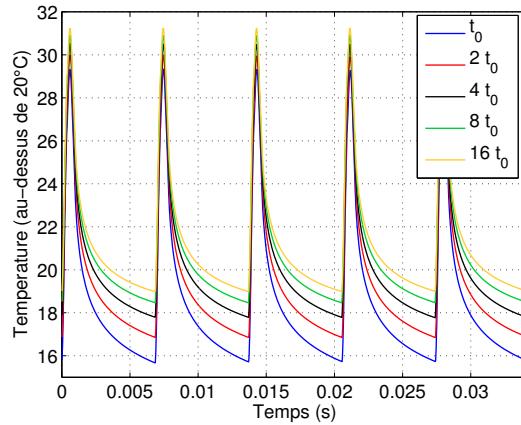


FIGURE 8.2 – Quelques périodes de la température  $T$  (degrés au-dessus de la température ambiante de  $20^\circ\text{C}$ ), tronquées à la fin de la simulation (codes de J. Woodhouse). La simulation est faite pour  $t_{max} = t_0 = 0.4$  (bleu),  $t_{max} = 2t_0$  (rouge),  $t_{max} = 4t_0$  (noir),  $t_{max} = 8t_0$  (vert),  $t_{max} = 16t_0$  (orange).

- la moyenne de  $T$  augmente significativement, de  $18.5^\circ\text{C}$  ( $t_{max} = t_0$ ) à  $21.3^\circ\text{C}$  ( $t_{max} = 16t_0$ ), l'allure générale restant la même.
- nous avons vérifié que d'autre part, ni  $\dot{T}$  ni  $v$  ne changent significativement, assurant ainsi que les deux premiers termes dissipatifs de l'eq. (8.5) sont presque inchangés.

Le support  $I_2$  de la seconde convolution (conduction dans l'archet) est le même d'une simulation à l'autre<sup>5</sup>. Par contre, la conduction dans la corde est calculée sur un support  $I_1$  de plus en plus long, et elle doit vérifier, à la limite  $t_{max}$  tendant vers l'infini, d'être de moyenne nulle. Or, comme souligné dans l'eq. (8.13), cela ne peut pas être le cas théoriquement, et il faut un grand nombre de termes dans la convolution discrète pour commettre une erreur négligeable numériquement. C'est l'explication dans les exemples ci-dessus de la convergence assez lente de la solution.

## 8.4 Introduction de la dérivée fractionnaire

Nous montrons dans cette section que contrairement à ce qui est fait dans [SW00], l'écriture discrète de  $g_a$  peut être évitée. Quitte à faire appel à la théorie des distributions<sup>6</sup>, la convolution de  $\dot{Q}$  et  $T$  donne le même résultat que celle de  $Q$  et  $\dot{T}$ . Alternativement, nous allons partir de l'expression proposée pour  $g_a$ , et calculer la convolution d'une fonction test  $\varphi$  avec  $g_a$  pour  $h$  tendant vers 0. Soit une fonction test  $\varphi$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}$ , alors :

---

5. On verra dans la section 8.5 qu'il est de l'ordre d'une période, bien inférieur à la durée des simulations présentées ici.

6. En réalité, déjà invoquée par les auteurs de [SW00] pour calculer la dérivée de la fonction  $Q$  « au sens des fonctions généralisées », *i.e.* des distributions.

$$g_a * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \quad (8.14)$$

$$= \int_0^{+\infty} g_a(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \quad (g_a \text{ nulle avant } 0) \quad (8.15)$$

$$= \int_0^h \frac{1}{h\sqrt{\tau}} \varphi(t - \tau) d\tau + \int_h^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{\tau}} \varphi(t - \tau) d\tau - \int_h^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{\tau-h}} \varphi(t - \tau) d\tau \quad (8.16)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{\tau}} \varphi(t - \tau) d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{s}} \varphi(t - s - h) ds \quad (8.17)$$

(regroupement des deux premières intégrales,  
changement de variable  $s = \tau - h$  dans la dernière)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\varphi(t-s) - \varphi(t-s-h)}{h} ds \quad (8.18)$$

Par théorème de convergence dominée<sup>7</sup>,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\varphi(t-s) - \varphi(t-s-h)}{h} ds \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \dot{\varphi}(t-s) ds \quad (8.19)$$

$$= Q * \dot{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \dot{\varphi}(\tau) d\tau \quad (8.20)$$

On conclut, avec la fonction inconnue  $T$ , que

$$\int_{-\infty}^t g_a(t-\tau) T(\tau) d\tau \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \dot{T}(\tau) d\tau \quad (8.21)$$

La reformulation obtenue dans l'eq. (8.21) mène à introduire la notion de dérivée fractionnaire. Contrairement aux opérateurs fractionnaires plus usuels dont les noms sont bien arrêtés dans la littérature (comme la dérivée de Caputo, ou Riemann-Liouville), il n'y a pas de dénomination unanime pour les opérateurs que nous sommes amenés à étudier, et dont les supports d'intégration ne sont pas bornés (eq. (8.21)). En s'inspirant de [Hil08], [Ort11] (table 2.1) et [Mai10] (section 1.4), le nom de Weyl a été retenu.

Soit  $\alpha$  dans  $]0, 1[$  et soit  $x$  une fonction dérivable. On appellera dérivée fractionnaire de Weyl la fonction :

$$D^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (8.22)$$

où  $\Gamma$  désigne la fonction Gamma :

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} ds, \quad (8.23)$$

On reconnaît dans l'eq. (8.21) la dérivée  $\alpha = 1/2$  de la fonction  $T$ . On introduit également l'intégrale fractionnaire de Weyl : pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ,

$$D^{-\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau \quad (8.24)$$

7. Voir par ex. Weisstein, E. W. : *Lebesgue's Dominated Convergence Theorem*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LebesguesDominatedConvergenceTheorem.html>

## 8.5. Second terme de convolution

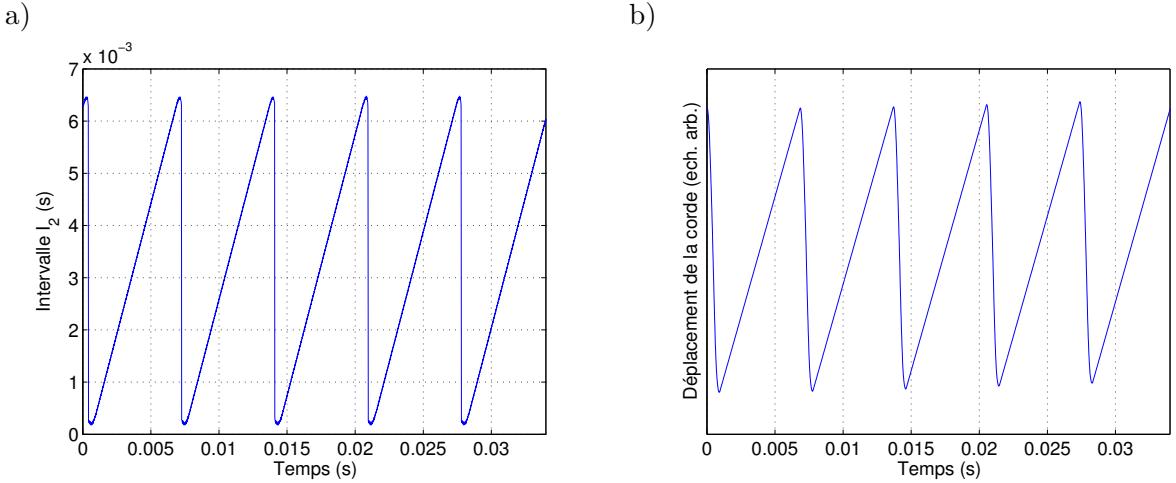


FIGURE 8.3 – a) Durée de l'intervalle  $I_2$  pour la seconde convolution de la température (archet).  
b) Déplacement de la corde sous l'archet.

Nous avons choisi  $]-\infty, t[$ , un support d'intégration non borné, dans les définitions. L'existence des expressions proposées est acquise dans le cas où la fonction  $x$  est périodique<sup>8</sup>, et dans le cas de l'intégrale fractionnaire, si elle vérifie de plus d'être de moyenne nulle.

La dérivée et l'intégrale fractionnaires sont liées. Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a

$$D^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (8.25)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{(1-\alpha)-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (8.26)$$

tandis que, étant donné que  $1 - \alpha > 0$ , l'intégrale  $1 - \alpha$  de  $\dot{x}$  vaut :

$$D^{\alpha-1} \dot{x}(t) = D^{-(1-\alpha)} \dot{x}(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{(1-\alpha)-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (8.27)$$

donc

$$D^\alpha x = D^{\alpha-1} \dot{x} \quad (8.28)$$

## 8.5 Second terme de convolution

La seconde intégrale de convolution dans l'éq. (8.5) est prise sur un intervalle variable, que nous avons noté  $I_2$ . Il reflète le fait que la convolution doit être restreinte à un court intervalle de l'historique de la température, correspondant au temps moyen qu'un point de la surface mobile de l'archet a passé dans la zone de contact. Dans l'implémentation (fournie par J. Woodhouse) que nous avons pu observer, la durée de l'intervalle  $I_2$  est obtenue de manière procédurale (recherche d'instant particulier vérifiant certaines conditions). Il serait judicieux pour de futures études de donner son expression par un jeu d'équations. Tel qu'il est implémenté, l'intervalle  $I_2$  est approximativement délimité par le début du dernier intervalle d'adhérence et l'instant courant

8. [Ort11], section 2.11.1, p. 38.

(il n'est cependant jamais de durée nulle). Son tracé rappelle fortement le déplacement<sup>9</sup> de la corde sous l'archet (fig. 8.3). La principale différence est la quasi-discontinuité de  $I_2$  au début du glissement (qui a lieu en un seul pas de temps), alors que le déplacement est continu et décrit une portion de période en glissement en une durée non négligeable (sur l'exemple présenté, en 45 pas de temps soit  $9 \times 10^{-4}$  s). La continuation de solutions périodiques qui est présentée au chapitre suivant ne se prête pas encore à ce type de convolution dont le support dépend de la solution elle-même. Seul un cas très approché permettrait de simplifier nettement les calculs : lorsque

$$\exists r > 0, t_0 := r \frac{2\pi}{\omega}, \quad I_2 = [t - t_0, t] \quad (8.29)$$

i.e. le support d'intégration est en rapport fixé avec la période. Une perspective importante de travail reste donc le traitement de la convolution particulière au contact avec l'archet.

On note que ce terme de dissipation est absolument crucial pour le bon comportement du modèle et ne peut pas être omis en première approximation. Des tests réalisés avec les codes de J. Woodhouse (modèle de corde « complet » par fonctions de réflexions, convolutions discrètes) et avec notre propre code (système différentiel : modèle de corde à deux modes, convolutions traitées par approximation diffusive, une méthode qui sera présentée au chapitre suivant) donnent un comportement similaire : sans la dissipation dans l'archet, i.e. sans ce second terme de convolution dans l'éq. (8.5), la température tend vers l'infini. Les causes peuvent être plus ou moins profondes :

- le régime de Helmholtz est encore stable mais le bassin d'attraction est nettement réduit ;
- le régime de Helmholtz n'est plus stable ;
- il n'existe plus.

## 8.6 Transformées de Fourier des opérateurs fractionnaires

La dénomination « fractionnaire » vient de l'idée de généralisation de la dérivation et de l'intégration aux ordres non-entiers. Pour une fonction  $x$ , la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  vérifie la propriété suivante :

$$\mathcal{F}(\dot{x})(\xi) = (i\xi)\mathcal{F}(x)(\xi) \quad (8.30)$$

Les définitions (8.22), (8.24), généralisent cette expression à un ordre  $\alpha$  dans  $]0, 1[$  : on a la propriété

$$\mathcal{F}(D^{-\alpha}x)(\xi) = (i\xi)^{-\alpha}\mathcal{F}(x)(\xi), \quad \mathcal{F}(D^{\alpha}x)(\xi) = (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}(x)(\xi) \quad (8.31)$$

Une propriété similaire, en transformée de Laplace, est plus souvent donnée, mais pour les fonctions causales, et pour  $p$  (la variable de Laplace) de partie réelle strictement positive. Le résultat en transformée de Fourier demande de prendre la limite  $p \rightarrow -i\xi$ , ce qui peut se justifier par théorème<sup>10</sup>. La preuve directe de la propriété classique (8.31) est donnée dans le cours [DGP10] pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Le résultat pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  est un résultat fondamental pour le chapitre suivant, et par souci d'exhaustivité, nous en donnons ici une preuve directe.

Pour cela nous établissons d'abord trois lemmes de calcul d'intégrales complexes. Le premier est une adaptation du lemme de Jordan. La preuve du second est similaire à celle du premier.

9. Cette variable n'est cependant pas directement connue, l'algorithme calculant uniquement des vitesses. Nous l'avons calculée *a posteriori* par une simple sommation (intégration) de la vitesse relative, ce qui donne une légère dérive.

10. C'est ainsi rédigé dans [Pod98], section 2.9.2, p. 111.

## 8.6. Transformées de Fourier des opérateurs fractionnaires

Ces deux lemmes servent à prouver le troisième, un calcul de transformée de Fourier nécessaire pour la démonstration de la propriété (8.31).

**Lemme (Jordan).** *Dans le plan complexe, soit  $C_R$  le quart de cercle de centre 0, rayon  $R$ , extrémités  $R$  et  $iR$ , parcouru en sens trigonométrique. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , soit  $\xi < 0$ . Alors l'intégrale*

$$I_R := \int_{C_R} z^{\alpha-1} e^{-i\xi z} dz \quad (8.32)$$

tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini.

*Preuve.* On prend le paramétrage polaire du chemin  $C_R : z = Re^{i\theta}$ ,  $dz = iRe^{i\theta} d\theta$

$$\left| \int_{C_R} z^{\alpha-1} e^{-i\xi z} dz \right| = \left| \int_0^{\pi/2} R^{\alpha-1} e^{i\theta(\alpha-1)} e^{-i\xi(R \cos \theta + iR \sin \theta)} iRe^{i\theta} d\theta \right| \quad (8.33)$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} R^{\alpha-1} |e^{i\theta(\alpha-1)}| |e^{-i\xi R \cos \theta}| |e^{\xi R \sin \theta}| |i| |R| |e^{i\theta}| d\theta \quad (8.34)$$

$$\leq R \int_0^{\pi/2} R^{\alpha-1} e^{\xi R \sin \theta} d\theta \quad (8.35)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\alpha - 1 < 0$ , il existe  $R_0$  tel que pour  $R > R_0$ ,  $R^{\alpha-1} < \varepsilon$ . D'autre part, la fonction sin étant concave sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  elle est au-dessus de la corde de  $(0; 0)$  à  $(\frac{\pi}{2}; 1)$ , ce qui donne

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}\theta \leq \sin \theta \quad (8.36)$$

Comme  $\xi < 0$ ,

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \xi \frac{2}{\pi}\theta \geq \xi \sin \theta \quad (8.37)$$

Par conséquent, pour  $R > R_0$ ,

$$|I_R| \leq R\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{\xi R \theta 2/\pi} d\theta \quad (8.38)$$

$$\leq R\varepsilon \frac{e^{\xi R} - 1}{\xi R 2/\pi} = \varepsilon \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{\xi R}}{|\xi|} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (8.39)$$

□

**Lemme (contour autour de 0).** *Dans le plan complexe, soit  $C_0$  le quart de cercle de centre 0, rayon  $\frac{1}{R}$ , extrémités  $\frac{1}{R}$  et  $\frac{i}{R}$ , parcouru en sens anti-trigonométrique. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ , soit  $\xi < 0$ . Alors l'intégrale*

$$I_0 := \int_{C_0} z^{\alpha-1} e^{-i\xi z} dz \quad (8.40)$$

tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini.

*Preuve.* À nouveau, on prend un paramétrage polaire  $z = \frac{1}{R}e^{i\theta}$  :

$$\left| \int_{\pi/2}^0 \left( \frac{1}{R} e^{i\theta} \right)^{\alpha-1} e^{-i\xi \frac{1}{R}(\cos\theta + i \sin\theta)} i \frac{1}{R} e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi/2} R^{1-\alpha} \exp\left(\frac{\xi \sin\theta}{R}\right) \frac{1}{R} d\theta \quad (8.41)$$

$$\leq R^{-\alpha} \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{\xi}{R} \frac{2}{\pi} \theta\right) d\theta \quad (8.42)$$

(majoration (8.37))

$$\leq R^{-\alpha} \frac{R\pi}{2\xi} \left( \exp\left(\frac{\xi}{R}\right) - 1 \right) \quad (8.43)$$

$$\leq R^{1-\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{\xi/R}}{|\xi|} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (8.44)$$

car en  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$R^{1-\alpha} (1 - e^{\xi/R}) \sim -R^{1-\alpha} \frac{\xi}{R} = -R^{-\alpha} \xi \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (8.45)$$

□

**Lemme (transformée de Fourier).** Pour  $\alpha \in ]0, 1[$  et pour  $\xi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\xi s} s^{\alpha-1} ds = (i\xi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (8.46)$$

*Preuve.* On commence par traiter le cas  $\xi < 0$ . Soit le contour fermé  $C$ , représenté en fig. 8.4. La fonction holomorphe

$$z \mapsto e^{-i\xi z} z^{\alpha-1}$$

a un seul pôle,  $z = 0$ , qui est exclu du contour  $C$ . Donc par théorème intégral de Cauchy<sup>11</sup>

$$\int_C e^{-i\xi z} z^{\alpha-1} dz = 0 \quad (8.47)$$

On décompose cette intégrale sur  $C$  en quatre morceaux :

$$\int_C = \int_{1/R}^R +I_R + \int_{iR}^{i/R} +I_0 \quad (8.48)$$

Par les lemmes précédents, les deuxième et quatrième intégrales,  $I_R$  et  $I_0$ , tendent vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini. Donc le passage à la limite  $R \rightarrow +\infty$  de l'éq. (8.48) donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\xi z} z^{\alpha-1} dz + \int_{+i\infty}^0 e^{-i\xi z} z^{\alpha-1} dz = 0 \quad (8.49)$$

11. Voir par ex. Weisstein, E. W. : *Cauchy Integral Theorem*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CauchyIntegralTheorem.html>.

## 8.6. Transformées de Fourier des opérateurs fractionnaires

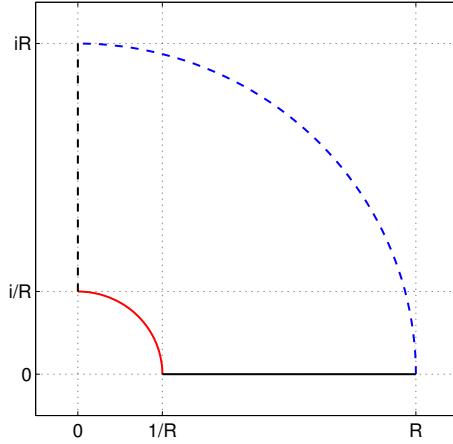


FIGURE 8.4 – Contour d’intégration  $C$ , concaténation de 4 chemins. Tirets bleus : quart de cercle  $C_R$  pour le premier lemme. Trait plein noir : à la limite  $R \rightarrow +\infty$ , axe réel positif. Tirets noirs : à la limite, axe imaginaire positif. Trait rouge : quart de cercle  $C_0$  pour le second lemme.

On paramètre ces intégrales :  $z \in \mathbb{R}_+$  pour la première,  $z = it$  et  $t \in \mathbb{R}_+$  pour l’autre, il vient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\xi s} s^{\alpha-1} ds = \int_0^{+\infty} e^{-i\xi(it)} (it)^{\alpha-1} i dt \quad (8.50)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{\xi t} i^{\alpha} t^{\alpha-1} dt \quad (8.51)$$

$$= i^{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left( \frac{y}{-\xi} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{-\xi} dy \quad (8.52)$$

changement  $y = -\xi t$  ( $\xi < 0$ )

$$= i^{\alpha} (-\xi)^{-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy \quad (8.53)$$

$$= (i\xi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (8.54)$$

car  $i^{\alpha}(-1)^{-\alpha} = e^{i\alpha\pi/2} e^{-i\alpha\pi} = e^{i\pi/2(-\alpha)} = i^{-\alpha}$ . En notant la fonction

$$p^{\alpha} : s \mapsto 0 \quad \text{si } s < 0, \quad s^{\alpha-1} \quad \text{sinon} \quad (8.55)$$

on a établi que pour  $\xi < 0$ ,

$$\mathcal{F}(p^{\alpha})(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-i\xi s} s^{\alpha-1} ds = (i\xi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (8.56)$$

Pour conclure quel que soit le signe de  $\xi$ , soit  $\xi < 0$ , par propriété de la transformée de Fourier,  $p^{\alpha}$  étant une fonction réelle,

$$\mathcal{F}(p^{\alpha})(-\xi) = \overline{\mathcal{F}(p^{\alpha})(\xi)} \quad (8.57)$$

$$= \overline{i^{-\alpha}} \xi^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (8.58)$$

et

$$\overline{i^{-\alpha}} = \overline{e^{-i\alpha\pi/2}} = e^{i(-\alpha)(-\pi/2)} = (-i)^{-\alpha} \quad (8.59)$$

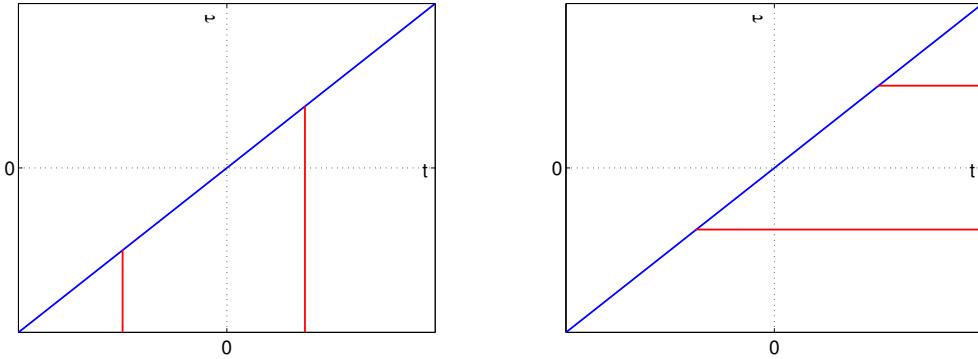


FIGURE 8.5 – Domaine d’intégration sous la droite  $t = \tau$  (en bleu), décrit à gauche par les demi-droites rouges  $(t, \tau) \in \mathbb{R} \times ]-\infty, t]$ , à droite par les demi-droites  $(\tau, t) \in \mathbb{R} \times [\tau, +\infty[$ .

donc

$$\mathcal{F}(p^\alpha)(-\xi) = (-i)^{-\alpha} \xi^{-\alpha} \Gamma(\alpha) = (i(-\xi))^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \quad (8.60)$$

□

*Preuve de la propriété (8.31).*

$$\mathcal{F}(D^{-\alpha}x)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} D^{-\alpha}x(t)e^{-i\xi t} dt \quad (8.61)$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau=-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau e^{-i\xi t} dt \quad (8.62)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \int_{t=\tau}^{+\infty} (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) e^{-i\xi t} dt d\tau \quad (8.63)$$

par changement de sens de description du demi-plan sous la droite  $t = \tau$  (voir fig. 8.5)

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \int_{s=0}^{+\infty} s^{\alpha-1} x(\tau) e^{-i\xi(s+\tau)} ds d\tau \quad (8.64)$$

$$(\text{changement } s = t - \tau) \quad (8.65)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s=0}^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-i\xi s} ds \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-i\xi \tau} d\tau \quad (8.66)$$

$$= (i\xi)^{-\alpha} \mathcal{F}(x)(\xi) \quad (8.67)$$

en utilisant le troisième lemme pour obtenir la dernière égalité. D’autre part,

$$\mathcal{F}(D^\alpha x)(\xi) = \mathcal{F}(D^{\alpha-1}\dot{x})(\xi) \quad \text{par la propriété (8.28)} \quad (8.68)$$

$$= (i\xi)^{\alpha-1} \mathcal{F}(\dot{x})(\xi) \quad (\alpha - 1 < 0, \text{ résultat établi pour l’intégrale } D^{\alpha-1}) \quad (8.69)$$

$$= (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(x)(\xi) \quad (8.70)$$

□

## Références

- [Ask95] A. ASKENFELT. « Observations on the violin bow and the interaction with the string ». In : *STL-QPSR* 36.2-3 (1995), p. 107–118.
- [DGP10] F. DUBOIS, A. C. GALUCIO et N. POINT. « Introduction à la dérivation fractionnaire. Théorie et applications. » In : *Techniques de l'ingénieur* (2010).
- [Hil08] R. HILFER. « Threefold introduction to fractional derivatives ». In : *Anomalous transport : Foundations and applications* (2008), p. 17–73.
- [Mai10] F. MAINARDI. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity : an introduction to mathematical models*. World Scientific, 2010.
- [Ort11] M. D. ORTIGUEIRA. *Fractional calculus for scientists and engineers*. T. 84. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Pod98] I. PODLUBNY. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. T. 198. Academic press, 1998.
- [SW00] J. H. SMITH et J. WOODHOUSE. « The tribology of rosin ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), p. 1633–1681.
- [Woo03] J. WOODHOUSE. « Bowed string simulation using a thermal friction model ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 89.2 (2003), p. 355–368.



## Chapitre 9

# Continuation of periodic solutions for systems with fractional derivatives

### Sommaire

---

Résumé . . . . .	181
Abstract . . . . .	182
9.1 Introduction . . . . .	182
9.2 General framework . . . . .	183
9.2.1 Continuation of periodic solutions : coupling the ANM and the HBM .	183
9.2.2 Weyl fractional derivative and integral . . . . .	184
9.3 Harmonic Balance with Weyl derivative (HBW) . . . . .	185
9.3.1 Expression of the Fourier coefficients . . . . .	185
9.3.2 A simple implementation : constant rational order . . . . .	186
9.3.3 Implementation : general case . . . . .	186
9.4 Diffusive representation and approximation . . . . .	187
9.5 Examples of continuation . . . . .	188
9.5.1 Continuation with constant rational order . . . . .	188
9.5.2 Continuation with respect to the derivation order . . . . .	190
9.6 Link with the Caputo derivative . . . . .	191
9.7 Conclusion . . . . .	193
Annexes . . . . .	195
9.A ANM equations for the continuation with respect to the fractional order . . . . .	195
9.B Diffusive representation and approximation . . . . .	196
9.B.1 Diffusive representation . . . . .	196
9.B.2 Diffusive approximation . . . . .	196
9.C Initial condition for the diffusive approximation . . . . .	197
9.D Lemma . . . . .	198
9.E Un exemple . . . . .	200

---

### Résumé

Nous reproduisons ici un article soumis à *Nonlinear Dynamics*. Nous y présentons une nouvelle méthode pour la continuation des solutions périodiques de systèmes différentiels contenant des

opérateurs fractionnaires de Weyl, basée sur le couplage entre équilibrage harmonique et MAN. Ainsi que détaillé dans l'introduction de l'article, le cadre retenu (solutions périodiques sur  $\mathbb{R}$ , et opérateurs fractionnaires de Weyl) est un point important : si l'on recherche des solutions nulles sur  $\mathbb{R}_-$  (appelées en automatique solutions causales) en utilisant des opérateurs fractionnaires de type Caputo ou Riemann-Liouville il n'y a pas de solution périodique<sup>1</sup>. Nous revenons sur cette question dans la dernière section de l'article.

Quand l'ordre fractionnaire est constant, les résultats sont confirmés par une approximation diffusive, où la dérivée (ou intégrale) fractionnaire est remplacée par un ensemble de variables locales en temps (qui vérifient un système différentiel linéaire). L'ordre fractionnaire choisi pour l'exemple,  $\alpha = 1/2$ , est motivé par la reformulation du modèle de colophane présentée au chapitre 8. On note que la modélisation des pertes visco-thermiques aux parois des instruments à vents (ex : modèle de Menguy-Gilbert [MG00]) est aussi d'ordre 1/2.

Cependant, l'ordre fractionnaire peut ne pas être constant. La modélisation de certains effets visco-élastiques dans les hauts-parleurs peut être réalisée empiriquement à l'aide de termes de dérivation fractionnaire [Wri90 ; KJ93 ; Lea02] dont on ajuste les coefficients et les ordres. La dépendance de ces effets avec l'humidité et la température peut justifier un ordre fractionnaire variable.

Deux oscillateurs proches de l'oscillateur de Van der Pol sont étudiés, l'un avec ordre fractionnaire constant, l'autre avec l'ordre pour paramètre de continuation. Pour ces deux exemples, des bifurcations entre branches stationnaire et périodique sont observées, et présentent des similitudes importantes avec la bifurcation de Hopf classique des systèmes différentiels.

Nous concluons par un résultat théorique élargissant la portée de cette étude : sous certaines conditions, le cadre retenu (opérateurs de Weyl), et donc notre méthode, sont adaptés pour rechercher les cycles attractifs dans le cadre des opérateurs de Caputo que nous avons exclu au départ. Nous établissons notamment une condition suffisante telle que si la dérivée d'une fonction tend vers zéro en l'infini, alors sa dérivée fractionnaire de Caputo aussi. Cette implication est fausse en général, et une annexe inédite en donne un exemple.

## Abstract

Periodic solutions of differential systems containing Weyl fractional operators are found by harmonic balance, and they are continued thanks to the Asymptotic Numerical Method. When the fractional order is constant the results are confirmed using a diffusive approximation, where the fractional derivative or integral is replaced by a set of local-in-time memory variables. Some notable bifurcations are found in numerical examples, and bear a great resemblance to the Hopf bifurcation in standard differential systems. Lastly, we prove under some necessary condition that an asymptotically stable limit cycle in a causal fractional system is a periodic solution that our method can obtain.

### 9.1 Introduction

Time-periodic solutions are commonly investigated in dynamical systems. They can be an issue, causing noise or destructive motions (for example in rotating machinery [STS00]) or they can be sought after (for example, auto-oscillations of winds and bowed strings instruments [CK16]). The continuation of periodic solutions produces bifurcation diagrams representing

---

1. Notre travail constitue donc une clarification théorique et une avancée pratique par rapport à [LG11 ; XZC13 ; She+16]. Dans ces articles, le cadre retenu est *a priori* inadapté (solutions dites causales et dérivée de Caputo) ; l'équilibrage harmonique est incrémental et arrêté à un ordre bas (moins de 5 harmoniques).

## 9.2. General framework

the existence, stability and other characteristics of such periodic solutions (amplitude, angular frequency, etc) with respect to some parameters of the nonlinear system.

For dynamical systems represented with differential systems (without fractional operators), many numerical methods have been developed to compute bifurcation diagrams through numerical continuation [AG03]. However, fractional calculus is relevant in a large variety of fields [Hil00] and presents a new challenge since to the authors' knowledge, numerical continuation of periodic solutions for such systems has not been proposed. Even time integration of causal systems with fractional operators can be intricate. Indeed, since it takes into account the history of the solution, numerical integration can become impractical for long integration intervals, and some dedicated techniques have been developed to compute the solutions [BTM15]. Pseudo-almost periodic functions, formalized by Zhang [Zha94], have been studied : for instance, pseudo-almost periodic mild solutions [AAC10], or asymptotically periodic (mild) solutions [Aga+11] for a specific class of equations (semilinear fractional differential equation). In a stronger sense of periodicity, S-asymptotically T-periodic and asymptotically T-periodic solutions have been studied [LN13] and observed (see for instance [Mis+16]). For a certain family of scalar equations, periodic solutions can be explicit in the linear case, and there are well-posedness results in the nonlinear case [BNR09].

The current paper focuses on the effective computation of periodic solutions and their continuation, for differential systems containing fractional derivatives or integrals. The association of the Asymptotic Numerical Method (ANM), a continuation technique based on Taylor series, with the Harmonic Balance Method (HBM), proved its effectiveness to continue periodic solutions of differential systems, either forced or autonomous [CV09]. This framework requires a specific formalism which can be obtained for most smooth problems thanks to auxiliary variables. The present paper extends the principle of coupling ANM and HBM when the system contains fractional derivatives or integrals.

In Section 9.2, the ANM-HBM framework is recalled and the definitions of Weyl fractional derivatives and integrals [Ort11] are introduced. Section 9.3 shows how the Fourier coefficients of the Weyl fractional derivative of a function  $x$  can be expressed in terms of the Fourier coefficients of  $x$ . The ANM-HBM framework introduced in [CV09] is thus extended to systems containing Weyl fractional terms. Section 9.4 is dedicated to an alternate method to confirm the results, the diffusive representation and its approximation, which transforms fractional systems into differential systems. It also gives access to stability results : the bifurcations and the stability of the periodic branch will be computed with this approximation. In Section 9.5, solutions are computed with the new extension of the ANM-HBM. When the fractional order is constant, they are successfully compared with the diffusive approximation. In Section 9.6, we elucidate the link between two solutions : the periodic solution computed here for the Weyl derivative, and the solution observed asymptotically in causal systems where the fractional derivative follows the Caputo definition [Die08].

## 9.2 General framework

### 9.2.1 Continuation of periodic solutions : coupling the ANM and the HBM

The continuation of periodic solutions of nonlinear systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) \quad (9.1)$$

can be performed coupling two methods : the Harmonic Balance Method (HBM) and the Asymptotic Numerical Method (ANM). This framework was introduced in [CV09], and extended

later for more general nonlinearities in [KCV13]. A synthetic presentation is given in [Gui+17], where an extension to quasi-periodic solutions was built.

The HBM transforms the problem (9.1) (on  $\mathbf{x}$ ) into a nonlinear algebraic system  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = 0$  on Fourier coefficients of  $\mathbf{x}$ , its period and the continuation parameter  $\lambda$ . To use the ANM, this new system must verify the following assumption : there exist  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1$  real  $N \times N$  matrices,  $\mathbf{Q}_0$  a bilinear application of  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , so that

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{C}_0 + \lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_0 \mathbf{X} + \lambda \mathbf{L}_1 \mathbf{X} + \mathbf{Q}_0(\mathbf{X}, \mathbf{X}). \quad (9.2)$$

As shown in [CV09], the system on Fourier unknowns can be obtained automatically and comply to the formalism (9.2), provided that the differential system (9.1) is first recast as follows :

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_0 + \lambda \mathbf{c}_1 + \mathbf{l}_0 \mathbf{u} + \lambda \mathbf{l}_1 \mathbf{u} + \mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (9.3)$$

The vector  $\mathbf{u}$  (length  $N_{eq}$ ) is the vector of all variables, including auxiliary variables required to recast the nonlinearities (as shown in examples in [CV09]). In eq. (9.3),  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^{N_{eq}}$ ,  $\mathbf{m}, \mathbf{l}_0$  and  $\mathbf{l}_1$  are  $N_{eq} \times N_{eq}$  matrices, and  $\mathbf{q}$  is a bilinear application  $\mathbb{R}^{N_{eq}} \times \mathbb{R}^{N_{eq}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{eq}}$ .

### 9.2.2 Weyl fractional derivative and integral

Let  $\alpha$  be in  $]0, 1[$  and  $x$  a differentiable function. In this paper, we use the following definition of the fractional derivative of order  $\alpha$  :

$$D^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (9.4)$$

with  $\Gamma$  Euler's Gamma function. It is a generalized integral that makes sense for  $x$  periodic. It is then linked to the Weyl fractional derivative [Hil08] and therefore is called Weyl derivative in this paper. It becomes a standard integral if the support of  $x$  has a lower bound. In particular, if  $x$  is causal, then its Weyl derivative becomes its Caputo derivative, denoted here by  $D_C^\alpha$  and commonly defined as :

$$\text{for } x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \forall \alpha \in ]0, 1[, \forall t \geq 0, \quad D_C^\alpha x(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (9.5)$$

We focus on the Weyl derivative because using other definitions of the fractional derivative (for instance the Caputo derivative) in a fractional-differential system prohibits the existence of periodic solutions, as proved independently in [KS12a] and [WFZ13]. In this case, periodic cycles may be observed as attracting curves in a steady state, *i.e.* asymptotically ; but they cannot be solutions of the system. Using the Weyl derivative, periodic cycles are solutions of the system. As stated by Podlubny ([Pod98], p. 80) : « In such a case transient effects cannot be studied. However, taking [the lower bound for the integral]  $a = -\infty$  is the necessary abstraction for the consideration of the steady-state processes, for example for studying the response of the fractional-order dynamic system to the periodic input signal, wave propagation in viscoelastic materials, etc ». Section 9.6 explains how the current framework can be used to retrieve periodic cycles observed asymptotically with the Caputo derivative.

Following what Diethelm wrote on Caputo derivatives [Die08], the definition (9.4) can be extended to the order  $\beta \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$  as :

$$D^\beta x(t) := \frac{1}{\Gamma(\lceil \beta \rceil - \beta)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\lceil \beta \rceil - \beta - 1} x^{(\lceil \beta \rceil)}(\tau) d\tau, \quad (9.6)$$

### 9.3. Harmonic Balance with Weyl derivative (HBW)

where  $\lceil \cdot \rceil$  denotes the ceiling function. Setting  $n := \lceil \beta \rceil - 1$  and  $\alpha := \beta - n \in ]0, 1[$ , one gets

$$D^\beta x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} x^{(n+1)}(\tau) d\tau = D^\alpha x^{(n)}. \quad (9.7)$$

Therefore, the methods given below for  $\alpha \in ]0, 1[$  can be applied to higher fractional orders  $\beta$  by a reformulation of the system, setting  $y := x^{(n)}$ , and studying  $D^\alpha y$ .

The fractional integral can be defined in a similar way. Called « left side Weyl integral » in [Ort11], table 2.1, it is defined as

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, \quad D^{-\alpha} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau. \quad (9.8)$$

It is well-defined for periodic functions of zero mean and is linked to the Weyl derivative by the property :

$$\forall \alpha \in ]0, 1[, \quad D^{-\alpha} \dot{x} = D^{1-\alpha} x. \quad (9.9)$$

## 9.3 Harmonic Balance with Weyl derivative (HBW)

### 9.3.1 Expression of the Fourier coefficients

When  $D^\alpha x$  exists, its Fourier transform (denoted  $\mathcal{F}$ ) can be computed and satisfies the property :

$$\mathcal{F}(D^\alpha x)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(x)(\xi). \quad (9.10)$$

As underlined in [Ort11] (section 2.11.1), « if a periodic function is defined by its Fourier series it can be fractionally derivated term by term and the derivative is also periodic with the same period ». When expressed with complex Fourier coefficients

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k e^{ik\omega t}, \quad (9.11)$$

the property (9.10) reads :

$$D^\alpha x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik\omega)^\alpha x_k e^{ik\omega t} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\alpha\right) (k\omega)^\alpha x_k e^{ik\omega t}, \quad (9.12)$$

that is, with real Fourier coefficients :

$$x(t) = x_0 + \sum_{k>0} x_{ck} \cos(k\omega t) + x_{sk} \sin(k\omega t), \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= \sum_{k>0} (k\omega)^\alpha \left( \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x_{ck} + \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x_{sk} \right) \cos(k\omega t) \\ &\quad + (k\omega)^\alpha \left( -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x_{ck} + \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x_{sk} \right) \sin(k\omega t). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Although the definition of  $D^\alpha$  is restricted to non-integers orders, eq. (9.14) gives a smooth expression of coefficients with respect to  $\alpha$  i.e. without singularity at  $\alpha \in \mathbb{N}$ . For  $x$  periodic, when  $\alpha$  tends to 0,  $D^\alpha x$  tends to  $x$ ; when  $\alpha$  tends to 1,  $D^\alpha x$  tends to  $\dot{x}$ .

For numerical applications, both  $x$  and  $D^\alpha x$  are now decomposed on  $H$  harmonics : in the eqs. (9.13), (9.14), the sums are finite (for  $k$  between 1 and  $H$ ).

### 9.3.2 A simple implementation : constant rational order

In a first case, let us assume  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . After defining an auxiliary unknown

$$\Omega = \omega^\alpha \quad (9.15)$$

the expression (9.14) complies with the ANM formalism of eq. (9.2) since it only contains products of unknowns ( $\Omega$  and  $x_{ck}$  or  $x_{sk}$ ). Then,  $\alpha$  being a rational  $p/q$ , the definition (9.15) can be transformed into a small quadratic system. The simplest example, which is useful for heat conduction for instance, is  $\alpha = 1/2$ . No transformation is needed because  $\Omega^2 = \omega$  is a quadratical definition. If for example  $\alpha = 3/5$ , the quadratical definitions

$$\rho_1 = \Omega^2, \quad \rho_2 = \rho_1^2, \quad \rho_3 = \omega^2, \quad \rho_2 \Omega = \omega \rho_3 \quad (9.16)$$

yield  $\Omega^5 = \omega^3$  i.e.  $\Omega = \omega^{3/5}$ . One can see the drawbacks of this approach :

1. if the reduced fraction  $\alpha = p/q$  calls for large integers  $p, q$ ,  $\omega$  is raised to a large power, which leads to a loss of accuracy.
2. this is not applicable to  $\alpha$  irrational. Moreover, using an approximate rational value  $p/q \simeq \alpha$  leads again to the first point ( $p, q$  large exponents) when the precision of this rational approximation is increased.
3. this is not applicable if  $\alpha$  is the continuation parameter instead of a constant.

This motivates a more general implementation.

### 9.3.3 Implementation : general case

We present the Harmonic Balance with Weyl derivative (HBW) in the most general case, where  $\alpha$  is the continuation parameter, not a constant. Then we explain how any constant  $\alpha$  can be handled, which solves the two problematic cases outlined above ( $\alpha = p/q$  and  $p, q \gg 1$ ;  $\alpha$  irrational).

To perform a ANM continuation with respect to the derivation order  $\alpha$ , the quantities in eq. (9.14) that need to be defined in a quadratical manner are of the form

$$(k\omega)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x_{ck}. \quad (9.17)$$

The nonlinear functions in eq. (9.17) ( $\cos, \sin, \exp$ ) satisfy linear, first-order differential systems. These functions are applied to Fourier unknowns ( $\omega$ ) or the continuation parameter  $\alpha$ , that is to say, to unknowns of the ANM system. Thus reframed, this issue is solved by differentiation of the equations with respect to the path parameter of the ANM continuation, as presented in [KCV13]. Details of the equations and auxiliary unknowns are given in 9.A. We give here the framework (presented in [KCV13]) and one example. The formalism (9.2) enables the ANM to obtain linear systems on the Taylor coefficients of the unknowns. If  $\mathbf{X}$  denotes the vector of ANM unknowns, and  $d\mathbf{X}$  its differentiation with respect to the path parameter  $a$ , linear systems (on the Taylor coefficients of  $\mathbf{X}$ ) can also be obtained if some equations are written in a system of so-called differentiated equations :

$$\mathbf{L}_h(d\mathbf{X}) = \mathbf{Q}_h(\mathbf{X}, d\mathbf{X}) \quad (9.18)$$

where  $\mathbf{L}_h$  is linear,  $\mathbf{Q}_h$  is bilinear. To give an example, if we set the auxiliary unknown

$$A_k := k^\alpha \quad (2 \leq k \leq H) \quad (9.19)$$

#### 9.4. Diffusive representation and approximation

then  $A_k$  can be defined by a differentiated equation :

$$\forall k \in \llbracket 2, H \rrbracket, \quad dA_k = \ln(k) A_k d\alpha \quad (9.20)$$

The reader is referred to 9.A for more details. Now, if  $\alpha$  is an arbitrary constant, in eq. (9.17), the only term that must be recast as an auxiliary unknown is  $\omega^\alpha = \exp(\alpha \ln \omega)$  (the other terms are constants or a Fourier coefficient), and this is done with differentiated equations, as shown in the appendix.

## 9.4 Diffusive representation and approximation

To confirm the results when the fractional order  $\alpha$  is constant, we now introduce a different method. Its two steps are :

1. the diffusive representation, which is an exact reformulation of a fractional derivative or integral. It is now well established for Caputo fractional operators [Die08] and we will carry out very similar computations for Weyl operators ;
2. the diffusive approximation, where the previous representation is approached.

Let us start with the fractional derivative. By defining for  $\theta \in [0, +\infty[$  :

$$\Phi(\theta, t) := \frac{2 \sin(\pi \alpha)}{\pi} \theta^{2\alpha-1} e^{-t\theta^2} \int_{-\infty}^t e^{\tau \theta^2} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (9.21)$$

one verifies that (details of the calculation are in 9.B.1) :

$$D^\alpha x(t) = \int_0^\infty \Phi(\theta, t) d\theta, \quad (9.22)$$

which is called the diffusive representation of  $D^\alpha x$ . Then, the integral can be approached by a quadrature formula. For an appropriate choice of  $n_\phi$  weights  $\mu_\ell$  and nodes  $\theta_\ell$ , we define  $\Phi_\ell := \Phi(\theta_\ell, \cdot)$ , and  $D^\alpha x$  is replaced by  $\sum_{\ell=1}^{n_\phi} \mu_\ell \Phi_\ell$ . We will call this sum the diffusive approximation. Each function  $\Phi_\ell$  can be defined by the differential system

$$\dot{\Phi}_\ell = -\theta_\ell^2 \Phi_\ell + \frac{2 \sin(\pi \alpha)}{\pi} \theta_\ell^{2\alpha-1} \dot{x} \quad (9.23a)$$

$$\Phi_\ell(0) = \frac{2 \sin(\pi \alpha)}{\pi} \theta_\ell^{2\alpha-1} \int_{-\infty}^0 e^{\tau \theta_\ell^2} \dot{x}(\tau) d\tau. \quad (9.23b)$$

Thus a system with Weyl derivative of constant order  $\alpha$  can be approached with a differential system. Its periodic solutions can then be continued with different continuation methods ; our choice will be the standard ANM-HBM. The only difficulty is that eq. (9.23b) must be taken into account for each function  $\Phi_\ell$ . We show in 9.C that eq. (9.23b) can be rewritten as a quadratical system on the Fourier unknowns, and therefore it can comply with the ANM formalism. The method used here to obtain the quadrature nodes  $\theta_\ell$  and weights  $\mu_\ell$  is briefly recalled in 9.B.2. In the same appendix, the similar procedure of diffusive approximation of fractional integrals is given.

## 9.5 Examples of continuation

Two examples are now presented to illustrate the method. For the sake of simplicity they are scalar equations (one oscillator similar to the Van der Pol oscillator), but there is no restriction on the dimension of the differential fractional system : the method can be applied to multiple coupled degrees of freedom. Also, the nonlinearity in Van der Pol oscillator is polynomial, but as explained in 9.2.1, the ANM-HBM framework can deal with other nonlinearities as well.

### 9.5.1 Continuation with constant rational order

In this section, we continue periodic solutions of

$$\ddot{x} - a_1(1 - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x - \lambda D^{1/2}x = 0 \quad (9.24)$$

with respect to the parameter  $\lambda$ . Notice that in this example the derivative order is constant and equal to a rational value,  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Parameters values are :  $\omega_1 = 200\pi$ ,  $a_1 = 2\omega_1$ . By adding three auxiliary variables, eq. (9.24) is recast in a system similar to (9.3), setting aside the fractional operator :

$$\dot{x} = \omega_1 x_2 \quad (9.25a)$$

$$\dot{x}_2 = a_1 x_2 - \omega_1 x + \frac{\lambda}{\omega_1} x_4 - a_1 x_2 x_3 \quad (9.25b)$$

$$0 = x_3 - x^2 \quad (9.25c)$$

$$0 = x_4 - D^{1/2}x \quad (9.25d)$$

The results will be confirmed using a diffusive approximation (section 9.4). The initial condition of function  $\Phi$  is slightly easier to implement for fractional integrals (see 9.C). Eq. (9.9) shows that eq. (9.24) is equivalent to :

$$\ddot{x} - a_1(1 - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x - \lambda D^{-1/2}\dot{x} = 0 \quad (9.26)$$

Then, thanks to the diffusive approximation of the fractional integral (system (9.66)), eq. (9.26) is approached with the system :

$$\dot{x} = \omega_1 x_2 \quad (9.27a)$$

$$\dot{x}_2 = a_1 x_2 - \omega_1 x + \frac{\lambda}{\omega_1} \sum_{\ell=1}^{n_\phi} \mu_\ell x_{2+\ell} - a_1 x_2 x_{3+n_\phi} \quad (9.27b)$$

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n_\phi \rrbracket, \quad \dot{x}_{2+\ell} = -\theta_\ell^2 x_{2+\ell} + \frac{2\omega_1}{\pi} x_2 \quad (9.27c)$$

$$0 = x_{3+n_\phi} - x^2 \quad (9.27d)$$

Values of nodes  $\theta_\ell$  and weights  $\mu_\ell$  (according to the optimization procedure given in 9.B.2) are given below for the choice  $n_\phi = 6$  :

$\theta_\ell$	5.748987	17.913444	41.612967	95.501586	221.848952	691.235767
$\mu_\ell$	10.965871	15.622528	34.604044	79.417073	193.468069	1318.469721

To study periodic solutions of the first system (9.25), we use the Harmonic Balance with Weyl derivative (section 9.3.2). For the second system (9.27), the usual Harmonic Balance from

## 9.5. Examples of continuation

[CV09] is applied. The adimensional angular frequency of the solution  $\omega/\omega_1$  and the peak-to-peak amplitude of  $x$  are represented in fig. 9.1. Using the diffusive approximation gives access to standard techniques of stability analysis. Floquet exponents can be computed through Hill's method, which is efficiently coupled with the ANM-HBM [LT10]. Thanks to this indication given by the diffusive approximation we conjecture that the periodic branch is stable. The periodic branch and the trivial stationary branch ( $x = 0$ ) meet at a bifurcation which is now commented.

For the diffusive approximation, this is a Hopf bifurcation. It occurs at the first crossing of the imaginary axis by a pair of eigenvalues of the Jacobian of the differential system ((9.27a)–(9.27c)), evaluated at the (null) stationary solution, which is the matrix of size  $2 + n_\phi$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\omega_1 & a_1 & \frac{\lambda\mu_1}{\omega_1} & \dots & \frac{\lambda\mu_{n_\phi}}{\omega_1} \\ 0 & \frac{2\omega_1}{\pi} & -\theta_1^2 & & \\ & & & (0) & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \frac{2\omega_1}{\pi} & (0) & & -\theta_{n_\phi}^2 \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

Moreover, the periodic solution (obtained with the HBW) has some remarkable properties in the vicinity of the bifurcation : a good approximation can be obtained with few harmonics and there is a square-root growth of the amplitude with respect to  $\lambda$ . Based on these properties and the analysis provided by the diffusive approximation, we conjecture that the bifurcation (for the original fractional system of eq. (9.24)) can be called a Hopf bifurcation and that an appropriate framework could be theorized to include this type of bifurcation. To our knowledge, the main stability results available in the literature (such as [Mat96]) are given in the framework of causal systems with Caputo derivative. In this framework the « Hopf bifurcation » describes the emergence of asymptotically stable limit cycles (see for instance [KS12b]), which unfortunately lacks generality in two ways : as recalled in section 9.2.2 these cycles are not solutions ; and inverse bifurcations, where the emerging limit cycle is unstable, can not be described.

Under the conjecture that the bifurcation is a typical Hopf bifurcation, in its vicinity we can approach  $x$  with one harmonic. For an appropriate phase, and given that the stationary branch is null, it means that  $x$  can be approached by  $x(t) = x_1 \cos(\omega t)$ . Then, the bifurcation can be found as follows : substitute  $x_1 \cos(\omega t)$  in eq. (9.24), perform the harmonic balance on the first cosine and sine, assume the solution  $x$  is null, take the limit  $x_1 \rightarrow 0$ . We find that at the bifurcation,  $\omega$  and the continuation parameter  $\lambda$  verify the nonlinear system :

$$-\omega^2 + \omega_1^2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\lambda\sqrt{\omega} = 0 \quad (9.29a)$$

$$a_1\omega - \lambda \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\omega} = 0 \quad (9.29b)$$

For the values of parameters chosen here, the solutions of this system are :

$$\frac{\omega_{\text{theo}}}{\omega_1} \simeq 2.41, \quad \lambda_{\text{theo}} \simeq -6.92 \times 10^4 \quad (9.30)$$

For  $n_\phi = 6$ , the values of  $\omega$ ,  $\lambda$  at the Hopf bifurcation for the diffusive approximation are in good agreement with the solutions of (9.30) : the relative error on  $\lambda$  (respectively, on  $\omega$ ) is  $9 \times 10^{-3}$  (resp.  $5 \times 10^{-3}$ ).

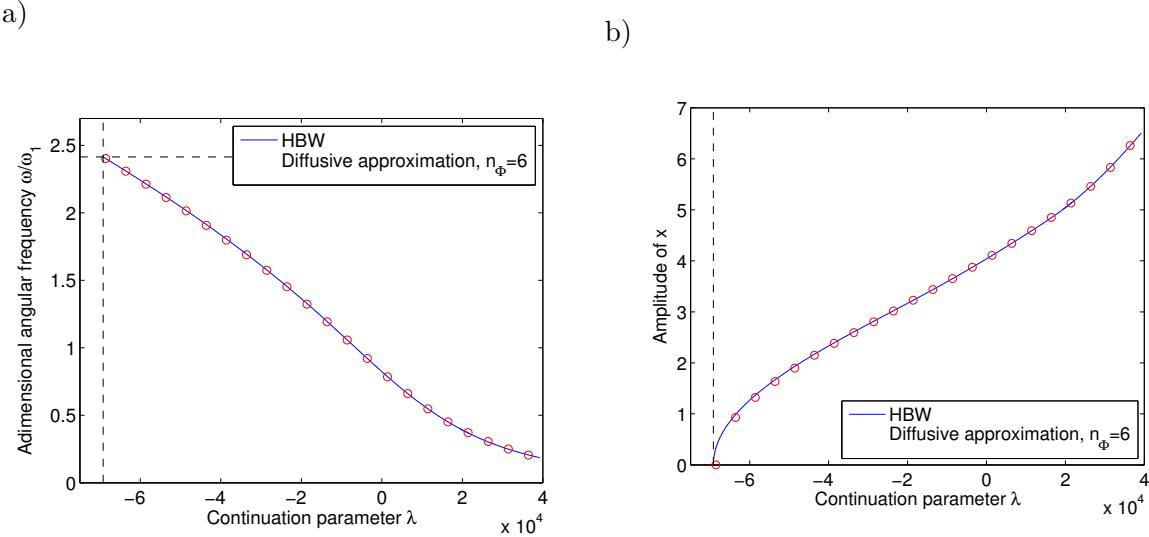


FIGURE 9.1 – Continuation of periodic solutions of eq. (9.24). a) Adimensional angular frequency  $\omega/\omega_1$  vs the continuation parameter  $\lambda$ . Harmonic Balance with Weyl derivative (HBW) in blue solid line; diffusive approximation with  $n_\phi = 6$ , red circles. b) Peak-to-peak amplitude of  $x$  vs  $\lambda$ . The values  $\omega_{\text{theo}}, \lambda_{\text{theo}}$  are shown in black.

For  $\lambda = 0$  the fractional term of the system is not present, which means that both methods necessarily agree there. It can also be used as a starting point for the continuation. For  $\lambda > 4 \times 10^4$  the continuation becomes increasingly expensive in computation time. The reason is that while the period increases, for an increasingly long portion of the period  $\dot{x}$  is near 0. This needs more harmonics to be accurately approached, and therefore computation time per step increases.

Examples of solutions, extracted from the bifurcation diagram, are given in fig. 9.2.

### 9.5.2 Continuation with respect to the derivation order

In this section, the periodic solutions of

$$\ddot{x} - a_1(1 - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + b_1 D^\alpha x = 0 \quad (9.31)$$

are continued with respect to the order of the fractional derivative (that is to say, in the ANM formalism (9.2),  $\lambda = \alpha$ ). Parameters values are :  $\omega_1 = 200\pi$ ,  $a_1 = 2\omega_1$ ,  $b_1 = 5\omega_1$ . The system can be written

$$\dot{x} = \omega_1 x_2 \quad (9.32a)$$

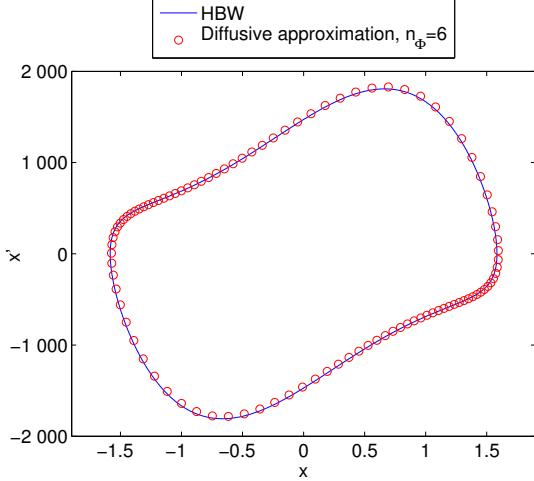
$$\dot{x}_2 = a_1 x_2 - \omega_1 x - \frac{b_1}{\omega_1} D^\alpha x - a_1 x_2 x_3 \quad (9.32b)$$

$$0 = x_3 - x^2 \quad (9.32c)$$

and periodic solutions are continued as presented in section 9.3.3. The adimensional angular frequency of the solution  $\omega/\omega_1$  and the peak-to-peak amplitude of  $x$  are represented in fig. 9.3. The periodic branch and the trivial stationary branch ( $x = 0$ ) meet at a bifurcation. Again, the periodic solution in the vicinity of the bifurcation can be approached with few harmonics, and its amplitude grows as the square root of  $\lambda$ . We conjecture that it can be called a Hopf bifurcation and that an appropriate framework could be theorized to include this type of bifurcation. Closing this theoretical gap would justify the same conjecture as before : in the vicinity of the bifurcation

## 9.6. Link with the Caputo derivative

a)



b)

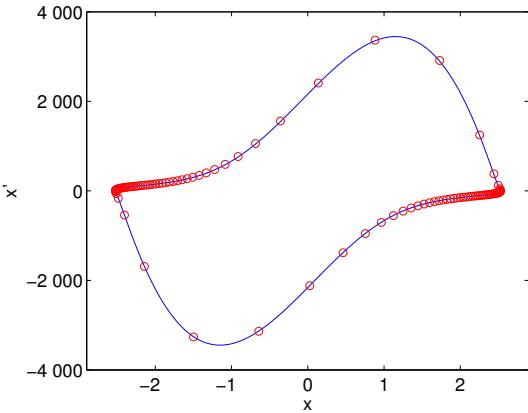


FIGURE 9.2 – Examples of phase diagrams  $(x, \dot{x})$  of periodic solutions of eq. (9.24). a)  $\lambda = -2 \times 10^4$ . HBW (blue, solid); diffusive approximation with  $n_\phi = 6$  (red circles). b)  $\lambda = 2 \times 10^4$ .

the solution is well approached with one harmonic, and similarly to system (9.29) we obtain that at the bifurcation, the pulsation  $\omega$  and the order  $\alpha$  verify the following nonlinear system :

$$-\omega^2 + \omega_1^2 + b_1 \omega^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = 0 \quad (9.33a)$$

$$a_1 \omega - b_1 \omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = 0 \quad (9.33b)$$

For the values of parameters chosen here, the solutions are :  $\frac{\omega_{\text{theo}}}{\omega_1} \simeq 1.24$ ,  $\alpha_{\text{theo}} \simeq 0.866$ .

For  $\alpha$  crossing integer values, the periodic solutions of eq. (9.31) can be found by replacing  $D^\alpha x$  with a standard derivation or integration. The simplest case here is for  $\alpha = 0$ , where the branch of periodic solutions passes through the periodic solution of

$$\ddot{x} - a_1(1 - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + b_1 x = 0 \quad (9.34)$$

This remark may be used to obtain a starting point for the continuation. Another way to obtain a starting point can be the previous study : eqs. (9.24) and (9.31) are the same for appropriate parameters ( $\lambda = -5\omega_1$  in the first one,  $\alpha = \frac{1}{2}$  in the second one).

## 9.6 Link with the Caputo derivative

In the litterature a common definition of the fractional derivative is the Caputo derivative  $D_C^\alpha$ , recalled in def. (9.5). It can then be observed numerically for many systems that as  $t$  tends to infinity, the solution seems to be attracted by a periodic function (a closed curve in the phase space). But as said in section 9.2.2, there exists no periodic solution for a system that contains a Caputo fractional operator. On a given example it is easy to prove by reduction to the absurd, using the fact that the Caputo derivative of a periodic function is not periodic. This fact is easily verified for a sine ([Ort11], p. 39), and more generally the Caputo derivative of a  $T$ -periodic

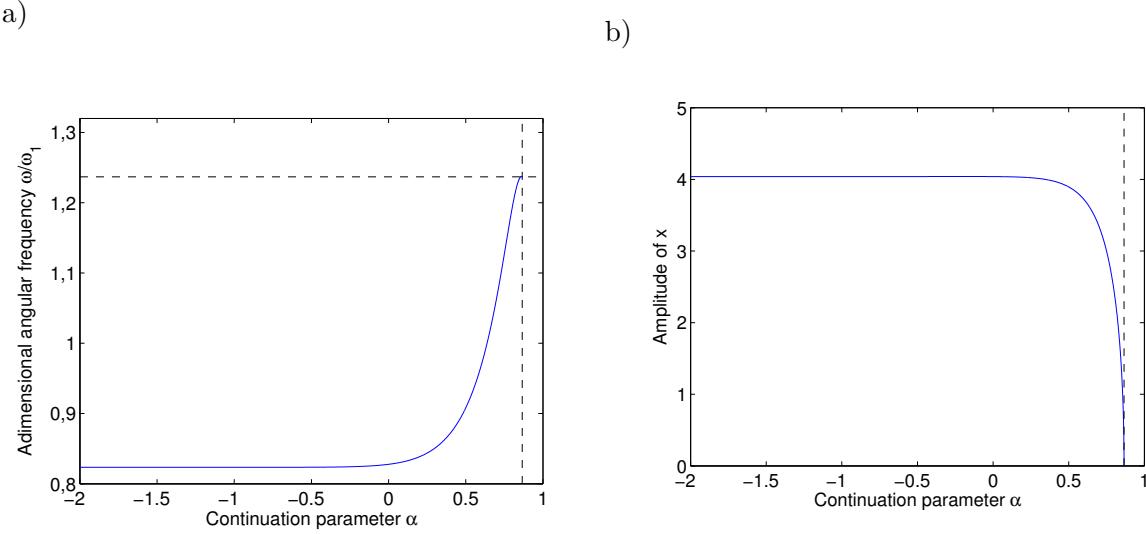


FIGURE 9.3 – Continuation of periodic solutions of eq. (9.31). a) Adimensional angular frequency  $\frac{\omega}{\omega_1}$  vs the continuation parameter  $\alpha$ . b) Peak-to-peak amplitude of  $x$  vs  $\alpha$ . The values  $\omega_{\text{theo}}$ ,  $\alpha_{\text{theo}}$  are shown in black.

function is not  $\tilde{T}$ -periodic, for any  $\tilde{T}$ , with the trivial exception of the null function [ALN14]. Then, if we consider the following example of a Van der Pol oscillator with a Caputo-derivative term :

$$\forall t \geq 0, \quad \ddot{x}(t) - a_1(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau = 0 \quad (9.35)$$

assuming there exists a  $T$ -periodic solution  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  is absurd : the standard derivatives  $\dot{x}, \ddot{x}$  are  $T$ -periodic ; and on the other hand the Caputo derivative  $D_C^\alpha x$  is not  $T$ -periodic.

We chose a specific framework (Weyl derivative) to avoid this issue. Can it be used to find the periodic functions observed in the Caputo framework ? In other words, when a periodic function seems to emerge as a steady-state asymptote in a system based on Caputo derivatives, is it a solution of the modified system where Caputo derivatives are replaced with Weyl derivatives, and  $t$  is in  $\mathbb{R}$  instead of  $\mathbb{R}_+$  ?

Let us assume that the system can be recast as an algebro-differential system

$$M\dot{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u}) + g_C^\alpha(\mathbf{u}), \quad (9.36)$$

thanks to auxiliary unknowns. In this formulation,  $M$  is a real matrix possibly with zeros on the diagonal (some equations will then be purely algebraic),  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  is the nonlinear part of the system, and  $g_C^\alpha$  is the operator containing Caputo derivatives. For instance,

$$\ddot{x} - (1 - x^2)D_C^\alpha x + x = 0 \quad (9.37)$$

can be recast as a system on  $\mathbf{u} = [x \ y \ z]$  :

$$\dot{x} = y \quad (9.38a)$$

$$\dot{y} = (1 - x^2)z - x \quad (9.38b)$$

$$0 = z - D_C^\alpha x \quad (9.38c)$$

## 9.7. Conclusion

Then, let us suppose that there exists  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  such that

$$\mathbf{u}_0 \text{ periodic}, \quad \|\mathbf{u}_1(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad \|\dot{\mathbf{u}}_1(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \text{ is solution of system (9.36)} \quad (9.39)$$

Then

$$M\dot{\mathbf{u}}_0 + M\dot{\mathbf{u}}_1 = f(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) + g_C^\alpha(\mathbf{u}_0) + g_C^\alpha(\mathbf{u}_1) \quad (9.40)$$

As  $t$  tends to infinity,  $M\dot{\mathbf{u}}_1$  tends to zero, and  $f$  is smooth so  $f(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1)$  tends to  $f(\mathbf{u}_0)$ . We now deal with the limits of the Caputo derivatives. Let  $T$  be the period of  $\mathbf{u}_0$ , and  $k \in \mathbb{N}$ . For each component  $x_0$  of  $\mathbf{u}_0$ ,  $x_{0,\mathbb{R}}$  denotes the extension to a  $T$ -periodic function on  $\mathbb{R}$ , and we have

$$D_C^\alpha x_0(t + kT) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{t+kT} (t + kT - \tau)^{-\alpha} \dot{x}_0(\tau) d\tau \quad (9.41)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{-kT}^t (t - \sigma)^{-\alpha} \dot{x}_0(\sigma + kT) d\sigma \quad (9.42)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{-kT}^t (t - \sigma)^{-\alpha} \dot{x}_{0,\mathbb{R}}(\sigma) d\sigma \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} D^\alpha x_{0,\mathbb{R}}(t). \quad (9.43)$$

On the other hand, to conclude that  $D_C^\alpha \mathbf{u}_1$  tends to zero, we add a sufficient condition of exponential convergence : for each component  $x_1$  of  $\mathbf{u}_1$ ,

$$\exists C_1 > 1, |\dot{x}_1(t)| = \mathcal{O}(C_1^{-t}) \text{ for } t \rightarrow +\infty, \text{ i.e. } \exists C_1 > 1, \exists C_0, A_1 \in \mathbb{R}_+, \forall t > A_1, |\dot{x}_1(t)| < C_0 C_1^{-t} \quad (9.44)$$

Then, the following lemma (proved in 9.D) :

$$\left[ \exists C_1 > 1, |\dot{x}_1(t)| = \mathcal{O}(C_1^{-t}) \text{ for } t \rightarrow +\infty \right] \Rightarrow |D_C^\alpha x_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (9.45)$$

gives the result that  $D_C^\alpha \mathbf{u}_1$  tends to zero. To summarize : the Caputo derivative of the « periodic part »  $\mathbf{u}_0$  tends to the Weyl derivative of  $\mathbf{u}_{0,\mathbb{R}}$ , while under a sufficient condition on  $\dot{\mathbf{u}}_1$  the Caputo derivative of the « residual »  $\mathbf{u}_1$  tends to 0. By taking the limit,  $\mathbf{u}_{0,\mathbb{R}}$  verifies the system

$$M\dot{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u}) + g^\alpha(\mathbf{u}) \quad (9.46)$$

where the fractional derivatives in  $g^\alpha$  are now Weyl derivatives (and  $t \in \mathbb{R}$ ).

## 9.7 Conclusion

An appropriate framework is chosen to focus on periodic solutions of systems with fractional operators, the Weyl fractional derivative and fractional integral. The Harmonic Balance (HB) method is extended to include this type of differentiation, and periodic solutions are continued thanks to the Asymptotic Numerical Method (ANM). The method can deal with a wide range of smooth nonlinearities, and periodic solutions can be directly obtained with an arbitrarily large number of harmonics.

In the examples presented, bifurcations connecting the periodic and stationary branches are found, and present a great similarity to the Hopf bifurcation in differential systems. They belong to a framework that seems to be currently missing in the literature : bifurcations of differential systems with both standard derivatives and Weyl fractional operators. In the case of a constant

fractional order, diffusive approximation transforms the systems into standard differential system, which gives access to stability results. But these are yet to be confirmed, ideally in a general framework where the fractional order could also vary.

Lastly, we proved under some necessary condition that an asymptotically stable limit cycle observed in a more common framework (Caputo definition of the derivative and causal functions) is a periodic solution that our method can obtain.

## Acknowledgements

This work has been carried out in the framework of the Labex MEC (ANR-10-LABX-0092) and of the A\*MIDEX project (ANR-11-IDEX-0001-02), funded by the *Investissements d'Avenir* French Government program managed by the French National Research Agency (ANR).

## 9.A. ANM equations for the continuation with respect to the fractional order

### Annexes

#### 9.A ANM equations for the continuation with respect to the fractional order

In this appendix, the equations used in the ANM formalism for the continuation with respect to  $\alpha$  are given. Along the standard HBM equations, two types of equations will be added : quadratic equations, and so-called differentiated equations.

The aim is to have a quadratic formalism for expressions such as eq. (9.17), recalled here :

$$(k\omega)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) x_{ck}$$

which can be subdivided in smaller problems : if

$$A_k := k^\alpha (2 \leq k \leq H), \quad O_L := \omega^\alpha, \quad c := \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), \quad s := \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \quad (9.47)$$

were defined as auxiliary unknowns, then an expression such as (9.17) would become a product of four unknowns, which is tractable in the quadratic formalism (provided a few more auxiliary unknowns). We set

$$\Omega := \ln \omega$$

and then the  $A_k$ ,  $\Omega$ ,  $c$  and  $s$  can be defined by differentiated equations :

$$\omega = \exp \Omega \quad \text{so} \quad d\omega = \omega d\Omega \quad (9.48)$$

$$\forall k \in [2, H], \quad dA_k = \ln(k) A_k d\alpha \quad (9.49)$$

$$dc = -\frac{\pi}{2} s \, d\alpha, \quad ds = \frac{\pi}{2} c \, d\alpha \quad (9.50)$$

Then, we add the quadratical equation

$$\rho := \alpha\Omega \quad (9.51)$$

yielding the differentiated definition of  $O_L = \exp(\alpha\Omega)$  :

$$dO_L = O_L d\rho \quad (9.52)$$

Then some quadratic equations are added :

$$O_C = O_L c \quad (9.53)$$

$$O_S = O_L s \quad (9.54)$$

$$B_k = A_k O_C, \quad \forall k \in [2, H] \quad (9.55)$$

$$C_k = A_k O_S, \quad \forall k \in [2, H] \quad (9.56)$$

In summary,  $3 + 2(H - 1)$  quadratic equations were added (eqs. (9.51), (9.53)) ; and  $4 + (H - 1)$  differentiated equations (eqs. (9.48), (9.49), (9.50), (9.52)). The vector of unknowns, besides the Fourier coefficients of variables, the pulsation and the continuation parameter, now contains  $3H + 4$  extra unknowns.

## 9.B Diffusive representation and approximation

### 9.B.1 Diffusive representation

Firstly we show a proof of eq. (9.22).

*Proof.* One recalls that

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz, \quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (9.57)$$

Similarly to the computations for the Caputo fractional derivative [Die08] :

$$D^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (9.58)$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{z=0}^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz \int_{\tau=-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (9.59)$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{z=0}^\infty \int_{\tau=-\infty}^t e^{-z} \left(\frac{z}{t-\tau}\right)^\alpha \frac{\dot{x}(\tau)}{z} d\tau dz \quad (9.60)$$

$$= \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{\theta=0}^\infty \int_{\tau=-\infty}^t e^{-(t-\tau)\theta^2} \theta^{2\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau d\theta \quad (9.61)$$

$$\left( \text{with } \theta^2 = \frac{z}{t-\tau}, \quad dz = 2(t-\tau)\theta d\theta \right)$$

$$= \int_{\theta=0}^\infty \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta^{2\alpha-1} e^{-t\theta^2} \int_{\tau=-\infty}^t e^{\tau\theta^2} \dot{x}(\tau) d\tau d\theta \quad (9.62)$$

$$= \int_{\theta=0}^\infty \Phi(\theta, t) d\theta, \quad (9.63)$$

according to the definition (9.21).

□

For fractional integrals, by defining for  $\theta \in [0, +\infty[$  :

$$\Phi^{-\alpha}(\theta, t) := \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta^{1-2\alpha} e^{-t\theta^2} \int_{-\infty}^t e^{\tau\theta^2} x(\tau) d\tau \quad (9.64)$$

one obtains similarly

$$D^{-\alpha} x(t) = \int_0^\infty \Phi^{-\alpha}(\theta, t) d\theta. \quad (9.65)$$

### 9.B.2 Diffusive approximation

The diffusive representations (either eq. (9.22) or (9.65)) can be approached by quadrature formulas. For a given node  $\theta_\ell$ ,  $\Phi_\ell$  denotes  $\Phi(\theta_\ell, \cdot)$ . The diffusive representation is approached by a sum  $\sum_{\ell=1}^{n_\phi} \mu_\ell \Phi_\ell$ . Each function  $\Phi_\ell$  is solution of a differential system. For the fractional derivative, it is the system (9.23) ; for the fractional integral, it is the following system :

$$\dot{\Phi}_\ell^{-\alpha} = -\theta_\ell^2 \Phi_\ell^{-\alpha} + \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta_\ell^{1-2\alpha} x \quad (9.66a)$$

$$\Phi_\ell^{-\alpha}(0) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta_\ell^{1-2\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta_\ell^2} x(\tau) d\tau. \quad (9.66b)$$

### 9.C. Initial condition for the diffusive approximation

The method used to obtain the quadrature nodes  $\theta_\ell$  and weights  $\mu_\ell$  is the same as in [LM16 ; RLM15 ; Ber+17] (the reader is referred to [LM16 ; RLM15] for technical details). Following eq. (9.10) the Fourier symbol  $\chi$  of the operator  $D^\alpha$  is

$$\chi(\omega) := (i\omega)^\alpha. \quad (9.67)$$

On the other hand, for the fractional derivative, the Fourier transform of each differential equation (9.23a) yields the Fourier symbol  $\tilde{\chi}$  of the diffusive approximation :

$$\tilde{\chi}(\omega) := \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} i\omega \sum_{\ell=1}^{n_\phi} \frac{\mu_\ell \theta_\ell^{2\alpha-1}}{\theta_\ell^2 + i\omega}. \quad (9.68)$$

A nonlinear optimization method (Shor's iterative method) is used to minimize the relative error on Fourier symbols

$$\left| \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\chi(\omega)} - 1 \right| \quad (9.69)$$

for  $\omega$  in an optimization range  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ , with a positivity constraint on weights  $\mu_\ell$ .

The procedure is very similar for fractional integrals. Following eq. (9.66), the Fourier symbol of the diffusive approximation is now

$$\tilde{\chi}(\omega) := \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{\ell=1}^{n_\phi} \frac{\mu_\ell \theta_\ell^{1-2\alpha}}{\theta_\ell^2 + i\omega} \quad (9.70)$$

## 9.C Initial condition for the diffusive approximation

For  $x$  a periodic function of zero mean, the diffusive approximation functions  $\Phi_\ell^{-\alpha}$  for the fractional integral  $D^{-\alpha}x$  are defined by the differential system (9.66), and for  $x$  a Fourier sum of zero mean

$$x(\tau) = \sum_{k=1}^H x_{ck} \cos(k\omega\tau) + x_{sk} \sin(k\omega\tau) \quad (9.71)$$

the initial condition (9.66b) can be written :

$$\Phi_\ell^{-\alpha}(0) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta_\ell^{1-2\alpha} \sum_{k=1}^H \frac{\theta_\ell^2 x_{ck} - k\omega x_{sk}}{\theta_\ell^4 + k^2\omega^2} \quad (9.72)$$

*Proof.* Starting from eq. (9.66b) and substituting for  $x$  the Fourier sum (9.71),

$$\Phi^{-\alpha}(\theta, 0) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta^{1-2\alpha} \int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta^2} \sum_{k=1}^H x_{ck} \cos(k\omega\tau) + x_{sk} \sin(k\omega\tau) d\tau \quad (9.73)$$

$$= \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta^{1-2\alpha} \sum_{k=1}^H x_{ck} \left( \int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta^2} \cos(k\omega\tau) d\tau \right) + x_{sk} \left( \int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta^2} \sin(k\omega\tau) d\tau \right) \quad (9.74)$$

Substituting in eq. (9.74) the real and imaginary parts of :

$$\int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta^2} \cos(k\omega\tau) d\tau + i \int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta^2} \sin(k\omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{\tau\theta^2} e^{ik\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\theta^2 + ik\omega} = \frac{\theta^2 - ik\omega}{\theta^4 + k^2\omega^2} \quad (9.75)$$

yields the new formulation (9.72) of the initial condition (9.66b).

□

Similarly, for  $x$  a Fourier sum

$$x(\tau) = x_0 + \sum_{k=1}^H x_{ck} \cos(k\omega\tau) + x_{sk} \sin(k\omega\tau) \quad (9.76)$$

the diffusive approximation functions  $\Phi_\ell$  for the fractional derivative  $D^\alpha x$  are defined by the differential eq. (9.23a) with the initial condition (9.23b), now written :

$$\Phi_\ell(0) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta_\ell^{2\alpha-1} \sum_{k=1}^H \frac{k\omega(\theta_\ell^2 x_{sk} + k\omega x_{ck})}{\theta_\ell^4 + k^2\omega^2} \quad (9.77)$$

The  $n_\phi$  ordinary differential equations on  $\Phi_\ell$  (eq. (9.23a) for the derivative, eq. (9.66a) for the integral) are added to the differential system. The functions  $\Phi_\ell$  are decomposed on  $H$  harmonics and the harmonic balance is applied, but with the same adjustment as in [KCV13] : the equation derived from balancing the constant (« harmonic 0 ») of the differential equation must be replaced with the appropriate initial condition (eq. (9.72) for the integral, eq. (9.77) for the derivative). Moreover, this equation must comply with the ANM formalism, *i.e.* it must be recast as a quadratic polynomial system.

We now make this recast explicit for the fractional integral. To this end, we define

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n_\phi \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, H \rrbracket, \quad f_{\ell k} := \frac{\theta_\ell^2 x_{ck} - k\omega x_{sk}}{\theta_\ell^4 + k^2\omega^2} = \frac{\frac{1}{\theta_\ell^2} x_{ck} - \frac{k}{\theta_\ell^4} \omega x_{sk}}{1 + \frac{k^2}{\theta_\ell^4} \omega^2} \quad (9.78)$$

These  $n_\phi H$  auxiliary unknowns  $f_{\ell k}$  are added to the usual Fourier unknowns. The auxiliary unknown

$$\Omega := \omega^2 \quad (9.79)$$

renders eq. (9.78) quadratical :

$$f_{\ell k} - \frac{1}{\theta_\ell^2} x_{ck} + \frac{k^2}{\theta_\ell^4} \Omega f_{\ell k} + \frac{k}{\theta_\ell^4} \omega x_{sk} = 0 \quad (9.80)$$

Then, evaluating the Fourier series of  $\Phi_\ell^{-\alpha}$  at  $t = 0$ , each equation (9.72) is linear :

$$\sum_{k=0}^H \Phi_{\ell,ck}^{-\alpha} - \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \theta_\ell^{1-2\alpha} \sum_{k=1}^H f_{\ell k} = 0 \quad (9.81)$$

The  $n_\phi$  functions introduced in the differential system are represented with  $n_\phi(2H+1)$  Fourier coefficients ; and the initial conditions have been reformulated above with  $n_\phi H + 1$  unknowns.

The same type of quadratic recast can be applied to (9.77), with a few more unknowns and equations because of an extra factor  $k\omega$  in the numerators.

## 9.D Lemma

In this section we prove the implication (9.45). The hypothesis on  $\dot{x}_1$  is

$$\exists C_1 > 1, |\dot{x}_1(t)| = \mathcal{O}(C_1^{-t}) \text{ for } t \rightarrow +\infty, \text{ *i.e.* } \exists C_1 > 1, \exists C_0, A_1 \in \mathbb{R}_+, \forall t > A_1, |\dot{x}_1(t)| < C_0 C_1^{-t} \quad (9.82)$$

### 9.D. Lemma

Let  $\varepsilon > 0$ . Let  $\delta > \frac{1}{\alpha} > 1$ . Since

$$t^{1-\delta} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad t^{1-\alpha\delta} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad C_1^{-t} t^{\delta(1-\alpha)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (9.83)$$

let  $A > A_1$  be such that for all  $B > A$ ,

$$(1 - \alpha)B^{1-\delta} < 1 \quad (9.84a)$$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\dot{x}_1(\tau)| (e^1 - 1) B^{1-\alpha\delta} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.84b)$$

$$\frac{C_0}{1 - \alpha} C_1^{-B} B^{\delta(1-\alpha)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.84c)$$

Then, for all  $t > A + A^\delta$ ,  $\exists B > A$  such that  $t = B + B^\delta$ , and one has

$$|\Gamma(1 - \alpha)D_C^\alpha x_1(t)| = \left| \int_0^{B+B^\delta} (B + B^\delta - \tau)^{-\alpha} \dot{x}_1(\tau) d\tau \right| \quad (9.85)$$

$$\leq \underbrace{\int_0^B (B + B^\delta - \tau)^{-\alpha} \dot{x}_1(\tau) d\tau}_{I_1} + \underbrace{\int_B^{B+B^\delta} (B + B^\delta - \tau)^{-\alpha} \dot{x}_1(\tau) d\tau}_{I_2} \quad (9.86)$$

Now the two terms  $I_1$  and  $I_2$  will be upper bounded. For the first term :

$$I_1 \leq \sup_{\tau \in [0, B]} |\dot{x}_1(\tau)| \int_0^B (B + B^\delta - \tau)^{-\alpha} d\tau \quad (9.87)$$

$$\leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\dot{x}_1(\tau)| \left[ -\frac{(B + B^\delta - \tau)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right]_{\tau=0}^B \quad (9.88)$$

$$\leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\dot{x}_1(\tau)| \frac{(B + B^\delta)^{1-\alpha} - (B^\delta)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \quad (9.89)$$

Since

$$\begin{aligned} (B + B^\delta)^{1-\alpha} &= \exp((1 - \alpha) \ln(B^\delta(1 + B^{1-\delta}))) \leq \exp((1 - \alpha)[\delta \ln B + B^{1-\delta}]) \\ &= B^{\delta(1-\alpha)} \exp((1 - \alpha)B^{1-\delta}) \end{aligned} \quad (9.90)$$

one has

$$(B + B^\delta)^{1-\alpha} - B^{\delta(1-\alpha)} \leq B^{\delta(1-\alpha)} (\exp((1 - \alpha)B^{1-\delta}) - 1) \quad (9.91)$$

The exponential function is convex, so

$$\forall x \in [0, 1], \quad e^x \leq (e^1 - 1)x + 1, \quad i.e. \quad e^x - 1 \leq (e^1 - 1)x \quad (9.92)$$

By hypothesis (9.84a),  $(1 - \alpha)B^{1-\delta} \in [0, 1]$ , so eqs. (9.91) and (9.92) give

$$(B + B^\delta)^{1-\alpha} - B^{\delta(1-\alpha)} \leq B^{\delta(1-\alpha)} (e^1 - 1)(1 - \alpha)B^{1-\delta} = (e^1 - 1)(1 - \alpha)B^{1-\alpha\delta} \quad (9.93)$$

Therefore by hypothesis (9.84b),

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\dot{x}_1(\tau)| \frac{(B + B^\delta)^{1-\alpha} - (B^\delta)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9.94)$$

For the second term  $I_2$  :

$$I_2 \leq \sup_{\tau > B} |\dot{x}_1(\tau)| \int_B^{B+B^\delta} (B + B^\delta - \tau)^{-\alpha} d\tau \quad (9.95)$$

$$\leq C_0 C_1^{-B} \left[ -\frac{(B + B^\delta - \tau)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right]_{\tau=B}^{B+B^\delta} \quad (\text{hypothesis (9.82)}) \quad (9.96)$$

$$\leq C_0 C_1^{-B} \frac{(B^\delta)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \quad (9.97)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{hypothesis (9.84c)}) \quad (9.98)$$

□

*Remark.* The exponential convergence, which we observed numerically, is not an excessively demanding condition, or in contradiction with the *slow* convergence typically observed for fractional systems (the constant  $C_1$  in eq. (9.82) can be close to 1). The conclusion that  $D_C^\alpha x_1$  tends to zero may hold for a slower convergence of  $\dot{x}_1$  and specific values of  $\alpha$ . For instance, to accomodate the asymptotical behaviour proved in [Cue07] for some fractional systems, we note that the proof above works if  $\dot{x}_1(t) = \mathcal{O}(t^{-\gamma})$  ( $\gamma > 0$ ) and if the hypothesis (9.84c) is replaced with :  $t^{-\gamma+\delta(1-\alpha)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , i.e.  $-\gamma + \delta(1 - \alpha) < 0$ . Then, if  $\frac{1}{\alpha} < \frac{\gamma}{1 - \alpha}$ , choosing  $\delta$  in  $\left] \frac{1}{\alpha}, \frac{\gamma}{1 - \alpha} \right[$  in the proof above is sufficient to meet all hypotheses.

Fin de l'article

## 9.E Un exemple

Le résultat établi dans le lemme est l'implication (9.45), que nous rappelons :

$$\left[ \exists C_1 > 1, |\dot{x}_1(t)| = \mathcal{O}(C_1^{-t}) \text{ en } t \rightarrow +\infty \right] \Rightarrow |D_C^\alpha x_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Comme souligné dans la remarque, dans certains cas, le résultat du lemme peut être obtenu par la même preuve avec une condition suffisante moins contraignante :

$$\left[ \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \dot{x}_1(t) = \mathcal{O}(t^{-\gamma}) \text{ et } \frac{1}{\alpha} < \frac{\gamma}{1 - \alpha} \right] \Rightarrow |D_C^\alpha x_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (9.99)$$

Cependant,

$$|\dot{x}_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \not\Rightarrow |D_C^\alpha x_1(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (9.100)$$

En effet, soit la fonction  $x_1$

## Références

$$x_1(t) := 2\sqrt{t} \quad (9.101)$$

Alors

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (9.102)$$

On calcule la dérivée Caputo d'ordre  $\alpha = 1/2$  :

$$\sqrt{\pi} D_C^{1/2} x_1(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (9.103)$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{t-v^2}} dv \quad (9.104)$$

(changement de variable  $v = \sqrt{\tau}$ )

$$= \frac{2}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{t}}} dv \quad (9.105)$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds \quad (9.106)$$

(changement de variable  $s = v/\sqrt{t}$ )

$$= [2 \arcsin s]_0^1 = \pi \quad (9.107)$$

donc  $D_C^{1/2} x_1(t)$  ne tend pas vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

## Références

- [AAC10] R. AGARWAL, B. de ANDRADE et C. CUEVAS. « On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations ». In : *Advances in Difference Equations* 2010.1 (2010), p. 1–25.
- [Aga+11] R. AGARWAL, C. CUEVAS, H. SOTO et M. EL-GEBEILY. « Asymptotic periodicity for some evolution equations in Banach spaces ». In : *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 74.5 (2011), p. 1769–1798.
- [AG03] E. L. ALLGOWER et K. GEORG. *Introduction to numerical continuation methods*. SIAM, 2003.
- [ALN14] I. AREA, J. LOSADA et J.J. NIETO. « On fractional derivatives and primitives of periodic functions ». In : *Abstract and Applied Analysis*. Hindawi Publishing Corporation, 2014.
- [BNR09] M. BELMEKKI, J. NIETO et R. RODRIGUEZ-LOPEZ. « Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation ». In : *Boundary Value Problems* 2009.1 (2009), p. 1–18.
- [Ber+17] H. BERJAMIN, B. LOMBARD, C. VERGEZ et E. COTTANCEAU. « Time-domain numerical modeling of brass instruments including nonlinear wave propagation, viscothermal losses, and lips vibration ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 103.1 (2017), p. 117–131.
- [BTM15] A. H. BHRAWY, T. M. TAHA et J. A. T. MACHADO. « A review of operational matrices and spectral techniques for fractional calculus ». In : *Nonlinear Dynamics* 81.3 (2015), p. 1023–1052.

- [CK16] A. CHAIGNE et J. KERGOMARD. *Acoustics of musical instruments*. T. 844. Springer, 2016.
- [CV09] B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions ». In : *Journal of Sound and Vibration* 324 (2009), p. 243–262.
- [Cue07] E. CUESTA. « Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations ». In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (2007), p. 277–285.
- [Die08] K. DIETHELM. « An investigation of some nonclassical methods for the numerical approximation of Caputo-type fractional derivatives ». In : *Numerical Algorithms* 47.4 (2008), p. 361–390.
- [Gui+17] L. GUILLOT, P. VIGUÉ, C. VERGEZ et B. COCHELIN. « Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency Harmonic Balance Method ». In : *Journal of Sound and Vibration* 394 (2017), p. 434–450.
- [Hil00] R. HILFER. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, 2000.
- [Hil08] R. HILFER. « Threefold introduction to fractional derivatives ». In : *Anomalous transport : Foundations and applications* (2008), p. 17–73.
- [KCV13] S. KARKAR, B. COCHELIN et C. VERGEZ. « A high-order, purely frequency based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions : The case of non-polynomial nonlinearities ». In : *Journal of Sound and Vibration* 332.4 (2013), p. 968–977.
- [KS12a] E. KASLIK et S. SIVASUNDARAM. « Non-existence of periodic solutions in fractional-order dynamical systems and a remarkable difference between integer and fractional-order derivatives of periodic functions ». In : *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 13.3 (2012), p. 1489–1497.
- [KS12b] E. KASLIK et S. SIVASUNDARAM. « Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order neural networks ». In : *Neural Networks* 32 (2012), p. 245–256.
- [KJ93] M. H. KNUDSEN et J. G. JENSEN. « Low-frequency loudspeaker models that include suspension creep ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 41.1/2 (1993), p. 3–18.
- [LT10] A. LAZARUS et O. THOMAS. « A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510–517.
- [Lea02] W. M. LEACH JR. « Loudspeaker voice-coil inductance losses : circuit models, parameter estimation, and effect on frequency response ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 50.6 (2002), p. 442–450.
- [LG11] A.Y.T. LEUNG et Z. GUO. « Forward residue harmonic balance for autonomous and non-autonomous systems with fractional derivative damping ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16.4 (2011), p. 2169–2183.
- [LN13] C. LIZAMA et G. M. N’GUÉRÉKATA. « Mild solutions for abstract fractional differential equations ». In : *Applicable Analysis* 92.8 (2013), p. 1731–1754.
- [LM16] B. LOMBARD et D. MATIGNON. « Diffusive approximation of a time-fractional Burger’s equation in nonlinear acoustics ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 76.5 (2016), p. 1765–1791.

## Références

- [Mat96] D. MATIGNON. « Stability results for fractional differential equations with applications to control processing ». In : *Computational engineering in systems applications*. T. 2. IMACS, IEEE-SMC Lille, France. 1996, p. 963–968.
- [MG00] L. MENGUY et J. GILBERT. « Weakly nonlinear gas oscillations in air-filled tubes ; solutions and experiments ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 86.5 (2000), p. 798–810.
- [Mis+16] V. MISHRA, S. DAS, H. JAFARI et S.H. ONG. « Study of fractional order Van der Pol equation ». In : *Journal of King Saud University-Science* 28.1 (2016), p. 55–60.
- [Ort11] M. D. ORTIGUEIRA. *Fractional calculus for scientists and engineers*. T. 84. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Pod98] I. PODLUBNY. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. T. 198. Academic press, 1998.
- [RLM15] O. RICHOUX, B. LOMBARD et J. F. MERCIER. « Generation of acoustic solitary waves in a lattice of Helmholtz resonators ». In : *Wave Motion* 56 (2015), p. 85–99.
- [She+16] Y.-J. SHEN, S.-F. WEN, X.-H. LI, S.-P. YANG et H.-J. XING. « Dynamical analysis of fractional-order nonlinear oscillator by incremental harmonic balance method ». In : *Nonlinear Dynamics* 85.3 (2016), p. 1457–1467.
- [STS00] K. SHIBATA, A. TAKAHASHI et T. SHIRAI. « Fault diagnosis of rotating machinery through visualisation of sound signals ». In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 14.2 (2000), p. 229–241.
- [WFZ13] J. R. WANG, M. FECKAN et Y. ZHOU. « Nonexistence of periodic solutions and asymptotically periodic solutions for fractional differential equations ». In : *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.2 (2013), p. 246–256.
- [Wri90] J. R. WRIGHT. « An empirical model for loudspeaker motor impedance ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 38.10 (1990), p. 749–754.
- [XZC13] M. XIAO, W. X. ZHENG et J. CAO. « Approximate expressions of a fractional order Van der Pol oscillator by the residue harmonic balance method ». In : *Mathematics and Computers in Simulation* 89 (2013), p. 1–12.
- [Zha94] C. Y. ZHANG. « Pseudo almost periodic solutions of some differential equations ». In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 181.1 (1994), p. 62–76.



# Conclusion générale

## Conclusions

Le travail de cette thèse porte sur la continuation des solutions périodiques et quasi-périodiques de différents modèles mécaniques non linéaires avec friction, représentatifs de la corde frottée du violon. Les contributions apportées concernent d'une part les méthodes numériques (convergence, recherche de solutions quasi-périodiques, prise en compte de dérivées fractionnaires), d'autre part l'analyse des diagrammes de bifurcation de modèles donnés et l'influence des paramètres.

L'emploi d'un modèle à un degré de liberté éclaire un type d'interaction de contact, la friction régularisée. Grâce à la continuation des solutions périodiques, il est possible de dépasser le premier constat d'une similarité graphique entre les diagrammes de phase pour la friction de Coulomb et la friction régularisée. Nous avons ainsi montré qu'en passant de la première à la seconde, il y a préservation qualitative de certaines bifurcations (une vitesse maximale et une force minimale permettant le mouvement de Helmholtz) et de propriétés globales de la branche de solution (comme la croissance de l'amplitude avec la vitesse, ou la décroissance de la fréquence avec la force normale). Ce travail a permis dans un second temps de valider la capacité de l'Équilibrage Harmonique (EH) à étudier un tel système à friction régularisée. La méthode d'EH présente des propriétés de convergence intéressantes (erreur faible, monotone, à décroissance rapide). Nous avons en particulier insisté sur la monotonie de l'erreur, signifiant une amélioration des résultats lorsque la base de description est étendue et donc particulièrement utile en pratique. Cette propriété n'est pas systématiquement vérifiée pour des méthodes au demeurant convergentes.

La transition vers un modèle à deux modes pour la corde enrichit notamment les diagrammes de bifurcation que nous avons obtenus. Ils révèlent notamment que les solutions de premier et second registre peuvent coexister de manière stable pour les mêmes valeurs de paramètres, un résultat en accord avec l'expérience du musicien. L'abaissement de la fréquence de jeu en fonction de la force normale, un autre phénomène connu des musiciens et des physiciens, est observé et quantifié. Les paramètres d'amortissement et de raideur de la corde pouvant affecter le rôle du second mode par rapport au premier, des valeurs alternatives sont testées. L'allure du diagramme de bifurcation reste qualitativement identique pour un amortissement plus important du second mode. Par contre, la valeur de raideur plus élevée, correspondant à une inharmonicité plus élevée entre les deux modes, altère considérablement le diagramme de bifurcation, tant pour l'amplitude des solutions que pour leur stabilité. Même si la prudence est de mise puisqu'un modèle de corde plus réaliste (par exemple avec un nombre de modes plus élevé) pourrait avoir un comportement différent, l'examen de ces diagrammes de bifurcation suggère que la raideur de la corde est un paramètre clé dans une perspective de facture instrumentale.

La possibilité d'étudier les régimes quasi-périodiques présente un intérêt particulier en acoustique musicale puisque ces comportements peuvent être recherchés ou redoutés selon le contexte musical. La nouvelle méthode de continuation des solutions quasi-périodiques que nous avons introduite permet de compléter les diagrammes de solutions au-delà de leurs bifurcations de Neimark-Sacker. Elle tire profit de la robustesse de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN),

particulièrement dans le contexte des résonances périodiques ; et l'Équilibrage Harmonique trouve ici une extension naturelle dans le cas à deux pulsations. La construction de la matrice requise pour la MAN bénéficie d'un algorithme développé pendant la thèse, basé sur des opérations matricielles effectuées en un temps négligeable, ce qui permet de réduire très significativement le temps de calcul (d'un ordre de grandeur pour quelques milliers d'inconnues). La continuation de solutions quasi-périodiques est encore à ses débuts dans le domaine des systèmes différentiels et c'est à notre connaissance la première fois qu'elle est effectuée à l'aide de la Méthode Asymptotique Numérique.

L'examen de la physique des instruments de musique montre que l'introduction d'opérateurs fractionnaires peut être nécessaire pour décrire certains phénomènes dissipatifs. Dans le contexte de ce travail, nous avons introduit une reformulation partielle du modèle thermique de colophane proposé par Smith et Woodhouse à l'aide d'une dérivation fractionnaire, qui nous a amené à poser le problème de la continuation de solutions périodiques de systèmes différentiels comprenant des dérivées ou intégrales fractionnaires. La méthode proposée est une contribution importante de ce travail et pourra être utilisée dans un contexte bien plus large que celui de l'acoustique musicale. La définition plus souvent adoptée pour les opérateurs fractionnaires se restreint aux solutions nulles sur  $\mathbb{R}_-$ , ce qui empêche l'existence de solutions périodiques. Ayant adopté une définition particulière des opérateurs fractionnaires pour contourner cette difficulté, nous avons montré une condition suffisante pour que les cycles obtenus asymptotiquement dans le cadre de Caputo soient solutions du cadre que nous avons choisi.

Pour la majorité des calculs de diagrammes de bifurcation dans ce travail, le nombre d'inconnues est inférieur à 5000, et  $10^4$  inconnues constitue le seuil empirique où la continuation devient difficile à réaliser dans des temps raisonnables sur un ordinateur portable<sup>2</sup>. Dans le cas périodique, pour un exemple typique d'une dizaine de variables dans le système différentiel écrit sous forme quadratique, la limite de 5000 inconnues est atteinte pour une troncature des sommes de Fourier à 250 harmoniques. D'une part ce nombre d'harmoniques n'est pas extrêmement élevé pour obtenir des solutions précises pour des non-linéarités assez raides (comme la friction). D'autre part certains exemples rencontrés tendent à montrer qu'il faut un nombre d'harmoniques plus élevé pour obtenir une estimation précise des exposants et multiplicateurs de Floquets par la méthode de Hill, que pour calculer la branche de solution elle-même. Dans la pratique, un cycle approché par un nombre légèrement insuffisant d'harmoniques conserve la même allure générale ; alors que l'évaluation (numérique, donc à une tolérance près) des critères de franchissement de l'axe imaginaire ou du cercle unité pour déterminer la stabilité nécessite une bonne précision des solutions pour pouvoir être interprétée de manière fiable. Tous les modèles ne peuvent donc être abordés par la méthode actuelle, les deux facteurs limitants étant la raideur du système et sa taille. Ceci explique pourquoi dans ce travail nous n'avons pas étudié l'influence d'un grand nombre de modes de corde ou d'un raidissement du modèle de friction.

Dans le cas quasi-périodique, pour un système différentiel comportant 10 variables à nouveau, les seuils de 5000 et 10 000 inconnues sont atteints lorsque les séries doubles de Fourier sont tronquées respectivement à 11 et 16 harmoniques, ce qui est une forte restriction sur la raideur des non-linéarités qui peuvent être convenablement approchées.

## Perspectives

La méthode d'équilibrage harmonique s'est révélée un outil pertinent pour l'étude des systèmes avec friction régularisée, sans requérir d'optimisation particulière. Il est cependant naturel à ce

---

2. On souligne qu'une part importante du temps de calcul est occupée par la méthode de Hill qui détermine la stabilité des solutions périodiques.

## Conclusion générale

stade d'envisager l'utilisation de techniques de sélection harmonique, permettant de cibler la finesse de description fréquentielle sur quelques variables et ainsi de réduire le nombre d'inconnues et donc le temps de calcul. Un soin particulier devra cependant être accordé au calcul de la stabilité, pour éviter qu'une trop forte dégradation de la solution par sélection harmonique ne vienne entacher la convergence de la méthode de Hill.

Le modèle de corde frottée utilisé dans ce travail peut bénéficier de certaines modifications dont le réalisme peut par exemple se mesurer qualitativement à leur capacité à recréer certains phénomènes manquants à ce jour. Par exemple, similairement aux modes de flexion, il est possible d'ajouter une base de modes de torsion de la corde, l'archet pouvant alors communiquer de l'énergie à la corde par une combinaison de translation (flexion) et de rotation (torsion). Comme rappelé dans le chapitre 1, c'est « l'ingrédient » essentiel à ajouter au modèle pour générer les sons de type *Anomalous Low Frequency*. D'autre part, nous avons retenu pour le coefficient de frottement une fonction de forme assez arbitraire qui se prête bien à une reformulation quadratique, et si des résultats quantitatifs étaient visés il serait important de soigner cet aspect-là (en plus des valeurs choisies pour les paramètres modaux, ce que nous avions commenté).

La continuation des solutions quasi-périodiques a de nombreuses applications en vue : dans le seul champ de l'acoustique musicale, citons les battements parasites, présents dans la famille du violon ou dans certains tuyaux d'orgue ; le *sonido rajado* de certaines flûtes chiliennes ; les sons multiphoniques produits par les cuivristes en combinant une note jouée et une autre chantée. La stabilité des solutions quasi-périodiques, qui reste un problème ouvert à notre connaissance, doit aussi être approfondie. De plus, d'un point de vue pratique, notamment pour favoriser la prise en main de nos codes par d'autres utilisateurs il serait avantageux de se rapprocher de l'interface existante pour Manlab (outils de sauvegarde, export et traitement des données).

Le modèle thermique de colophane bénéficierait d'une écriture plus explicite par équations, pour éviter la recherche d'instants particuliers au cours du mouvement sur laquelle le modèle repose actuellement. Une étude de ce modèle pourrait alors être réalisée de manière similaire à ce qui a été fait pour la friction regularisée, par la continuation des solutions périodiques d'un système à un degré de liberté, permettant de quantifier les apports spécifiques à ce modèle par rapport aux autres modèles de friction usuels en acoustique musicale (qui ne prennent pas en compte la température de la zone de contact).

La continuation de solutions périodiques de systèmes avec opérateurs fractionnaires doit être approfondie d'un point de vue théorique. La question de la stabilité a été soulevée par le biais de l'approximation diffusive. Nous ne savons pas encore si les solutions périodiques du système de départ et celles du système approché ont la même stabilité. La stabilité pour un système avec opérateurs fractionnaires de Weyl semble un sujet assez peu exploré. La condition suffisante sur les cycles périodiques observés asymptotiquement dans le cadre de Caputo a été formulée sous des hypothèses de convergence que nous avons observées sur quelques exemples, mais qui méritent d'être étayées. D'un point de vue pratique, une réflexion reste à entreprendre sur le nouveau type de formalisme quadratique à imposer aux systèmes fractionnaires. Les exemples académiques que nous avons présentés faisaient appel à un seul ordre fractionnaire à la fois, mais c'est évidemment une forte restriction, et il serait important de pouvoir utiliser un nombre arbitraire d'ordres quelconques. Ainsi qu'il est rappelé dans de nombreuses introductions d'articles de revues scientifiques, les domaines d'applications du calcul fractionnaire sont très variés (pour ainsi dire, presque autant que ceux du calcul différentiel standard), et nous n'aurons pas l'audace de prétendre s'adresser à tous ; cependant l'ajout dans Manlab d'un formalisme assez général et simple d'utilisation pour le cas fractionnaire doit être poursuivi pour favoriser sa diffusion.

## Résumé

L'étude par continuation des solutions périodiques et quasi-périodiques est appliquée à plusieurs modèles issus du violon. La continuation pour un modèle à un degré de liberté avec friction régularisée permet de montrer la préservation, par rapport à la friction de Coulomb, des bifurcations de cycle limite (une vitesse maximale et une force minimale permettant le mouvement de Helmholtz) et de propriétés globales de la branche de solution (comme la croissance de l'amplitude avec la vitesse, ou la décroissance de la fréquence avec la force normale). La méthode d'équilibrage harmonique est évaluée sur le système à friction régularisée et présente des propriétés de convergence intéressantes (erreur faible, monotone, à décroissance rapide). La continuation sur un modèle à deux modes donne accès aux solutions de registres supérieurs, dont la stabilité coïncide avec l'expérience. La valeur retenue pour l'inharmonicité peut modifier fortement le diagramme de bifurcation. Une nouvelle méthode de continuation des solutions quasi-périodiques est proposée. Elle associe l'équilibrage harmonique étendu à deux pulsations avec la Méthode Asymptotique Numérique. Une attention particulière est portée à la rapidité des calculs, face à la croissance rapide de la taille des systèmes à inverser. Un modèle de friction prenant en compte la température au point de contact est reformulé à l'aide d'une dérivée fractionnaire. Nous proposons alors une méthode de continuation de solutions périodiques de systèmes différentiels contenant des dérivées ou intégrales fractionnaires. La définition plus souvent adoptée pour les opérateurs fractionnaires se restreint aux solutions causales, ce qui empêche l'existence de solutions périodiques. Ayant adopté une définition particulière des opérateurs pour contourner cette difficulté, nous établissons une condition suffisante pour que les cycles obtenus asymptotiquement dans le cadre causal soient solutions du cadre que nous avons choisi.

## Abstract

The continuation of periodic and quasi-periodic solutions is performed on several models derived from the violin. The continuation for a one degree-of-freedom model with a regularized friction shows, compared with Coulomb friction, the persistence of limit cycle bifurcations (a maximum bow speed and a minimum normal force allowing Helmholtz motion) and of global properties of the solution branch (increase of amplitude with respect to the bow speed, decrease of frequency with respect to the normal force). The Harmonic Balance Method is assessed on this regularized friction system and shows interesting convergence properties (the error is low, monotone and rapidly decreasing). For two modes the continuation shows higher register solutions with a plausible stability. A stronger inharmonicity can greatly modify the bifurcation diagram. A new method is proposed for the continuation of quasi-periodic solutions. It couples a two-pulsations HBM with the Asymptotic Numerical Method. We have taken great care to deal efficiently with large systems of unknowns. A model of friction that takes into account temperature of the contact zone is reformulated with a fractional derivative. We then propose a method of continuation of periodic solutions for differential systems that contain fractional operators. Their definition is usually restricted to causal solutions, which prevents the existence of periodic solutions. Having chosen a specific definition of fractional operators to avoid this issue we establish a sufficient condition on asymptotically attractive cycles in the causal framework to be solutions of our framework.