

Auto-oscillations des instruments de musique
Modèles, simulations, descripteurs et cartographies
Projet d'Application Musicale

Master ATIAM
Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique

Clémentine BERGER
Romain CARON
Léo CHÉDIN
Malena FOUILLOU
Amélie PICARD
Encadré par Thomas HÉLIE et Christophe VERGEZ

Résumé

La synthèse sonore par modèles physiques permet de produire une grande variété de sons riches, très différents de ceux obtenus avec d'autres méthodes de synthèse (additive, par modulation...). Les progrès de l'électronique et de l'informatique ont permis d'utiliser cette méthode en temps réel. Les instruments auto-oscillants - instruments à vents et cordes frottées - sont particulièrement intéressants car ils présentent plusieurs régimes de fonctionnement. L'approche par modèles physiques possède également l'avantage de produire une connaissance physique des instruments considérés et de permettre le contrôle de paramètres ayant une signification physique. Le contrôle des instruments auto-oscillants - et par conséquent des modèles associés - pour produire des sons musicaux est un exercice délicat. Il est donc nécessaire d'identifier les bons paramètres qui permettent d'obtenir le son désiré. Nous proposons ici une implémentation de quelques modèles physiques d'instruments auto-oscillants pour réaliser des simulations et construire des cartographies des régimes d'oscillations explorés par les instruments en fonction des paramètres physiques régissant leurs comportements. Ces modèles permettent d'obtenir une meilleure intuition musicale du comportement des instruments et de réaliser une implémentation temps réel de leur synthèse avec une interface utilisateur adaptée utilisant les cartographies permettant d'assister le contrôle.

1 Introduction

Les instruments auto-oscillants constituent une famille à part d'instruments de musique. Ceux-ci mettent en jeu des phénomènes fortement non linéaires permettant de transformer une excitation continue en oscillations [1]. Trois types d'instruments rentrent dans cette famille : les instruments à anches, les flûtes et les cordes frottées. L'étude du fonctionnement de ces instruments de musique est ancienne (dès le 17^e siècle [2, 3]) et différentes modélisations permettent des simulations tout à fait convaincantes. Du fait des non-linéarités, les méthodes de résolutions numériques temporelles sont particulièrement adaptées. Celles-ci sont principalement de deux types. Une première approche est dite *modale* et consiste en la résolution de l'équation différentielle décrivant le système en la décomposant sur les modes du résonateur linéaire [1, 4]. L'autre approche consiste à décomposer l'onde dans le résonateur en deux ondes se propageant dans des sens opposés dont les comportements sont dirigés par la relation de non-linéarité et de la fonction de réflexion des ondes au sein du résonateur [5, 6, 7].

Même pour des modèles dans leur forme les plus simples il est possible d'observer une grande variété de comportement des instruments auto-oscillants [8] dépendant des paramètres de contrôle de l'instrumentiste ainsi que des paramètres de facture. Cela offre des perspectives en termes d'élaboration d'instruments de musique numériques reposant sur une synthèse des instruments de musique et capables d'explorer les différents régimes de l'instrument. Cependant cela implique des difficultés de contrôle de l'instrument virtuel, puisque comme pour un vrai instrument il faut apprendre à en jouer (ie utiliser les bons paramètres de contrôle) pour pouvoir en sortir des sons "musicaux". Pour éviter cette phase d'apprentissage, une solution est d'établir les liens entre les sons produits et les paramètres de contrôle par le biais de cartographie et d'un

choix de descripteurs du son produit.

L'objectif est de modéliser, simuler, programmer, analyser et contrôler des modèles physiques de différents instruments auto-oscillants en vue de produire une synthèse sonore en temps réel renseignée par des cartographies de régimes de fonctionnement, permettant de faire le lien entre les sons produits par ces modèles et leurs paramètres de contrôle. Cette étude se focalise sur les instruments à anches et les cordes frottées, et se décompose en cinq parties. D'une part, **acoustique** pour la modélisation physique des instruments et de l'instrumentiste, puis un axe de **simulation** pour réaliser des synthèses de son à partir de ces modèles, vient ensuite une partie de **traitement du signal** pour la partie cartographie des régimes émis par les modèles en fonction de divers descripteurs, et enfin une partie **informatique** pour implémenter en temps réel les modèles et enfin les **contrôler**.

L'ensemble du code associé à ce projet est disponible en ligne sur le lien <https://github.com/pliplouf/Auto-oscillations> et des exemples de résultats audios obtenus sont disponibles sur une page dédiée : <https://pliplouf.github.io/Auto-oscillations/>.

2 État de l'art

2.1 Physique des instruments auto-oscillants

L'étude des instruments auto-oscillants réside en grande partie sur l'étude de leur caractère non linéaire. La non linéarité est supposée localisée à un point précis de l'instrument (à l'entrée du tuyau pour les instruments à vents et à la position de l'archet pour les cordes), de telle façon que l'on peut modéliser l'instrument comme un système bouclé (fig. 1) constitué d'un élément non linéaire et d'un résonateur linéaire alimenté par une source d'énergie (pression fournie par l'instrumentiste, force de

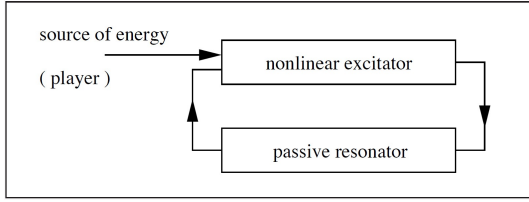


Figure 1: Description schématique d'un instrument de musique auto-oscillant. Figure issue de [7].

l'archet) [7]. La relation entre les grandeurs caractérisant l'excitation et sa réponse dans le système est modélisée par une fonction non-linéaire F [5, 6].

Les premiers travaux sur les instruments auto-oscillants remontent à Mersenne [2] et Bernoulli [3] qui se sont appliqués à analyser les modes de la partie linéaire de l'instrument : le résonateur [1]. Pour les instruments à vents, ce résonateur est un tube à section variable ou constante dont l'ensemble des informations est contenu dans la donnée de son impédance d'entrée $Z_e(\omega) = P(\omega)/U(\omega)$ rapport de la pression et du débit acoustique à l'entrée du tube. Cette impédance peut se déduire de l'impédance de rayonnement Z_{ray} ramenée à l'entrée par le biais d'une matrice de transfert dépendant de la géométrie de l'instrument et des éventuelles dissipations au sein du tube. Pour les instruments à cordes le "résonateur" est la corde de l'instrument, éventuellement couplée à la table d'harmonie par le chevalet, dont le comportement est décrit par son admittance d'entrée $Y_e = f/v$ rapport de la force de friction exercée par l'archet sur la corde et vitesse de la corde mesurées au point de contact corde - archet.

Concernant l'étude de l'élément non linéaire, il faut attendre la fin du XIXe siècle avec Rayleigh [9] et Helmholtz [10, 11] pour qu'il soit modélisé. Pour les instruments à anches l'élément non-linéaire est l'anche, et pour les cordes frottées la force de friction f exercée par l'archet sur la corde [5, 7]. La non-linéarité implique une relation (non linéaire) entre les grandeurs d'excitation et de réponse à l'excitation :

$$u = F(p) \text{ (anches)} \quad f = F(v) \text{ (cordes)}. \quad (1)$$

avec p et u la pression et le débit acoustique à l'entrée du tube de l'instrument, et f et v la force transversale et la vitesse de la corde au point de contact entre l'archet et la corde. Cette relation doit être vérifiée à tout instant comme les autres fonctions d'état du système. Le contrôle de l'utilisateur s'exprime dans les deux cas par le biais de deux paramètres : un paramètre de vitesse (débit appliqué et vitesse de l'archet) et un paramètre de force (pression dans la bouche de l'instrumentiste et force appliqué par l'archet sur la corde).

2.1.1 Les instruments à anche

Pour les instruments à anche, la relation $u = F(p)$ s'obtient par des considérations de mécanique des fluides au niveau de l'anche [1, 10, 9]. L'anche est grossièrement une poutre flexible en roseau de faible épaisseur qui bouge sous l'effet des pressions de part et d'autre de celle-ci : la pression p_m dans la bouche de l'instrumentiste supposée constante et la

pression p à l'entrée du résonateur [6] (fig. 2). Pour étudier

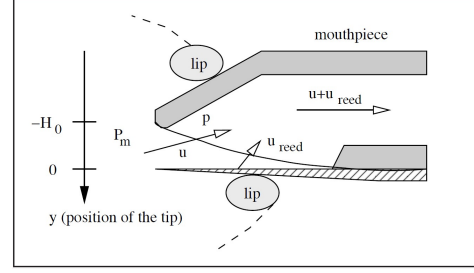


Figure 2: Schéma d'une embouchure à anche simple. Figure issue de [7].

le couplage entre débit et pression imposé par l'anche, plusieurs hypothèses sont faites dans les différents modèles [1]: les pertes thermo-visqueuses sont négligées dans le résonateur, la dynamique de l'anche est négligée, ainsi que l'effet de la variation du débit d'air dans le temps. Cela revient à considérer que le débit d'air u dépend seulement de la différence de pression $\delta p = p_m - p$. La relation obtenue est la suivante :

$$F(p) = \zeta(1 - \gamma + p)\sqrt{\gamma - p} \text{ si } 0 < \gamma - p < 1 \quad (2)$$

$$= 0 \text{ sinon.} \quad (3)$$

où les grandeurs sont adimensionnées:

$$(p, u, p_m, H) \leftrightarrow (\tilde{p}, \tilde{u}, \gamma, \zeta) \quad (4)$$

$\tilde{p} \leftarrow p/p_M$ avec p_M la pression de plaquage de l'anche, ie la pression à partir de laquelle l'anche reste collée à l'embouchure ; $\tilde{u} \leftarrow uZ_c/p_M$ avec $Z_c = Z_0/S$; $\gamma = p_m/p_M$; $\zeta = Z_c \frac{u_A}{p_M}$ et $u_A = wH\sqrt{\frac{2}{\rho p_M}}$, H étant la distance entre l'anche et le bec de l'instrument, w la largeur de l'anche.

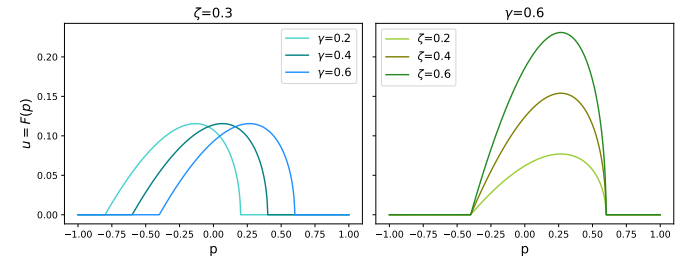


Figure 3: Fonction F pour différentes valeurs des paramètres γ et ζ .

2.1.2 Les cordes frottées

Pour les cordes frottées, la fonction non linéaire vient du frottement entre le crin de l'archet et la corde. On note μ_d et μ_s les coefficients de frottements dynamiques et statiques de la corde. Dans le cas idéal, la vitesse v et la force f suivent la loi de Coulomb : lorsque la vitesse v de la corde coïncide avec celle de l'archet v_b , il y a accroche entre l'archet et la corde et la vitesse $f = \pm \mu_s F_b$. Lorsque $v \neq v_b$, il y a glissement et $f = \mu_d \text{sgn}(v_b - v)$ [12].

Cependant cette loi de comportement ne coïncide pas avec les observations expérimentales [4] et est peu régulière

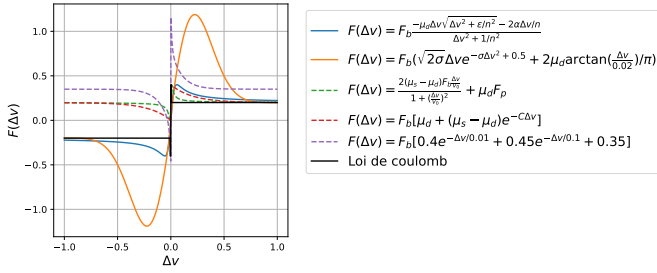


Figure 4: Comparaison des différentes régularisations de la loi de Coulomb. $\Delta v = v_b - v$. $\epsilon = 10^{-4}$, $n = 25$, $C = 5$, $\sigma = 10$ sont des paramètres de régularisation. Sources dans l'ordre de la légende : [4],[13], [1, 7],[14],[15].

ce qui pose problème pour la résolution numérique. On trouve plusieurs tentatives de régularisation de cette équation dans la littérature, dont quelques exemples sont tracés en (fig. 4).

McIntyre [5] montre que le cas des instruments à anches et celui des cordes frottées sont analogues :

Anche	u	p	Z_c	γ	ζ	p_M
Cordes frottées	f	v	$\frac{1}{2}Y_0$	v_b	F_b	$F_{max} = \mu_s F_b$

2.2 Cartographier les régimes de fonctionnement

En théorie comme dans la réalité, les instruments auto-oscillants vont se comporter dynamiquement suivant des régimes d'oscillation dépendant de paramètres de contrôle. Le comportement dans lequel toutes les oscillations sont amorties jusqu'au silence s'appelle le régime statique. La rupture d'un état d'équilibre (pression acoustique, fréquence) vers un autre est appelée bifurcation : c'est ce qu'on observe en faisant varier la pression/ vitesse de l'archet du musicien. En effet, l'apparition d'un premier régime d'oscillations entretenues et stables se fait lorsque l'équilibre atteint par le système devient instable. D'autres bifurcations se succèdent ensuite pour des valeurs de plus en plus grandes, caractérisées par des changements de pitch. Ces régimes acoustiques sont difficiles à produire en situation de jeu réel.

Les modèles présentés d'instruments à anche et leur équivalence aux instruments à corde frottée révèlent une compréhension physique de plus en plus fine de leur fonctionnement. Il n'existe cependant pas encore d'expressions explicites des couplages entre leurs paramètres de contrôle et les conditions qui permettent de prédire si un régime spécifique est atteint ou non. Afin d'apporter plus d'informations sur l'influence de paramètres, des recherches récentes proposent de générer des cartes délimitant les régions où des régimes spécifiques apparaissent. [16] proposent de construire ces cartes à l'aide d'un classificateur de type machine à vecteur de support (*Support Vector Machine*, SVM). Elles sont affinées ensuite à partir d'une méthode d'échantillonnage adaptatif publiée par le premier auteur et A.Basudhar dans [17].

Cette approche a apporté une meilleure connaissance du couplage entre les paramètres de contrôle des instruments à vent selon deux comportements précis : la présence

d'auto-oscillations et la justesse du son.

2.3 Simulations numériques

Plusieurs approches, dont deux détaillées dans la section suivante (section 3) peuvent être utilisées pour la résolution des équations physiques et ainsi réaliser des simulations numériques.

La simulation par synthèse modale est une des approches les plus populaires : là où les équations différentielles régissant le système est résolue en cherchant une solution sous la forme d'une décomposition sur les modes propres de ce dernier. Cette méthode a d'abord été développée dans les années 1960 pour des applications d'ingénierie à la suite de l'implémentation numérique de la transformée de Fourier [18], puis a trouvé des applications dans la synthèse d'instruments de musique. On peut notamment citer les logiciels MOSAIC [19] ou MODALYS [20]. Cependant cette méthode de résolution est très coûteuse en temps de calcul ce qui a longtemps limité ses applications temps-réel jusqu'au développement de langages informatiques plus rapides et adaptés tels que MaxMSP/PureData [21] ou encore FAUST [22].

Dans les années 1980, l'approche de résolution par guide d'onde a offert des perspectives en termes de diminution des coûts de calculs. Cette méthode est particulièrement intéressante pour les instruments dont le comportement peut être décrit en première approximation par un degré de liberté et l'équation des ondes. Elle consiste en la décomposition de l'onde comme la somme d'une onde aller et d'une onde retour qui subissent des réflexions au sein de l'instrument, permettant ainsi de modéliser le comportement par des lignes à retards, et ainsi s'épargner la résolution de l'équation différentielle. Le premier algorithme a été proposé en 1983 par K. Karplus et A. Strong [23] pour les cordes pincées puis étendu à d'autres instruments [24].

D'autres méthodes existent (comme par exemple les réseaux de systèmes masses-ressorts : voir les travaux de l'ACROE sur GENESIS [25]) mais ce travail se concentre sur les méthodes modales et les guides d'ondes.

3 Modélisation physique

On s'intéresse en premier à la clarinette qui constitue l'exemple le plus simple d'instrument auto-oscillant. Dans le cas de la clarinette le résonateur est le corps de l'instrument de forme cylindrique de section S et de longueur L , l'excitateur est l'anche et l'énergie statique est la pression dans la bouche de l'instrumentiste.

3.1 Approche des guides d'ondes

Le résonateur est modélisé par un guide d'onde dans lequel se propagent deux ondes de pressions dans des sens opposés. Les grandeurs sont adimensionnées: $\tilde{p} \leftarrow p/p_M$; $\tilde{u} \leftarrow uZ_c/p_M$ avec $Z_c = \rho c/S$ (on omet par la suite les tildes) et la pression est décomposée ainsi [1]:

$$p = p^+ + p^- \quad (5)$$

$$u = p^+ - p^- \quad (6)$$

Cette décomposition ne prend pas en compte tous les phénomènes dynamiques, mais cela suffit pour modéliser les cas les plus simples. Une approche plus raffinée sera présentée en 26.

Le guide étant linéaire, la pression réfléchiée est liée à la pression entrante par une relation de convolution avec la fonction de réflexion r au bout du guide :

$$p^-(t) = (r * p^+)(t) \quad (7)$$

D'où finalement :

$$p(t) = p_h(t) + u(t) \text{ où } p_h(t) = r * (p + u)(t) \quad (8)$$

La pression p_h correspond à l'historique de la pression, elle caractérise le comportement passé de l'onde.

3.1.1 Schéma numérique

La résolution numérique consiste en deux étapes : l'évaluation au temps t de p_h , et la déduction de p et $u = F(p)$ par résolution du système :

$$\begin{cases} u(t) = F(p(t)) \\ p(t) = p_h(t) + u(t) \end{cases} \quad (9)$$

Ces deux étapes sont ensuite réitérées au temps $t + dt$.

3.1.2 Fonction de réflexion

La résolution repose ainsi sur un choix de fonction de réflexion r . Soit $P(x, \omega)$ la pression au sein du guide dans l'espace des fréquences et $k(\omega) = \omega/c$:

$$P(x, \omega) = P^+(\omega)e^{-jk(\omega)x} + P^-(\omega)e^{jk(\omega)x} \quad (10)$$

On définit alors le coefficient de réflexion R [1]:

$$R(x, \omega) = \frac{P^-(\omega)}{P^+(\omega)} e^{2jk(\omega)x} = \frac{Z(x, \omega) - Z_c}{Z(x, \omega) + Z_c} \quad (11)$$

avec $Z_c = \rho c/S$. On en déduit $r(x, t)$ par transformée de Fourier inverse.

On s'intéresse ici à la réflexion au bout du guide cylindrique ramenée à l'entrée que l'on notera simplement $r(t)$. L'impédance correspondant étant donc l'impédance d'entrée du guide.

Deux formes de réflexions sont utilisées dans ce travail (fig. 5). La première est :

$$r(t) = -\alpha \delta(t - T) \leftrightarrow R(\omega) = -\alpha e^{j\omega T} \quad (12)$$

avec $T = 2L/c_0$. Elle caractérise une réflexion sans dispersion. L'impédance d'entrée associée est:

$$Z_e(\omega) = Z_c \frac{1 + R(\omega)}{1 - R(\omega)} = jZ_c \tan(kL) \quad (13)$$

La deuxième est une répartition de type gaussienne de la réflexion [5] qui traduit un étalement temporel de la réflexion pour y intégrer des effets de dispersion et d'amortissements par propagation:

$$r(t) = -ae^{-b(t-T)^2} \text{ pour } t > 0 \text{ sinon } r(t) = 0 \quad (14)$$

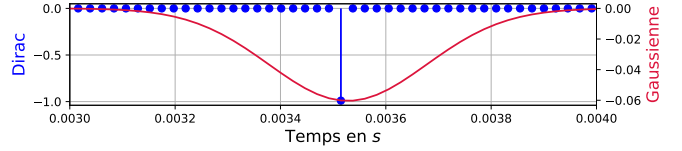


Figure 5: Fonctions de réflexions utilisées pour la clarinette.

L'impédance associée est:

$$Z_e(\omega) = \frac{Z_c}{2} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha \cos(\omega T)} \text{ avec } \alpha = \frac{a \exp(-\frac{\omega^2}{4b^2})}{b\sqrt{2}} \quad (15)$$

Dans les deux cas, la condition de passivité au sein du guide $\forall \omega, \mathcal{R}(Z_e(\omega)) \geq 0$ est bien vérifiée.

3.1.3 Résultats

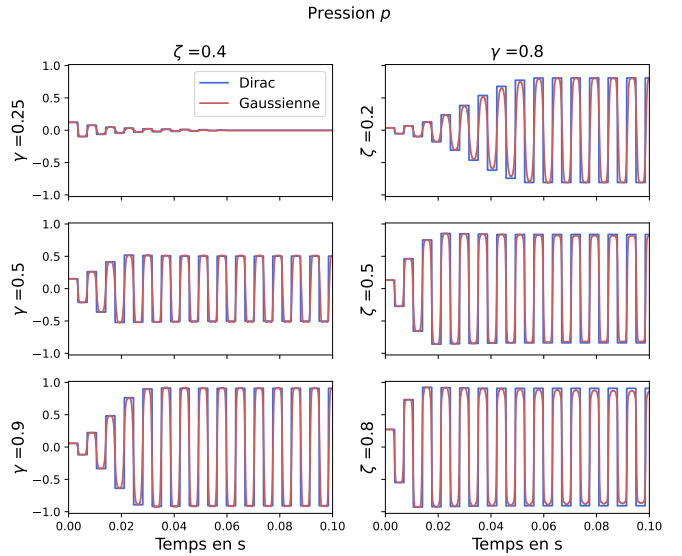


Figure 6: Formes d'onde obtenues pour différentes valeurs de γ et ζ , avec réflexion en dirac et en gaussienne.

Des résultats sont montrés (fig. 6). En dessous de $\gamma = 1/3$, il n'y a pas d'oscillations entretenues. Lorsque $\gamma > 1/3$ on remarque que γ joue principalement sur l'amplitude des oscillations qui augmente avec γ . Quant à ζ ce paramètre impacte la durée de l'attaque : plus il est grand, plus l'attaque est courte.

Pour une réflexion de type dirac, le signal obtenu est carré. Le recours à la réflexion sous forme de gaussienne permet d'intégrer des retards supplémentaires et les formes d'ondes sont davantage "arrondies".

3.2 Résolution : Approche modale

Une deuxième approche possible de modélisation est de décomposer la solution recherchée sur la base propre du guide [1]. L'impédance d'entrée Z_e du tube peut ainsi s'écrire:

$$Z_e = j\omega \sum_n \frac{F_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_n}{Q_n}} \quad (16)$$

Par transformée de Fourier inverse, il vient :

$$\ddot{p}_n + Y_{mn}\dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = F_n \dot{u} \quad (17)$$

où $Y_{mn} = \frac{\omega_n}{Q_n}$ est l'admittance d'entrée du résonateur à la fréquence du n -ième mode et $p(t) = \sum_n p_n(t)$. La décomposition selon les modes est faite plus explicitement dans [26]. Pour plus de simplicité dans la résolution, on réalise un développement limité pour la fonction caractéristique : $F(p) = F_0 + Ap + Bp^2 + Cp^3$ avec,

$$A = \zeta \frac{3\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}} ; B = -\zeta \frac{3\gamma + 1}{8\gamma^{3/2}} ; C = -\zeta \frac{\gamma + 1}{16\gamma^{5/2}} \quad (18)$$

On obtient alors une équation de type Van der Pol :

$$\ddot{p}_n(t) + Y_{mn}\dot{p}_n(t) + \omega_n^2 p_n(t) - F_n(A + 2Bp(t) + 3Cp^2(t))\dot{p}(t) = 0 \quad (19)$$

On peut exprimer cette équation sous la forme d'un problème différentiel $\dot{X} = F(X)$ solvable numériquement et pouvant faire l'effet d'une analyse de stabilité. Dans notre cas, on choisit la variable d'état suivante :

$$X = [p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, \dots, p_n, \dot{p}_n]^T \quad (20)$$

3.2.1 Résonateur

Pour ce modèle modal, on doit d'une part obtenir les paramètres modaux ω_n , Y_{mn} et F_n pour le calcul de la pression après l'anche avec la méthode précédente, puis obtenir le son en sortie de résonateur grâce à une méthode d'impédance ramenée dans le cas de la clarinette.

On fait d'abord une première approximation pour les ω_n , ils sont obtenus en considérant les modes d'un tuyau fermé (côté anche) - ouvert (côté pavillon) cylindrique. Soit :

$$f_n = \frac{(2n+1)c_0}{4L_{eff}} \quad (21)$$

Avec L_{eff} la longueur effective du tuyau prenant en compte le rayonnement. Dans le cas non bafflé par exemple et avec r_p le rayon du pavillon : $L_{eff} = L + 0.6r_p$. Cependant dans le cas de l'implémentation temps réel l'objectif sera de piloter la fréquence, considérer une longueur efficace ne ferait que décaler le réglage. On peut donc ne pas prendre en compte le rayonnement. On aura $L_{eff} = L$.

On utilise la méthode de l'impédance ramenée pour une cylindre ou un cône (adaptation à une potentielle section variable) avec prise en compte des pertes pour créer une matrice de transfert entre les pression/débit en entrée p et u et ceux en sortie p_s et u_s (le détail du calcul est en annexe A.1):

$$\begin{bmatrix} p_e \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_s \\ u_s \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sachant que

$$\frac{p_s}{u_s} = Z_{Ray} = \frac{\rho_0 c_0}{\pi r_p^2} \left[\frac{1}{4} (k(\omega) r_p)^2 + j0.6k(\omega) r_p \right] \quad (23)$$

ou alors sans considérer le rayonnement :

$$Z_{Ray} = 0 \quad (24)$$

On peut utiliser la matrice de transfert pour obtenir l'impédance d'entrée $Z_e = \frac{p_e}{u_e}$ de l'instrument. Une fois l'impédance d'entrée obtenue, on peut récupérer les différents paramètres modaux : ω_n sont obtenus en sélectionnant la pulsation de chaque pic de l'admittance d'entrée correspondant à chaque mode, Q_n sont obtenus avec la méthode de la bande passante à -3dB ($Q_n = \frac{\omega_n}{\Delta\omega_n}$ avec $\Delta\omega_n$ la bande passante à -3dB), et enfin les coefficients modaux F_n sont obtenus par le rapport entre l'admittance obtenue par la matrice de transfert et celle obtenue avec l'équation 16 avec $F_n = 1 \quad \forall n$ (la qualité de la méthode est discuté en annexe B.2).

3.2.2 Résultats

La résolution numérique est réalisée à l'aide du solveur Runge-Kutta (voir annexe B.1). L'influence du rajout de

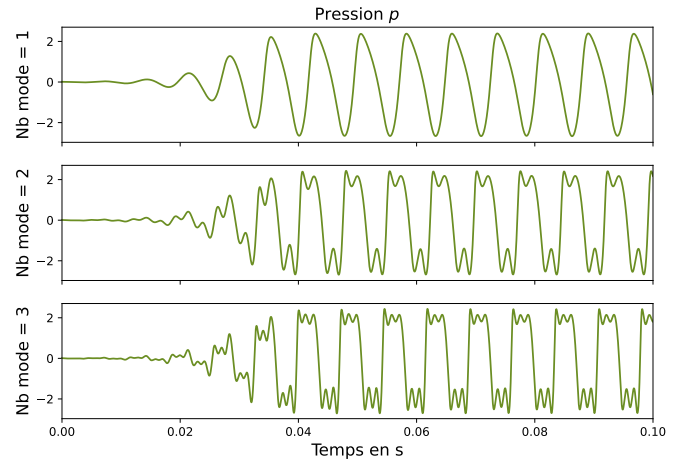


Figure 7: Formes d'onde pour différents nombres de modes considérés ($\gamma = 0.8$ et $\zeta = 0.4$).

modes est bien visible : plus le nombre de modes considéré est grand, plus le signal prend une forme se rapprochant de créneaux (voir figure 7).

3.3 Comparaison des deux modèles

Nous pouvons comparer les résultats obtenus via les deux modèles étudiés. En termes de formes d'onde (fig. 8) les résultats diffèrent. En effet dans le cas du guide d'onde tous les modes du guide sont excités de manière uniforme (sans prise en compte des coefficients modaux), alors que avec la méthode modale seuls les premiers modes sont excités mais avec une meilleure précision (choix des coefficients modaux). Par ailleurs on perçoit un décalage en fréquence entre le résultat en guide d'onde et en modal, mais aussi entre le modal à 1 et 2 modes. Enfin l'attaque est plus longue pour la pression simulée avec la méthode modale.

Cependant d'un point de vue temps de calcul, la simulation en guide d'onde est nettement moins coûteuse du fait qu'elle ne nécessite pas de résolution d'équation différentielle mais simplement des recherches de 0 et des calculs de convolution réalisés avec la méthode des trapèzes. On peut réaliser des diagrammes de bifurcation. Dans le cas du modèle modal (fig. 9) on reconnaît que la fréquence,

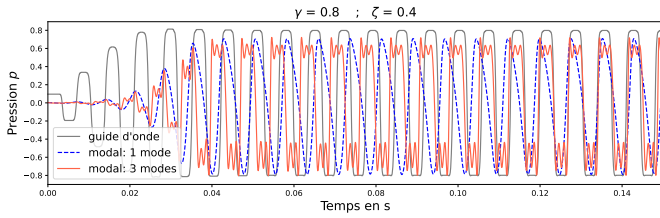


Figure 8: Formes d'onde pour le guide d'onde (réflexion gaussienne) et la méthode modale.

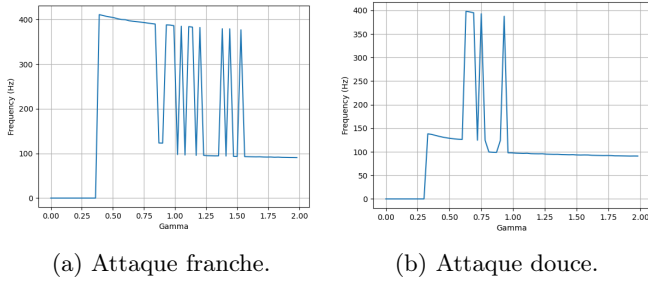


Figure 9: Diagramme de bifurcation pour le modèle modal, $\zeta = 0.8$.

après avoir atteint un plateau au niveau de la bifurcation, redescend progressivement. On peut de plus s'apercevoir que la vitesse d'attaque influe sur le régime de fonctionnement, une attaque franche permettra de monter plus facilement sur les registres supérieurs. Ce résultat était attendu physiquement. La méthode modale fait apparaître un paramètre de changement de fréquences, absent de la simulation en guide d'onde.

Enfin on peut comparer d'un point de vue perceptif les sons produits par ces deux modèles. La clarinette en guide d'onde avec une réflexion de type dirac ne donne pas un résultat très satisfaisant (forme d'onde carrée donc timbre identique quelles que soient les paramètres de contrôle), mais le recours à la réflexion gaussienne améliore grandement le résultat. La modélisation modale devient aussi rapidement convaincante même avec peu de modes (2 ou 3), fait apparaître diverses bifurcation et la fréquence de jeu évolue selon les paramètres de contrôle, ce qui se rapproche davantage du comportement réel de l'instrument.

3.4 Autres familles d'instruments

3.4.1 Les cuivres : une dynamique d'anche particulière

Les instruments de la famille des cuivres ont un fonctionnement similaire à celui de la clarinette, à ceci près que l'anche est remplacée par les lèvres du musicien. Il faut donc prendre en compte la dynamique de l'anche de façon un peu plus précise que simplement l'équation $u(t) = F(p(t))$. Plusieurs modèles existent, mais ils ne donnent pas forcément de résultats convaincants. Selon [27], l'ouverture de l'anche ou des lèvres suit une équation différentielle d'ordre 2. Pour simplifier, on peut modéliser la dynamique de l'anche en modifiant simplement les équations

du modèle de guide d'ondes :

$$u(t) = F(p(t)) \quad (25)$$

$$\omega_0^{-2} \ddot{p}(t) + Q\omega_0^{-1} \dot{p}(t) + p(t) = p_h(t) + u(t) \quad (26)$$

Les lèvres sont plus lourdes et moins raides que les anches de clarinette. On peut donc passer continûment de la clarinette à la trompette en diminuant simplement le paramètre ω_0 .

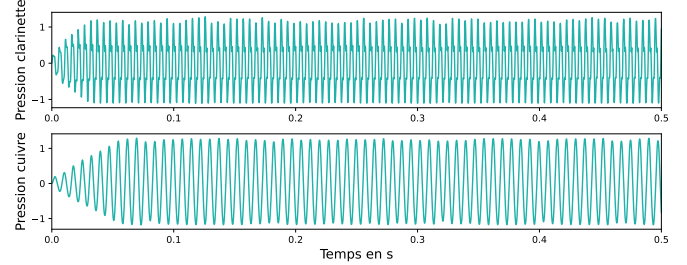


Figure 10: Formes d'ondes obtenues pour différents coefficients d'anche. Au-dessus : $\omega_0 = 4224$ rad/s (clarinette) ; en dessous : $\omega_0 = 2112$ rad/s (cuivre)

3.4.2 Les cordes frottées : analogie avec la clarinette

Il est aussi possible de s'intéresser aux instruments à cordes. Notons L la longueur de la corde. Les abscisses $x = 0$ et $x = L$ représentent, respectivement, la position du chevalet et celle du sillet (ou du doigt de l'instrumentiste). On suppose que l'archet agit en un seul point $x = \beta L$ de la corde, la largeur de l'archet est négligée ainsi que le diamètre de la corde (seul les vibrations transversales sont considérées) et la relation entre la force et la vitesse est supposée instantanée [1, 7, 28, 4]. Dans sa thèse [4], P. Vigué propose un modèle pour la fonction F décrivant la non-linéarité :

$$F(\Delta v) = -\frac{\mu_d \Delta v \sqrt{\Delta v^2 + \epsilon/n^2} - 2\alpha \Delta v/n}{\Delta v^2 + 1/n^2} \quad (27)$$

avec $\alpha = \mu_s(\mu_s - \mu_d)$. Lorsque la vitesse v de la corde coïncide avec celle de l'archet v_b , il y a adhérence et la force f_b peut donc prendre n'importe quelle valeur sur l'axe $v = v_b$. Lorsqu'il y a glissement entre la corde et l'archet la force décroît [12].

Pour ces instruments la modélisation choisie ici est modale. Des pistes de travail sur le guide d'onde sont toutefois présentées en annexe. En reprenant les équations de la clarinette et en effectuant l'analogie on obtient :

$$\ddot{v}_n(t) + Y_{mn} \dot{v}_n(t) + \omega_n^2 v_n(t) - F_n \dot{f} = 0 \quad (28)$$

Avec $v = \sum_n v_n$. On prend maintenant la variable d'état :

$$X = [v_1, \dot{v}_1, v_2, \dot{v}_2, \dots, v_n, \dot{v}_n]^T \quad (29)$$

Pour déterminer les fréquences propres, on se base sur le modèle classique de [1] :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \sqrt{1 + \frac{EI}{2T} \frac{n^2 \pi^2}{L^2}} \quad (30)$$

Avec L longueur de la corde, T sa tension, m sa masse linéique, E son module d'Young et $I = \frac{\pi d^4}{64}$ le moment quadratique de la corde où d est son diamètre. L'admittance d'entrée de la corde au point de contact x_c avec l'archet est donnée par :

$$Y_e(\omega) = jY_c \left(\tan\left(\frac{\omega}{c_0 x_c}\right)^{-1} + \tan\left(\frac{\omega}{c_0(L-x_c)}\right)^{-1} \right)^{-1} \quad (31)$$

Les fréquences et les admittances modales sont obtenues aux maxima de cette admittance. Pour raffiner le modèle, on peut inclure des mécanismes d'amortissement ou encore l'impédance du système chevalet et cavité.

Afin de simuler la présence de la caisse de résonance et de la table d'harmonie, nous avons décidé d'utiliser la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie d'un violon excité au chevalet. Nous avons pour cela utilisé la réponse impulsionnelle IANUAR2 mesurée par l'expérience et présentée dans [29]. Le signal obtenu au niveau de l'archet est alors convolué à cette réponse impulsionnelle pour simuler l'écoute de la table d'harmonie. On pourrait pousser l'exercice en calculant le rayonnement d'un piston plan pour ce dernier signal.

Les formes d'ondes obtenues (fig. 11) permettent

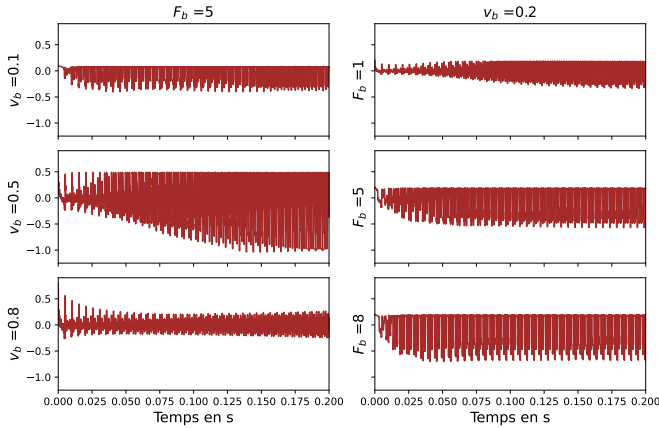


Figure 11: Formes d'onde de la vitesse v pour différentes valeurs des paramètres v_b et F_b .

d'observer l'alternance de phases d'accroche où la vitesse $v = v_b$ et les phases de glissement. Comme discuté par Vigüé dans sa thèse [4], on observe différents régimes de fonctionnement selon les valeurs de F_b , v_b et la position de l'archet. En effet, si F_b est trop grand face à v_b , le signal présente des craquements, si il est trop faible, le son provient surtout des modes supérieurs alors que dans une plage de valeurs intermédiaires le son est plein. La position de l'archet fait varier cette plage de valeur. L'analyse de ces régimes de fonctionnement peut se résumer dans un triangle de Schelleng [30] (voir annexe).

4 Cartographie des régimes de fonctionnement

Les simulations réalisées nous permettent d'observer une variété de régimes de fonctionnement propres aux instruments de musique auto-oscillants. La section suivante

met en lumière la construction d'un outil de réalisation automatique de cartographies des modèles. On propose de définir les descripteurs choisis, l'échantillonnage de l'espace des paramètres, et enfin la méthode de classification mise en oeuvre.

4.1 Descripteurs

La mise en oeuvre d'une cartographie des systèmes dynamiques nécessite de caractériser mathématiquement leur comportement. Cela se fait à l'aide de descripteurs, qui caractérisent différents aspects des signaux audios. Les descripteurs les plus pertinents ont été choisis en fonction des objectifs de contrôle de l'utilisateur.

L'interface utilisateur comprend principalement une tablette graphique. Pour la rendre plus simple d'utilisation, on fait le choix de ne considérer que deux dimensions pour chaque carte.

4.1.1 Présence d'oscillations entretenues

On cherche dans un premier temps à vérifier la présence ou non d'oscillations en fonction des paramètres de facture et de contrôle. Pour caractériser la présence d'oscillations entretenues, [16] proposent comme critère l'amplitude moyenne du signal - centré et normalisé - provenant du modèle, sans considérer les premiers instants pour éviter la contribution du régime transitoire :

$$\frac{1}{N_{\frac{2}{3}}} \sum_{N_{\frac{2}{3}}} |p(t_i)| > \epsilon_1 \text{ Oscillations entretenues} \quad (32)$$

$$\frac{1}{N_{\frac{2}{3}}} \sum_{N_{\frac{2}{3}}} |p(t_i)| < \epsilon_1 \text{ Oscillations amorties} \quad (33)$$

Avec ϵ_1 le critère d'amplitude moyenne des oscillations fixé. Compte-tenu des différences d'amplitude entre les méthodes, ϵ_1 est choisi comme égal à un pourcentage fixé de l'amplitude maximale des signaux audios. L'apparition d'auto-oscillations dépend spécifiquement des paramètres γ et ζ pour les instruments à anche - respectivement v_b et F_b pour les instruments à cordes frottées.

Ce critère est peu adapté aux oscillations des instruments à cordes frottées qui peuvent être très lentement amorties. Afin d'éviter de rallonger le temps de simulation (et donc de calcul), nous avons introduit, dans le cas du violon, le rapport d'amplitude :

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| > \epsilon_2 \text{ Oscillations entretenues} \quad (34)$$

avec A_1 l'amplitude maximale du signal sur les premiers instants de la simulation, soit ici un cinquième du temps total, et A_2 l'amplitude maximale dans les derniers instants. Enfin, ϵ_2 exprime le critère en-dessous duquel on considère que les oscillations ont été suffisamment amorties pour considérer que le régime auto-oscillant n'a pas été atteint. Les valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 retenues pour les résultats ont été fixées après plusieurs essais.

4.1.2 Hauteur des notes

Pour permettre ensuite à l'utilisateur d'obtenir les notes souhaitées à l'aide d'un clavier MIDI, on étudie la hauteur

de la note (définie comme la fréquence fondamentale du son f_0) produite par le modèle de d'instrument en fonction de sa longueur L et des paramètres d'effort de l'excitateur (γ ou v_b), à ζ constant.

Pour se placer dans un contexte musical "classique", il est nécessaire d'obtenir les paramètres de contrôle pour lesquels l'instrument produit des notes de la gamme tempérée, composée de 12 demi-tons (entre "C1" et "C2" par exemple). La fréquence fondamentale est évaluée à l'aide de l'algorithme de Yin [31], et son écart aux notes de références est calculé en unité *cents* tel que :

$$\Delta f = 1200 \log_2 \left(\frac{f_0}{f_{ref}} \right) \quad (35)$$

Sur l'échelle des cents, un intervalle d'un demi-ton vaut 100 cents, l'octave sur une gamme tempérée en vaut 1200. L'oreille humaine est sensible à des variations de hauteur qui dépendent de la fréquence et du volume sonore. Le seuil de discrimination que nous avons retenu est de 5 cents au dessus du C4 [32]. Une note est donc considérée comme juste si sa fréquence fondamentale f_0 se situe à moins d'un nombre de cents fixé par rapport à une fréquence de référence f_{ref} , choisie dans la gamme C1-C2. Cependant, l'algorithme d'apprentissage automatique peut rencontrer des problèmes de convergence si la zone recherchée de l'espace des paramètres est trop étroite. Pour obtenir une frontière correcte, cela peut nécessiter un nombre de points initiaux très élevé (voir section 4.2). La cartographie 14 utilise donc une tolérance de 15 cents, ce qui peut induire une différence audible.

4.2 Plan d'expériences initial

Afin de réaliser une cartographie des régimes de fonctionnement, l'espace des paramètres est d'abord échantillonné selon un hypercube latin. Les paramètres γ et ζ sont échantillonnés sur l'intervalle $[0, 1]$ pour les instruments à anche. Les variables équivalentes pour les cordes frottées, v_b et F_b , sont réparties sur $[0, 1]$ m/s et $[0, 10]$ N.

4.3 Machine à support de vecteurs (SVM)

La détermination automatique des frontières entre régimes est ensuite effectuée par un apprentissage basé sur une méthode de classification. À partir d'un modèle numérique (approche guide d'onde ou modale), on détermine un certain nombre de points correspondant à différentes valeurs des paramètres de contrôle. Ils sont catégorisés ensuite à l'aide d'un de nos descripteurs définis précédemment.

Nous utilisons ensuite une SVM pour tracer la frontière entre les différents régimes observés. Pour N sons, de catégorie $y_i = \pm 1$, la frontière donnée par la SVM est :

$$s(\mathbf{x}) = b + \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = 0 \quad (36)$$

où λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange, b le biais et K une fonction de noyau, ici choisi gaussien [16], et N le nombre de simulations observées.

4.4 Échantillonnage adaptatif

Obtenir une cartographie de bonne qualité peut demander un très grand nombre de points dans l'espace des paramètres, en particulier lorsque la dimensionalité de celui-ci augmente. Nous souhaitons éviter de faire trop souvent appel à nos modèles acoustiques complexes qui peuvent entraîner un temps de calcul conséquent, en particulier pour des régions de l'espace des paramètres inintéressantes pour notre problème (car trop éloignées des frontières entre deux régimes, par exemple). Nous utilisons donc la méthode d'échantillonnage adaptatif (ou raffinement de frontière), proposée par [17].

Cette méthode consiste à choisir un premier échantillon qui soit à la fois sur la frontière et doit maximiser l'écart à son plus proche voisin, puis de sélectionner un second dans les régions où la probabilité d'erreur de classification par le SVM est la plus élevée. Il est nécessaire d'identifier la position de chacun d'entre eux dans la SVM. On recalcule la frontière entre chacun de ces calculs. Ce raisonnement se traduit par l'algorithme suivant :

- Le premier échantillon \mathbf{x} revient à optimiser les conditions :

$$\max_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{nearest}\| \quad (37)$$

$$\text{s.t. } s(\mathbf{x}) = 0 \quad (38)$$

$$\mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max} \quad (39)$$

puis à mettre à jour la frontière.

- Le recherche du second échantillon \mathbf{x} , tel que :

$$\min_{\mathbf{x}} s(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{sv}^* \quad (40)$$

$$\text{s.t. } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{sv}^*\| \leq R \quad (41)$$

$$s(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{sv}^* \leq 0 \quad (42)$$

Avec \mathbf{x}_{sv}^* un point sur la marge, étant le plus éloigné possible des échantillons opposés, y_{sv}^* son label (± 1), R le rayon d'une hypersphère centrée en \mathbf{x}_{sv}^* et égale à $\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_{sv}^* - \mathbf{x}_{opp}\|$, et enfin \mathbf{x}_{opp} l'échantillon le plus près de \mathbf{x}_{sv}^* dans la classe opposée.

- Après une nouvelle mise à jour, mesurer la convergence de la SVM entre deux itérations successives, à partir d'un critère fixé.

En d'autres termes, cette méthode ajoute de l'information concernant les sons produits aux endroits où l'incertitude de classification est la plus élevée. Nous utilisons l'implémentation Matlab de cette méthode présente dans la Toolbox CODES.

La recherche du second échantillon (voir équation 40) apporte une précision en plus par rapport au premier. D'après nos expérimentations, cette amélioration reste assez minime tout en doublant le nombre d'itérations. Nous avons donc fait le choix de ne pas effectuer cette étape dans le calcul des cartographies de hauteurs de son. La méthode se résume alors à effectuer la recherche décrite par l'équation 37, puis à mettre à jour la SVM.

4.5 Résultats et comparaison

La section qui suit est consacrée à l'analyse des cartes. Nous présentons dans un premier temps, dans le cas de la clarinette, les cartes des descripteurs proposés obtenues par échantillonnage adaptatif. Ensuite nous comparerons les cartographies pour les deux modèles implémentés. Enfin, nos premiers résultats pour le cas du violon sont présentés.

4.5.1 Le cas de la clarinette

La présence d'oscillations entretenues ou non suivant γ et ζ a été cartographiée pour chaque modèle et est représentée figure 12. Le modèle de guide d'onde a été implémenté pour une fonction de réflexion de type gaussien. Le modèle modal est fixé à 5 modes. La cartographie est faite en commençant avec 30 points initiaux, puis en effectuant 150 itérations de l'algorithme d'échantillonnage. Les points surlignés en noir indiquent "les vecteurs support adaptatif".

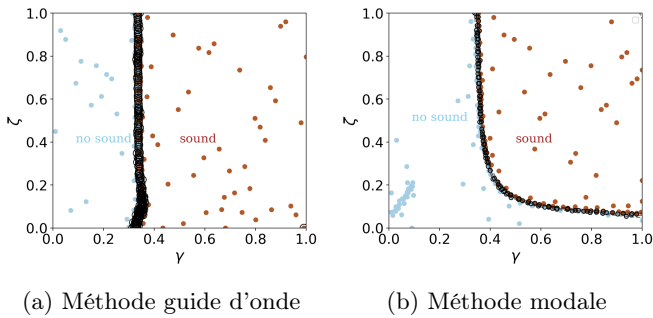


Figure 12: Cartographie sur la présence d'auto-oscillations (points rouge) ou non (bleues) de la clarinette. $L = 0.6$ m, $F_e = 44100$ Hz, $t_{max} = 0.3$ s, $c = 340$ m.s⁻¹, $\epsilon_1 = 0.3$.

On retrouve bien les résultats indiqués dans [8] : le modèle guide d'onde voit ses premières oscillations apparaître aux alentours de $\gamma = 1/3$. En revanche, pour la méthode modale le seuil est plus haut et se situe en $\gamma = 0.4$. On observe aussi que les oscillations surviennent pour des valeurs de ζ plus élevées que pour modèle de guide d'onde, soit $\zeta \approx 0.1$. En d'autres termes, l'espace des paramètres où la présence de son se manifeste est plus réduite pour la méthode modale. Ces différences pourraient être dues à l'instabilité ou l'imprécision des résolutions numériques utilisées pour la résolution du modèle modal : certaines valeurs extrêmes de paramètres font apparaître des problèmes d'instabilité ou des oscillations à de très faibles amplitudes.

La figure 13 représente cette fois-ci les cartographies obtenues sur les hauteurs de note selon γ et L la longueur du cylindre. Chaque zone colorée correspond à des zones où la fréquence des sons produits s'écarte au plus de Δf . Nous avons posé pour cela une gamme harmonique entre un C1 à 65.4 Hz et un C2 à 130.8 Hz. Cette cartographie a nécessité 100 points initiaux, puis 150 pour l'algorithme d'échantillonnage adaptatif.

Il est à noter que dans le cas du modèle guide d'onde, pour une longueur donnée la valeur de γ à partir de laquelle

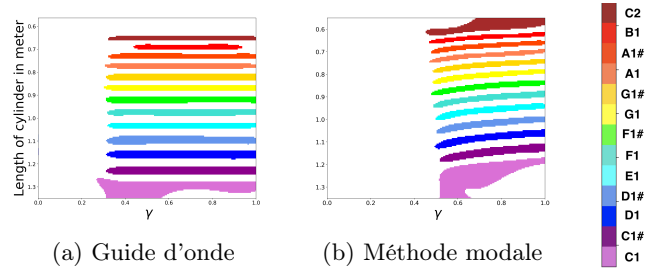


Figure 13: Cartographie sur la hauteur entre C1 et C2 de la clarinette. $\zeta = 0.5$, $F_e = 44100$ Hz, $t_{max} = 0.3$ s, $c = 340$ m.s⁻¹, $\epsilon_1 = 0.3$. $\Delta f = 15$ cents des fréquences de la gamme tempérée.

Ille le seuil de pression, à partir duquel la fréquence est juste, est unique ($\gamma = 1/3$). Pour l'approche modale, les zones concernées sont plus restreintes. Si l'on choisit une longueur donnée, l'intervalle sur lequel les fréquences sont harmoniques est plus restreint. Autrement dit, si γ augmente bien au delà de sa valeur seuil, la fréquence du son va varier.

Cette dernière observation peut se vérifier sur la Figure 14. La zone en bleu représente la zone d'auto-oscillation. La zone verte représente la région où le son produit est "juste". En d'autres termes, pour une longueur fixée par la note f jouée, soit telle que $L = \frac{c}{4f}$, l'instrument produira un son proche de cette fréquence sur une combinaison de γ et ζ très fine.

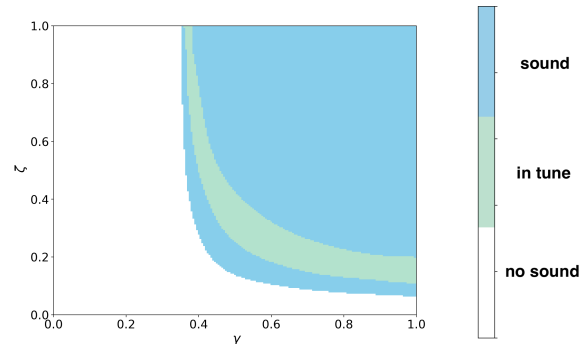


Figure 14: Cartographie sur la présence d'auto-oscillations et la justesse de note - cas de la méthode modale. Nb mode = 5, $L = 0.6$ m, $F_e = 44100$ Hz, $t_{max} = 0.3$ s, $c = 340$ m.s⁻¹, $\epsilon_1 = 0.3$, $\Delta f = 5$ cents.

4.5.2 Le cas du violon

La cartographie figure 15 du violon a été obtenue à l'aide du modèle modal. À la différence de la clarinette, l'espace des paramètres de contrôle permettant l'apparition d'auto-oscillations se présente sous la forme d'un triangle. Plus la vitesse de l'archet est élevée, plus l'intervalle de force à appliquer pour lequel il y a oscillations est diminué.

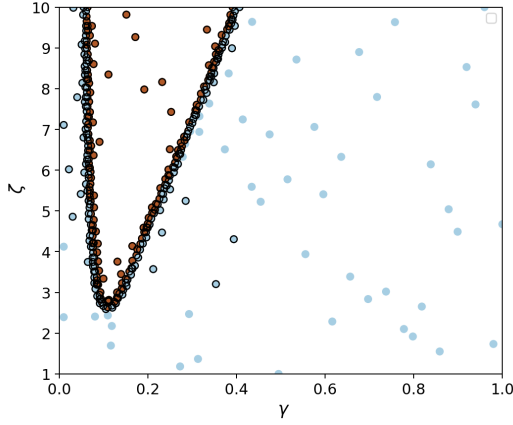


Figure 15: Cartographie de présence d'auto-oscillations (points rouge) ou non (bleues) du violon - cas de la méthode modale. Nb mode = 2, $L = 0.33$ m, $F_e = 44100$ Hz, $t_{max} = 0.3$ s, $c \approx 130$ m.s⁻¹, $\epsilon_2 = 0.5$, $\beta = 0.3$ m.

5 Implémentation temps-réel et contrôle

L'implémentation en temps réel de nos modèles est réalisée à partir du modèle de la clarinette. Le choix du logiciel s'est porté sur Max MSP, parfaitement adapté à une application musicale. L'environnement **gen** permet de coder des extensions directement compilées et réutilisées en Max. Cet environnement permet de faire des calculs à l'échelle de l'échantillon audio (et non pas à celle du *buffer*), ce qui est idéal dans notre cas d'usage. L'algorithme de Runge-Kutta à l'ordre 4 est réimplémenté et la résolution de l'équation différentielle décrivant le comportement de l'instrument est faite en temps réel, avec un pas d'intégration égal à la période d'échantillonnage audio utilisée.

Le contrôle utilisateur est réalisé par le biais d'un clavier MIDI M-Audio Code 25 et d'une tablette graphique Wacom Cintiq. Le clavier permet de préciser la hauteur de la note souhaitée, tandis que la tablette permet de naviguer dans l'espace des paramètres (γ , ζ) à travers une interface de contrôle de type X-Y. Les cartographies réalisées permettent d'assister le contrôle utilisateur, en affichant dynamiquement pour chaque note la cartographie associée. L'interface finale est présentée sur la figure 16. Une couleur *gris foncé* indique l'absence d'oscillations entretenues. Une zone *vert d'eau* met en évidence la zone de paramètres dans laquelle la note est considérée comme juste. Enfin, une zone *gris clair* signifie la zone de paramètres dans lequel le modèle produit des oscillations entretenues, mais où la fréquence fondamentale n'est pas proche de celle souhaitée. Il est toutefois possible de produire des sons très intéressants dans cette région de paramètres...

Les coefficients modaux sont calculés en avance, ainsi que la longueur du résonateur permettant d'avoir la hauteur de note souhaitée. Au moment de presser une note, les paramètres correspondant sont chargés dans le modèle physique.

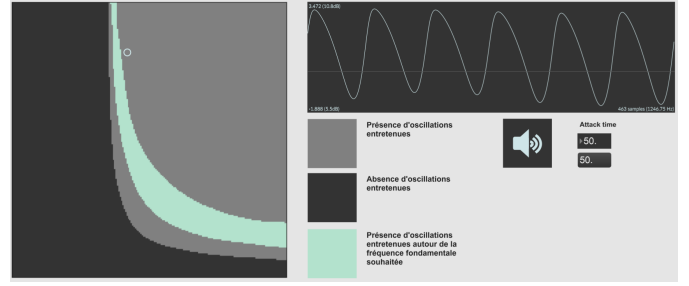


Figure 16: Aperçu de l'interface de contrôle de l'instrument

6 Conclusion

Les instruments auto-oscillants se prêtent bien à la modélisation numérique par guide d'onde ou par décomposition modale. Les simulations permettent de révéler des comportements et régimes divers de l'instrument, qui sont reliés aux paramètres de contrôle de l'utilisateur et de facture. Ces liens sont déterminés par les cartographies qui nous permettent "d'apprendre" à jouer de l'instrument : la modélisation physique permet de produire des sons, la cartographie de connaître les paramètres permettant de jouer de la musique. L'implémentation temps réel réalisée sur la base du modèle modal donne effectivement des résultats convaincants, et le choix d'interface utilisateur permet d'exercer un contrôle complet de l'instrument en explorant ses différents régimes.

L'implémentation en temps réel du modèle de guide d'onde est une piste à explorer, de même que la modélisation d'autres instruments auto-oscillants (saxophone et flûte notamment). Les modèles physiques mis en place ici peuvent aussi être améliorés en essayant d'alléger les hypothèses, en considérant une excitation de l'utilisateur non constante dans le temps par exemple.

References

- [1] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. *Acoustique Des Instruments de Musique*. Belin, 2008.
- [2] M Mersenne. Harmonie universelle, 1636, 1964.
- [3] Daniel Bernoulli. *Recherches Physiques Mécaniques et Analytiques: Sur Le Son et Sur Le Tons Des Tuyaux d'orgues Différemment Construits*. Number 74. A. Forni, 1764.
- [4] Pierre Vigué. *Solutions périodiques et quasi-périodiques de systèmes dynamiques d'ordre entier ou fractionnaire: applications à la corde frottée*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2017.
- [5] Michael E. McIntyre, Robert T. Schumacher, and James Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 74(5):1325–1345, 1983.
- [6] Christian Maganza, René Caussé, and Franck Laloë. Bifurcations, period doublings and chaos in clarinet-like systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 1(6):295, 1986.
- [7] S. Ollivier, J.-P. Dalmont, and J. Kergomard. Idealized models of reed woodwinds. Part I: Analogy with the bowed string. *Acta acustica united with acustica*, 90(6):1192–1203, 2004.
- [8] J. Kergomard. Instruments de musique à vent; comment éviter le chaos pour faire de la musique? *Acoustique et Techniques*, 9:15–22, 1997.
- [9] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*, volume 2. Macmillan, 1896.
- [10] Hermann Von Helmholtz. *Théorie physiologique de la musique fondée sur l'étude des sensations auditives*. V. Masson, 1868.
- [11] Hermann LF Helmholtz. *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*. Cambridge University Press, réédition 2009, 1862.
- [12] JAMES Woodhouse and PM Galluzzo. The bowed string as we know it today. *ACTA Acustica united with Acustica*, 90(4):579–589, 2004.
- [13] Charlotte Desvages and Stefan Bilbao. Physical modeling of nonlinear player-string interactions in bowed string sound synthesis using finite difference methods. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, volume 430, 2014.
- [14] O Inácio and J Antunes. A linearized modal analysis of the bowed string. In *Proceedings of the International Congress of Acoustics. SEA, Madrid*, 2007.
- [15] Jonathan H Smith and James Woodhouse. The tribology of rosin. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(8):1633–1681, 2000.
- [16] Samy Missoum, Christophe Vergez, and Jean-Baptiste Doc. Explicit mapping of acoustic regimes for wind instruments. *Journal of Sound and Vibration*, 333(20):5018–5029, 2014.
- [17] Anirban Basudhar and Samy Missoum. An improved adaptive sampling scheme for the construction of explicit boundaries. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(4):517–529, October 2010.
- [18] James W Cooley and John W Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301, 1965.
- [19] Joseph Derek Morrison and Jean-Marie Adrien. Mosaic: A framework for modal synthesis. *Computer Music Journal*, 17(1):45–56, 1993.
- [20] Gerhard Eckel. Sound synthesis by physical modelling with modalys. *Proc. ISMA '95*, pages 478–482, 1995.
- [21] Miller Puckette and David Zicarelli. Max-an interactive graphic programming environment. *Opcode Systems, Menlo Park, CA*, 1990.
- [22] Dominique Fober, Stéphane Letz, et al. Faust: an efficient functional approach to dsp programming, 2009.
- [23] Kevin Karplus and Alex Strong. Digital synthesis of plucked-string and drum timbres. *Computer Music Journal*, 7(2):43–55, 1983.
- [24] David A Jaffe and Julius O Smith. Extensions of the karplus-strong plucked-string algorithm. *Computer Music Journal*, 7(2):56–69, 1983.
- [25] Nicolas Castagné and Claude Cadoz. Genesis: a friendly musician-oriented environment for mass-interaction physical modeling. In *ICMC 2002-International Computer Music Conference*, pages 330–337. MPublishing, 2002.
- [26] Sami Karkar, Christophe Vergez, and Bruno Cocheilin. Oscillation threshold of a clarinet model: A numerical continuation approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1):698–707, 2012.
- [27] Rémi Mignot. *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*. PhD thesis, Télécom ParisTech, 2009.
- [28] Matthias Demoucron. *On the control of virtual violins-Physical modelling and control of bowed string instruments*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI; Royal Institute of Technology ..., 2008.
- [29] Andreas Langhoff, Angelo Farina, Lamberto Tronchin, and S Internazionale. Comparison of violin impulse responses by listening to convoluted signals. In *Proc. of ISMA95*, pages 274–283. Citeseer, 1995.
- [30] John C Schelleng. The violin as a circuit. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(3):326–338, 1963.

-
- [31] Alain de Cheveigné and Hideki Kawahara. Yin, a fundamental frequency estimator for speech and music. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4):1917–1930, 2002.
- [32] Catherine Semal and Laurent Demany. The Upper Limit of "Musical" Pitch. *Music Perception*, 8(2):165–175, 12 1990.
- [33] Lothar Cremer. *Physik der Geige*. Hirzel Stuttgart, 1981.
- [34] James Woodhouse. On the playability of violins. part i: Reflection functions. *Acta Acustica united with Acustica*, 78(3):125–136, 1993.
- [35] John Charles Butcher. A history of runge-kutta methods. *Applied numerical mathematics*, 20(3):247–260, 1996.

A Annexes : travaux non aboutis

A.1 Le saxophone : un résonateur à section variable

L'étude de la clarinette peut ensuite être élargie à d'autres instruments à anche, notamment le saxophone. La différence avec la clarinette réside dans la géométrie de l'instrument : au lieu d'un tube cylindrique, celui du saxophone est de forme conique. Cela a ainsi une répercussion sur l'impédance d'entrée de l'instrument et donc ses caractéristiques modales.

L'impédance d'entrée est calculée en ramenant l'impédance de rayonnement à l'entrée du tube suivant la matrice de transfert pour un cône suivante :

$$\begin{bmatrix} p_e \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_s \\ u_s \end{bmatrix} \quad (43)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \frac{r_e}{r_f} \cos(kL_{eff}) - \frac{\sin(kL_{eff})}{kx_1} \\ \mathcal{B} = j \frac{\rho_0 c_0}{\pi r_e r_f} \sin(kL_{eff}) \\ \mathcal{C} = \frac{\pi r_e r_f}{\rho_0 c_0} [j \sin(kL_{eff}) \times \\ \quad [1 + \frac{1}{k^2 x_1 x_2}] + \frac{\cos(kL_{eff})}{jk} (\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2})] \\ \mathcal{D} = \frac{r_e}{r_f} \cos(kL_{eff}) + \frac{\sin(kL_{eff})}{kx_2} \\ k = \frac{\omega}{c_0} [1 + \alpha_1 \frac{\sqrt{-2j}}{r_v}] \\ r_v = |k_v (r_e + r_f)/2| \\ k_v = \sqrt{-j\omega/l_v} \\ l_v = \mu/(\rho_0 c_0) \end{cases} \quad (44)$$

et r_e le rayon du tube après l'anche, r_f le rayon du tube juste avant le pavillon, μ le coefficient de viscosité dynamique de l'air. La relation de dispersion provient de l'ajout des pertes. Les paramètres géométriques utiles sont précisés sur la figure 17.

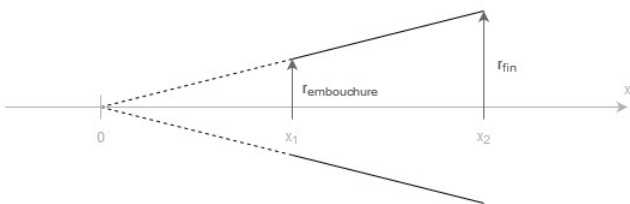


Figure 17: Schéma du tube conique pour l'impédance ramenée.

L'hypothèse que l'instrument octave donne:

$$f_n = \frac{nc_0}{2L_{eff}} \quad (45)$$

L'excitateur étant une anche tout comme pour la clarinette, on garde la même fonction caractéristique.

A.2 Les instruments à cordes frottées : modèle du guide d'onde

Dans cette section nous décrivons quelques pistes de recherches sur la résolution en guide d'onde du problème

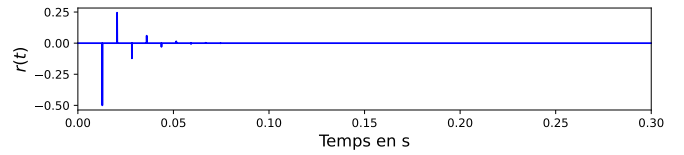


Figure 18: Fonction de réflexion $r(t)$.

de la corde frottée. La difficulté rencontrée réside principalement dans l'obtention de la fonction de réflexion r .

La résolution par le modèle du guide d'onde suit le même schéma que pour la clarinette. La seule différence réside dans le choix des fonctions de réflexions au niveau du chevalet et au niveau du sillet. Dans un souci de simplicité nous choisissons ici des conditions aux limites rigides mais on peut citer la modèle établi par Cremer [33, 34] qui modélise l'extrémité côté sillet par un réflecteur parfait et celle côté chevalet par un système ressort-amortisseur.

Notons $\tau_c = 2\beta L/c$, avec $c = \sqrt{T/m}$ la célérité des ondes transversales dans la corde, et $\tau_s = 2(1 - \beta)L/c$ les durées de propagation pour que l'onde réalise un aller-retour entre le point de contact avec l'archet et le chevalet [resp. le sillet]. On note par ailleurs α_c et α_s les coefficients de réflexions de chaque côté. Au niveau de l'archet l'onde se décompose en deux composantes se propageant dans des directions opposées. Si on considère celle partant initialement vers le chevalet, celle-ci va se réfléchir sur le chevalet pour repasser au niveau de x_c puis partir se réfléchir sur le sillet, repasser en x_c , se réfléchir sur le chevalet et ainsi de suite. La fonction de réflexion résultante s'écrit:

$$\alpha_c \delta(t - \tau_c) + \alpha_c \alpha_s \delta(t - (\tau_c + \tau_s)) + \alpha_c^2 \alpha_s \delta(t - (2\tau_c + \tau_s)) + \dots \quad (46)$$

Par un raisonnement similaire, on obtient le coefficient de réflexion correspondant à l'onde se dirigeant initialement vers le sillet. Le coefficient de réflexion r correspond à la somme des deux (fig. 18). On peut vérifier que cette fonction de réflexion garantit bien la passivité du système :

$$r(t) = \sum a_i \delta(t - \tau_i) \text{ d'où } R(\omega) = \sum a_i e^{j\omega\tau_i} \quad (47)$$

et donc

$$Z_e(\omega) = Z_c \frac{C_1}{C_2} (1 + 2j \sum a_i \sin(\omega\tau_i)) \quad (48)$$

avec $C_1 = |1 - \sum a_i e^{j\omega\tau_i}|$ et $C_2 = |\sum a_i e^{j\omega\tau_i}|$. On a donc bien $\forall \mathcal{R}(Z_e(\omega)) \geq 0$.

La résolution numérique se fait ensuite comme pour la clarinette avec cette fonction r et la fonction caractéristique F des cordes frottées.

B Annexes : Détails de calculs

B.1 Méthode de Runge-Kutta

La méthode modale nécessite la résolution d'une équation différentielle à chaque pas de temps. Un algorithme de résolution d'équations différentielles est donc nécessaire.

Étant donné notre objectif de réaliser une version temps-réel du modèle sous Max-MSP ne contenant pas de tel algorithme en bibliothèque, il nous faut ré-implémenter une méthode. Par exemple, la méthode de Runge-Kutta [35] est une méthode de résolution d'équations différentielles précise mais potentiellement instable. Cette méthode consiste à moyenner de façon pondérée différentes estimations de la pente à l'instant n pour estimer la valeur de y à l'instant $n + 1$. On se propose de la ré-implémenter à l'ordre 4.

Considérons le problème suivant :

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (49)$$

La méthode RK4 est donnée par l'équation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (50)$$

où

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (51)$$

B.2 Remarques sur l'impédance d'entrée

En suivant la méthode de la bande passante à -3dB et en comparant l'impédance recalculée suivant 16 avec l'impédance ramenée en entrée, on remarque que bien qu'on ait une bonne correspondance au niveau des pics, les creux manquent en précision et se décalent en fréquence (voir figure 19 (a)). Un résultat intéressant est que cette imprécision s'estompe en augmentant le nombre de modes modélisés (voir figure 19 (b)). Ceci s'explique car les pics sont tous une somme de contribution de tous les modes.

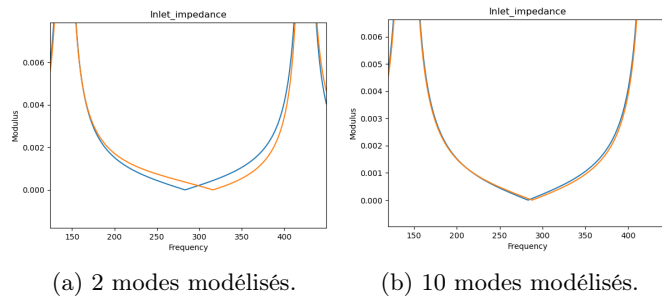


Figure 19: Zoom entre les modes 1 et 2 de l'impédance d'entrée pour la clarinette. En bleu : impédance ramenée en entrée, en orange : impédance recalculée.