Mai 2016 - Master 1 MAEF Université Paris 1

T.E.R.
Séries de Fourier, Exemples et Applications

Sous la direction de M.Pennequin

Clémentine Rosier

Question 2

Cherchons tout d'abord si la loi de pareto admet une espérance et si oui, sous quelle conditions.

Soit $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\theta\frac{c^\theta}{x^{\theta-1}}\mathbb{1}_{x>c}dx \\ &= \theta c^\theta \int_c^{+\infty} \frac{|x|}{x^{\theta+1}}dx\end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $t \leq 0$:

$\int_t^{+\infty} \frac{1}{x^\theta}dx$ converge si et seulement si $\theta > 1$.

Ainsi la loi de Pareto admet une espérance si et seulement $\theta > 1$.

Alors pour tout c réel et pour tout θ strictement supérieur à 1, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x) &= \int_c^{+\infty} \theta c^\theta \frac{1}{x^\theta}dx \\ &= \theta c^\theta \times [-\frac{1}{1+\theta}x^{1+\theta}]_c^{+\infty} \\ &= \theta c^\theta \frac{-1}{1-\theta} \times c^{1-\theta} + 0 \\ \text{Ainsi, } \mathbb{E}(x) &= \frac{\theta}{\theta-1}c\end{aligned}$$

PARTIE I

A. Maximum de vraisemblance

Question 1

Calculons tout d'abord la vraisemblance. On a, comme les n observations sont indépendantes et identiquement distrbuées :

$$L_n(x_1; ...; x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta c^\theta}{x_i^{\theta+1}} = \theta^n c^{\theta n} \times (\prod_{i=1}^n x_i)^{-(\theta+1)}$$

On passe à la log-vraisemblance pour faciliter ensuite la maximisation. En effet, la fonction logarithme étant croissante, les deux maximisation sont équivalentes. On obtient alors :

$$l_n(x_1;...;x_n;\theta) = n\ln\theta + n\theta\ln(c) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

La condition de premier ordre, nous donne alors :

$$\frac{\partial l_n}{\partial\theta}(x_1;...;x_n;\theta) = 0$$

i.e.

$$\frac{n}{\theta} + n\ln(c) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

i.e.

$$\frac{n}{\theta} = \sum i = 1^n \ln(x_i) - n\ln(c)$$

i.e.

$$\theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{c})}$$

De plus la dérivée seconde de la log-vraisemblance sur θ, pour tout θ :

$$\frac{\partial^2 l_n}{\partial^2\theta}(x_1;...;x_n;\theta) = \frac{-n}{\theta^2} < 0$$

Donc le point trouvé précédemment est bien un maximum.

Ainsi l'estimateur du maximum de vraisemblance est :

$$\theta^{emv} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{c})}$$

Question 2

Dans le cas, $\theta < 1$, on cherche un estimateur paramètrique de l'esp 'erance m de la loi de Pareto. On prend $c = 1$. On a :

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \frac{\theta^{emv}}{\theta^{emv}-1}\times 1\\ &= \frac{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{c})}}{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{c})}-1}\\ &= \frac{n}{n-\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{x_i}{c})}\end{aligned}$$

Cherchons maintenant la loi asymptotique de cet estimateur.

On se concentre tout d'abord sur l'estimateur θ^{emv}. On note f la densité de la loir de Pareto. On a pour tout $x > c$, :

$$f(x;\theta) = \theta \frac{c^\theta}{x^{\theta+1}}$$

Calculons l'information de Fisher de θ :

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= -\mathbb{E}_\theta[\frac{\partial^2 l_n}{\partial^2 \theta}(x_1; ...; x_n; \theta)] \\ &= \mathbb{E}_\theta[\frac{n}{\theta^2}] \\ &= \frac{n}{\theta^2} \end{aligned}$$

On remarque donc que :

1. Le support de $f(., \theta)$ est le même pour tout θ puisqu'il ne dépend que de c.
2. $\theta_0 (= 3)$ est un point intérieur de Θ
3. Pour tout x, et à proximité de θ_0, f est trois fois dérivale en θ et vaut $\frac{2}{\theta^3}$ que l'on peut majorer par la fonction constante égale à 2. De plus si on pose $M : x \longmapsto 2$, on a $\mathbb{E}_{\theta_0}(M(X)) = 2 < +\infty$
4. On a $I_1(\theta) = \frac{1}{\theta^2} > 0$

Ainsi, par théorême, on a que la solution de l'équation de vraisemblance θ^{emv} vérifie :

$$\sqrt{n}(\theta^{emv} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \theta^2) \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

On veut ensuite appliquer la Delta-method pour obtenir la loi asymptotique de l'estimateur de m.
Posons $g : x \longmapsto \frac{x}{1-x}$ défini sur $]1\,; +\infty]$.
On a, pour tout $\theta > 1$:

$$g'(\theta) = \frac{1}{(\theta-1)^2} \neq 0$$

Et comme, $\hat{m} = g(\theta^{emv})$, on sait que le $\hat{m}$ ainsi dÃľfini est un estimateur du maximum de vraisemblance de m, et on obtient :

$$\sqrt{n}(g(\theta^{emv}) - g(\theta_0)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, g'(\theta)^2\theta^2) \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

D'où :

$$\sqrt{n}(\hat{m} - m) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{(\theta-1)^4}) \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

0.0.1 Question 3

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\sqrt{n}(\hat{m}-m) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{(\theta-1)^4}) \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

De plus, on sait que $\theta^{emv} \xrightarrow{p.s.} \theta \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$.
Donc, on a :

$$\sqrt{\frac{(\theta^{emv}-1)^4}{(\theta^{emv})^2}} \xrightarrow{p.s.} \sqrt{\frac{(\theta-1)^4}{(\theta)^2}} \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

Or, la convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité.

On obtient ainsi :

$$\frac{(\theta^{emv}-1)^2}{\theta^{emv}} \xrightarrow{P} \frac{(\theta-1)^2}{\theta} \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

Enfin, la fonction $h : (x, y) \longmapsto xy$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de Slutsky et obtenir le résultat suivant :

$$\frac{(\theta^{emv}-1)^2}{\theta^{emv}} \times s\sqrt{n}(\hat{m}-m) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1) \quad [\mathbb{P}_{\theta_0}]$$

On peut alors construire un intervalle de confiance asymptotique pour le seuil α, en notant u_α le quantile $(1-\frac{\alpha}{2})$ d'une loi normale centrée réduite. En effet :

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \lim_{n \to =\infty} \mathbb{P}(-u_\alpha \leq \frac{(\theta^{emv}-1)^2}{\theta^{emv}} \times \sqrt{n}(\hat{m}-m) \leq u_\alpha) \\ &= \lim_{n \to =\infty} \mathbb{P}(\hat{m} + \frac{u_\alpha \theta^{emv}}{\sqrt{n}(\theta^{emv}-1)^2} \geq m \geq \hat{m} - \frac{u_\alpha \theta^{emv}}{\sqrt{n}(\theta^{emv}-1)^2}) \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'intervalle de confiance suivant :

$$[\hat{m} + \frac{u_\alpha \theta^{emv}}{\sqrt{n}(\theta^{emv}-1)^2}; \hat{m} - \frac{u_\alpha \theta^{emv}}{\sqrt{n}(\theta^{emv}-1)^2}]$$

$$= [\hat{m}(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}(\theta^{emv}-1)}); \hat{m}(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}(\theta^{emv}-1)})]$$

$$= [\frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{c})}{n}}(1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}(\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{c})}-1)}); \frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{c})}{n}}(1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{n}(\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{c})}-1)})]$$

$\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n \ln(\frac{x_i}{c})}{n}}$ Et