

## Exercice 1.1

1. On simule, dans l'ordre, le schéma explicite, le schéma implicite et le schéma Crank-Nicholson, avec comme paramètre de base  $L = 50$  et  $u_0(x) = \cos(\frac{8\pi x}{L})$ . On prendra des pas de temps différents pour chaque schémas.

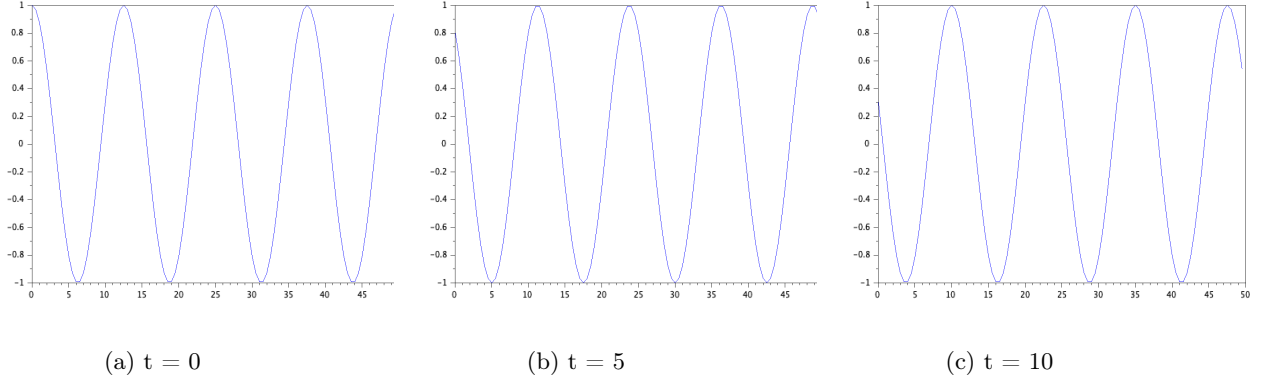


FIGURE 1 – **Schéma explicite** avec  $\Delta t = 0.01$

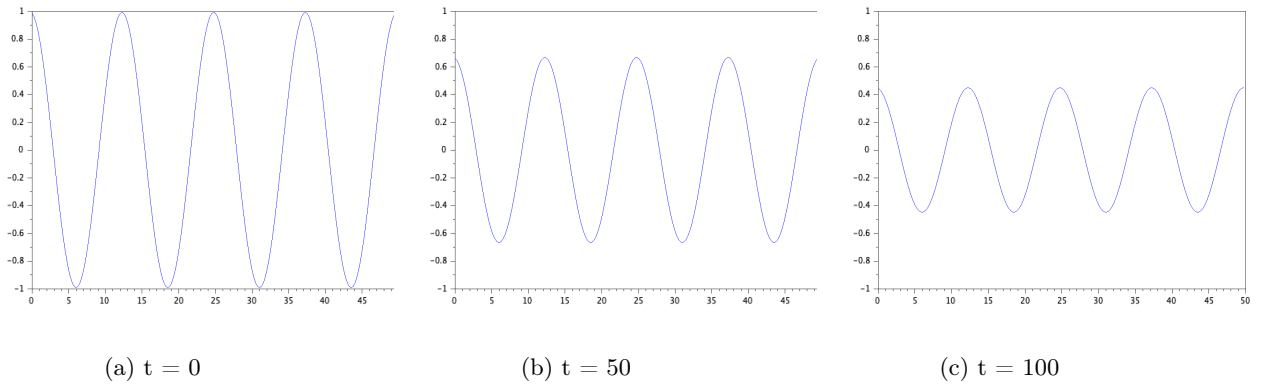


FIGURE 2 – **Schéma implicite** avec  $\Delta t = 1$

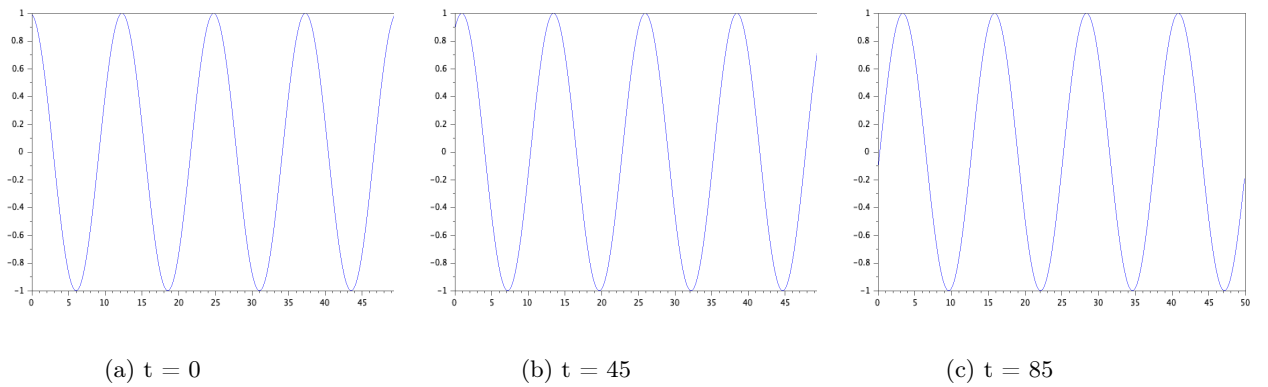


FIGURE 3 – **Schéma Crank-Nicholson** avec  $\Delta t = 1$

On remarque, dans un premier temps, que la simulation du schéma explicite et celui de Crank-Nicholson se ressemblent car on a une translation de la solution initiale au cours de temps. Cependant,

pour le schéma implicite, on remarque un écrasement de la solution au cours du temps.

2. • Schéma d'Euler explicite :

$$\begin{aligned}
& \langle u^{k+1}, u^{k+1} - u^k \rangle = \langle u^{k+1}, -\Delta t M_3 u^k \rangle \\
& \iff \frac{1}{2} (\|u^{k+1}\|^2 + \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \|u^k\|^2) = \langle u^k - \Delta t M_3 u^k, -\Delta t M_3 u^k \rangle \\
& \iff \frac{1}{2} (\|u^{k+1}\|^2 + \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \|u^k\|^2) = \langle u^k, -\Delta t M_3 u^k \rangle + \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\
& \iff \frac{1}{2} (\|u^{k+1}\|^2 + \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \|u^k\|^2) = \frac{1}{2} (\|u^k\|^2 + \|u^{k+1} - u^k\|^2 - \|u^{k+1}\|^2) + \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\
& \iff \|u^{k+1}\|^2 = \|u^k\|^2 + \|u^{k+1} - u^k\|^2
\end{aligned}$$

• Schéma d'Euler implicite :

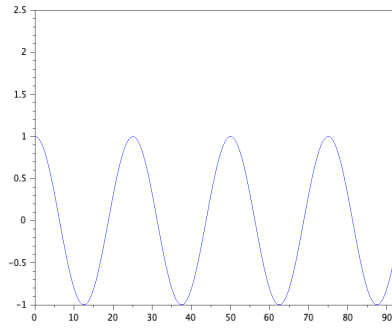
$$\begin{aligned}
& \langle u^k, u^{k+1} \rangle = \langle u^{k+1} + dt M_3 u^{k+1}, u^{k+1} \rangle \\
& \iff \frac{1}{2} (\|u^k\|^2 + \|u^{k+1}\|^2 - \|u^{k+1} - u^k\|^2) = \|u^{k+1}\|^2 + \langle dt M_3 u^{k+1}, u^{k+1} \rangle \\
& \iff \frac{1}{2} (\|u^k\|^2 + \|u^{k+1}\|^2 - \|u^{k+1} - u^k\|^2) = \|u^{k+1}\|^2 + \frac{1}{2} (\|dt M_3 u^{k+1}\|^2 + \|u^{k+1}\|^2 - \|dt M_3 u^{k+1} - u^{k+1}\|^2) \\
& \iff \frac{1}{2} (\|u^k\|^2 - \|u^{k+1} - u^k\|^2) = \|u^{k+1}\|^2 + \frac{1}{2} (\|u^{k+1} - u^k\|^2 - \|u^k\|^2) \\
& \iff \|u^{k+1}\|^2 + \|u^{k+1} - u^k\|^2 = \|u^k\|^2
\end{aligned}$$

• Schéma d'Euler Crank-Nicolson :

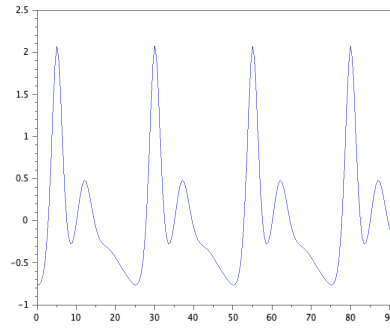
3.

## Exercice 1.2

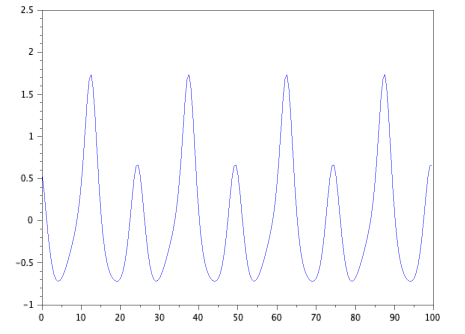
1. On simule, dans l'ordre, le schéma explicite et le schéma Sanz-Serna pour l'équation KdV :



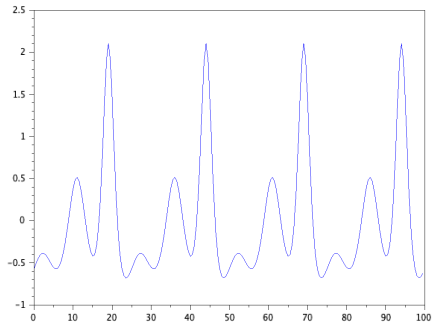
(a)  $t = 0$



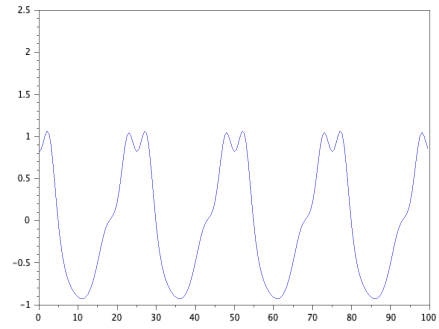
(b)  $t = 25$



(c)  $t = 50$



(d)  $t = 75$



(e)  $t = 100$

FIGURE 4 – Schéma explicite pour KdV avec  $u_0 = \cos(\frac{8\pi x}{L})$ ,  $dt = 0.01$  et  $L = 100$

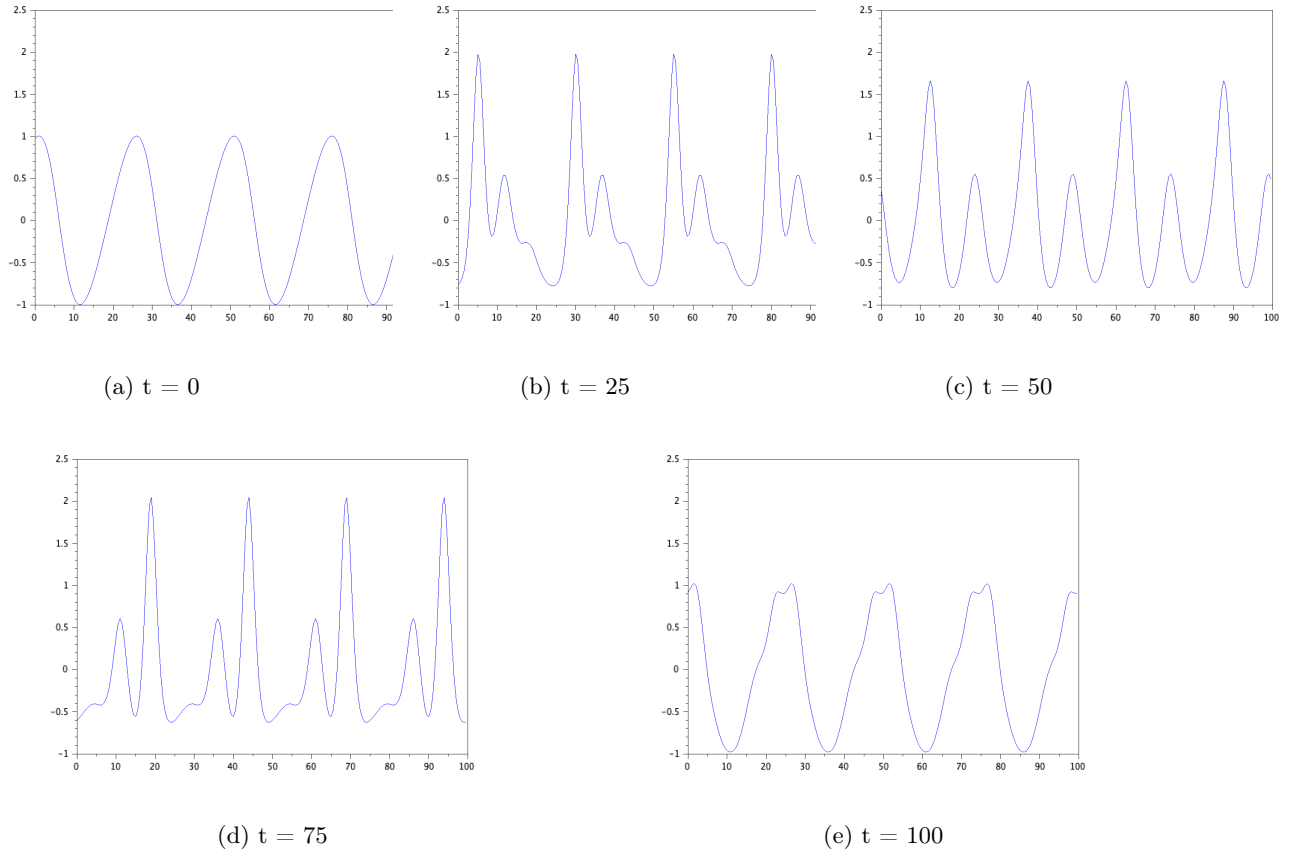


FIGURE 5 – **Schéma Sanz-Serna** pour KdV avec  $u_0 = \cos(\frac{8\pi x}{L})$ ,  $dt = 1$  et  $L = 100$

On remarque que le schéma Sanz-Serna est plus stable que le schéma implicite car on peut prendre un pas de temps plus grand sans que le schéma explose. De plus, on ne remarque pas de différences significative de simulation entre les deux schémas.

## 2. Question 2

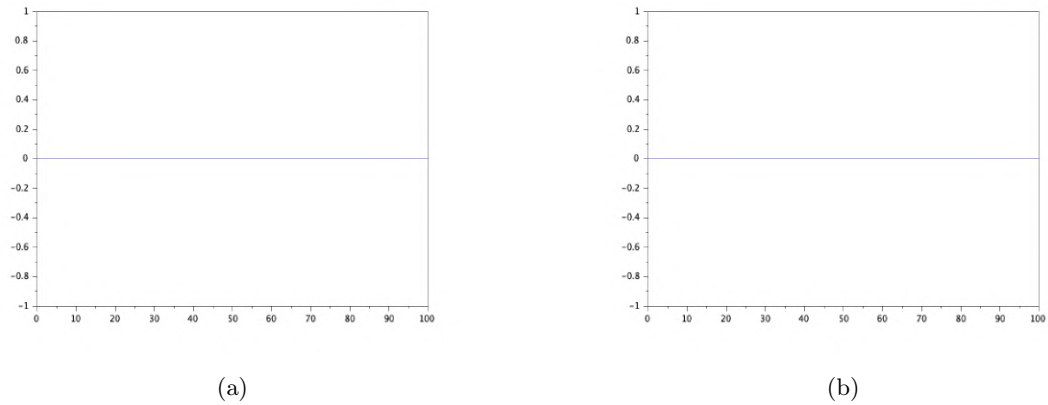
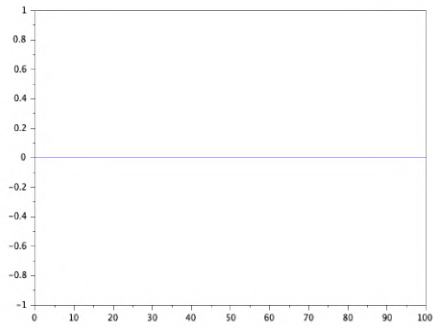
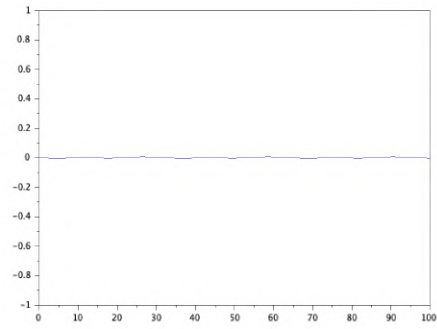


FIGURE 6 – Conservation de la masse - (a) / Conservation de la norme  $L^2$  - (b) avec le **schéma de Sanz-Serna** pour  $L = 50$ ,  $dt = 1$ ,  $T = 100$  et  $u_0(x) = \cos(\frac{8\pi x}{L})$



(a)



(b)

FIGURE 7 – Conservation de la masse - (a) / Conservation de la norme  $L^2$  - (b) avec le schéma de Sanz-Serna pour  $L = 100$ ,  $dt = 1$ ,  $T = 100$  et  $u_0(x) = \cos(\frac{8\pi x}{L})$

Ci-dessus, les graphiques représentent la conservation de la masse et la conservation de la norme pour deux longueurs  $L$  différentes. On voit seulement des courbes qui sont des droites horizontales en zéros ce qui montre qu'on a bien la conservation de la norme et la conservation de la masse. On peut aussi calculer la moyenne pour chacun de ces graphiques et en fonction de la longueur  $L$  :

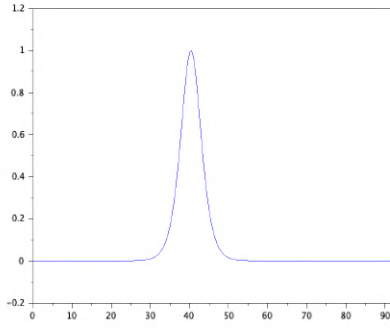
- Pour  $L = 50$  :

Pour le graphique concernant la conservation de la masse, on trouve une moyenne de  $-9,11 \cdot 10^{-11}$  et pour le graphique concernant la conservation de la norme, on trouve une moyenne de  $-1,23 \cdot 10^{-6}$ .

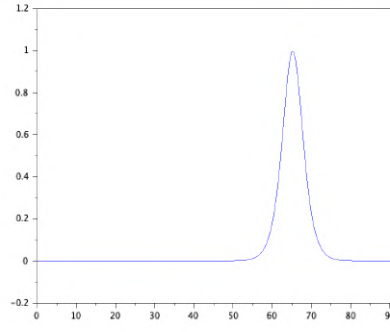
- Pour  $L = 100$  :

Pour le graphique concernant la conservation de la masse, on trouve une moyenne de  $-2,21 \cdot 10^{-11}$  et pour le graphique concernant la conservation de la norme, on trouve une moyenne de  $-1,01 \cdot 10^{-4}$ .

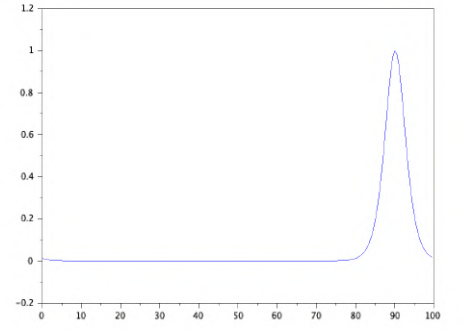
### 3. Simulation d'un soliton :



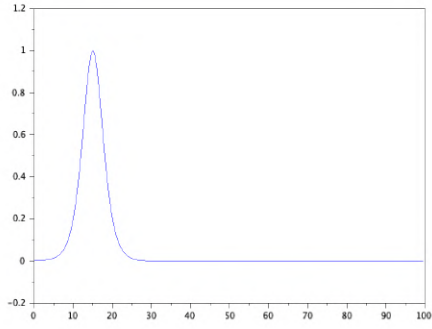
(a)  $t = 0$



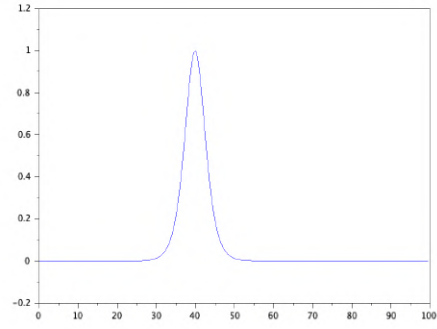
(b)  $t = 75$



(c)  $t = 150$



(d)  $t = 225$



(e)  $t = 300$

FIGURE 8 – **Schéma Sanz-Serna** pour KdV avec  $u_0(x) = 3(c_1 \cosh(\frac{\sqrt{c_1}}{2}(x - p_1 L))^{-2})$ ,  $dt = 1$ ,  $L = 100$ ,  $c_1 = \frac{1}{3}$  et  $p_1 = 0.4$

On remarque que le soliton se déplace à vitesse  $c$  le long de l'axe  $x$  comme attendu.

#### 4. Simulation de la collision en deux solitons :

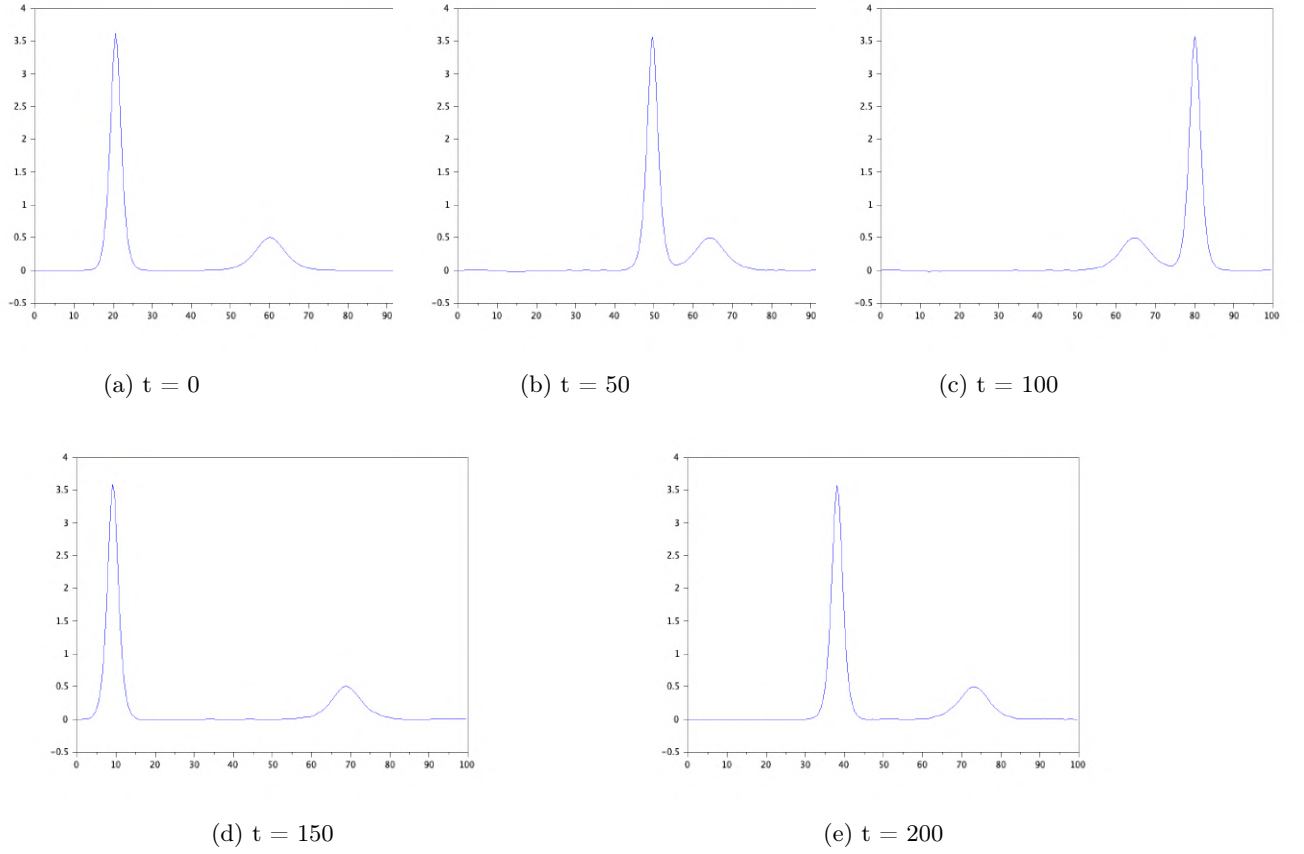


FIGURE 9 – **Schéma Sanz-Serna** pour KdV avec  $dt = 1$ ,  $L = 100$ ,  $c_1 = \frac{6}{5}$ ,  $p_1 = 0.2$ ,  $c_2 = \frac{1}{6}$ ,  $p_2 = 0.6$   
et  $u_0(x) = 3(c_1 \cosh(\frac{\sqrt{c_1}}{2}(x - p_1 L))^{-2}) + 3(c_2 \cosh(\frac{\sqrt{c_2}}{2}(x - p_2 L))^{-2})$

## Exercice 2.1

- 1.
2. On cherche à déterminer une solution sous la forme  $u(x, t) = u(x - ct)$  et on pose  $z = x - ct$ .  
On remplace alors, formellement, dans l'équation BBM, pour obtenir

$$-c \cdot d_z u + d_z u + c \cdot d_{xxx} u + u \cdot d_z u = 0 \quad (1)$$

Or, nous on cherche une solution de la forme  $u(z) = \lambda \cdot \cosh^\beta(\mu z)$  et on injecte cette solution dans (1) :

$$(1 - c) \cdot d_z (\lambda \cosh^\beta(\mu z)) + c \cdot d_{xxx} (\lambda \cosh^\beta(\mu z)) + d_z \left( \frac{\lambda^2 \cosh^{2\beta}(\mu z)}{2} \right) = 0$$

Malgré de nombreux calculs, je n'ai pas trouvé l'expression générale d'un soliton.

3. - 4. Question 3 - 4

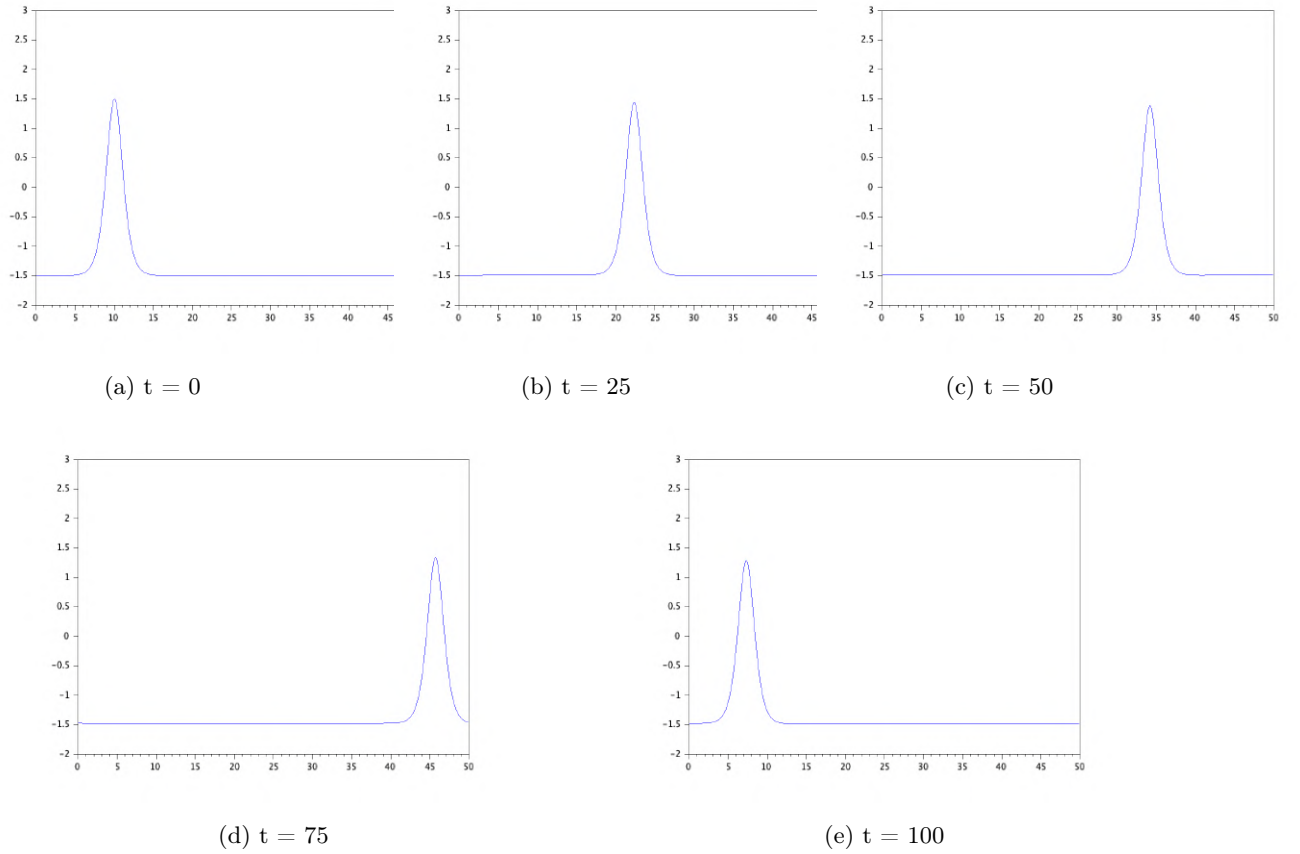


FIGURE 10 – **Schéma implicite/explicite** pour BBM avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $p_2 = 0.2 \cdot L$   
et  $u_0(x) = -6(c_2 - 1)\cosh^{-2}(\sqrt{\frac{1-c_2}{2c_2}}(x - d_2)) - 3(1 - c_2)$

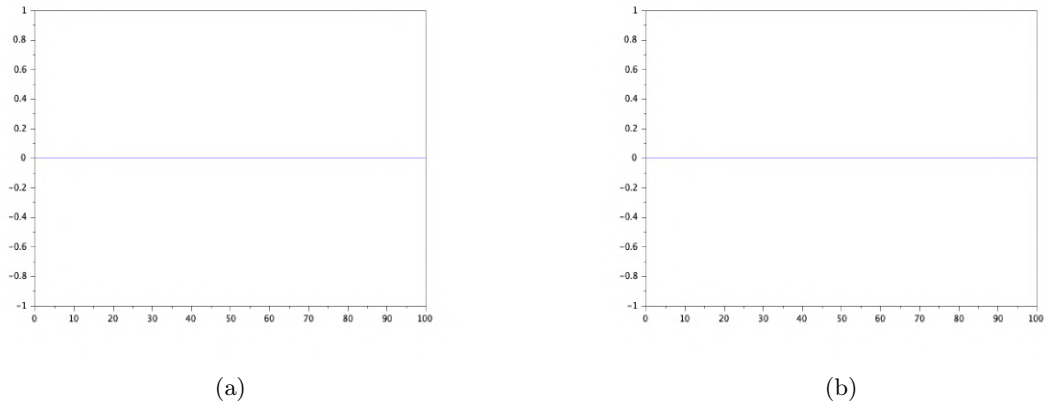


FIGURE 11 – Conservation de la masse - (a) / Conservation de la norme  $H^1$  - (b)

### Exercice 3.1

1. • Mise en place du schéma d'Euler IMEX :

On part du schéma suivant :

$$\begin{cases} (Id + M_2)(u^{k+1} - u^k) + \Delta t M_1 \eta^{k+1} + \Delta t \nu M_2 u^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} M_1 (u^k)^2 &= \Delta t f \\ \eta^{k+1} - \eta^k + \Delta t M_1 (\eta^k u^k) + \Delta t \nu M_2 \eta^{k+1} + \Delta t M_1 u^{k+1} &= 0 \end{cases}$$



On l'écrit de la forme suivante :

$$AX^{k+1} = F(X^k)$$

avec,

$$\begin{aligned} - X^k &= \begin{pmatrix} u^k \\ \eta^k \end{pmatrix} \\ - A &= \begin{pmatrix} Id + M_2 + \Delta t \nu M_2 & \Delta t M_1 \\ \Delta t M_1 & Id + \Delta t \nu M_2 \end{pmatrix} \\ - F(X^k) &= \begin{pmatrix} \Delta t f + (Id + M_2)u^k - \frac{\Delta t}{2} M_1 (u^k)^2 \\ -\Delta t M_1 (\eta^k u^k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et on peut donc résoudre le système de manière classique.

- Mise en place du schéma d'Euler implicite

On part du schéma suivant :

$$\begin{cases} (Id + M_2)(u^{k+1} - u^k) + \Delta t M_1 \eta^{k+1} + \Delta t \nu M_2 u^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} M_1 (u^{k+1})^2 & = \Delta t f \\ \eta^{k+1} - \eta^k + \Delta t M_1 (\eta^{k+1} u^{k+1}) + \Delta t \nu M_2 \eta^{k+1} + \Delta t M_1 u^{k+1} & = 0 \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme suivante :

$$AX^{k+1} = F(X^k, X^{k+1})$$

avec,

$$\begin{aligned} - X^k &= \begin{pmatrix} u^k \\ \eta^k \end{pmatrix}, X^{k+1} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \eta^{k+1} \end{pmatrix} \\ - A &= \begin{pmatrix} Id + M_2 + \Delta t \nu M_2 & \Delta t M_1 \\ \Delta t M_1 & Id + \Delta t \nu M_2 \end{pmatrix} \\ - F(X^k, X^{k+1}) &= \begin{pmatrix} \Delta t f + (Id + M_2)u^k - \frac{\Delta t}{2} M_1 (u^{k+1})^2 \\ -\Delta t M_1 (\eta^{k+1} u^{k+1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut alors résoudre le système en utilisant une méthode de point fixe ou une méthode de Newton pour trouver la solution.

- Mise en place du schéma Sanz-Serna

On part du schéma suivant :

$$\begin{cases} 2(Id + M_2)(u^{k+1} - u^k) + \Delta t M_1 (\eta^{k+1} + \eta^k) + \Delta t M_1 (\frac{u^{k+1} + u^k}{2})^2 + \Delta t \nu M_2 (u^{k+1} + u^k) & = 2\Delta t f \\ 2\eta^{k+1} - 2\eta^k + \frac{\Delta t}{2} M_1 ((\eta^{k+1} + \eta^k)(u^{k+1} + u^k)) + \Delta t \nu M_2 (\eta^{k+1} + \eta^k) + \Delta t M_1 (u^{k+1} + u^k) & = 0 \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme suivante :

$$AX^{k+1} = F(X^k, X^{k+1})$$

avec,

$$\begin{aligned} - X^k &= \begin{pmatrix} u^k \\ \eta^k \end{pmatrix}, X^{k+1} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \eta^{k+1} \end{pmatrix} \\ - A &= \begin{pmatrix} 2(Id + M_2) + \Delta t \nu M_2 & \Delta t M_1 \\ \Delta t M_1 & 2Id + \Delta t \nu M_2 \end{pmatrix} \\ - F(X^k, X^{k+1}) &= \begin{pmatrix} 2\Delta t f + 2(Id + M_2)u^k - \Delta t M_1 \eta^k - \Delta t M_1 (\frac{u^{k+1} + u^k}{2})^2 - \Delta t \nu M_2 u^k \\ 2\eta^k - \frac{\Delta t}{2} M_1 ((\eta^{k+1} + \eta^k)(u^{k+1} + u^k)) - \Delta t \nu M_2 \eta^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut alors résoudre le système en utilisant une méthode de point fixe ou une méthode de Newton pour trouver la solution.

2. On s'intéresse maintenant à la simulation des équations de Boussineq pour deux valeurs de  $\nu$  différentes.

Pour  $\nu = 0.1$  :

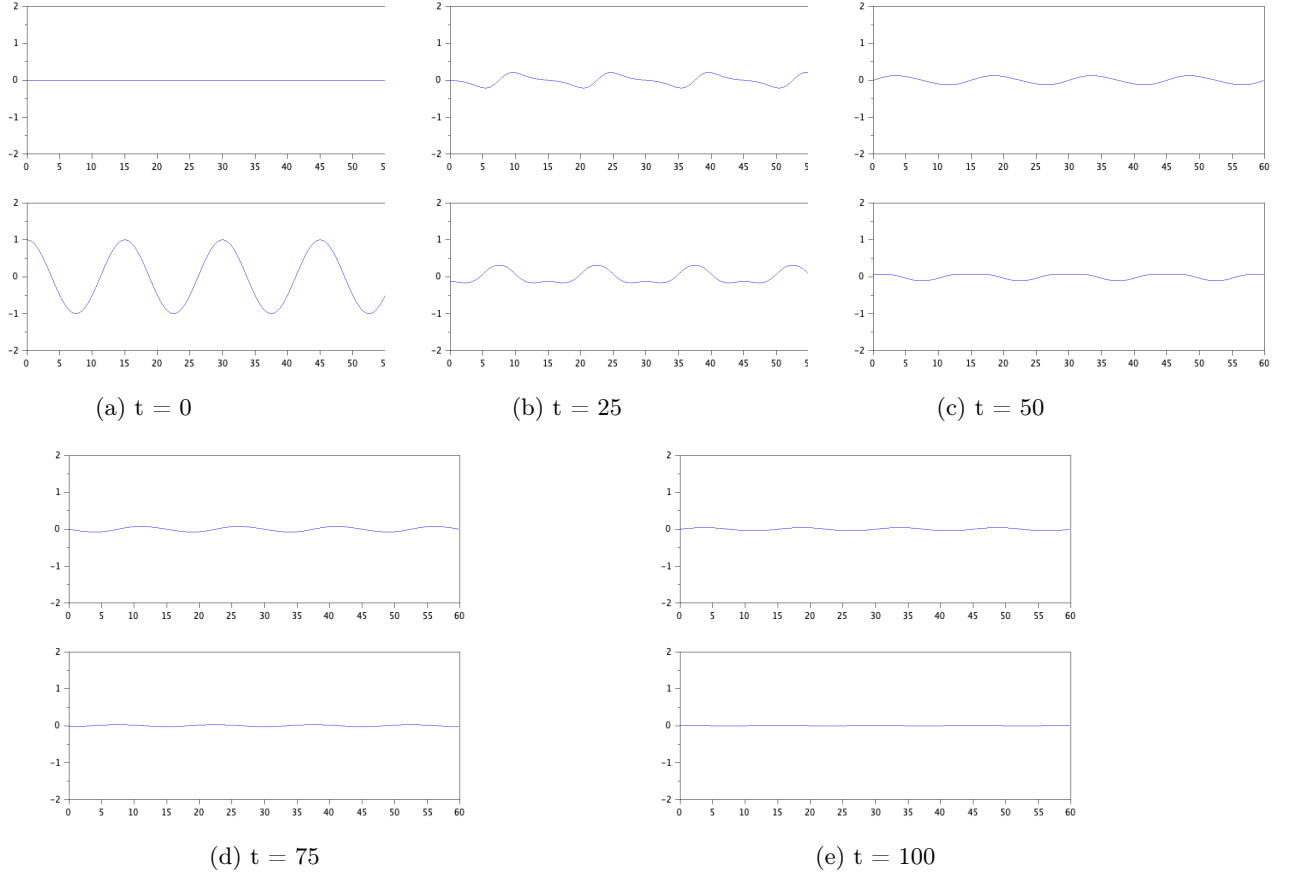


FIGURE 12 – **Schéma implicite/explicite** pour les équations de Boussineq 1D avec  $dt = 0.1$ ,  $L = 60$ ,  $u_0(x) = 0$  et  $\eta_0(x) = \cos(\frac{8\pi x}{L})$

Pour  $\nu = 1$  :

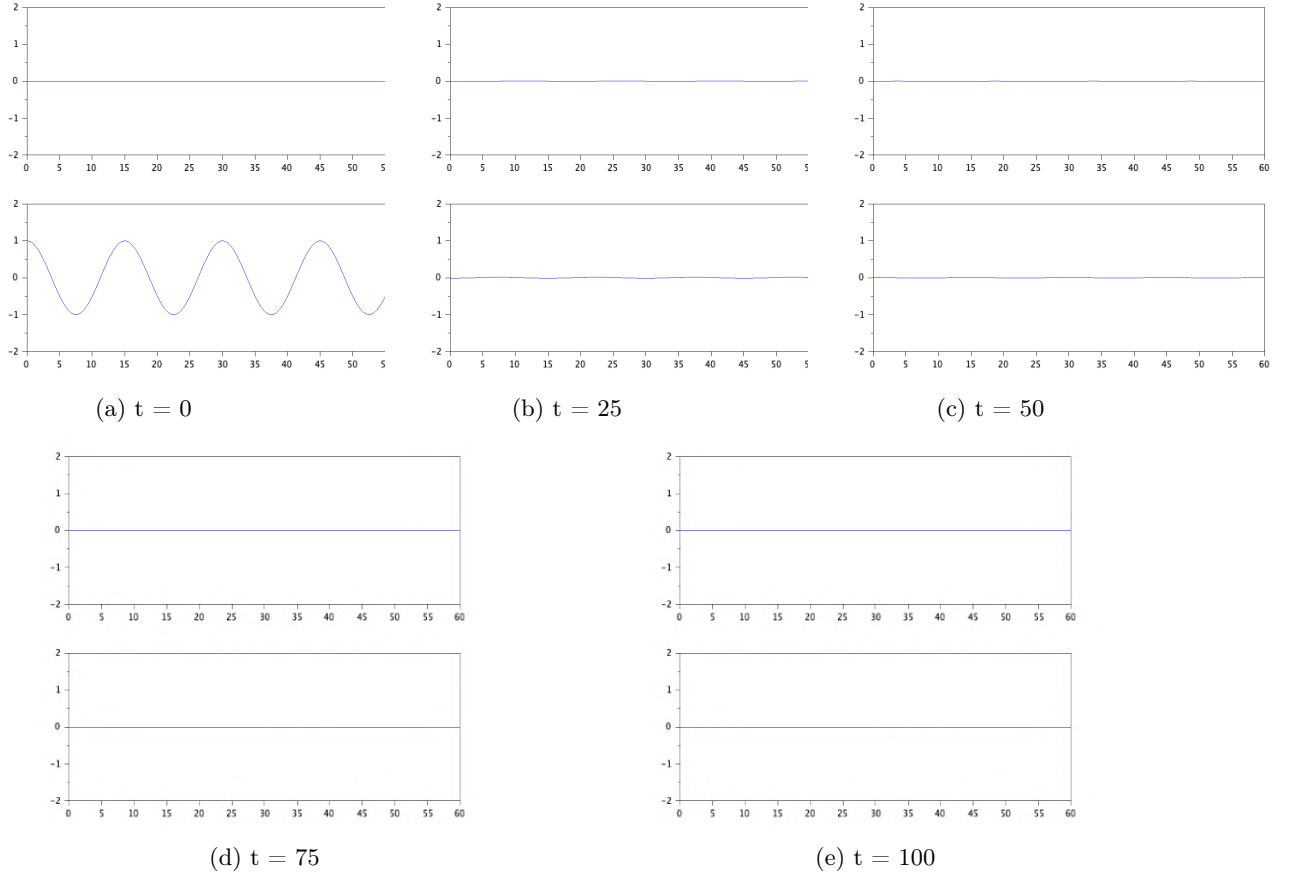


FIGURE 13 – **Schéma implicite/explicite** pour les équations de Boussineq 1D avec  $dt = 0.1$ ,  $L = 60$ ,  
 $u_0(x) = 0$  et  $\eta_0(x) = \cos(\frac{8\pi x}{L})$

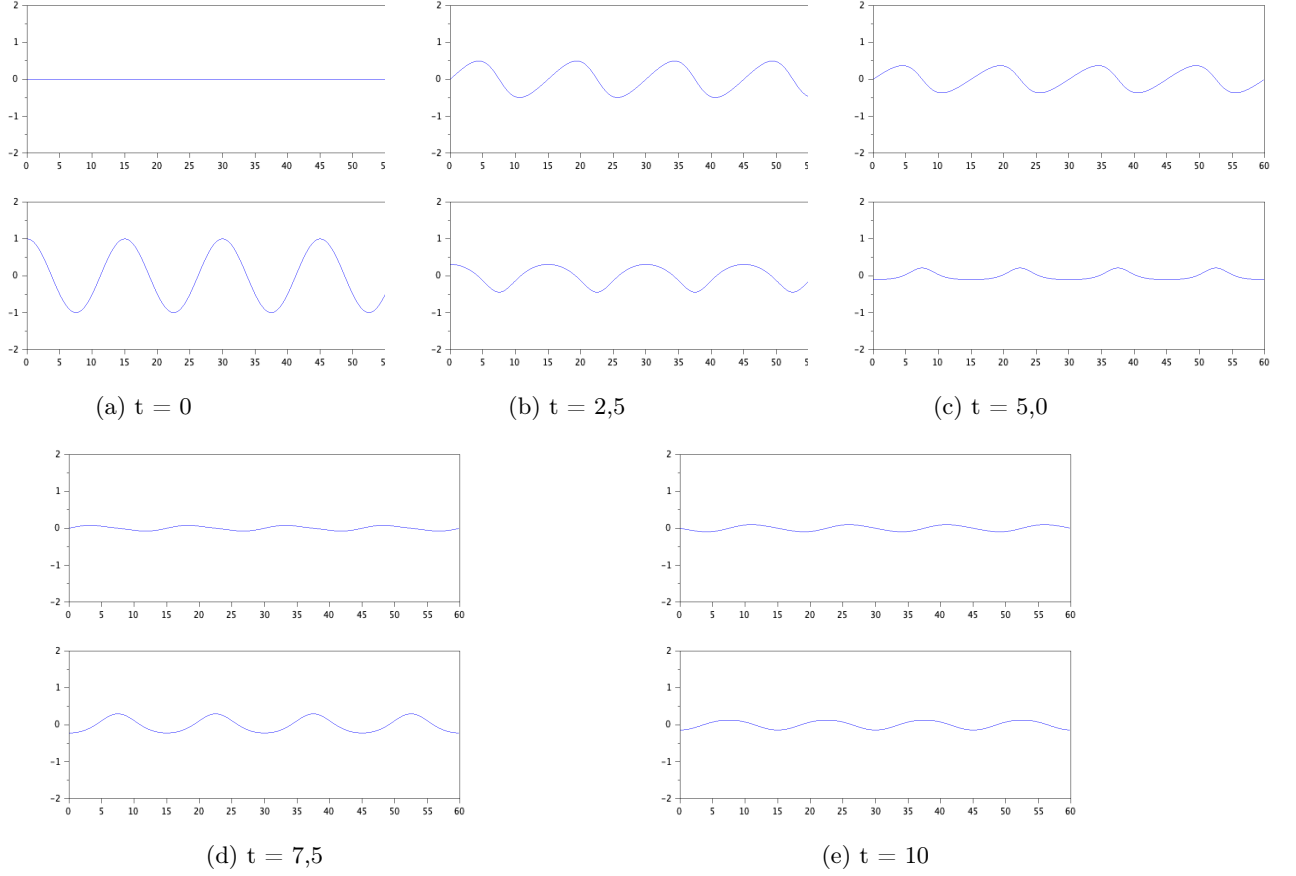


FIGURE 14 – **Schéma implicite/explicite** pour les équations de Boussineq 1D avec  $dt = 0.1$ ,  $L = 60$ ,  $u_0(x) = 0$  et  $\eta_0(x) = \cos(\frac{8\pi x}{L})$

3. On remarque que la valeur de  $\nu$  possède une réel influence sur la simulation des équations de Boussineq. En effet que ce soit la vitesse ou l'élévation, on remarque que cela tends vers une valeur d'équilibre à savoir 0 pour les deux valeurs de  $\nu$ . Or, pour  $\nu = 0.1$ , on atteint cette valeur d'équilibre pour  $t = 100$  contre  $t = 25$  pour  $\nu = 1$ . La deuxième chose qu'on remarque, c'est qu'il y a un échange entre la vitesse et l'élévation. On commence avec une élévation qui suit une cosinus en  $t = 0$  puis, au fils du temps, la vitesse augmente lorsque l'élévation est la plus élevée et l'élévation augmente lorsque la vitesse est la plus faible.

## Exercice 3.2

1. On part du système suivant :

$$\begin{cases} \eta^{k+1} - \eta^k + \Delta t \nabla \cdot U^{k+1} - b \Delta (\eta^{k+1} - \eta^k) = 0 \\ U^{k+1} - U^k + \Delta t \vec{\nabla} \eta^{k+1} - d \Delta (U^{k+1} - U^k) = 0 \end{cases}$$

Or,  $U^{k+1} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix}$ , donc on obtient

$$\begin{cases} \eta^{k+1} - \eta^k + \Delta t (\partial_x u^{k+1} + \partial_y v^{k+1}) - b \Delta (\eta^{k+1} - \eta^k) = 0 \\ \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \partial_x \eta^{k+1} \\ \partial_y \eta^{k+1} \end{pmatrix} - d \Delta \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Après discrétisation en espace du système précédent, en posant  $D_x$  comme étant la matrice de discrétisation de  $\partial_x$  et  $D_y$  la matrice de discrétisation de  $\partial_y$ , on obtient

$$\begin{cases} (Id + bM_2)\eta^{k+1} + \Delta t(D_x u^{k+1} + D_y v^{k+1}) &= (Id + bM_2)\eta^k \\ (Id + dM_2)u^{k+1} + \Delta t D_x \eta^{k+1} &= (Id + dM_2)u^k \\ (Id + dM_2)v^{k+1} + \Delta t D_y \eta^{k+1} &= (Id + dM_2)v^k \end{cases}$$

On peut alors écrire le système sous la forme

$$AU^{k+1} = F(U^k) \quad (2)$$

avec,

- $A = \begin{pmatrix} Id + bM_2 & \Delta t D_x & \Delta t D_y \\ \Delta t D_x & Id + dM_2 & 0 \\ \Delta t D_y & 0 & Id + dM_2 \end{pmatrix}$
- $F(U^k) = \begin{pmatrix} Id + bM_2 \\ Id + dM_2 \\ Id + dM_2 \end{pmatrix}$

2. On part du système suivant :

$$\begin{cases} \eta^{k+1} - \eta^k + \Delta t \nabla \cdot U^{k+1} + \nabla \cdot (\eta^{k+1} U^{k+1}) - b\Delta(\eta^{k+1} - \eta^k) &= 0 \\ U^{k+1} - U^k + \Delta t \vec{\nabla} \eta^{k+1} + \frac{1}{2} \nabla |U^{k+1}|^2 - d\Delta(U^{k+1} - U^k) &= 0 \end{cases}$$

Après discrétisation en espace, on obtient

$$\begin{cases} \eta^{k+1} - \eta^k + \Delta t(D_x u^{k+1} + D_y v^{k+1}) + (D_x(\eta^{k+1} u^{k+1}) + D_y(\eta^{k+1} v^{k+1})) + bM_2 \eta^{k+1} - bM_2 \eta^k &= 0 \\ u^{k+1} - u^k + \Delta t D_x \eta^{k+1} + \frac{1}{2} D_x(u^{k+1^2} + v^{k+1^2}) + dM_2 u^{k+1} - dM_2 u^k &= 0 \\ v^{k+1} - v^k + \Delta t D_y \eta^{k+1} + \frac{1}{2} D_y(u^{k+1^2} + v^{k+1^2}) + dM_2 v^{k+1} - dM_2 v^k &= 0 \end{cases}$$

On peut alors réécrire le système précédent sous la forme

$$AU^{k+1} = F(U^k, U^{k+1})$$

avec,

- $A = \begin{pmatrix} Id + bM_2 & \Delta t D_x & \Delta t D_y \\ \Delta t D_x & Id + dM_2 & 0 \\ \Delta t D_y & 0 & Id + dM_2 \end{pmatrix}$
- $F(U^k, U^{k+1}) = \begin{pmatrix} Id + bM_2 - (D_x(\eta^{k+1} u^{k+1}) + D_y(\eta^{k+1} v^{k+1})) \\ Id + dM_2 - \frac{1}{2} D_x(u^{k+1^2} + v^{k+1^2}) \\ Id + dM_2 - \frac{1}{2} D_y(u^{k+1^2} + v^{k+1^2}) \end{pmatrix}$

Puis on peut résoudre ce système en utilisant une méthode du point fixe ou une méthode de Newton.

### Exercice 3.3

1. Première conditions initiales :

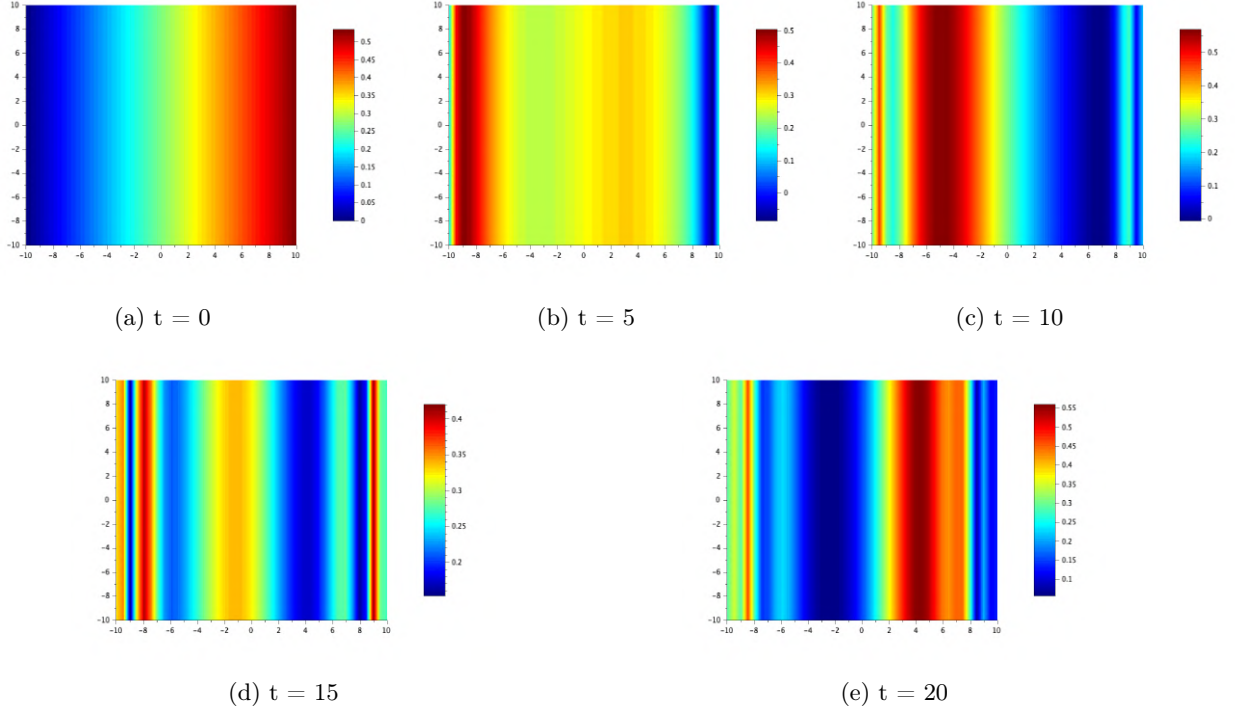


FIGURE 15 – Simulation des équations de Boussinesq 2D avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 20$ ,  $u_0(x, y) = 0$ ,  $v_0(x, y) = \eta_0 - \frac{\eta_0^2}{4}$  et  $\eta_0(x, y) = A(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3A}{C_s}}(y + 10))$  pour  $A = 0.1$  et  $C_s = 1 + \frac{A}{2}$

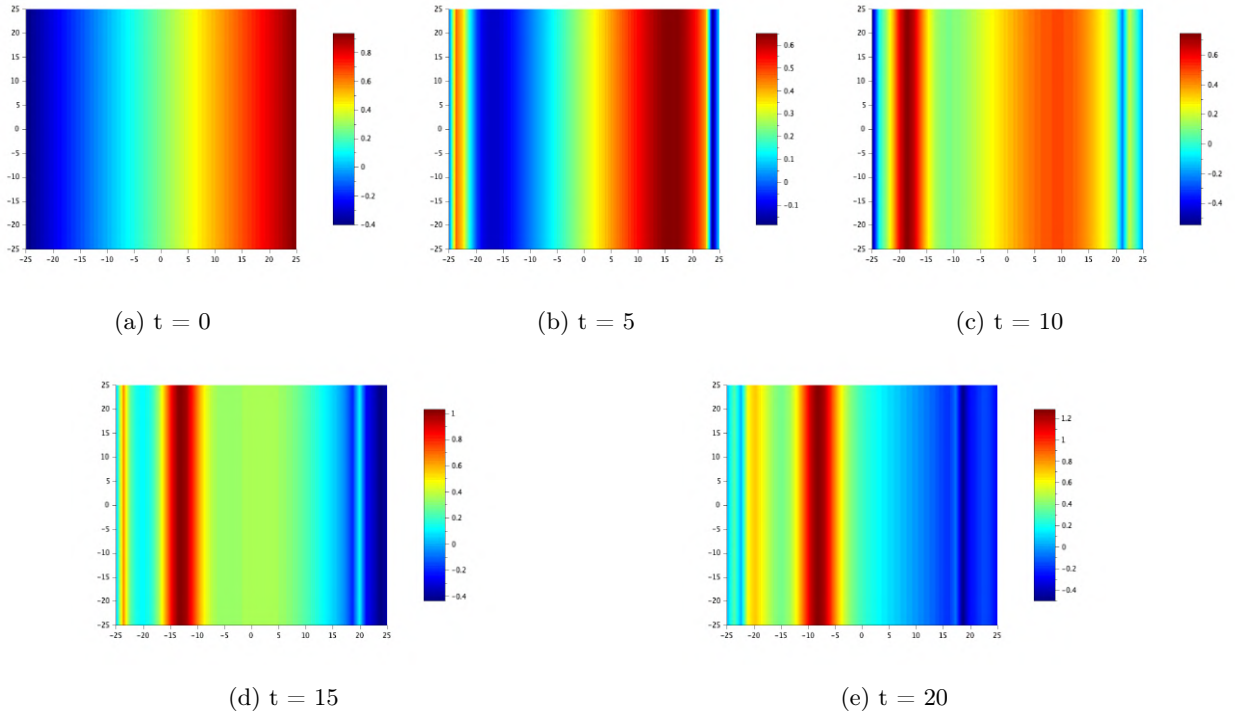


FIGURE 16 – Simulation des équations de Boussinesq 2D avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 25$ ,  $u_0(x, y) = 0$ ,  $v_0(x, y) = \eta_0 - \frac{\eta_0^2}{4}$  et  $\eta_0(x, y) = A(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3A}{C_s}}(y + 10))$  pour  $A = 0.1$  et  $C_s = 1 + \frac{A}{2}$

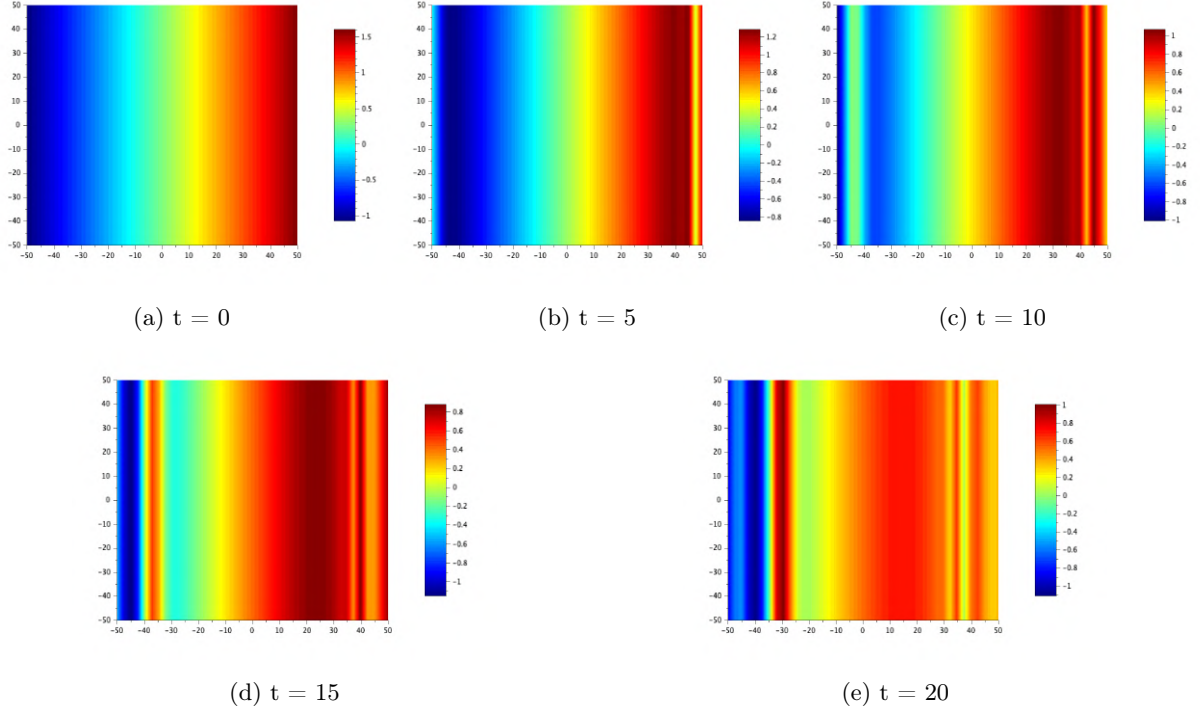


FIGURE 17 – Simulation des équations de Boussineq 2D avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 100$ ,  $u_0(x, y) = 0$ ,  $v_0(x, y) = \eta_0 - \frac{\eta_0^2}{4}$  et  $\eta_0(x, y) = A(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3A}{C_s}}(y + 10))$  pour  $A = 0.1$  et  $C_s = 1 + \frac{A}{2}$

## 2. Deuxième conditions initiales :

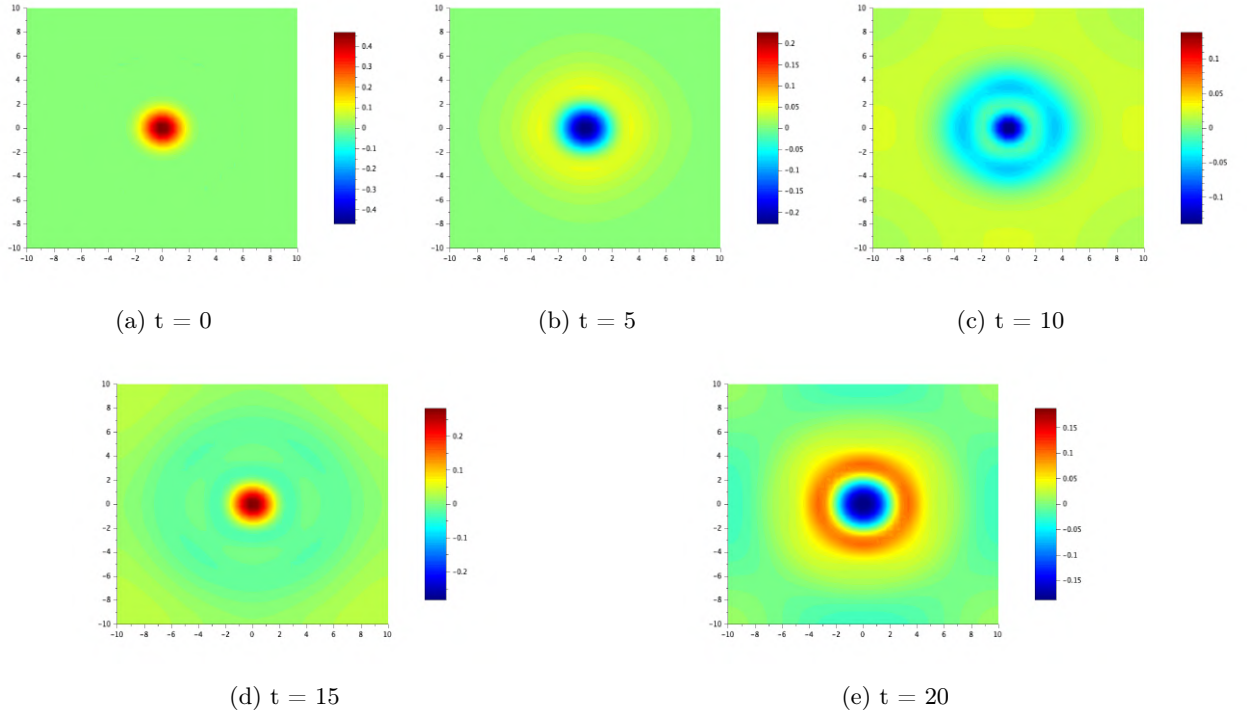


FIGURE 18 – Simulation des équations de Boussineq 2D avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 20$ ,  $u_0(x, y) = 0$ ,  $v_0(x, y) = 0$  et  $\eta_0(x, y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

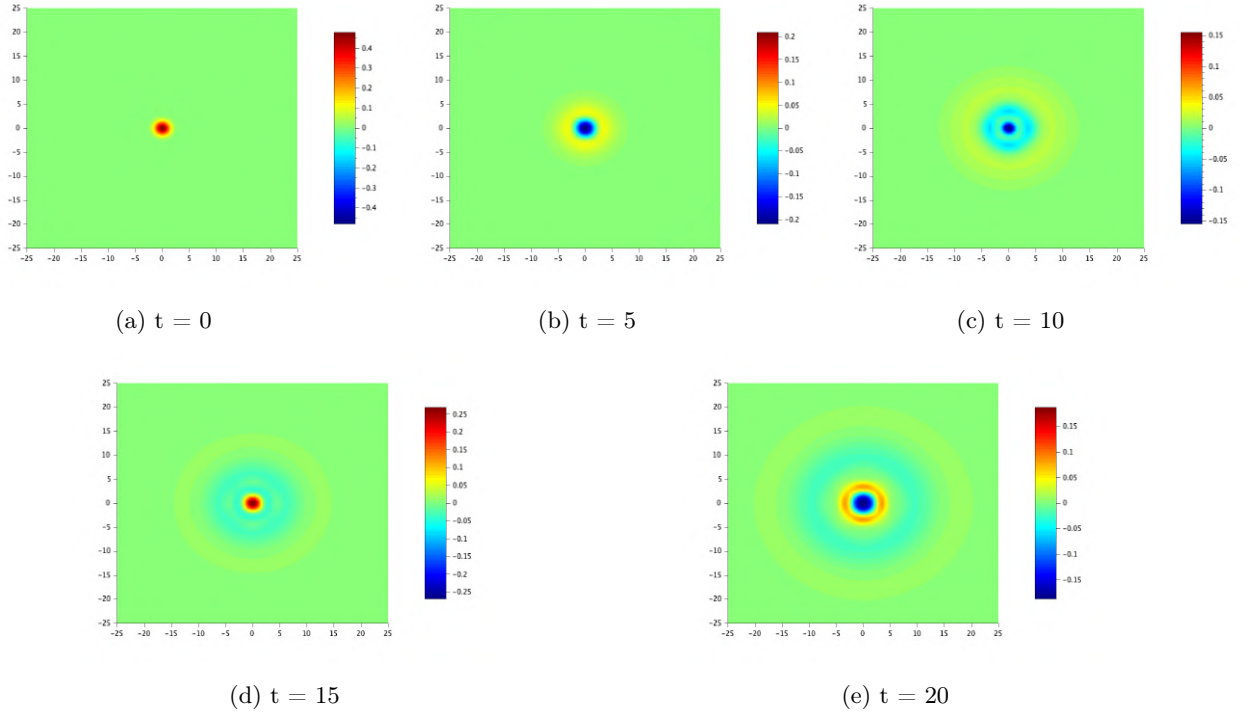


FIGURE 19 – Simulation des équations de Boussineq 2D avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 50$ ,  
 $u_0(x, y) = 0$ ,  $v_0(x, y) = 0$  et  $\eta_0(x, y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

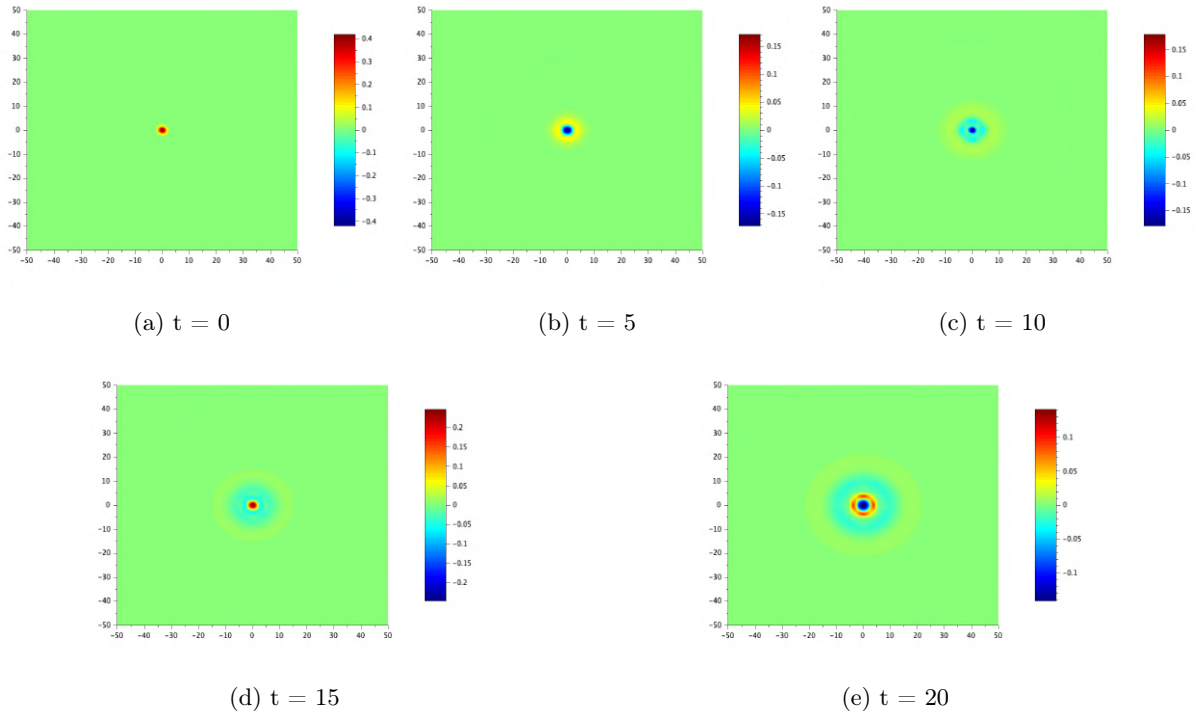


FIGURE 20 – Simulation des équations de Boussineq 2D avec  $dt = 0.01$ ,  $L = 100$ ,  
 $u_0(x, y) = 0$ ,  $v_0(x, y) = 0$  et  $\eta_0(x, y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$