

Exercice 1

On effectue la simulation des équations de Cahn-Hilliard pour les deux schémas donnés. Dans un premier temps, on part de la même donnée initiale avec le même pas de temps, à savoir $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$.

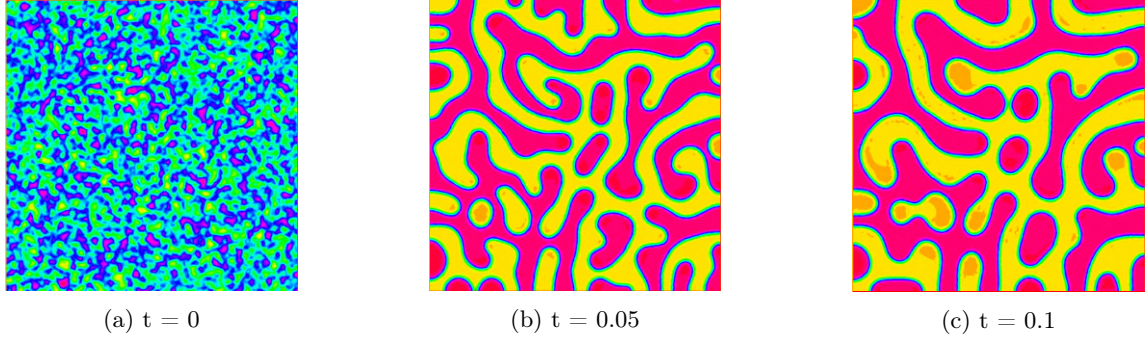


FIGURE 1 – **Schéma IMEX** avec $T = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ sur $\Omega = [-10, 10]^2$

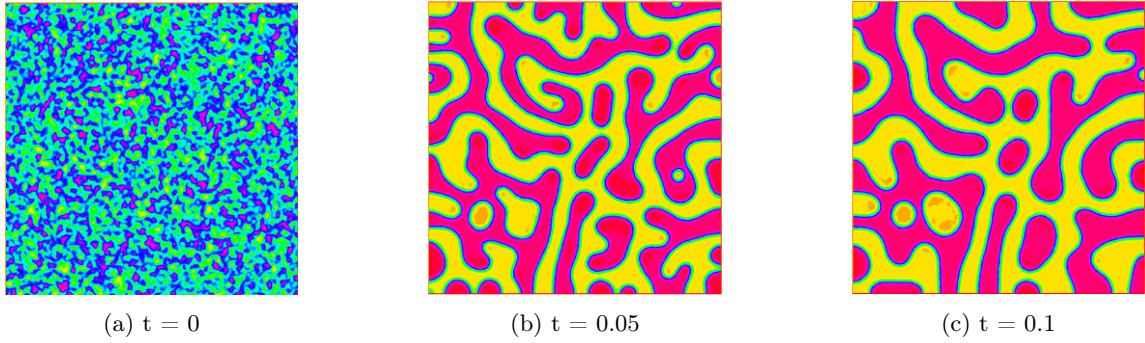


FIGURE 2 – **Schéma IMEX relaxé** avec $T = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ sur $\Omega = [-10, 10]^2$

On remarque qu'en partant de la même donnée initiale, on obtient plus ou moins le même résultat à la fin de la simulation. Ce n'est donc pas la comparaison la plus intéressante. On peut essayer de faire varier le pas de temps pour quels schémas est stable avec un Δt plus grand. On essaie pour $\Delta t = 0.01$.

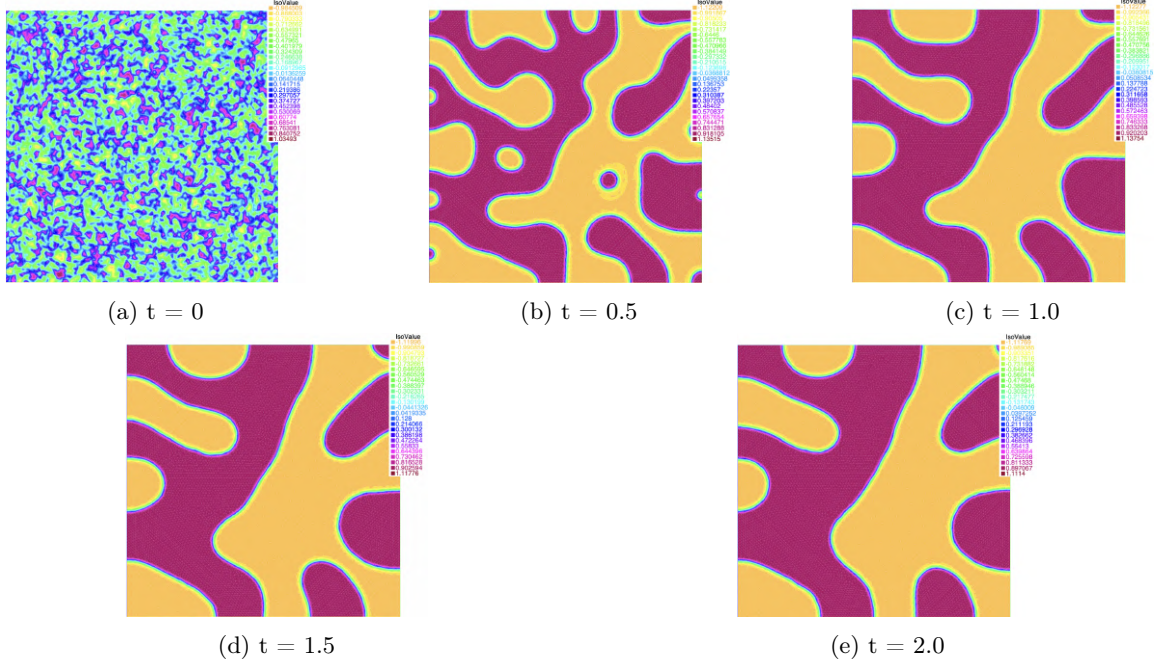


FIGURE 3 – **Schéma IMEX relaxé** avec $\Delta t = 0.01$, $T = 10$, $\varepsilon = 0.1$ sur $\Omega = [-10, 10]^2$

Après simulation, on observe que pour un pas de temps plus grand, le schéma IMEX relaxé est très stable. Alors que le schéma IMEX classique explose au bout de seulement 6 itérations ce qui rends la simulation complètement impossible.

Exercice 2.1

1. On part de l'équation de base,

$$\partial_t u - \Delta(\Delta^2 u + 2\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u)) = 0. \quad (1)$$

Puis, on pose

$$w = \Delta^2 u + 2\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u)$$

Alors, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta w = 0 \\ w = \Delta^2 u + 2\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u) \end{cases}$$

Avec, $u(x, 0) = u_0(x)$ et $w(x, 0) = w_0(x)$.

De plus, on pose que

$$p = -\Delta u$$

Alors, on a que

$$w = -\Delta p - 2\Delta p + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u)$$

Donc, au final, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta w = 0 \\ w = -\Delta p - 2\Delta p + \frac{1}{\varepsilon^2} f(u) \\ p = -\Delta u \end{cases}$$

Avec, $u(x, 0) = u_0(x)$, $w(x, 0) = w_0(x)$ et $p(x, 0) = p_0(x)$.

2. On part de notre équation de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta w = 0 \\ w = -\Delta p - 2p + \frac{1}{\epsilon^2} f(u) \\ p = -\Delta u \end{cases}$$

Avec, $u(x, 0) = u_0(x)$, $w(x, 0) = w_0(x)$ et $p(x, 0) = p_0(x)$.

auquel on associe la formulation variationnelle suivante

$$\begin{cases} (\partial_t u, \phi_1) + (\nabla w, \nabla \phi_1) = 0, & \forall \phi_1 \in V_1 \\ (w, \phi_2) = (\nabla p, \nabla \phi_2) - 2(p, \phi_2) + \frac{1}{\epsilon^2} (f(u), \phi_2), & \forall \phi_2 \in V_2 \\ (p, \phi_3) = (\nabla u, \nabla \phi_3), & \forall \phi_3 \in V_3 \end{cases}$$

De plus, on prendra $V_1 = V_2 = V_3 \in H^1(\Omega)$.

3. En utilisant la formulation faible précédente, on obtient la formulation faible approché

$$\begin{cases} (\partial_t u, \phi_1) + (\nabla w, \nabla \phi_1) = 0, & \forall \phi_1 \in V_{1h} \\ (w, \phi_2) = (\nabla p, \nabla \phi_2) - 2(p, \phi_2) + \frac{1}{\epsilon^2} (f(u), \phi_2), & \forall \phi_2 \in V_{2h} \\ (p, \phi_3) = (\nabla u, \nabla \phi_3), & \forall \phi_3 \in V_{3h} \end{cases}$$

avec, $V_{1h} = V_{2h} = V_{3h}$, des espaces d'éléments finis construits sur des éléments \mathbb{P}_1 .

A l'aide de cette formulation faible approché, on peut construire le schéma IMEX suivant

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t}, \phi_{1h} \right) - (\nabla w_h^{k+1}, \nabla \phi_{1h}) + (w_h^{k+1}, \phi_{2h}) - (\nabla p_h^{k+1}, \nabla \phi_{2h}) + 2(p_h^{k+1}, \phi_{2h}) - \frac{1}{\epsilon^2} (f(u_h^k), \phi_{2h}) \\ & + (p_h^{k+1}, \phi_{3h}) - (\nabla u_h^{k+1}, \nabla \phi_{3h}) = 0 \end{aligned}$$

On applique ce schéma dans le programme FreeFem++ suivant :

```

1 // Parametres
2 int nx=100,ny = 100;
3 real L = 10;
4 real aa = -L, bb = L, cc = -L, dd = L;
5 real eps = 0.1;
6 real eps2 = 1/eps^2;
7 real T = 2;
8 real dt = 0.001;
9
10 // Creation des bordures du maillage
11 border AB(t = aa,bb){x = t; y=cc; label =1;};
12 border BC(t = cc,dd){x = bb; y=t; label =2;};
13 border CD(t = bb,aa){x = t; y=dd; label =3;};
14 border DA(t = dd,cc){x = aa; y=t; label =4;};
15
16 // Creation du maillage et de l'espace d'elements finis
17 mesh Th = buildmesh(AB(nx)+BC(ny)+CD(nx)+DA(ny));
18 fespace Vh(Th,P1,periodic = [[1,x],[3,x],[4,y],[2,y]]);
19
20 Vh u,w,p,uold,phi,psi,xi;
21
22 // Definition de la condition initiale
23 func u0 = 1-2*randreal1();
24
25 macro Grad(u)[dx(u),dy(u)] //
26
27 // Definition du probleme
28 problem CH([u,w,p],[phi,psi,xi]) =

```

```

29  int2d(Th)(u*phi/dt)
30  - int2d(Th)(uold*phi/dt)
31  + int2d(Th)(Grad(w)'*Grad(phi))
32  + int2d(Th)(w*psi)
33  - int2d(Th)(Grad(p)'*Grad(psi))
34  + int2d(Th)(2*p*psi)
35  - int2d(Th)(eps2*(uold^3 - uold)*psi)
36  + int2d(Th)(p*xi)
37  - int2d(Th)(Grad(u)'*Grad(xi));
38
39  u = u0;
40  int k = 0;
41
42  // Iterations
43  for (real t=0;t<=T;t+=dt){
44
45      uold = u;
46      CH;
47
48      if (k == 0)
49      {
50          plot(u,fill=true,value=true,nbiso= 25,wait = 0, ps = "exo2_00.eps");
51      };
52      if (k == 500)
53      {
54          plot(u,fill=true,value=true,nbiso= 25,wait = 0, ps = "exo2_05.eps");
55      };
56      if (k == 1000)
57      {
58          plot(u,fill=true,value=true,nbiso= 25,wait = 0, ps = "exo2_10.eps");
59      };
60      if (k == 1500)
61      {
62          plot(u,fill=true,value=true,nbiso= 25,wait = 0, ps = "exo2_15.eps");
63      };
64      if (k == 2000)
65      {
66          plot(u,fill=true,value=true,nbiso= 25,wait = 0, ps = "exo2_20.eps");
67      };
68
69      k = k+1;
70  }

```

4. A l'aide du programme précédent, on obtient

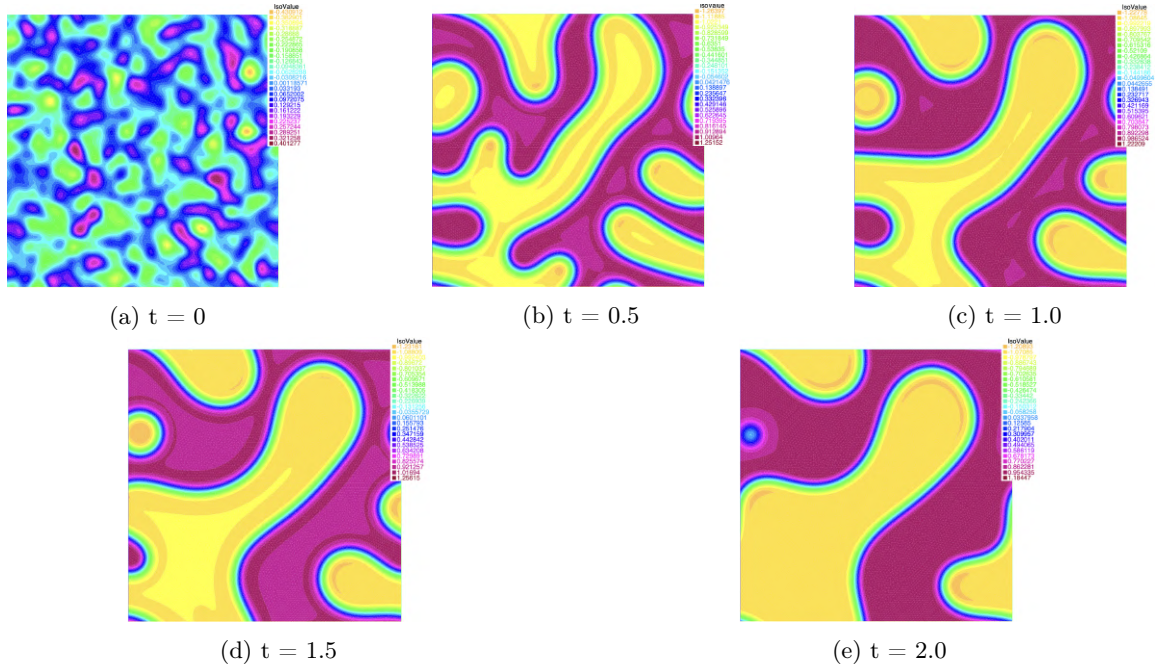


FIGURE 4 – Schéma IMEX de (1) pour $\Delta t = 10^{-3}$, $\epsilon = 0.1$ et $T = 2$

Exercice 2.2

```

1 // Parametres
2 int nx =149,ny = 149;
3 real L = ?;
4 real aa = ?, bb = ?, cc = ?, dd = ?;
5 real eps = ?;
6 real T = ?;
7 real dt = ?;
8
9 // Parametres probleme
10 real a20 = ?;
11 real a11 = ?;
12 real a02 = ?;
13 real a10 = ?;
14 real a01 = ?;
15
16 // Creation des bordures du maillage
17 border AB(t = aa,bb){x = t; y=cc; label =1;};
18 border BC(t = cc,dd){x = bb; y=t; label =2;};
19 border CD(t = bb,aa){x = t; y=dd; label =3;};
20 border DA(t = dd,cc){x = aa; y=t; label =4;};
21
22 // Creation du maillage et de l'espace d'elements finis
23 mesh Th = buildmesh(AB(nx)+BC(ny)+CD(nx)+DA(ny));
24 fespace Vh(Th,P1, periodic = [[1,x],[3,x],[4,y],[2,y]]);
25
26 Vh u,w,p,q,uold,phi1,phi2,phi3,phi4;
27
28 // Definition de la condition initiale
29 func u0 = ?;
30
31 // Definition de la fonction f
32 func real f(real c)

```

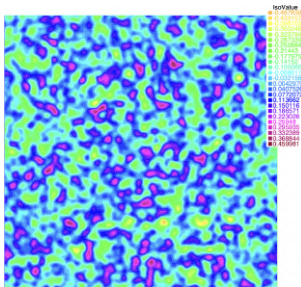


```

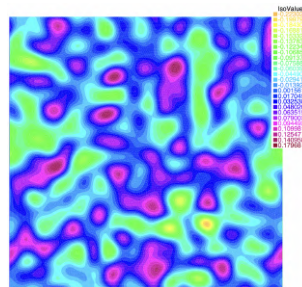
33 {
34 return c^3-c;
35 }
36
37 macro Grad(u)[dx(u),dy(u)] //
38
39 // Definition du probleme
40 problem CH([u,w,p,q],[phi1,phi2,phi3,phi4]) =
41   int2d(Th)(u*phi1/dt)
42   - int2d(Th)(uold*phi1/dt)
43   - int2d(Th)(Grad(w)'*Grad(phi1))
44   + int2d(Th)(""g(x,uold)""*phi1/eps)
45   + int2d(Th)(w*phi2)
46   - int2d(Th)(a20*eps*dx(p)*dx(phi2))
47   - int2d(Th)(a02*eps*dy(q)*dy(phi2))
48   - int2d(Th)(a11*dy(p)*dy(phi2)/2)
49   - int2d(Th)(a11*dx(q)*dx(phi2)/2)
50   - int2d(Th)(a10*eps*p*phi2)
51   - int2d(Th)(a01*eps*q*phi2)
52   + int2d(Th)(f(uold)*phi2/eps)
53   + int2d(Th)(p*phi3)
54   + int2d(Th)(dx(u)*dx(phi3))
55   + int2d(Th)(q*phi4)
56   + int2d(Th)(dy(u)*dy(phi4));
57
58 u = u0;
59
60 //Iterations
61 for (real t=0;t<=T;t+=dt){
62   // Calculs et redefinition
63   uold = u;
64   CH;
65
66   //Affichage
67   plot(u,fill=true,value=true,nbiso=20);
68 }

```

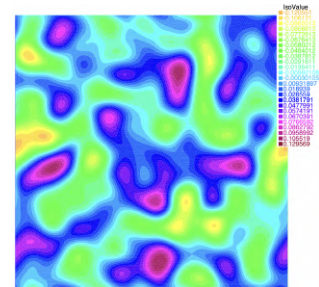
1. Première simulation :



(a) $t = 0$



(b) $t = 10^{-6}$



(c) $t = 5 \times 10^{-6}$

FIGURE 5 – **Cahn-Hilliard-Oono**. Condition initiale u_0 suivant une loi uniforme en $[-1, 1]$.
 $f = u^3 - u$, $g = 0.5u$, $\epsilon = 0.05$, $\Delta t = 5 \times 10^{-8}$.

2. Deuxième simulation :

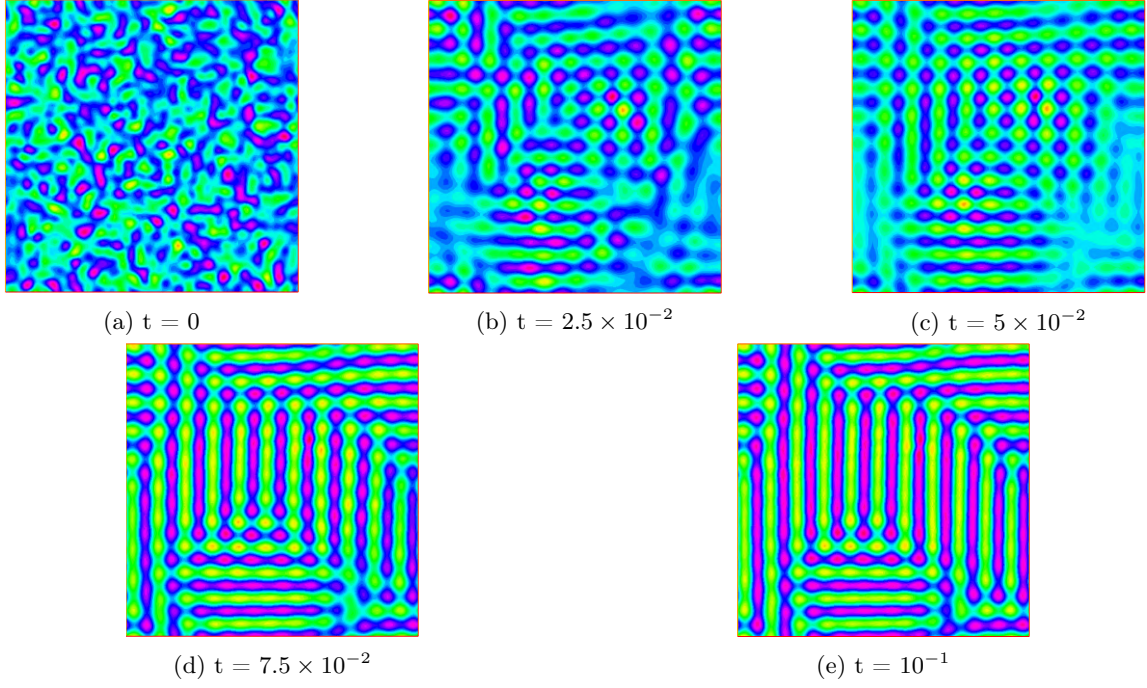


FIGURE 6 – **Phase-field crystal**. Condition initiale u_0 suivant une loi uniforme en $[-1, 1]$.
 $f = u^3 + (1 - 0.025)u$, $g = 2u$, $\epsilon = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$.

3. Troisième simulation :

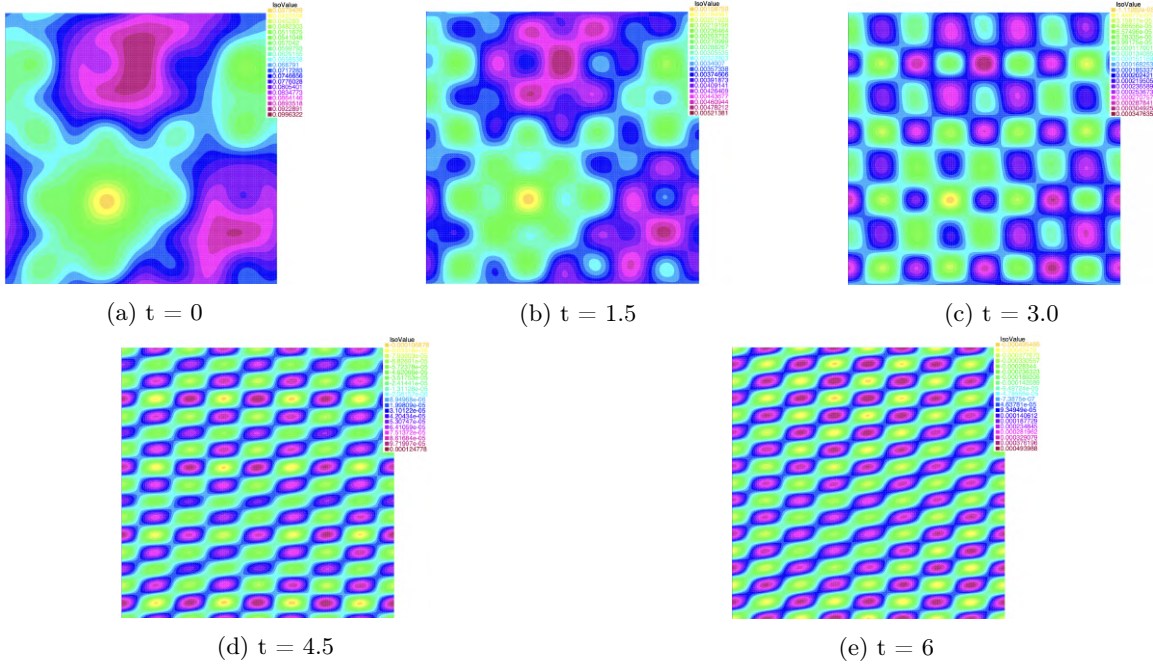


FIGURE 7 – **Phase-field crystal**.
 $u_0 = 0.07 - 0.02\cos(\frac{2\pi(x-12)}{32})\sin(\frac{2\pi(y-1)}{32}) + 0.02\cos^2(\frac{\pi(x+10)}{32})\cos^2(\frac{\pi(y+3)}{32}) - 0.01\sin^2(\frac{4\pi x}{32})\sin^2(\frac{4\pi(y-6)}{32})$.
 $f = u^3 + (1 - 0.025)u$, $g = 2u$, $\epsilon = 1$, $\Delta t = 10^{-3}$.