

光线跟踪

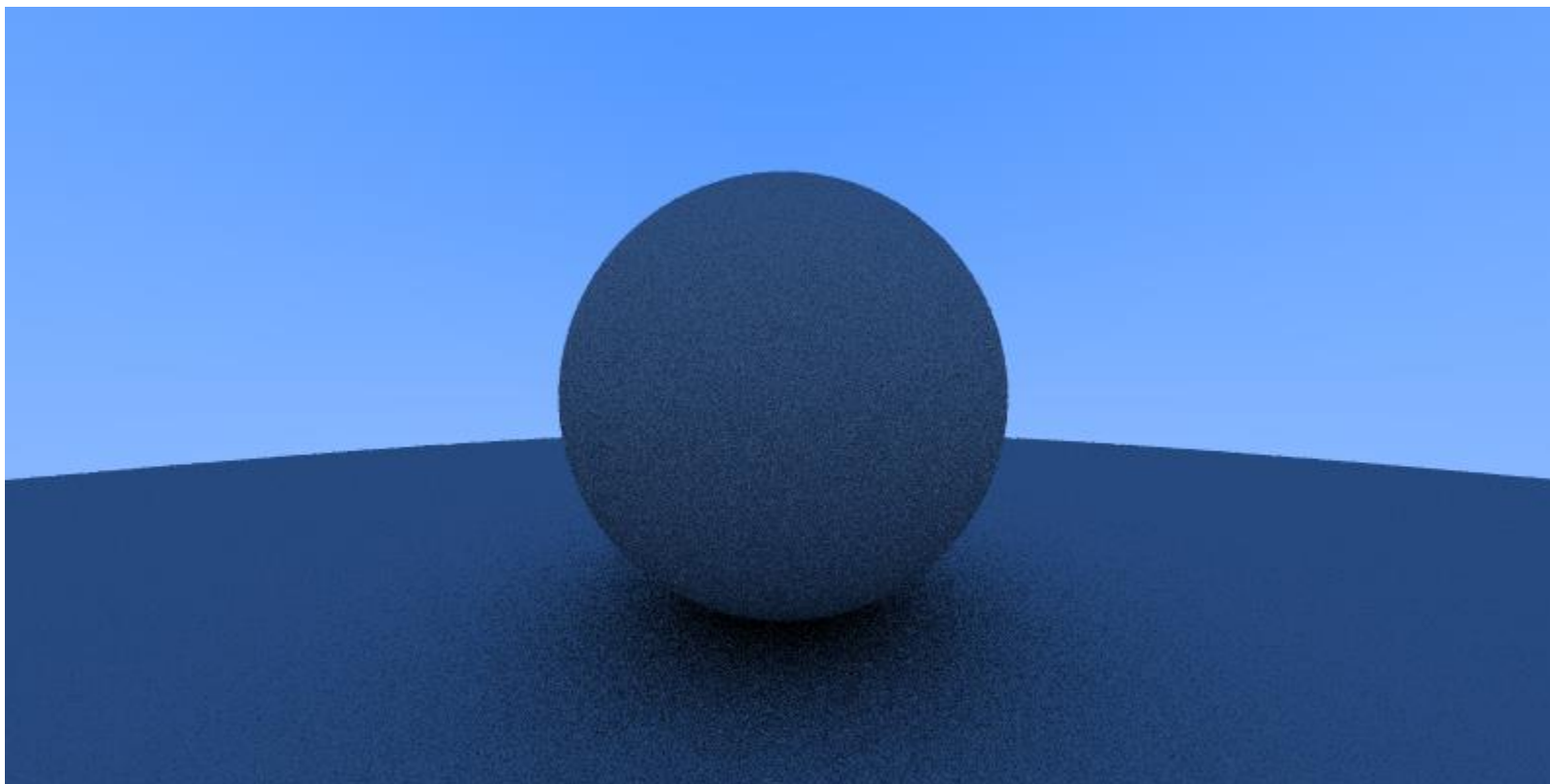
赵毅力

ylzhao@swfu.edu.cn

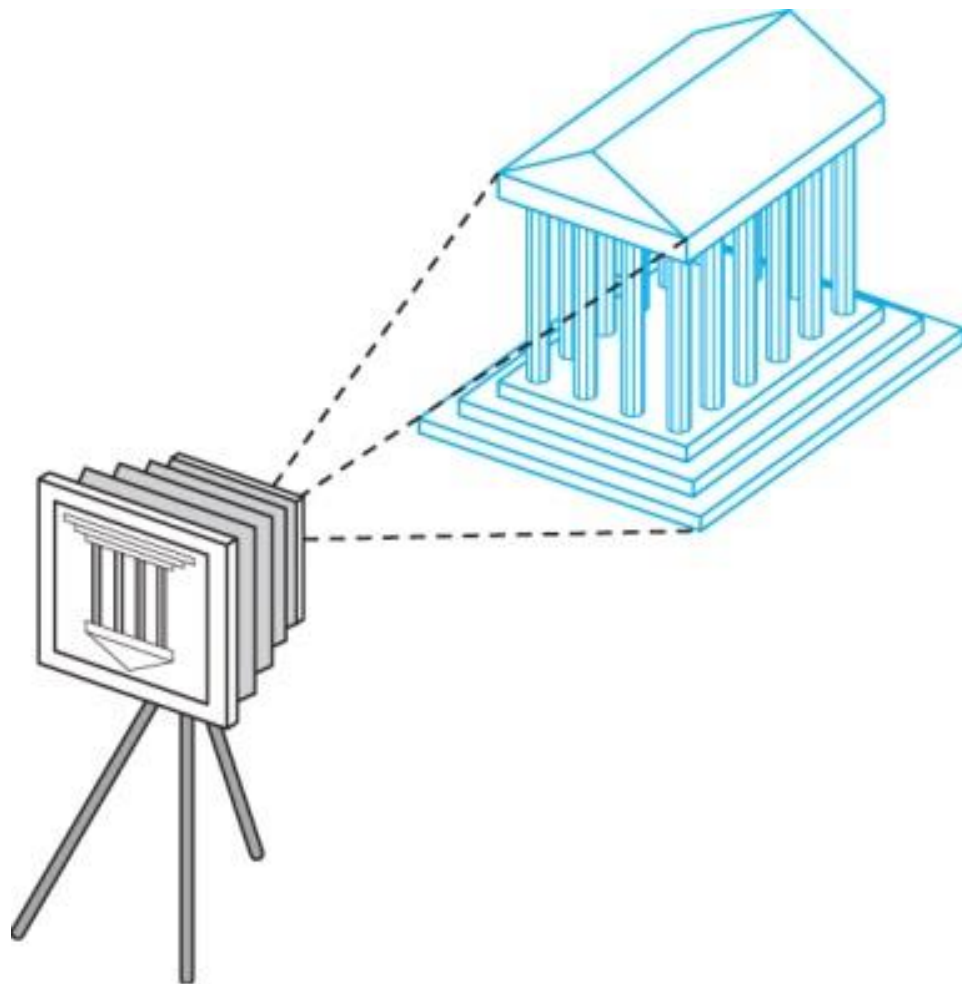
大数据与智能工程学院
西南林业大学

什么是光线跟踪？

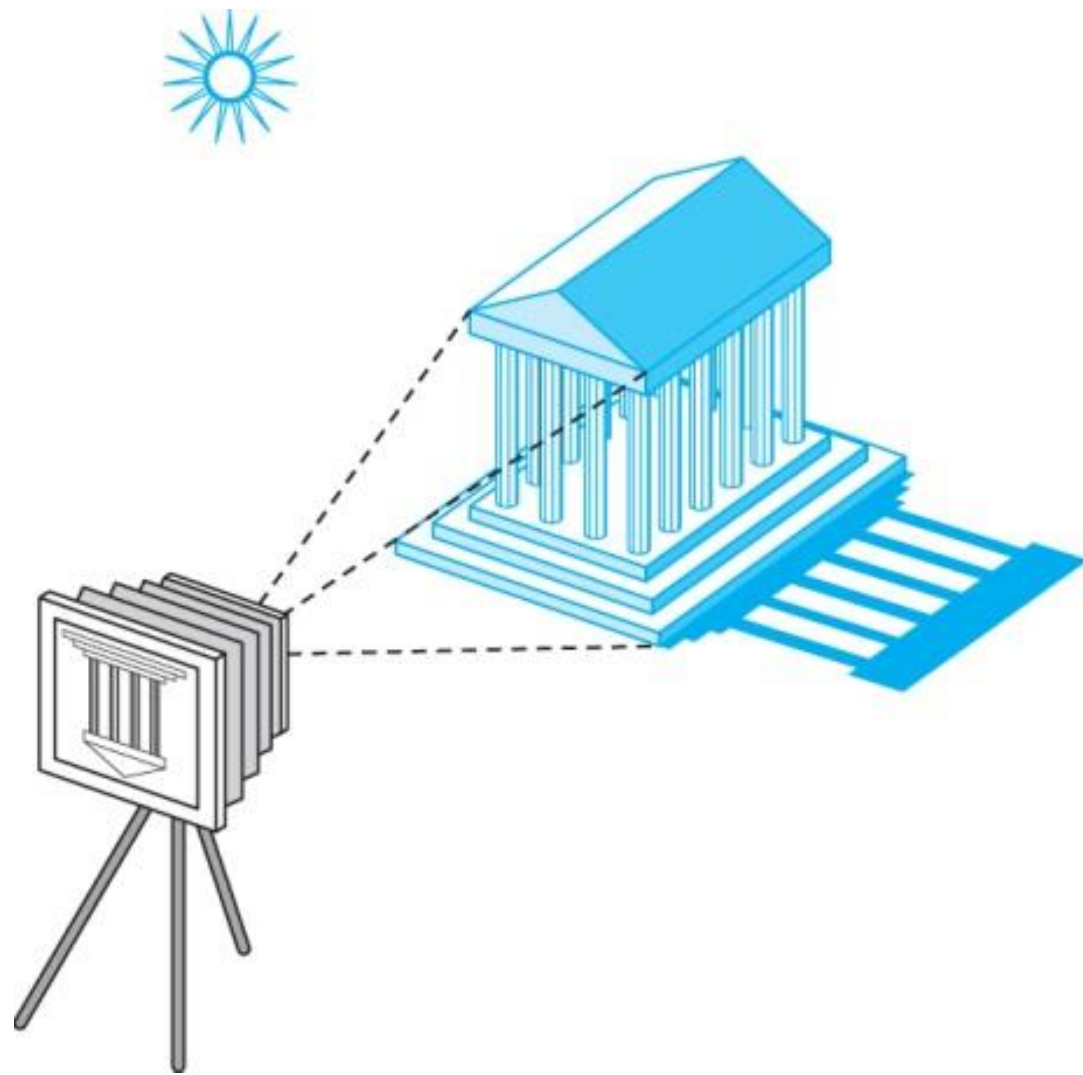
- **光线跟踪 (Ray Tracing)** 是计算机图形学中用于**全局光照**的一种**离线渲染**算法。



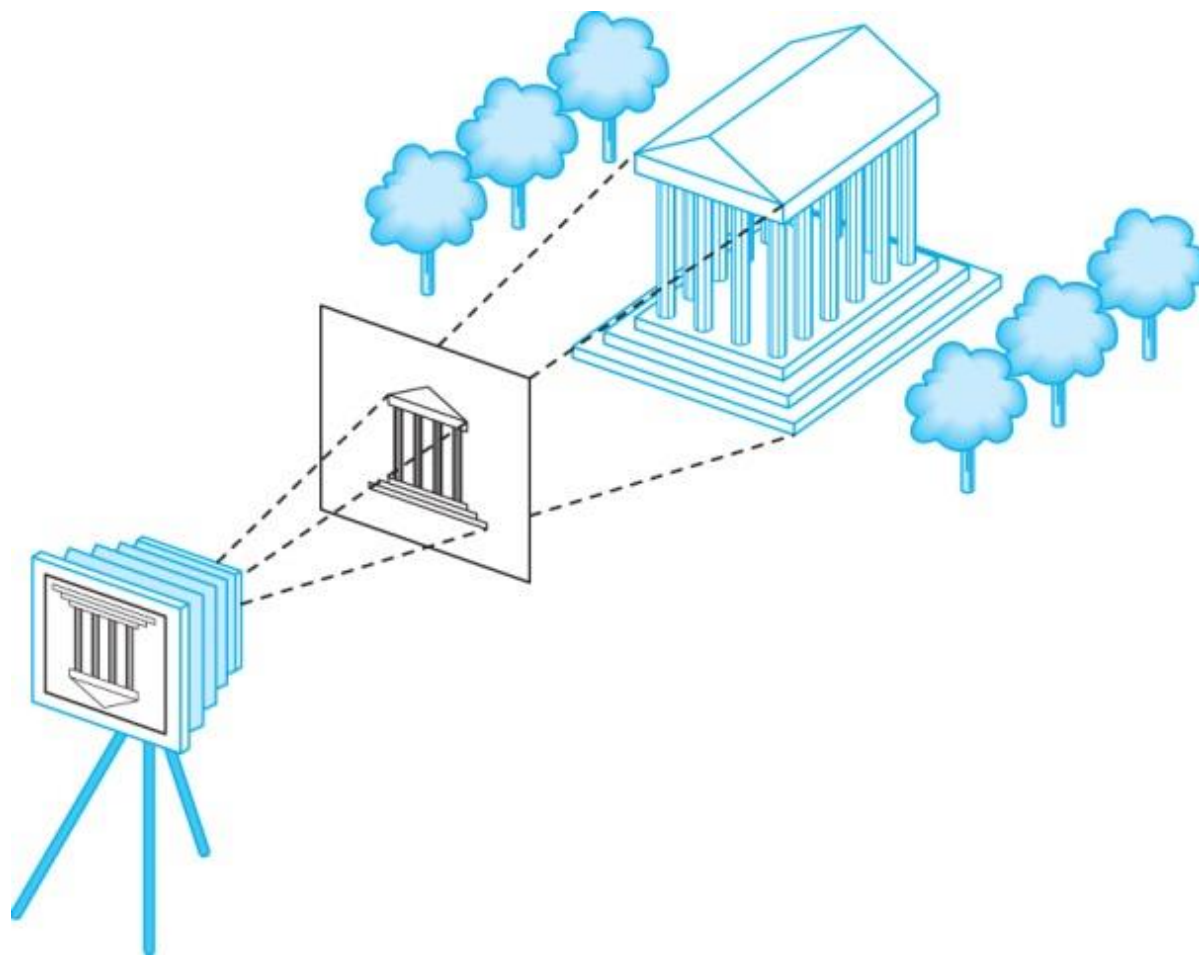
照相机成像



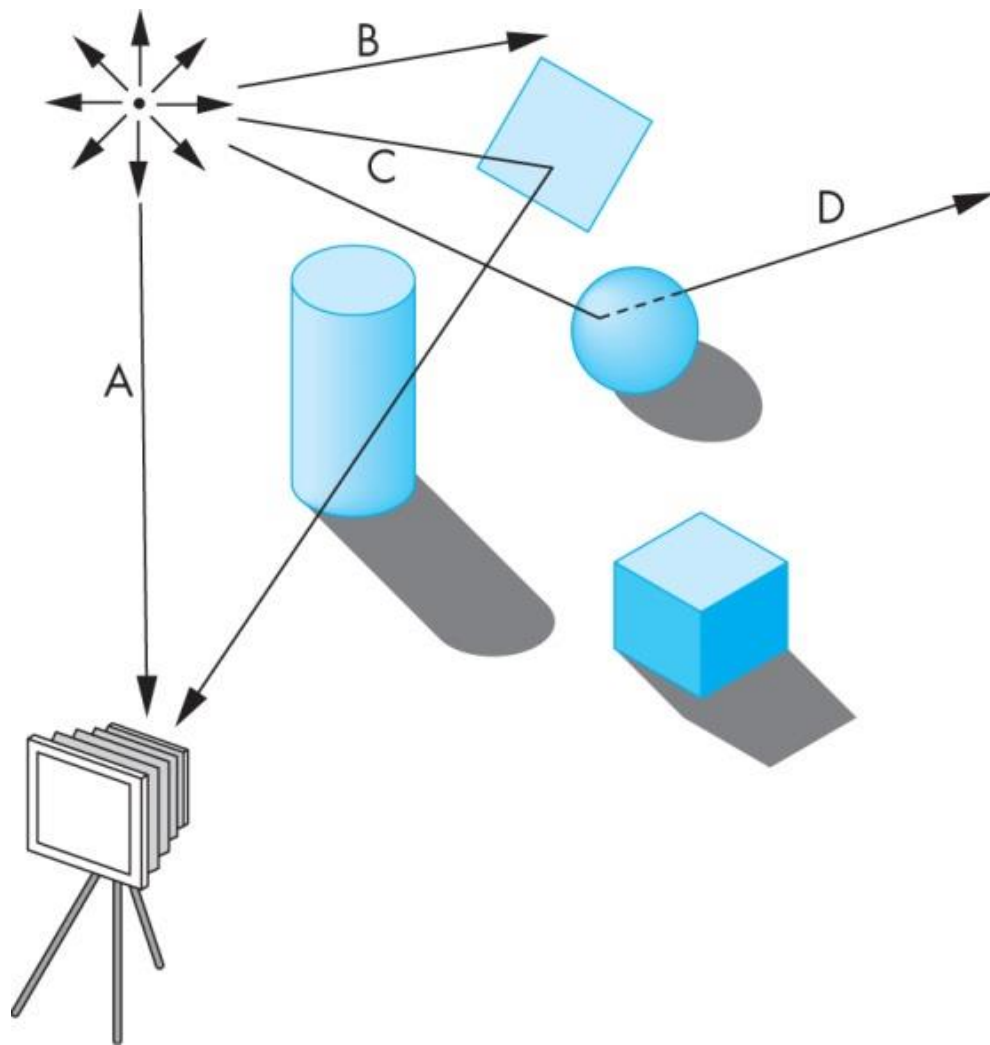
光照



投影平面前移

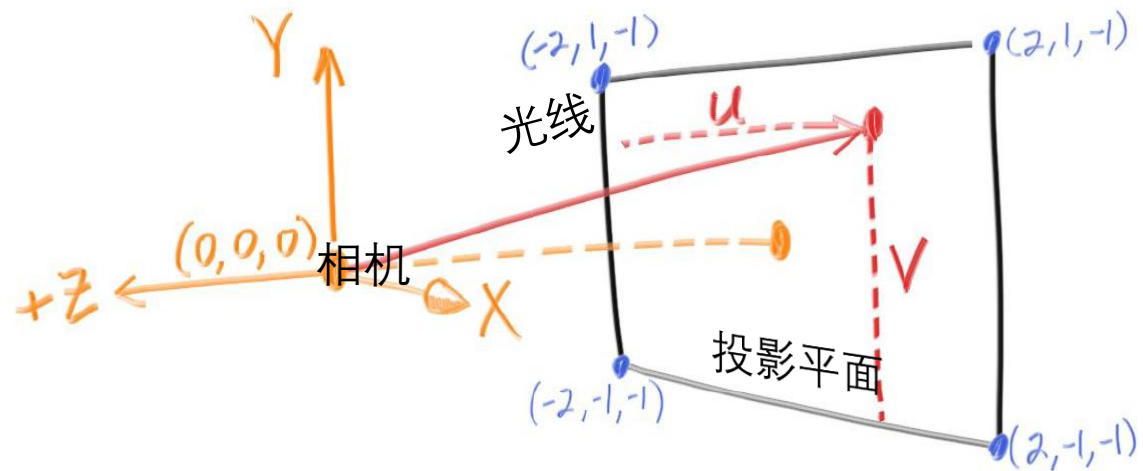


光线跟踪的基本原理



相机和投影平面

- 相机放置在世界坐标系中的 $(0,0,0)$ 位置，朝向 **Z轴负方向**。
- 投影平面放置在世界坐标系中的 $Z=-1$ 的位置。
- 在世界坐标系中投影平面的**宽度为4个单位**，**高度为2个单位**。

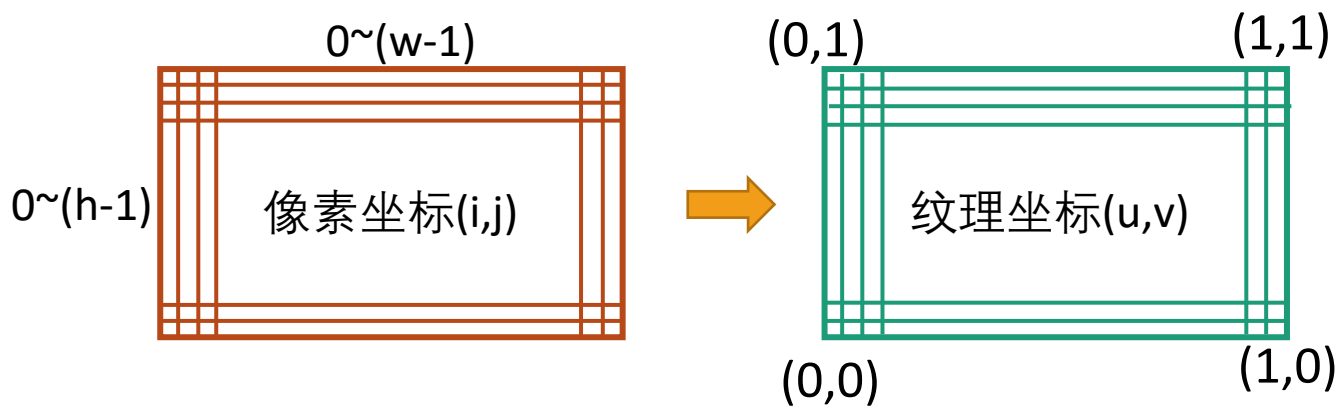
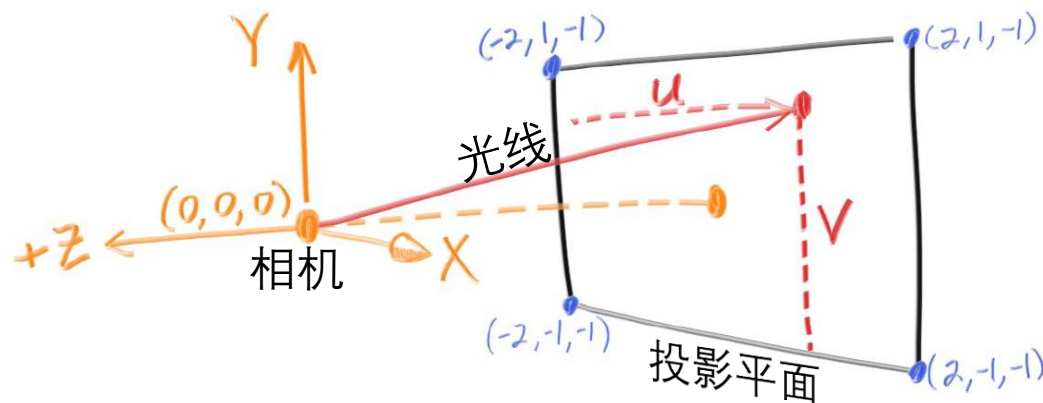


纹理坐标

- 投影平面中任意一个像素(*i*, *j*)的纹理坐标(*u*, *v*)为:

$$\begin{cases} u = \frac{i}{w-1} \\ v = \frac{j}{h-1} \end{cases}$$

- 其中 w 为图像的宽度, h 为图像的高度。

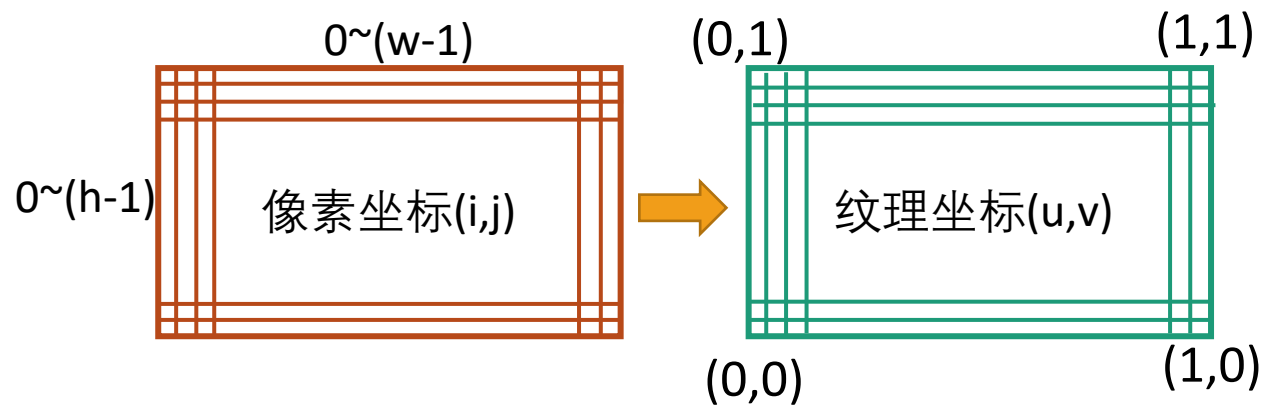
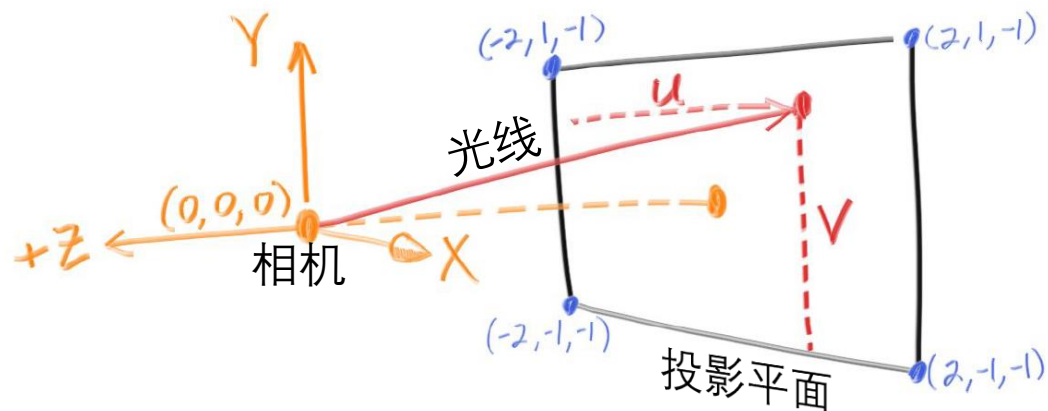


像素的世界坐标系坐标

- 投影平面中任意一个像素的**世界坐标系坐标**(**x, y, z**)为:

$$\begin{cases} x = ox + u * pw \\ y = oy + v * ph \\ z = oz \end{cases}$$

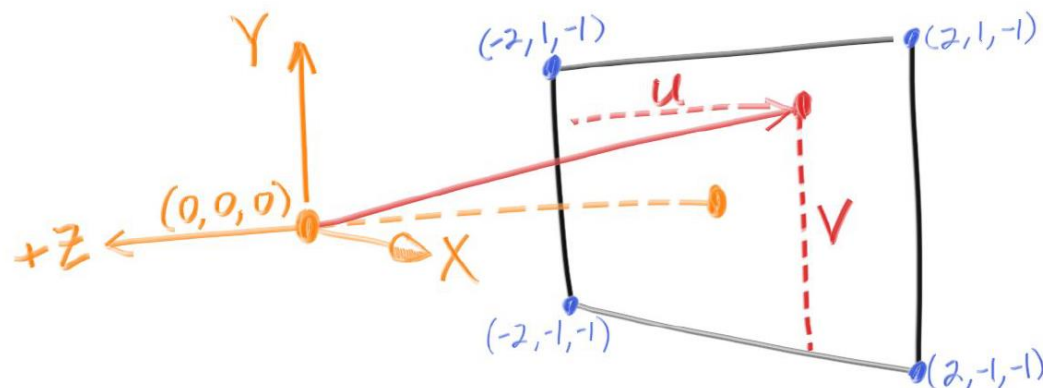
- 其中, **ox**为投影平面左下角的**x**坐标, **oy**为投影平面左下角的**y**坐标, **oz**为投影平面左下角的**z**坐标, **pw**为投影平面的宽度, **ph**为投影平面的高度。



像素的世界坐标系坐标的向量表示

- 投影平面中任意一个像素的世界坐标系坐标 (x, y, z) 为:

$$\begin{cases} x = ox + u * pw \\ y = oy + v * ph \\ z = oz \end{cases}$$



向量化:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ox \\ oy \\ oz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u * pw + v * 0 \\ u * 0 + v * ph \\ u * 0 + v * 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ox \\ oy \\ oz \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} pw \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ ph \\ 0 \end{bmatrix} = Lo + u * Hori + v * Vert$$

三维空间中的光线

- 三维空间中**光线(Ray)**的参数方程:

$$P(t) = O + t * D$$



球体

- 一个半径为**R**，球心**C = (cx, cy, cz)**的球体方程为：

$$(x - cx)^2 + (y - cy)^2 + (z - cz)^2 = R^2$$

- 从球心**C = (cx, cy, cz)**到球面上任意一点**P = (x, y, z)**的向量为**(P - C)**。
因为：

$$\text{dot}((P - C), (P - C)) = (x - cx)^2 + (y - cy)^2 + (z - cz)^2$$

- 其中**dot**表示线性代数中的点积。

球体方程的向量形式

- 因此球体的数学公式使用向量可以表示为：

$$\text{dot}((P - C), (P - C)) = R^2$$

光线和球体相交

- 要判断某条光线 $P(t) = O + t * D$ 是否和这个球体相交，可以把光线的参数方程带入球体的方程：

$$\text{dot}((P(t) - C), (P(t) - C)) = R^2$$

- 即：

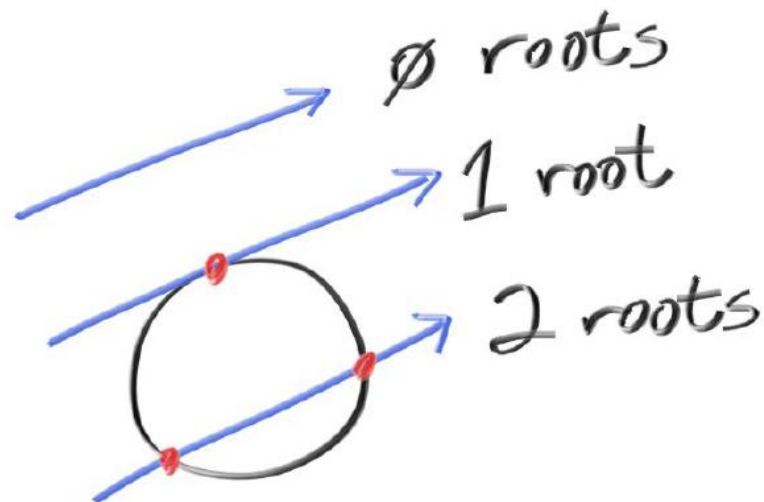
- $\text{dot}((O + t * D - C), (O + t * D - C)) = R * R$

光线和球体相交

- 展开可以得到:
 - $t * t * \text{dot}(D, D) + 2 * t * \text{dot}(D, O - C) + \text{dot}(O - C, O - C) - R * R = 0$
- 对该一元二次方程进行求解, 判别式为:
 - $b * b - 4 * a * c$
- 其中,
 - $a = \text{dot}(D, D)$
 - $b = 2.0 * \text{dot}(D, O - C)$
 - $c = \text{dot}(O - C, O - C) - R * R$

光线和球体相交

- 判别式 > 0 : 有两个不相同的实根（光线和球体有两个交点）；
- 判别式 $= 0$: 有两个相同的实根（光线和球体有一个交点）；
- 判别式 < 0 : 没有实根（光线和球体没有交点）。



光线和球体相交

- 在世界坐标系的 $z=-1$ 处放置一个半径为0.5的球体。
- 使用光线跟踪绘制投影平面上的内容。

