SISTEMAS DE CONTROL II - FCEFyN - 2025

Alumno: Ferraris Domingo

Control En Variables De Estado

Resultados

Item 1: Pendulo, Asignacion De Variables, Linearizacion

Se asignaron las variables de estado y se definio el **punto de equilibrio deseado** Mediante Octave se **linealizo el sistema entorno a el equilibrio** definido y se obtuvo el modelo lineal local Y con el modelo las matrices del sistema para el diseño del control:

```
Definir Punto Equilibrio, Linealizar Entono A: [delta 0 ue]
============================================================

x2_p_lin = (sym)

  L·g·m·(δ - x₁)·cos(δ) - L·g·m·sin(δ) - b·x₂ + u₁
  ────────────────────────────────────────────────
                          2
                         L ·m

A = (sym 2×2 matrix)

  ⎡    0        1  ⎤
  ⎢                ⎥
  ⎢-g·cos(δ)   -b  ⎥
  ⎢──────────  ────⎥
  ⎢    L        2  ⎥
  ⎣            L ·m⎦

B = (sym 2×1 matrix)

  ⎡ 0  ⎤
  ⎢    ⎥
  ⎢ 1  ⎥
  ⎢────⎥
  ⎢ 2  ⎥
  ⎣L ·m⎦

C = (sym) [1  0]  (1×2 matrix)
D = (sym) 0
```

Item 2: Sistema Lineal, Estabilidad, Controlabilidad

Mediante Octave se verifico **estabilidad** mediante el metodo indirecto de Lyapunov y **controlabilidad** del modelo lineal

Item 3: Diseño De Controladores

Se realizo el diseño del **control por realimentacion de estados con accion integral**, por tanto se trabajo con el sistema ampliado
Se diseñaron **controladores por asignacion de polos y LQR** y se compararon las respuesta obtenidas
Los controladores LQR mostraron mejores caracteristicas en las respuestas

Item 4: Robustez

Finalmente se realizo un **estudio sencillo de robustez** donde se varia la masa +/-10% y se observan los cambios en las respuestas para cada controlador
Aqui el diseño por asignacion de polos demostro ser superior

Detalles

Item 1: Pendulo, Asignacion De Variables, Linearizacion

La idea seguida fue tomar las ecuaciones y **asignar variables de estado** mediante asignacion de fase, luego **definir el punto de equilibrio deseado** y linealizar entorno a ese punto

Para comenzar se tomo la ecuacion del pendulo y se asignaron las variables de estado mediante la asignacion de fase, para luego poder dibujar el espacio fasico facilmente
Y tambien se definieron al torque como entrada u1 y al angulo theta como y1:

```
eq1 = (sym)

   2
  L ·m·θ_pp + L·g·m·sin(θ) + b·θ_p = T


Variables De Estado, Asignacion De Fase
=====================================================

x1 == theta   ->  x1_p    == theta_p  == x2
x2 == theta_p ->  x2_p    == theta_pp (mayor orden)

Entradas / Salidas
=====================================================

u1 == T, y1 == x1
```

Reemplazando variables, entradas, salidas y reordenando se obtuvo el **modelo dinamico del sistema:**

```
x1_p = (sym) x_2
x2_p = (sym)

  -L·g·m·sin(x_1) - b·x_2 + u_1
  ─────────────────────────────
               2
              L ·m

y1 = (sym) x_1
```

El objetivo es **estabilizar el sistema en x1 = delta**, para esto se diseñara un controlador
Pero ademas como el sistema es no-lineal, se debe linealizar **entorno a algun punto de operacion**

Como el diseño del controlador se basa en el sistema linealizado, se elige como punto de operacion el equilibrio deseado x1 = delta

Cuando el sistema alcanza ese equilibrio, hace falta un torque u1 = ue para **mantenerlo en el equilibrio deseado**
Aplicando la condicion de equilibrio al modelo dinamico:

```
ue = (sym) L·g·m·sin(δ)
```

Entonces el punto de operacion para linealizar:

> ## Equilibrio:
>
> - **[x1, x2, u1] == [delta, 0, m g L sin(delta)]**
>
> .

Mediante octave se obtuvo el **modelo linealizado** y luego las matrices del sistema:

```
Definir Punto Equilibrio, Linealizar Entono A: [delta 0 ue]
=============================================================

x2_p_lin = (sym)

  L·g·m·(δ - x₁)·cos(δ) - L·g·m·sin(δ) - b·x₂ + u₁
  ────────────────────────────────────────────────
                         2
                        L ·m

A = (sym 2×2 matrix)

  ⎡    0        1  ⎤
  ⎢                ⎥
  ⎢-g·cos(δ)   -b  ⎥
  ⎢──────────  ────⎥
  ⎢    L        2  ⎥
  ⎣            L ·m⎦

B = (sym 2×1 matrix)

  ⎡ 0  ⎤
  ⎢    ⎥
  ⎢ 1  ⎥
  ⎢────⎥
  ⎢ 2  ⎥
  ⎣L ·m⎦

C = (sym) [1  0]  (1×2 matrix)
D = (sym) 0
```

Item 2: Sistema Lineal, Estabilidad, Controlabilidad

Con los parametros asignados se calcularon las matrices A,B,C y D del modelo:

```
Parametros Asignados:
==================================================================

Nombre          Apellido(s) m   b   l   G   delta   p(triple)
Domingo Jesus   FERRARIS    1   0,1 1   10  90      -2

A =

        0   1.0000
  -0.0000  -0.1000

B =

   0
   1

C =

   1   0

D = 0
```

Luego se comprobo estabilidad con los autovalores de la matriz A y controlabilidad:

```
Estabilidad Por Lyapunov Indirecto ( eig(A) ), Controlabilidad ( rank(ctrb(A, B)) )
=======================================================================

ans =

        0
  -0.1000

ans = 2
```

Como un autovalor es cero no el sistema es **inestable en el punto de operacion**, pero como el rango de la matriz de controlabilidad es 2 entonces **es controlable**

Item 3: Diseño De Controladores

Para la accion de control se utilizo un **controlador con realimentacion de estados y accion integral**, por lo tanto se calculo el sistema ampliado y comprobo estabilidad y controlabilidad:

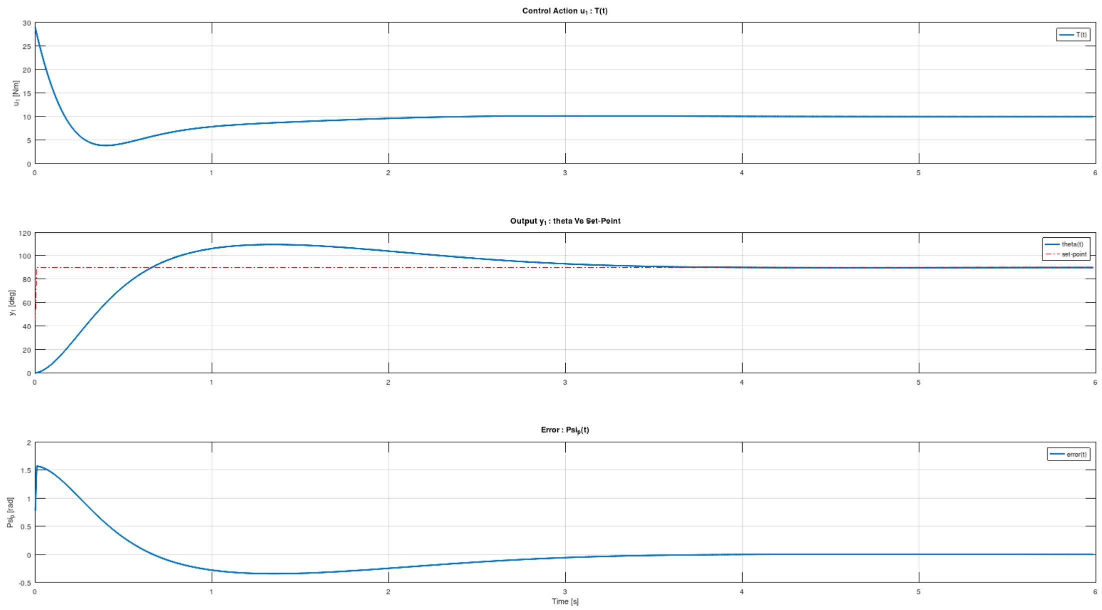
```
Estrategia: Control Por Realimentacion De Estados Con Integral Error (u == -K x + KI psi)
=====================================================================

Aa =

        0   1.0000        0
        0  -0.1000        0
  -1.0000        0        0

Ba =

   0
   1
   0


Estabilidad Por Lyapunov Indirecto ( eig(Aa) ), Controlabilidad ( rank(ctrb(Aa, Ba)) )
=====================================================================

ans =

        0
        0
  -0.1000

ans = 3
```

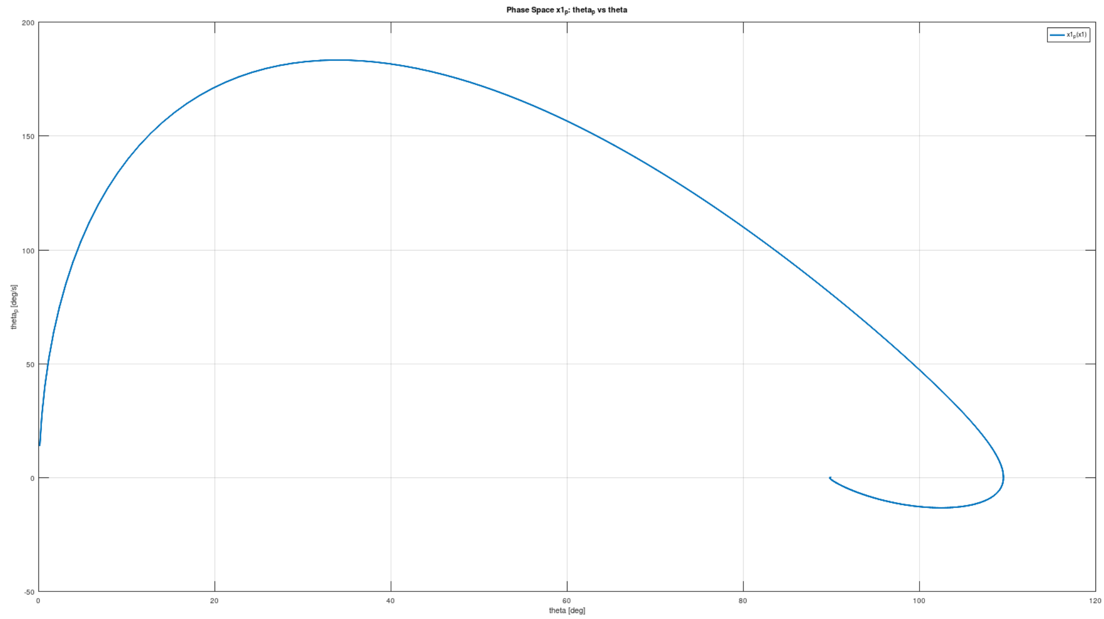
Dos autovalores nulos por tanto el sistema ampliado es **inestable en el punto de operacion, pero controlable**

Por Asignacion De Polos

Siguiendo la consigna se calculo el controlador por asignacion de polos, con el comando acker de Octave posicionando un **polo triple el -2**
Luego se simulo el sistema partiendo de theta = 0 para observar la respuesta y espacio de fase:

```
Ka =

   12.0000    5.9000   -8.0000

Kc =

   12.0000    5.9000

KI = 8
```





Se tomaron notas de algunos valores de interes de las respuestas para comparacion:

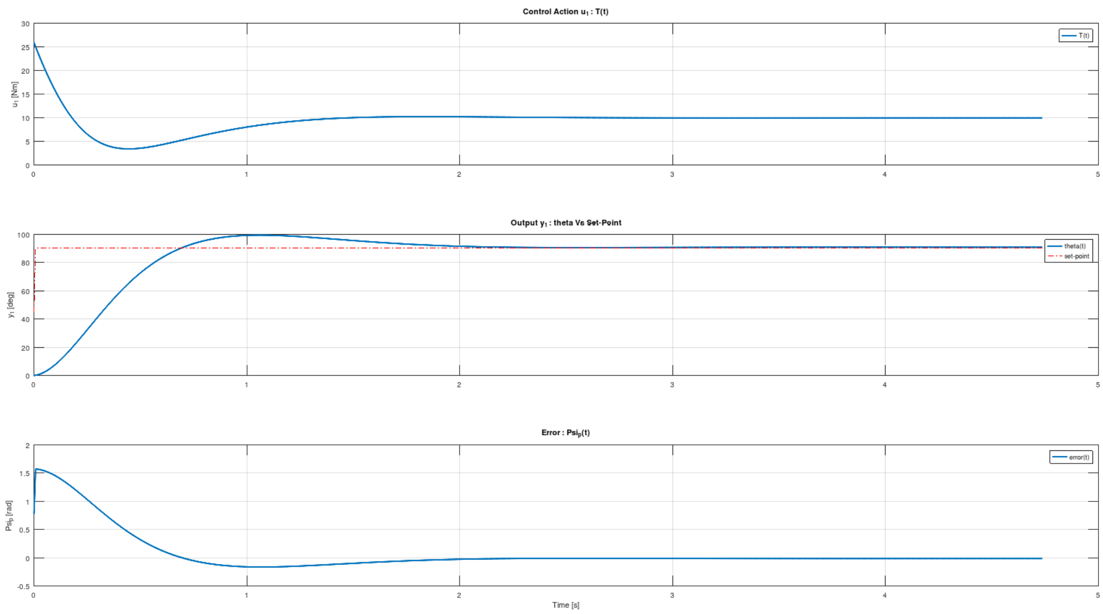
> - **tss ~ 3.2s**
> - **theta_max ~ 100 grados**
> - **u1_max ~ 30Nm**

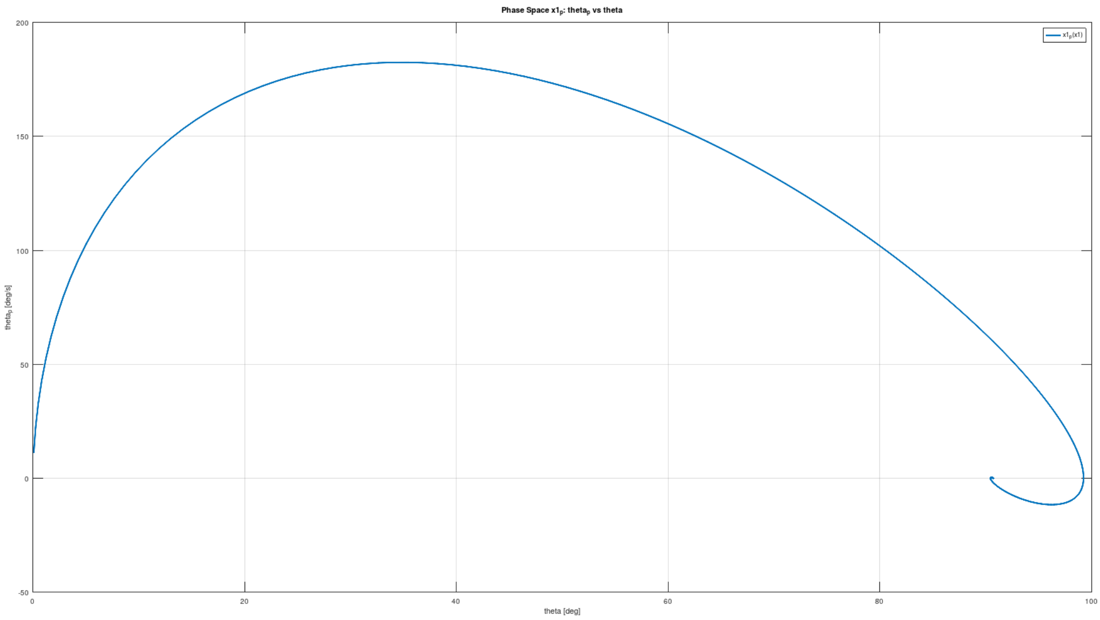
Por LQR

Adicionalmente se diseñaron otros controladores por LQR ajustados con distintos valores de Q y R, **trantando de mejorar las respuestas obtenidas** siempre que fuera posible:

LQR1: Penalizar fuertemente desviaciones de theta, penalizar poco accion de control

```
Calculo Del Del Controlador Por LQR, Polos Y Ganancias Finales
==============================================================

Q =

Diagonal Matrix

   1000      0      0
      0      1      0
      0      0      1

R = 10
P =

  -2.2422 + 2.2300i
  -2.2422 - 2.2300i
  -0.0316 +      0i

Kc =

   10.1418    4.4159

KI = 0.3162
```

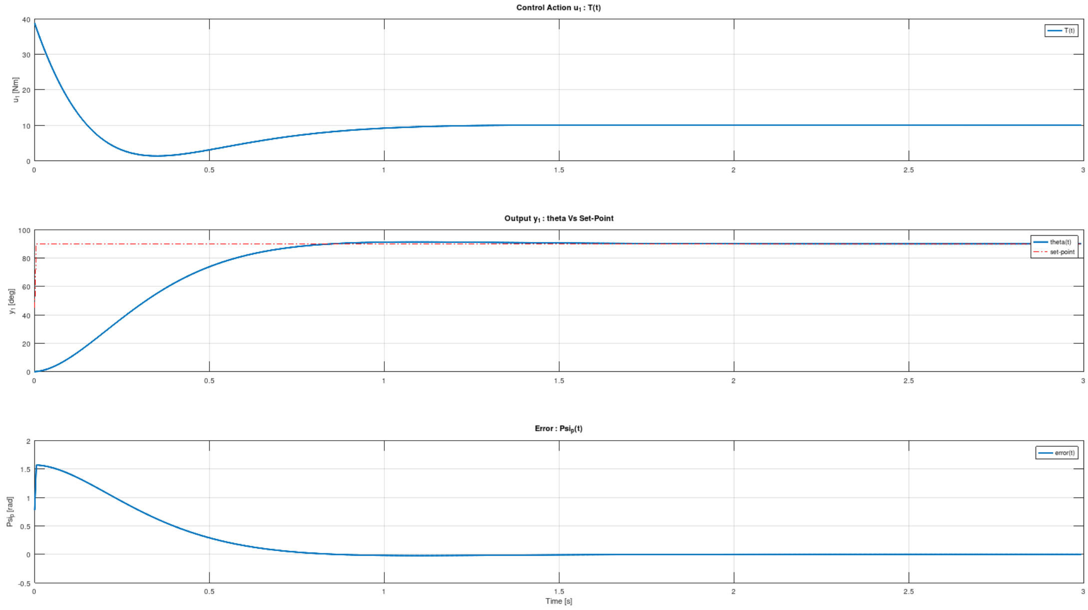


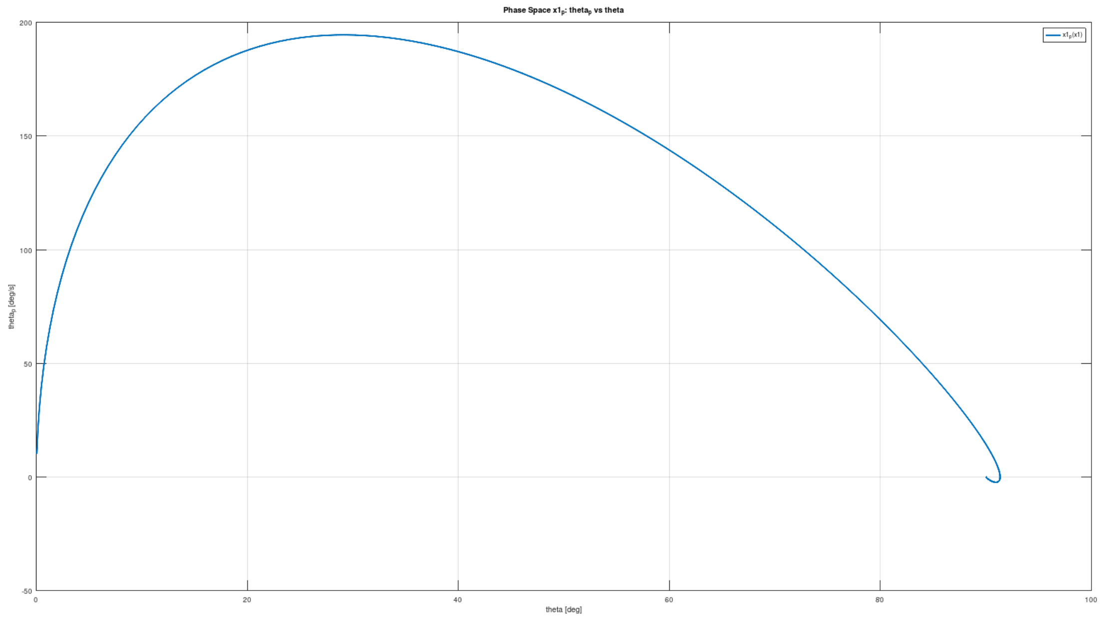


Para este controlador se obtienen tss ~ 1.9s, theta_max ~ 100 grados y u1_max ~ 26Nm, mejorando con respecto a la respuesta obtenida por asignacion de polos

LQR2: Penalizar mas a theta que a theta_p, penalizar u1 para ajuste

```
Calculo Del Del Controlador Por LQR, Polos Y Ganancias Finales
=================================================================

Q =

Diagonal Matrix

   1.0000e+06            0            0
            0   5.0000e+04            0
            0            0   1.0000e+00

R = 3000
P =

  -3.6466 + 2.2270i
  -3.6466 - 2.2270i
  -0.0010 +      0i

Kc =

   18.2647    7.1943

KI = 0.018257
```



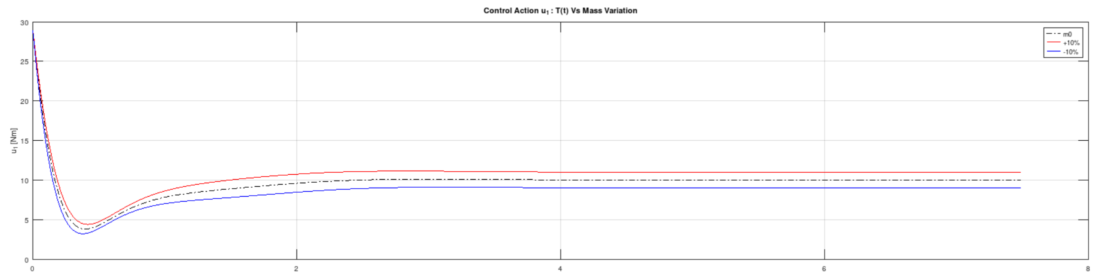


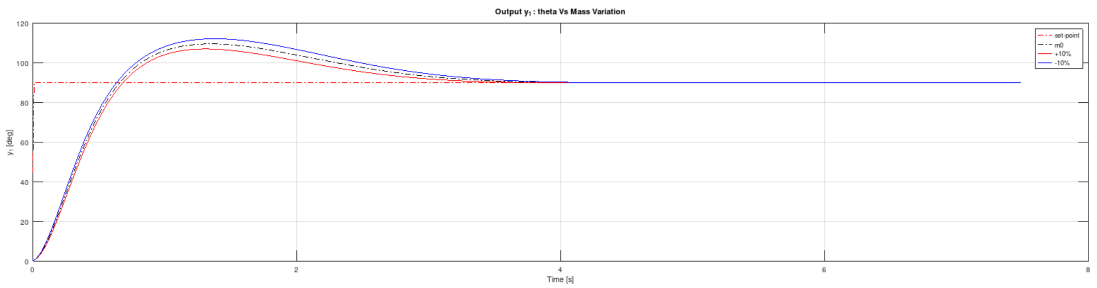
Para este controlador se obtienen tss ~ 0.75s, theta_max ~ 91 grados y u1_max ~ 40Nm, mejorando rapidez y sobrepico pero aumentando accion de control con respecto a la respuesta obtenida por asignacion de polos

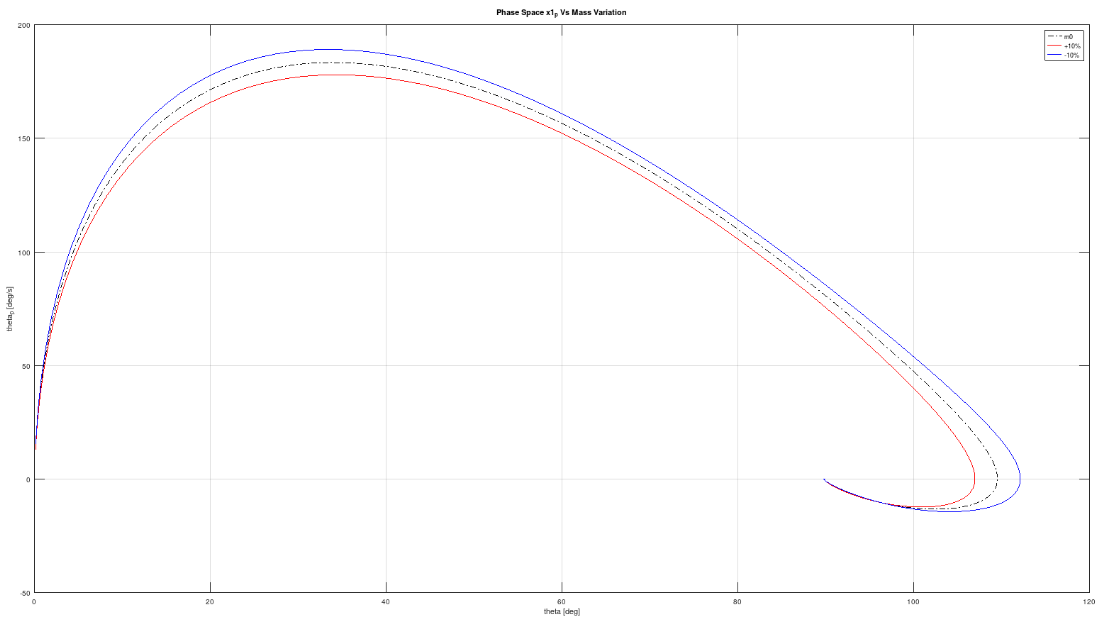
Item 4: Robustez

Finalmente para los controladores diseñados se hizo un estudio de robustez para ver **como afecta su desempeño variar la masa +/-10%**

Por Asignacion De Polos

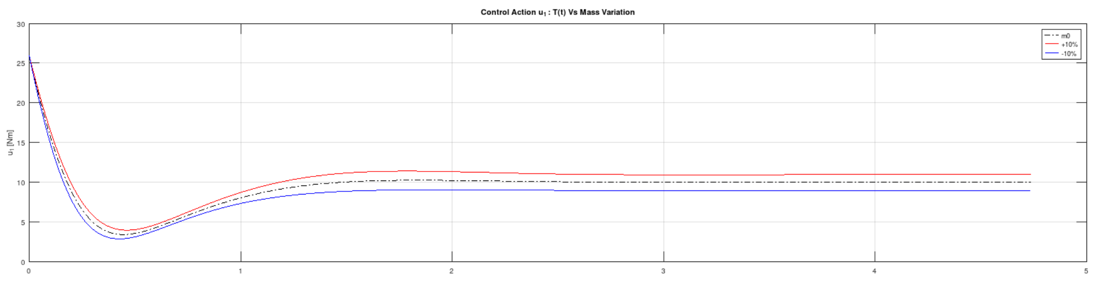


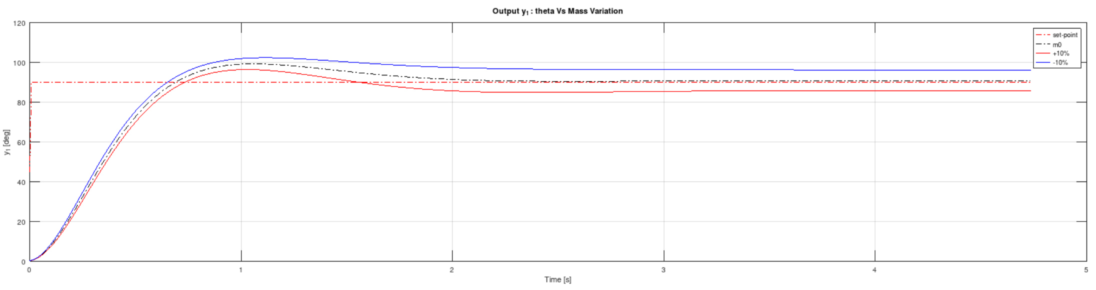


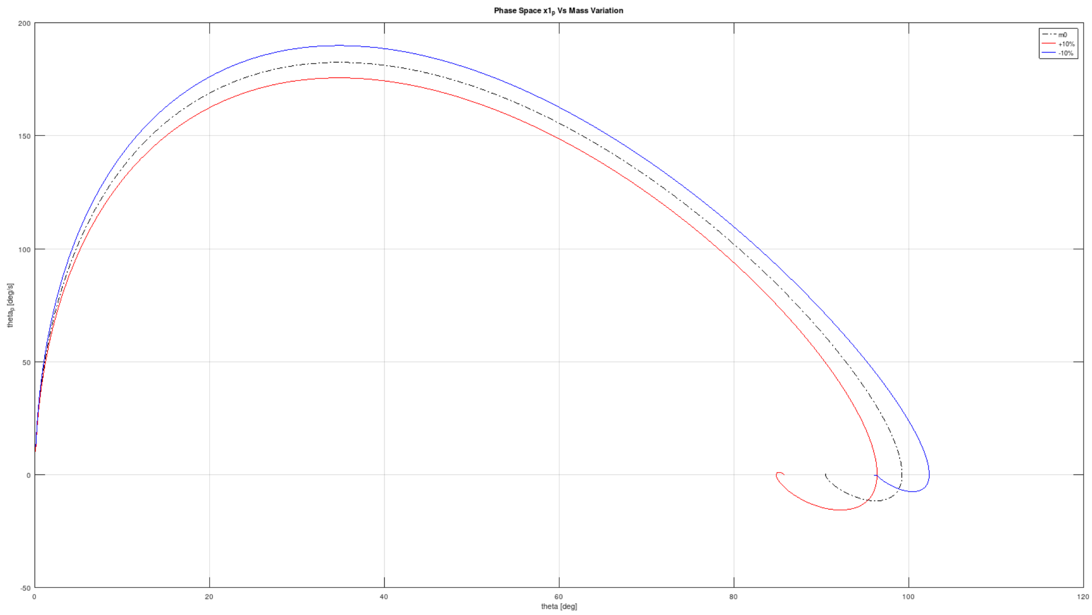


> En este caso en equilibrio u1 se mantiene entre [9-10]Nm, theta_max [112-107] grados, tss entre [3-3.3]s y un ess = 0

Por LQR1

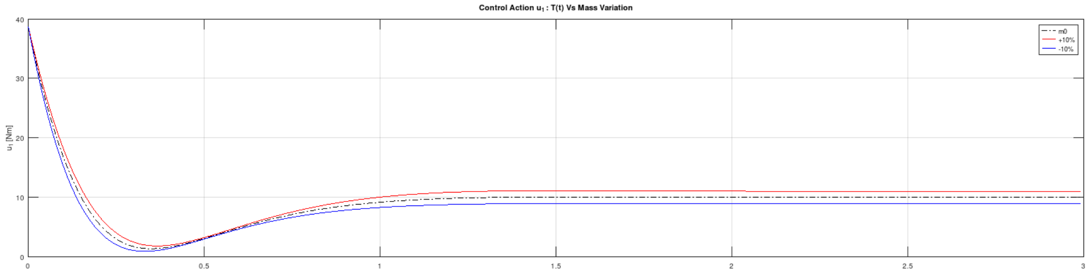


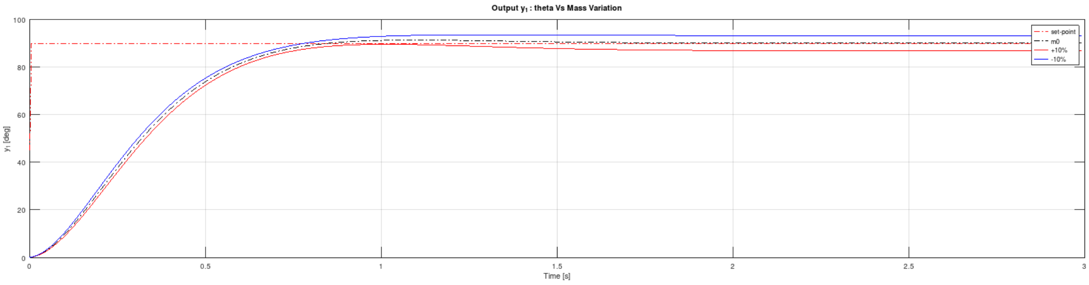




> En este caso en equilibrio u1 se mantiene entre [9-11]Nm, theta_max [102-96] grados pero ess no es nulo y se mantiene entre [96-86] grados, por lo que esta configuracion es muy suceptible a la variacion de la masa

Por LQR2





> En este caso en equilibrio u1 se mantiene entre [9-11]Nm, theta_max [94-90] grados pero nuevamente ess no es nulo y se mantiene entre [93-87] grados, por lo que esta configuracion es muy suceptible a la variacion de la masa

Control / [-10% - +10%]	theta_max [grados]	Mp [%]	u_eq [Nm]
Asignacion	[112 - 107]	[24 - 19]	[9 - 10]
LQR1	[102 - 96]	[13 - 6]	[9 - 11]
LQR2	[94 - 90]	[4 - 0]	[9 -11]

En conclusion, se forzaron demasiado los controladores por LQR dando **respuestas temporales mejores pero haciendo que fallen en robustez** frente al control por asignacion de polos

Por tanto si en la aplicacion la variacion de masa se mantiene menor al 10% es viable usar uno de los controladores LQR propuesto, caso contrario es recomendable el controlador por asignacion de polos

Siempre se puede ademas **iterar nuevamente para ajustar los controladores por LQR** hasta obtener un balance aceptable entre la respuesta/accion obtenidas y la robustez

---

Fuentes/herramientas

1. Apuntes/Videos De La Materia
2. Matlab, Simulink, Chat-GPT, vscode

GitHub

1. https://github.com/Clifferto/carrerpath/tree/control2/nationalUniversity/2025/controlSystems2
