ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Trabajo Práctico Final

Modelado: Aumento de la presión en función del tiempo

Comisión: 2.3
Profesor: Ing. Adolfo Vigloni

Integrantes:

Nombre y Apellido	Carrera	Matricula
Ferraris Domingo	Ing. Electrónica	36656566
Montagna Lucrecia	Ing. Ambiental	39023965

DESCRIPCION Y OBJETIVOS

Se trata de modelar el fenómeno físico del **cambio de presión experimentado** cuando un cuerpo esférico se sumerge en un líquido de peso específico conocido.

Nos basaremos en un modelo inicial sencillo en el que se relaciona el Principio general de la hidrostática con la ecuación que describe la posición de un móvil en el tiempo a velocidad constante, luego tendremos en cuenta otros factores físicos que harán el problema más aplicable a la realidad.

Al final **obtendremos una ecuación que describe el aumento en la presión en el tiempo**, de un cuerpo esférico partiendo del reposo.

PRIMER MODELO

Para una **primer aproximación** al modelo nos basamos en que el cuerpo **desciende a velocidad constante** en un líquido de peso específico ρ. Dicho fluido lo consideramos como ideal por lo que **no posee viscosidad**, tampoco consideraremos el empuje que experimenta el cuerpo al sumergirse en el líquido, ni consideramos tampoco la aceleración debida a la gravedad. Tomando como referencia el borde del recipiente abierto a la atmosfera, tomaremos un aumento positivo de la altura h cuando el cuerpo desciende con respecto al borde, esto es, **h será la profundidad**.

Nos basamos en el **Principio general de la hidrostática** que nos describe la presión P en un punto en función de su profundidad h:

$$P=P_0+\rho h$$

Y si el cuerpo desciende en línea recta a velocidad constante estamos ante un **movimiento rectilíneo uniforme**, por lo que consideramos la ecuación que nos describe la posición con respecto al tiempo a velocidad constante:

$$h=h_0+vt$$

Así que tenemos funciones P(h) y h(t).

Estudiando el cambio en ambas vemos que **un dP depende de un dh y a su vez un dh depende de un dt**. Como queremos llegar a que un dP dependa de un dt planteamos:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dP}{dh}\frac{dh}{dt}$$

Como:

$$\frac{dP}{dh}=\rho\ y\ \frac{dh}{dt}=v$$

Luego:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dP}{dh}\frac{dh}{dt}=\rho v\ \rightarrow dP=\rho v dt$$

Integrando si para t=0 tenemos una presión P_0 y para un tiempo t una presión P:

$$P=Po+\int_0^t \rho v dt \rightarrow Con\,\rho\ y\ v\ constantes$$

$$P=Po+\rho vt \rightarrow\ Ecuacion\,que\,nos\,describe\,P\,con\,respecto\,al\,t\,,a\,v\,cte.$$

Todo este planteamiento puede parecer innecesario ahora pero es el método que utilizaremos para el desarrollo del modelo final.

Ahora para una **mejor aproximación** debemos considerar que el cuerpo no se sumerge a velocidad contante sino que **tendrá una aceleración a**. Además aparte del peso mg, experimentara una fuerza de empuje por el **Principio de Arquímedes**, cuyo modulo es el peso del volumen de líquido desplazado ρV. También tenemos que tener en cuenta que **el líquido no será ideal** por lo que aparecerán fuerzas de fricción debidas a la viscosidad del mismo, que, por **ley de Stokes**, serán proporcionales a la velocidad.

PLANTEO DEL MODELO

Basándonos en la idea de que:

$\frac{dP}{dt}=\frac{dP}{dh}\frac{dh}{dt}$ Como ya conocemos la derivada de la presión con respecto a h, nuestro objetivo ahora es **conseguir una ecuación que nos describa la profundidad en función del tiempo, considerando todos los factores descriptos anteriormente.**

Primeramente aplicaremos la **segunda ley de Newton** considerando todas las fuerzas que actúan en el cuerpo:

$\sum F = mg - \rho V - kv = ma$ Donde la constante k para un cuerpo esférico de radio R, sumergiéndose en un fluido con índice de viscosidad η, por Stokes es:

$$k = 6\pi\eta R\left[\frac{Kg}{s}\right]$$

UN PROBLEMA CON LA ACELERACION

Luego de realizar la sumatoria de fuerzas observamos un problema, la aceleración del cuerpo depende de la velocidad por tanto **no podemos aplicar fórmulas de cinemática para aceleración constante**.

$a = (g - \frac{\rho V}{m}) - \frac{k}{m}v$ Esta ecuación nos dice que la aceleración del cuerpo ira disminuyendo a medida que aumente su velocidad y este aumento, a su vez, dependerá de la aceleración, por lo que no conseguimos relacionar directamente al tiempo con ninguna magnitud, para así obtener la profundidad en función del tiempo y relacionarla en la ecuación para la presión.

Pero como la **aceleración es la diferencial de la velocidad con respecto al tiempo**, reescribiendo la ecuación anterior, y teniendo en cuenta que el término que nos describe la **diferencia entre la aceleración de la gravedad y la aceleración debida a la fuerza del empuje, permanece siempre constante** en el tiempo:

$$Haciendo\, a\left(g - \frac{\rho V}{m}\right) = cte = D\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Tenemos:

$$\frac{dv}{dt} = D - \frac{k}{m}v \rightarrow EDO\ de\ primer\ orden$$

Pero **no podemos resolverla para la velocidad en el tiempo** ya que todavía no conocemos una ecuación que de la velocidad independiente de la aceleración.

LA SOLUCION PARA LA VELOCIDAD

Pero si obtenemos una función que nos describa el tiempo con respecto a la velocidad, y luego buscamos su **función inversa**, obtendríamos la velocidad en función del tiempo.

Así:

$$\frac{dv}{dt}=D-\frac{k}{m}v$$

$$dt=\frac{dv}{D-\frac{k}{m}v}$$

Resolviendo para el tiempo, si en un **tiempo t=0 -> v=0 y en un tiempo t -> v:**

$$\int_0^t dt=\int_0^v \left(D-\frac{k}{m}v\right)^{-1}dv$$

$$\rightarrow si\, con:\left(u=D-\frac{k}{m}v\right)\rightarrow\left(\frac{du}{dv}=\frac{-k}{m}\right)\rightarrow\left(dv=\frac{-m}{k}du\right)$$

$$t=\frac{-m}{k}\ln\left(D-\frac{k}{m}v\right)\rightarrow valuado\, en\begin{cases}v\\0\end{cases}$$

$$\rightarrow t=\frac{-m}{k}\left\{\ln\left(D-\frac{k}{m}v\right)-\ln(D)\right\}$$

Que por **propiedades de logaritmos** y teniendo en cuenta que **el tiempo no puede ser negativo:**

$$t=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{D}{D-\frac{k}{m}v}\right)$$

Ahora verificando el **análisis dimensional como t = s y, si D son m/s^2, m = Kg, k = Kg/s y v = m/s**, y como cualquier argumento de logaritmos, funciones trigonométricas, exponenciales, etc... **Debe ser adimensional:**

$$s=\frac{Kg}{\frac{Kg}{s}}\ln\left(\frac{\frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s^2}}\right)=s*Ad=s\rightarrow Analisis\,dimensional\,correcto$$

Ahora **buscando nuestra función inversa:**

$$\rightarrow\frac{k}{m}t=\ln\left(\frac{D}{D-\frac{k}{m}v}\right)\rightarrow e^{\frac{k}{m}t}=\frac{D}{D-\frac{k}{m}v}$$

$$\rightarrow tomando\,inversa\,en\,ambos\,miembros:$$

$$e^{\frac{-k}{m}t}=\frac{D-\frac{k}{m}v}{D}\rightarrow De^{\frac{-k}{m}t}=D-\frac{k}{m}v\rightarrow-\frac{m}{k}\left\{De^{\frac{-k}{m}t}-D\right\}=v$$

Ordenando, y teniendo en cuenta que **el módulo de la velocidad no puede ser negativo:**

$$v=\frac{m}{k}D\left(1-e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

Esta ecuación nos describe que **a medida que el tiempo transcurra la velocidad se ira haciendo cada vez mayor**, hasta el punto teórico en que el tiempo tienda a infinito, donde el término menos uno sobre e a la k sobre m por t, tiende a cero y la velocidad será el límite igual a:

$$v_{\lim ¿=\frac{m}{k}D=\frac{m}{k}(g-\rho V)¿}$$

A partir de este punto el cuerpo descenderá a velocidad constante.

LA PROFUNDIDAD CON RESPECTO AL TIEMPO

Pero como nuestro objetivo original es obtener una ecuación que nos relacione la profundidad con el tiempo, y **sabiendo que la derivada de la posición con respecto al tiempo es la velocidad**, reescribiendo convenientemente la ecuación obtenida para la velocidad:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{m}{k}D\left(1-e^{\frac{-k}{m}t}\right)\rightarrow dh=\frac{m}{k}D\left(1-e^{\frac{-k}{m}t}\right)dt$$

Integrando si en un **tiempo t=0 -> h_0 y para t -> h:**

$$\int_{h_0}^{h} dh = \int_{0}^{t} \frac{m}{k} D\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right) dt$$

$$\rightarrow como \frac{m}{k} D es constante:$$

$$h = h_0 + \frac{m}{k} D \int_{0}^{t} \left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right) dt$$

$$\rightarrow resolviendo haciendo e^{u} con u = \frac{-k}{m} t:$$

$$h = h_0 + \frac{m}{k} D\left(t + \frac{m}{k} e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

Notamos que la profundidad es directamente proporcional al tiempo.

Para el análisis dimensional:

$$con: m + \frac{Kg}{\frac{Kg}{s}} \frac{m}{s^2}\left(s + \frac{Kg}{\frac{Kg}{s}}\right) = m + s \frac{m}{s^2}(s + s) = m + \frac{m}{s}(s) = m + m = m \rightarrow verifica$$

Por lo que finalmente obtenemos una ecuación que **nos describe la profundidad con respecto al tiempo teniendo en cuenta todos los factores mencionados anteriormente.**

$$h = h_0 + \frac{m}{k} D\left(t + \frac{m}{k} e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

COMPLETANDO LA REGLA DE LA CADENA

Como dijimos que:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dh} \frac{dh}{dt}$$

Y sabemos que:

$$\frac{dP}{dh} = \rho$$

Además de que la **diferencial de la profundidad con respecto al tiempo** es:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{m}{k} D\left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

Finalmente obtenemos que:

$$\frac{dP}{dt} = \rho \frac{m}{k} D \left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right)$$

ECUACION DIFERENCIAL FINAL

$$dP = \rho \frac{m}{k} D \left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right) dt$$

Así que llegamos a una relación que nos describe que **un diferencial de presión depende ahora de un diferencial en el tiempo.**

Resolviendo para la presión, **si en un tiempo t = 0 -> P_0 y para un tiempo t -> P**, y haciendo a:

$$\rho \frac{m}{k} D = cte = \alpha \left[\frac{Pa}{s}\right]$$

Tenemos que:

$$P = P_0 + \alpha \int_0^t \left(1 - e^{\frac{-k}{m}t}\right) dt$$

$$P = P_0 + \alpha \int_0^t dt + \alpha \int_0^t -e^{\frac{-k}{m}t} dt$$

$$\rightarrow resolviendo\, haciendo - e^u\, con\, u = \frac{-k}{m} t:$$

$$P = P_0 + \alpha \left\{ t + \frac{m}{k} e^{\frac{-k}{m}t} \right\} \rightarrow valuado\, entre \begin{cases} t \\ 0 \end{cases}$$

$$P = P_0 + \alpha \left\{ t + \left[\left(\frac{m}{k} e^{\frac{-k}{m}t} \right) - \frac{m}{k} \right] \right\}$$

$$\rightarrow desarrollando \rightarrow P = P_0 + \alpha \left\{ t + \frac{m}{k} \left(e^{\frac{-k}{m}t} - 1 \right) \right\}$$

Finalmente llegamos a una ecuación que **nos describe el aumento de presión en función del tiempo transcurrido.**

$$P = P_0 + \alpha \left\{ t + \frac{m}{k} \left(e^{\frac{-k}{m}t} - 1 \right) \right\}$$

$$con: \alpha = \rho \frac{m}{k} D \; y \; D = \left(g - \frac{\rho V}{m} \right)$$

Verificando las dimensiones como α = Pa/s:

$$si: Pa + \frac{Pa}{s} \left\{ s + \frac{Kg}{\frac{Kg}{s}} \left(Ad \right) \right\} = Pa + \frac{Pa}{s} \left(s + s \right) = Pa + \frac{Pa}{s} s = Pa + Pa = Pa \rightarrow verifica$$

Así basándonos en un fenómeno físico conocido, planteando un modelo, relacionando diferenciales en las magnitudes, planteando y resolviendo las ecuaciones diferenciales convenientemente logramos modelar y finalmente obtener la ecuación que nos describe el comportamiento del fenómeno físico del aumento de la presión de un cuerpo esférico de masa m y radio R conocidos sumergiéndose en un líquido de peso específico conocido.

Y como el volumen de una esfera es:

$$V = \frac{3}{4} \pi R^3$$

Y además en un principio planteamos que **el cuerpo parte del reposo y la superficie del medio en que se sumerge está abierta a la atmosfera**, nuestra ecuación final nos queda:

$$P = P_{atm} + \rho \frac{m}{6\pi\eta R} \left(g - \frac{3}{4} \frac{\rho \pi R^3}{m} \right) \left\{ t + \frac{m}{6\pi\eta R} \left[e^{\frac{-k}{m} t} - 1 \right] \right\}$$