

# 计算方法

Cls<sup>1</sup>

期末复习资料

<sup>1</sup>点击进入作者的 [github](#) 主页

# 目录

<b>第一章 引论</b>	<b>1</b>	<b>5.6 不选主元的 Doolittle 分解（重点考察）</b>	<b>18</b>
1.1 误差来源、分类	1	<b>5.7 列主元的 Doolittle 分解（了解）</b>	<b>18</b>
1.2 误差、有效数字	1	<b>5.8 平方根法（系数矩阵为正定对称矩阵）</b>	<b>19</b>
<b>第二章 插值法</b>	<b>4</b>	<b>第六章 解线性方程组的迭代解法</b>	<b>20</b>
2.1 预备知识	4	6.1 定义	20
2.2 插值基函数与 Lagrange 插值	4	6.2 距离函数应满足的性质	20
2.3 牛顿插值	6	6.3 P 范数	20
2.4 分段插值	8	6.4 向量间的距离	20
2.5 厄米特插值	8	6.5 矩阵范数	21
<b>第三章 最小二乘法</b>	<b>9</b>	6.6 算子范数	21
3.1 定义	9	6.7 线性方程组的迭代解法	21
3.2 计算	9	<b>第七章 方程求根</b>	<b>25</b>
3.3 常用正交多项式	10	7.1 收敛	25
3.4 矛盾方程组求解	11	7.2 二分法求根	25
<b>第四章 数值积分</b>	<b>12</b>	7.3 不动点迭代	25
4.1 基本思路	12	7.4 Newton 迭代法	25
4.2 公式	12	7.5 牛顿下山法	26
4.3 机械求积	12	7.6 弦截法迭代	26
4.4 代数精度—衡量求积公式的精度	13	7.7 迭代加速	26
4.5 复化求积公式	14	<b>附录 A 引论</b>	<b>27</b>
4.6 复化求积公式余项	15	A.1 填空题	27
<b>第五章 解线性方程的直接方法</b>	<b>16</b>	A.2 计算题	27
5.1 非奇异矩阵	16	<b>附录 B 插值法</b>	<b>29</b>
5.2 矩阵的特征值与谱半径	16	B.1 填空题	29
5.3 Gauss 消去法	16	B.2 计算题	29
5.4 列主元素 Gauss 消元法	17		
5.5 直接三角分解法（重点考察）	17		

附录 C 最小二乘法	33	附录 F 解线性方程组得迭代解法	41
附录 D 数值积分	35	F.1 填空题 . . . . .	41
D.1 填空题 . . . . .	35	F.2 计算题 . . . . .	41
D.2 计算题 . . . . .	35	附录 G 方程求根	45
附录 E 解线性代数的直接方法	39	G.1 填空题 . . . . .	45
E.1 计算题 . . . . .	39	G.2 计算题 . . . . .	45

# 第一章 引论

## 1.1 误差来源、分类

1. 模型误差：建立数学模型，这就要对实际问题进行抽象、简化，抓住主要特征、舍去次要特征，产生这种误差叫做模型误差；
2. 观测误差：由于测量工具的精度、观测方法或客观条件的限制，使数据含有测量误差，这类误差叫做观测误差或数据误差；
3. 截断误差 (方法误差)：精确公式用近似公式代替时，所产生的误差叫截断误差；
4. 舍入误差：由于计算机存储字长有限，用有限位数字代替精确数，这种误差叫做舍入误差。

## 1.2 误差、有效数字

### 1.2.1 绝对误差、绝对误差限

绝对误差定义： $e^* = x^* - x$ ，其中  $x^*$  为准确值  $x$  的近似值。

绝对误差限： $\varepsilon^* = |e^*|$  的一个上界。

注：绝对误差还不能完全表示近似值的好坏。

### 1.2.2 相对误差、相对误差限

定义： $e_r^* = \frac{e^*}{x}$

例如： $x = 10 \pm 1, y = 1000 \pm 5, \frac{\varepsilon_x^*}{|x|} = 10\%, \frac{\varepsilon_y^*}{|y|} = 0.5\%$

实际计算时，相对误差通常取  $e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$

注：绝对误差、绝对误差限有量纲；相对误差、相对误差限无量纲。

### 1.2.3 有效数字

若近似值  $x^*$  的误差限是某一位数字的半个单位，该位到  $x^*$  的第一位数字共有  $n$  位，就说  $x^*$  有  $n$  位有效数字，可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)})$$

其中  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是 0 到 9 中的一个数字， $a_1 \neq 0, m$  为整数，且  $|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$

例如, 取  $x^* = 3.14$  做  $\pi$  的近似值,  $x^*$  就看 3 位有效数字, 取  $x^* = 3.1416$ ,  $x^*$  就有 5 位有效数字。

#### 对于“四舍五入”的绝对误差限的说明

1. 通过四舍五入得到的数都是有效数;
2. 有效数字位数与小数点的位置无关;
3. 一般来说, 有效位数越多, 其误差值越小, 但也有例外 (如设  $x = 1000$ , 它的两个近似值 999.9 和 1000.1, 误差相同为 0.1, 分别有 3, 4 位有效数字)。

设近似数表示为  $x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(l-1)})$ , 其中  $a_i (i = 1, 2, \dots, l)$  是 0 到 9 中的一个数字,  $a_1 \neq 0$ ,  $m$  为正整数, 若  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, 则其相对误差限  $\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n+1)}$

反之, 若  $x^*$  的相对误差限  $\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1+1} \times 10^{-(n+1)}$ , 则  $x^*$  至少具有  $n$  位有效数字。

#### 1.2.4 数值计算的误差估计

记忆时可根据函数的导数法则, 本质是误差的一阶泰勒展开。

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) &\approx \varepsilon(x_1^*) \pm \varepsilon(x_2^*) \\ \varepsilon(x_1^* x_2^*) &\approx x_1^* \varepsilon(x_2^*) + x_2^* \varepsilon(x_1^*) \\ \varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) &\approx \frac{x_2^* \varepsilon(x_1^*) - x_1^* \varepsilon(x_2^*)}{x_2^{*2}} \\ \varepsilon(y^*) &\approx \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1^*} \varepsilon(x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2^*} \varepsilon(x_2^*)\end{aligned}$$

#### 1.2.5 避免误差危害

一个算法如果输入数据有误差, 而在计算过程中舍入误差不增长, 则称此算法是数值稳定的, 否则称此算法为不稳定的。

数值计算中为防止有效数字损失, 通常要避免两相近数相减和用绝对值很小的数做除数, 还要注意运算次序和减少运算次数。例如: (常考题, 都用右端算式代替左端。)

1. 求  $x^2 - 16x + 1 = 0$  的小正根:  $x_2 = 8 - \sqrt{63} \approx 8 - 7.94 = 0.06 = x_2^*$  只有一位有效数字, 若改用  $x_2 = 8 - \sqrt{63} = \frac{1}{8+\sqrt{63}} \approx \frac{1}{15.94} \approx 0.0627$  具有三位有效数字。这样便可以通过改变计算公式可以避免或者减少有效数字的损失。
2. 类似地, 如果  $x_1$  和  $x_2$  接近时, 则用  $\lg x_1 - \lg x_2 = \lg \frac{x_1}{x_2}$ , 可以避免有效数字的损失。
3. 当  $x$  很大时,  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 。

### 1.2.6 多项式求值的秦九韶算法

一个计算问题如果能减少运算次数,不但可节省计算量还可减少舍入误差,这是算法设计中一个重要原则。以求多项式为例,设给定  $n$  次多项式

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$$

求  $x^*$  处的值  $p(x^*)$ 。它可表示为

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = b_{i-1}x + a_i, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

则  $b_n = p(x^*)$  即为所求。此算法被称为秦九韶算法。

## 第二章 插值法

### 2.1 预备知识

#### 2.1.1 函数逼近

函数  $y = f(x)$  不知其表达式，其值只能通过实验或观测的到，考虑用一个较为简单的函数  $P(x)$  近似地表示  $f(x)$ ，其中  $f(x)$  为被逼近函数  $P(x)$  为逼近函数。

逼近的方法：插值与拟合。

#### 2.1.2 插值问题

假设  $f$  在  $[a, b]$  上连续  $\{x_i\} \subset [a, b]$  且互不相同。若存在简单函数  $P(x)$  使得  $P(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ )，则称  $P(x)$  为  $f(x)$  的插值函数。其中  $P(x_i) = y_i$  被称为插值条件。

插值函数  $P(x)$  有各种类型，如多项式，三角函数……

#### 2.1.3 插值多项式的存在为唯一性

$$P(x) = a_0 + a_1 \times x + \dots + a_n x^n \Rightarrow a_0 + a_1 \times x_i + \dots + a_n x_i^n = y_i (i = 0, 1, \dots)$$

其系数行列式刚好为范德蒙德行列式：

$$U = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j) \neq 0$$

即  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  存在且唯一的  $(n+1)$  个插值节点可构造  $n$  次插值多项式。

### 2.2 插值基函数与 Lagrange 插值

#### 2.2.1 计算

$n = 1$  时，设  $y_i = f(x_i) (i = 0, 1)$ ，作直线方程  $y = L_1(x)$ ，两点式插值：

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$n = 2$  时, 设  $y_i = f(x_i) (i = 0, 1, 2)$ , 作直线方程  $y = L_2(x)$ , 三点式插值:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

### 2.2.2 推广

$n = 1$  时, 记  $l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ , 则

$$L_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$$

$n = 2$  时, 记  $l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ , 则

$$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

一般地, 令:  $l_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}, k = 0, 1, 2, \dots$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x)y_k$$

其中称  $l_k(x)$  为 Lagrange 插值基函数,  $L_n(x)$  为 Lagrange 插值多项式

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} (i, k = 0, 1, 2, \dots)$$

### 2.2.3 Lagrange 插值误差

设  $f$  在  $[a, b]$  上  $n+1$  阶可微,  $P_n(x)$  为  $f$  的  $n$  次插值多项式, 则

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$$

其中  $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$ ,  $\xi$  依赖于  $x$ 。

证明:

易得:  $x_0, x_1, \dots, x_n$  均为  $R_n(x)$  的零点, 根据零点可设:

$$R_n(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) = K(x)W_{n+1}(x)$$

作辅助函数:  $F(t) = f(t) - P_n(t) - R_n(t)$ , 有零点:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ 。

由罗尔中值定理可知:  $F(n+1)$  有 1 个零点,  $\xi \in [a, b]$ , 则:

$$F^{(n+1)}(\xi) - K(x)(n+1)! = 0$$

得到:

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$



利用余项表达式:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$$

当  $f(x) = x^k (k \leq n)$  时, 由于  $f^{(n+1)}(x) = 0$ , 于是有:

$$R_n(x) = x^k - \sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x) = 0$$

由此得:

$$\sum_{i=0}^n x_i^k l_i(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, n$$

当  $k = 0$  时, 有: (填空题常考)

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$$

## 2.3 牛顿插值

### 2.3.1 计算

记  $f[x, y] = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$  (一阶差商)  $f[x, y, z] = \frac{f[y, z] - f[x, y]}{z - x}$  (二阶差商)。则:

两点公式为

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

三点公式为

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

基函数为

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots$$

其系数称为均差 (差商)。

一般地:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

均差与节点的排列顺序无关, 从而:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k] = [x_{k-1}, x_1, \dots, x_{k-2}, x_0, x_k]$$

牛顿插值只需要第一排的差商

牛顿插值公式

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) + f[x, x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

表 2.1: 差商表

$x_k$	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
$x_0$	$f(x_0)$				
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$F[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
$x_4$	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, \dots]$

### 2.3.2 等距节点的牛顿插值（了解）

设  $f_k = f(x_k)$ , 则

称  $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$  为  $f$  在  $x = x_k$  处的一阶向前差分,  $\Delta$  称为向前差分算子。

称  $\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$  为  $f$  在  $x = x_k$  处的一阶向后差分,  $\nabla$  称为简后差分算子。

$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$  为  $f$  在  $x = x_k$  处的  $m$  阶向前差分。

$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$  为  $f$  在  $x = x_k$  处的  $m$  阶向后差分。

$$\Delta^m f_k = \nabla^m f_{k+m}$$

均差与差分有如下关系

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} = f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_0] = \frac{\nabla^k f_k}{k!h^k}$$

前插公式 ( $x$  在  $x_0$  附近)

设  $x_k = x_0 + kh (h = 0, 1, 2, \dots, n)$  插值点  $x = x_0 + th (t = 0)$

则  $h = \frac{x_n - x_0}{n}, t = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x - x_k = (t - k)h$

牛顿插值公式中一项式化为:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) &= \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (t - i)h = \frac{\Delta^k f_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (t - i) \\ \Rightarrow N_n(x) = N_n(x_0 + th) &= f_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (t - i) \end{aligned}$$

后插公式 ( $x$  在  $x_n$  附近)

$$\begin{aligned} x_{n-k} &= x_n + kh, x = x_n + th (t < 0) \\ (h = \frac{x_n - x_0}{n}, t = \frac{x - x_n}{h}, x - x_{n-k} &= (t + k)h) \\ \therefore N_n(x) &= f_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\nabla^k f_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (t + i) \end{aligned}$$

## 2.4 分段插值

插值多项式的次数越高，误差不一定越小。

### 2.4.1 分段线性 Lagrange 插值

取相邻节点，构成插值子区间： $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $h_k = x_{k+1} - x_k$

在子区间上应用两点公式： $L_n^{(k)}(x) = \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}y_k + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}$

令

$$L_n(x) = \begin{cases} L_n^0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ L_n^1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ L_n^{(n-1)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

（分段函数，计算简单，但光滑性较差）

### 2.4.2 分段 2 次插值

将每 3 个节点分为一段，每段都为抛物线

在每个区间内利用三点 Lagrange 插值即可， $(L_3(x) = L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2)$

## 2.5 厄米特插值

分段多次插值无法保证插值函数在节点处的光滑性，希望得到光滑性的插值函数（与原函数在节点处相切），这就是插值问题。

已知  $y_i = f(x_i)$ ,  $y'_i = f'(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  求插值函数  $H(x)$  满足： $H(x_i) = y_i$ ,  $H'(x_i) = y'_i$

### 2.5.1 两点三次插值

$$H(x) = y_0\alpha_0(x) + y'_0\beta_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y'_1\beta_1(x)$$

其中

$$\alpha_i(x) = \left(1 - 2\frac{x-x_i}{x_i-x_j}\right) \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2 \quad (i = 0, 1)$$

$$\beta_i(x) = (x-x_i) \left(\frac{x-x_i}{x_i-x_j}\right)^2 \quad (i = 0, 1)$$

## 第三章 最小二乘法

### 3.1 定义

在函数类  $\phi = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  中求函数  $S^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j^* \varphi_j(x)$ , 使

$$\sum_{i=0}^m W_i (S^*(x_i) - y_i)^2 = \min_{(S \in \phi)} \sum_{i=0}^m W_i (S(x_i) - y_i)^2$$

称  $S^*(x)$  为最小二乘拟合函数。

### 3.2 计算

如何确定  $S^*$  的构造, 即求  $\phi = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ 。

通过观察数据点的分布情况, 若像直线, 则设  $S^*(x) = a_0 + a_1x$ ; 若像抛物线, 则设  $S^*(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\text{设 } \varphi = (a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^m W_i (S^*(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^m W_i \left( \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right)^2$$

注: 基函数确定后, 因为节点已知, 所以  $\sum_{i=0}^m W_i (S^*(x_i) - y_i)^2$  的值只与  $a_i$  有关。

若要  $\sum_{i=0}^m W_i (S^*(x_i) - y_i)^2$  最小, 则使  $\varphi$  最小, 取其极小值  $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0$  (必要条件)

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=0}^m W_i \left( \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right) \varphi_k(x_i) W_i &= 0 \\ \sum_{i=0}^m W_i \left( \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right) \varphi_k(x_i) &= 0 \\ \sum_{i=0}^m W_i \varphi_k(x_i) \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_i) &= \sum_{i=0}^m W_i y_i \varphi_k(x_i) \\ \sum_{j=0}^n \left( \sum_{i=0}^m W_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) a_j \right) &= \sum_{i=0}^m W_i y_i \varphi_k(x_i) \end{aligned}$$

设

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m W_i \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i), (f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^m W_i y_i \varphi_k(x_i) = (\varphi_k, f)$$

则

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

转化为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

解方程组:

$$(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$$

最小二乘函数:

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0(x), a_1^* \varphi_1(x), \dots, a_n^* \varphi_n(x)$$

最小二乘的平方误差:

$$\|\delta_i\|_2^2 = \sum_{i=0}^m W_i (S^*(x_i) - y_i)^2 = \left| \sum_{i=0}^m W_i y_i^2 - \sum_{j=0}^n a_j^* (\varphi_j, f) \right|$$

若  $\text{span}\{\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  为正交多项式,

即

$$(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

则法方程组可化为:

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \square & \cdots & \square \\ \square & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

### 3.3 常用正交多项式

#### 3.3.1 勒让德多项式

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$$

递推关系:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$P_n(x)$  在  $(-1, 1)$  内有必互异的实零点

## 3.3.2 切比雪夫多项式

$$\text{权函数 } \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \pi/2 & , m = n \\ \pi & , m = n = 0 \end{cases}$$

递推关系:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

或

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta \cos(n-1)\theta, n \geq 1$$

代入  $x = \cos\theta$  即得递推关系

## 3.4 矛盾方程组求解

对于方程组  $Ax = b$ , 若  $R(A, b) = R(A)$ , 则有解。

若  $R(A, b) \neq R(A)$ , 则称矛盾方程组, 其解即最小二乘解是指在均方误差极小意义下的解, 即  $\min \|Ax - b\|_2^2$

方程  $A^\top Ax = A^\top b$  称为矛盾方程组  $Ax = b$  的法方程, 两解等同。

求解拟合曲线的极小值问题与求解矛盾方程组的法方程等价, 即求解拟合曲线的极小问题可转化为求解方程组:  $A^\top Ax = A^\top b$

例: 求解拟合函数  $S^*(x) = a_0 + a_1x$ , 则可将所有节点代入  $S^*(x)$ , 构成一个关于  $(a_0, a_1)$  的方程组  $Aa = b \Rightarrow A^\top Aa = A^\top b$

## 第四章 数值积分

有些积分不能用 Nowton-leibniz 公式求解，从而采用用数值计算的办法解决。

### 4.1 基本思路

积分中值定理

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

### 4.2 公式

1. 梯形公式：取  $f(\xi)(b-a) \approx \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$ ，则有  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$
2. 中矩形公式：取  $f(\xi) \approx f(\frac{b+a}{2})$ ，则有  $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(\frac{b+a}{2})$

### 4.3 机械求积

考虑在  $[a, b]$  上选取某些节点  $x_k$ ，以  $f(x_k)$  的加权平均  $\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$  来近似  $f(\xi)$ ，则有  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$  ( $A_i$  相当于两节点的间距)  $A_i$  只与  $x_i$  的选取有关。

由于  $f(x)$  的函数形式不一定已知，因此求出  $f(x)$  的近似形式，即插值公式：

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Lagrange 插值：  $f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$ ，其中  $x_k$  为节点， $x$  为所求点。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

则令  $A = \int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_i-x_j)} dx$ ，若节点等距分布，将  $[a, b]$  分成  $n$  等分， $h = \frac{b-a}{n}$ ， $x_k = a + kh$

$$x = a + th (0 \leq t \leq n) \Rightarrow dx = h dt$$

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_0^n \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n \frac{t-j}{i-j} h \, dt = h \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n \frac{1}{i-j} \int_0^n \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n (t-j) \, dt \\
&= h \frac{(-1)^{n-i}}{\prod_{j=0}^n (i-j) \prod_{j=i+1}^n (i-j)} \int_0^n \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n (t-j) \, dt \\
&= h \frac{(-1)^{n-i}}{j!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n (t-j) \, dt \\
&= \frac{(b-a)(-1)^{n-i}}{nj!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n (t-j) \, dt = (b-a)C_k^{(n)}
\end{aligned}$$

其中

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{i \neq j \\ j=0}}^n (t-j) \, dt \quad h = \frac{b-a}{n}$$

当  $n=1$  时:

$$\begin{cases} C_0^{(1)} = -1 \times \int_0^1 (t-1) \, dt = \frac{1}{2} \\ C_1^{(1)} = 1 \times \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \text{ (梯形公式)}$$

当  $n=2$  时:

$$\begin{cases} C_0^{(2)} = \frac{1}{4} \times \int_0^2 (t-1)(t-2) \, dt = \frac{1}{6} \\ C_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \times \int_0^2 t(t-2) \, dt = \frac{4}{6} \\ C_2^{(2)} = \frac{1}{4} \times \int_0^2 t(t-1) \, dt = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\therefore \int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \text{ (simpson 公式)}$$

当  $n=4$  时:

$$\therefore \int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{90} [7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b)] \text{ (cotes 公式)}$$

#### 4.4 代数精度—衡量求积公式的精度

如果某个求积公式对于次数不超过  $m$  的多项式准确的成立, 但对于  $m+1$  次多项式就不准确地成立, 则该求积公式有  $m$  次代数精度。

设有求积公式  $\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ , 要使它具有  $m$  次代数精度, 只要令它对于  $f(x) =$



$1, x, \dots, x^m$  都能准确成立, 这就要求:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n A_k = b - a \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}) \\ \sum_{k=0}^n A_k x_k^{m+1} \neq \frac{1}{m+2}(b^{m+2} - a^{m+2}) \end{cases}$$

例题: 求数值求积公式  $\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})]$  的代数精度。

解:

当  $f(x) = 1$  时,

$$\frac{1}{3}(2 - 1 + 2) = 1$$

当  $f(x) = x$  时,

$$\frac{1}{3} \left( 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx$$

当  $f(x) = x^2$  时,

$$\frac{1}{3} \left( 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{9}{16} \right) = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$$

当  $f(x) = x^3$  时,

$$\frac{1}{3} \left( 2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{27}{64} \right) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

当  $f(x) = x^4$  时,

$$\frac{1}{3} \left( 2 \cdot \frac{1}{256} - \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{81}{256} \right) \neq \int_0^1 x^4 dx$$

因此代数精度为: 3

注:

1. 同一求积公式即  $A_k$  相同, 针对不同函数, 精度是不相同的。
2. 梯形公式, simpson 公式, cotes 公式分别具有 1, 3, 5 次代数精度。
3. 当  $n$  为偶数时, Newton-cotes 公式至少具有  $n+1$  代数精度。

## 4.5 复化求积公式

考虑将  $[a, b]$  分为小区间, 每个小区间上用低阶公式, 再将结果求和。

## 4.5.1 复化梯形公式

令  $f(x_0) = f(a), f(x_n) = f(b)$ , 在小区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上用梯形公式:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \frac{h}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \\ \Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \end{aligned}$$

## 4.5.2 复化 simpson 公式

在小区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上用 simpson 公式:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \frac{h}{6} \left( f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right) \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^n \frac{h}{6} [f(x_k) + 4f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{6} \left[ f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \end{aligned}$$

## 4.5.3 复化 cotes 公式

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{90} [7f(x_k) + 32f(x_{k+1/4}) + 12f(x_{k+1/2}) + 32f(x_{k+3/4}) + 7f(x_{k+1})]$$

## 4.6 复化求积公式余项

复化梯形:  $R_{T_n}(f) = \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta) \approx \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)](b-a)$

复化 simpson:  $R_{S_n}(f) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta) \approx -\frac{b-a}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)]$

复化 cotes:  $R_{C_n}(f) = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta) \approx -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{h}{4}\right)^6 [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)]$

## 第五章 解线性方程的直接方法

### 5.1 非奇异矩阵

设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 如果  $AB = BA = I$ , 则称  $B$  是  $A$  的逆矩阵, 记为  $A^{-1}$ , 且  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ , 如果  $A^{-1}$  存在, 则称  $A$  为非奇异矩阵。如果  $A, B$  均为非奇异矩阵, 则  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

### 5.2 矩阵的特征值与谱半径

1. 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 若存在数  $\lambda$  和非零向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 使  $Ax = \lambda x$ , 则称  $\lambda$  为  $A$  的特征值,  $x$  为  $A$  对应  $\lambda$  的特征向量,  $A$  的全体特征值称为  $A$  的谱, 记作  $\sigma(A)$ , 即  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , 记  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ , 则称为矩阵  $A$  的谱半径。
2. 通过求  $\det(\lambda I - A) = 0$ , 得到  $A$  的特征值 (具体分析过程可复习线代), 谱半径则是判断特征值绝对值的最大值。

### 5.3 Gauss 消去法

对于  $Ax = b$  的矩阵形式。

考虑增广矩阵  $(A|b)$  行变换为  $(A^{(n)}|b^{(n)})$ , 其中  $A^{(n)}$  上三角矩阵。(初等行变换)

例题:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

用 Gauss 消去法为:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_3 = -6 \end{cases}$$

求得  $x = (1, 2, 3)^\top$

(与线性代数中的解法是一致的, 考试中如果考到高斯消元法, 就这样一步一步来, 是没有问题的)

总运算次数:  $\frac{n^3}{3} + O(n^2) = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$

## 5.4 列主元素 Gauss 消元法

为避免小主元作除数, 在  $A^{(k)}$  的第  $k$  列主对角线以下元素中挑选绝对值最大者, 并通过行变换使之位于主对角线上作为主元素。

不带行变换的消元过程: 消元  $\rightarrow$  行变换  $\rightarrow$  左乘初等矩阵。

$$L_K(A^{(k)}|b^{(k)}) = (A^{(k+1)}|b^{(k+1)}) \Rightarrow L_{K-1}L_{K-2}\cdots L_2L_1(A^{(1)}|b^{(1)}) = (A^{(k)}|b^{(k)})$$

其中  $L_{K-1}L_{K-2}\cdots L_1A^{(1)} = A^{(k)} \Rightarrow L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1A^{(1)} = A^{(n)}$

$$\begin{aligned} \because A^{(1)} &= A \\ \therefore A &= (L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1)^{-1}A^{(n)} = LU \\ \Rightarrow \begin{cases} L = (L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1)^{-1} & \text{单位下三角矩阵} \\ U = A^{(n)} & \text{上三角矩阵} \end{cases} \end{aligned}$$

称  $A = LU$  为矩阵  $A$  的  $LU$  分解

## 5.5 直接三角分解法 (重点考察)

若有三角阵  $L, U$ , 使  $A = LU$ , 则方程组  $Ax = b \rightarrow LUx = b \rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

注:  $LU$  分解的条件:  $A$  的各阶顺序主子列不为零,  $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \dots, D_{n-1} \neq 0$

### 5.6 不选主元的 Doolittle 分解（重点考察）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{\min\{ij\}} l_{is}u_{sj} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

计算  $U$  第  $r$  个行,  $L$  的第  $r$  列元素 ( $r = 2, 3, \dots, n$ )

$$u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki} \quad (i = r, r+1, \dots, n) \quad (5.1)$$

$$l_{ir} = \frac{1}{u_{rr}} \left( a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr} \right) \quad (i = r+1, \dots, n \wedge r \neq n) \quad (5.2)$$

注意  $L$  和  $U$  的特征,  $L$  是下三角矩阵, 且对角线元素都是 1,  $U$  为上三角矩阵, 对角线元素需要计算求得。

例题: 用直接三角法解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

用 (5.1)(5.2) 计算得:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = LU$$

求解  $Ly = (14, 18, 20)^\top$ , 得  $y = (14, -10, -72)^\top$

$Ux = (14, -10, -72)^\top$ , 得  $x = (1, 2, 3)^\top$

### 5.7 列主元的 Doolittle 分解（了解）

通过行变换, 使对对角元最大 (即左乘一个初等矩阵  $P$ )

$$\therefore Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$$

$$\therefore PA = LU$$

$$\therefore \begin{cases} |A| = \pm |L||U| = \pm |U| \\ A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P \end{cases} \quad [\pm \text{由换行次数确定}](\text{行列式的计算})$$

注: 在不选主元的 Doolittle 分解的基础上, 通过行变换选主元。每一步变换后都可做行变换选主元。  $Ux = L^{-1}Pb$  (紧凑格式的最后列)

## 5.8 平方根法（系数矩阵为正定对称矩阵）

### 5.8.1 正定矩阵

若  $A$  为对称正定矩阵，则存在唯一的对角元素全为正的下三角阵  $L$ ，使  $A = LL^T$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}$$

直接运用矩阵乘法求解  $L$  的元素：

$$\begin{cases} a_u = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_u} \\ a_i = l_{11}l_i \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{1i}}{l_{11}} \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{求解根: } Ax = b \Rightarrow LL^T x = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

### 5.8.2 平方根的改进方法

若对称矩阵  $A$  各阶顺序主子式不为 0 时，则  $A$  可以唯一分解为  $A = LDL^T$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \square & \square & \cdots & \square \\ l_{21} & 1 & \square & \cdots & \square \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & \square & \cdots & \square \\ \square & d_1 & \cdots & \square \\ \square & \square & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \cdots & d_1 \end{pmatrix}$$

$A = LDL^T = LU$ ，可用  $LU$  分解的紧凑格式计算  $L$

## 第六章 解线性方程组的迭代解法

### 6.1 定义

对于线性方程组  $AX = b$ , 考虑等阶方程组  $X = BX + f$

向量迭代公式:  $x^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$

### 6.2 距离函数应满足的性质

1. 正定性:  $\forall x \in U, N(x) \geq 0$
2. 齐次性:  $\forall k \in \mathbb{R}, N(kx) = |k|N(x)$
3. 三角不等式:  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

### 6.3 P 范数

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

最大模范数:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

绝对值范数:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

常见几种范数的关系:

$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \end{cases}$$

### 6.4 向量间的距离

设向量  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 则称  $\|x - y\|$  为,  $x, y$  之间的距离 ( $\mathbb{R}^n$  上的任一种向量范数)

## 6.5 矩阵范数

只考虑  $\mathbb{R}^n$  中的方阵

若对应一个实数  $\|A\|$ , 满足:

$$\begin{cases} \|A\| > 0 \wedge \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ \|KA\| = \|K\|\|A\| \\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\| \end{cases}$$

则称  $\|A\|$  为方阵的范数

## 6.6 算子范数

设  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\|\cdot\|$  为向量范数, 称  $\|A\| = \max_{x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$  为矩阵  $A$  的算子范数。

常见的算子范数:

1.  $\|A\|_\infty = \max_{\|X\|=1} \|AX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \Rightarrow$  行范数 (每行元素绝对值相);
2.  $\|A\|_1 = \max_{\|X\|=1} \|AX\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \Rightarrow$  列范数;
3.  $\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \Rightarrow$  2 范数, 其中  $\lambda_{\max}(A^T A)$  为矩阵  $A^T A$  的绝对值最大的特征值。

设  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的  $n$  个特征值, 则称  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$  为  $A$  的谱半径。

设  $A$  非奇异,  $\|\cdot\|$  为算子范数, 则称  $\text{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$  矩阵  $A$  的条件数。

条件数的值与范数的类型有关:

$$\begin{cases} \text{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \\ \text{cond}(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\sigma_{\max}}} \end{cases}$$

$\lambda_{\min}$  为  $A^T A$  的特征值。若  $\text{cond}(A) \gg 1$ , 则称  $Ax = b$  为病态方程组。

## 6.7 线性方程组的迭代解法

$$x^{(k+1)} = BX^{(k)} + f \Rightarrow x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + f$$



其中  $B$  称为迭代矩阵。如果  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k$  存在 (记为  $x^*$ )，称此迭代法收敛，显然  $x^*$  是此方程组的解，否则称此迭代法发散。

$x^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$  收敛的充要条件是矩阵  $B$  得谱半径  $\rho(B) < 1$

### 6.7.1 G-S 法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  可逆，且  $a_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ，则有：

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.1)$$

可得

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

写成迭代格式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

又式6.1写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{nn} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

即： $DX = LX + UX + b$ ，其中  $D - L - U = A$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

得到  $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$

$$\therefore B_j(\text{迭代矩阵}) = -D^{-1}(L + U), f_j = D^{-1}b \Rightarrow x = D_j x + f_j$$

则有 Jacobi 迭代的矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = B_j x^{(k)} + f_j$$

例题: 将方程组 
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$
 写成 Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

### 6.7.2 G-S 法

考虑 Jacobi 迭代分量式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

通常计算值  $x_j^{(k+1)}$  比前一步计算值  $x_j^{(k)}$  更精确

取  $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$  称为高斯-赛德尔迭代

将方程组 
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$$
 写成 G-S 迭代格式

迭代公式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

### 6.7.3 SOR 法

迭代公式写法:

$$\begin{aligned} Dx^{(k+1)} &= Dx^{(k)} + \omega(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)} + b) \\ \therefore (D - \omega L)x^{(k+1)} &= (D + U\omega - \omega D)x^{(k)} + \omega b \\ \therefore x^{(k+1)} &= (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]x^{(k)} + \omega(D - \omega L)^{-1}b \\ \Rightarrow B_\omega &= (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U] \end{aligned}$$

1. 严格对角占优矩阵:  $A$  的元素要满足:  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$

2. 弱对角占优矩阵:  $A$  的元素要满足:  $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$

3. 迭代的收敛性:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

#### 6.7.4 J 法

1.  $B_j = D^{-1}(L + U)$
2.  $\rho(B_j) < 1$
3.  $\|B_j\| < 1$
4.  $A$  严格对角占优, 或  $A$  经行变换后的矩阵严格对角占优

#### 6.7.5 G-S 法

1.  $B_G = (D - L)^{-1}U$
2.  $\rho(B_G) < 1$
3.  $\|B_G\| < 1$
4.  $A$  或  $A$  经行变换后严格对角占优
5.  $\|B_j\|_\infty < 1$

#### 6.7.6 SOR 法 (了解)

1. 若  $A$  的对角无均不为 0, 则收敛的必要条件  $0 < \omega < 2$
2. 若  $A$  严格对角占优, 则当  $0 < \omega < 1$  时收敛
3. 若  $A$  为正定矩阵, 则当  $0 < \omega < 2$  时收敛

## 第七章 方程求根

### 7.1 收敛

若一个迭代法收敛,  $x^*$  是方程  $f(x) = 0$  的一个根, 则令  $e_k = x_k - x^*$ 。若存在实数  $P$  和非零常数  $C$ , 使得:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^P} = C$ , 则称该迭代法为  $P$  阶收敛  $P = 1$  为线性收敛,  $P > 1$  为超线性收敛,  $P = 2$  为平方收敛。

### 7.2 二分法求根

利用  $f(a)f(b) < 0$ , 决定  $[a, b]$  间存在根, 再取  $f(\frac{a+b}{2}) \dots$

### 7.3 不动点迭代

将  $f(x) = 0$  化为  $x = \varphi(x)$ , 取迭代方程为  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ , 其中  $\varphi(x)$  称为迭代函数。

- 不动点迭代的误差:  $|x - x_k| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$ ,  $L$  为小于 1 的正实数;
- 收敛性判断: 若迭代收敛, 设  $\varphi'(x)$  在  $[a, b]$  上存在, 且  $|\varphi'(x)| \leq |L|$ , 则迭代收敛;
- 收敛速度: 若迭代收敛, 设  $\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  上为  $P(\geq 2)$  次可微, 且在  $x = \varphi(x)$  的根  $x^*$  处有  $\begin{cases} \varphi^{(j)}(x^*) = 0 \\ \varphi^{(P)}(x^*) \neq 0 \end{cases}, \underbrace{j = 1, 2, \dots, P-1}_{\text{不是从 0 开始}}$  则不动点迭代为  $P$  阶收敛。

注:

1. 若题目中说, 根在  $x'$  附近, 则代入  $x'$  也可。
2. 局部收敛: 若题中告诉了根的大概值  $x'$ , 判断收敛性,  $|\varphi'(x')| < 1$  收敛且  $|\varphi'(x')| < 1$  越小, 收敛性越好。

### 7.4 Newton 迭代法

设  $x_k$  是  $f(x) = 0$  的根  $x^*$  的一个近似值

$$\underbrace{f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)}_{\text{泰勒公式}} = 0 \Rightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

迭代公式:  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

1. 收敛性: 若  $f(x)$  在解  $x^*$  附近二阶连续可导, 且  $f'(x) \neq 0$  (即  $x^*$  为单根), 则在  $x^*$  附近, Newton 序列至少二阶收敛于  $x^*$ 。
2. 收敛性判断  $x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  则相当于  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow |\varphi'(x)| < 1$  则 Newton 迭代收敛。
3. 收敛速度: 同不动点迭代。

## 7.5 牛顿下山法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \dots$$

重根情形: 设  $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$ , 整数  $m \geq 2$ ,  $g(x^*) \neq 0$ , 则  $x^*$  为  $f(x)$  的  $m$  重根, 此时有  $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, f^{(m)}(x^*) \neq 0$ 。只要  $f'(x_k) \neq 0$  仍可用牛顿法计算, 此时迭代函数  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  的导数满足  $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{m} < 1$ , 所以牛顿法求重根只是线性收敛, 若取  $\varphi(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$ , 则  $\varphi'(x^*) = 0$ , 用迭代法  $x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  求重根, 则具有二阶收敛性 (但要知道  $x^*$  的重数  $m$ )。

## 7.6 弦截法迭代

在不动点法基础上, 以差商代替导数

单点: 差商:  $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ , 则迭代公式:  $x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0)$

双点: 差商:  $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ , 则迭代公式:  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$

收敛阶数约为 1.618

## 7.7 迭代加速

Aitken 加速

$$\bar{x}_k = x_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}$$

但要求  $P = 1$

## 附录 A 引论

### A.1 填空题

1. 设  $x_1 = 1.219, x_2 = 3.661$  均具有 3 位有效数字, 则  $x_1 + x_2$  的误差限为0.01。
2. 为了使计算  $y = 10 + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{6}{(x-1)^3}$  的乘除法次数尽量地少, 应将该表达式改写为  $y = 10 + (3 + (4 - 6t)t)t, t = \frac{1}{x-1}$ , 为了减少舍入误差, 应将表达式  $\sqrt{2021} - \sqrt{1999}$  改写为  $\frac{2}{\sqrt{2021} + \sqrt{1999}}$ 。
3. 为了减少舍入误差的影响, 当  $x \approx y$  应将表达式  $\lg x - \lg y$  改写为  $\lg(x/y)$ 。
4. 计算方法实际计算时, 对数据只能取有限位表示, 这时所产生的误差叫舍入误差。
5. 设  $x_1 = 1.216, x_2 = 3.654$  均具有 3 位有效数字, 则  $x_1 + x_2$  的误差限为0.01。
6. 已知数  $e = 2.718281828\dots$ , 取近似值  $x = 2.7182$ , 那么  $x$  具有的有效数字是4。

### A.2 计算题

已知测量某长方形场地的长  $a = 110$  米, 宽  $b = 80$  米。若  $|a - a^*| \leq 0.1$  (米),  $|b - b^*| \leq 0.1$  (米) 试求其面积的绝对误差限和相对误差限。

解:

设长方形的面积为  $s = ab$

当  $a = 110, b = 80$  时, 有  $s = 110 \times 80 = 8800(m^2)$ 。此时, 该近似值的绝对误差可估计为:

$$\Delta(s) \approx \frac{\partial s}{\partial a} \Delta(a) + \frac{\partial s}{\partial b} \Delta(b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$$

相对误差可估计为:

$$\Delta_r(s) = \frac{\Delta(s)}{s}$$

而已知长方形长、宽的数据的绝对误差满足

$$|\Delta(a)| \leq 0.1, |\Delta(b)| \leq 0.1$$

故求得该长方形的绝对误差限和相对误差限分别为

$$|\Delta(s)| \leq b|\Delta(a)| + a|\Delta(b)| \leq 80 \times 0.1 + 110 \times 0.1 = 19.0$$

$$|\Delta_r(s)| = \left| \frac{\Delta(s)}{s} \right| \leq \frac{19.0}{8800} = 0.002159$$

绝对误差限为 19.0；相对误差限为 0.002159。

测得某桌面的长  $a$  的近似值  $a^* = 120\text{cm}$ ，宽  $b$  的近似值  $b^* = 60\text{cm}$ 。若已知  $|e(a^*)| \leq 0.2\text{cm}$ ,  $|e(b^*)| \leq 0.1\text{cm}$ 。试求近似面积  $s^* = a^*b^*$  的绝对误差限与相对误差限。

解：

面积  $s = ab$ ，则绝对误差限为：

$$\begin{aligned} e(s^*) &= \frac{\partial s(a^*, b^*)}{\partial a} e(a^*) + \frac{\partial s(a^*, b^*)}{\partial b} e(b^*) = b^* e(a^*) + a^* e(b^*) \\ |e(s^*)| &\leq |b^*| |e(a^*)| + |a^*| |e(b^*)| \leq 60 \times 0.2 + 120 \times 0.1 = 24\text{cm}^2 \end{aligned}$$

相对误差限为：

$$|e_r(s^*)| = \left| \frac{e(s^*)}{s^*} \right| \leq \frac{24}{120 \times 60} = 0.33\%$$

## 附录 B 插值法

### B.1 填空题

1. 已知  $f(x) = 2x^3 + 5$ , 则  $f[1, 2, 3, 4] = 2$ ;  $f[1, 2, 3, 4, 5] = 0$ 。
2. 设  $x_0, x_1, \dots, x_n (n \geq 5)$  为互不相同的节点, 则插值多项式  $\sum_{k=0}^n l_k(s)x_k^2 = x^2$ 。
3. 称  $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  为函数  $f(x)$  关于点  $x_0, x_1$  的一阶差商 (均差), 称  $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$  为函数  $f(x)$  关于点  $x_0, x_1, x_2$  的二阶差商。

### B.2 计算题

当  $x = -1, 1, 2$  时, 对应的函数值分别为  $f(x) = -3, 0, 4$ , 求  $f(x)$  的二次拉格朗日插值插值多项式, 并给出插值余项。

解:

取  $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2, y_0 = -3, y_1 = 0, y_2 = 4$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= -3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)}{(-2) \cdot (-3)} + 0 \cdot \frac{(x + 1)(x - 1)}{3 \cdot 1} \\ &= \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

插值余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

已知

$x_i$	1	3	4	5
$f(x_i)$	2	6	5	4



分别用拉格朗日插值法和牛顿插值法求  $f(x)$  的三次插值多项式  $P_3(x)$

解:

$$L_3(x) = 2 \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-3)(1-4)(1-5)} + 6 \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-4)(3-5)} + 5 \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-3)(4-5)} + 4 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-3)(5-4)}$$

差商表为

$x_i$	$y_i$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	2			
3	6	2		
4	5	-1	-1	
5	4	-1	0	1/4

$$P_3(x) = N_3(x) = 2 + 2(x-1) - (x-1)(x-3) + \frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-4)$$

已知下列函数表:

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	9	27

1. 写出相应的三次拉格朗日插值多项式;
2. 作均差表, 写出相应的三次 Newton 插值多项式, 并计算  $f(1.5)$  的近似值。

解:

(1)

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\ &= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1 \end{aligned}$$

(2) 差商表:

$x_i$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	4/3

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\ f(1.5) &\approx N_3(1.5) = 5 \end{aligned}$$

依据如下函数值表:

$x$	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

1. 建立三次 Lagrange 插值多项式，并给出插值余项；
2. 建立三次 Newton 插值多项式，要求列出差商表。

解：

(1)

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= 1 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + 9 \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} + 23 \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} + 3 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \\
 &= -\frac{11}{4}x^3 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1
 \end{aligned}$$

插值余项：

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x(x-1)(x-2)(x-4)$$

(2) 建立差商表如下

$x_i$	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	1			
1	9	8		
2	23	14	3	
4	3	-10	-8	-11/4

Newton 前插公式为

$$N_3(x) = -\frac{11}{4}(x-2)(x-1)x + 3(x-1)x + 8x + 1$$

已知  $f(x)$  的以下数据：

$x$	1	2	3
$f(x)$	1.0000	1.4142	1.7321

1. 求以如上数据为插值结点的 Lagrange 多项式；
2. 给定数据表  $f(x) = \ln x$  数据表

$x_i$	2.20	2.40	2.60	2.80
$f(x_i)$	0.78846	0.87547	0.95551	1.02962

构造差商表，写出三次 Newton 差商插值多项式  $N_3(x)$ 。

解:

(1)

Lagrange 插值多项式为:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 1.0 \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 1.4142 \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1.7321 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= -0.04815x^2 + 0.55865x + 0.4895 \end{aligned}$$

(2)

差商表如下:

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
2.20	0.78846			
2.40	0.87547	0.43505		
2.60	0.95551	0.40010	-0.087375	
2.80	1.02962	0.37055	-0.073875	0.02250

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 0.78846 + 0.43505(x - 2.20) - 0.087375(x - 2.20)(x - 2.40) \\ &\quad + 0.0225(x - 2.20)(x - 2.40)(x - 2.60) \end{aligned}$$

## 附录 C 最小二乘法

给定数据表

$x$	1	2	3	4
$y$	0.8	0.75	0.6	0.5

求一次最小二乘拟合多项式。

解:

$$\text{令 } S(x) = a_0 + a_1x, \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, m = 3, n = 1$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^3 1 = 4, (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^3 x_i = 10, (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^3 x_i^2 = 30$$

$$(\varphi_0, y) = \sum_{i=0}^3 y_i = 2.65, (\varphi_1, y) = \sum_{i=0}^3 x_i y_i = 6.1$$

得方程组:

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 2.65 \\ 10a_0 + 30a_1 = 6.1 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} a_0 = 0.925 \\ a_1 = -0.105 \end{cases} \Rightarrow S(x) = -0.105x + 0.925$$

电流通过电阻，用伏安法测得的电压电流如表

$I(\text{A})$	1	2	4	6	8	10
$U(\text{V})$	1.8	3.7	8.2	12.0	15.8	20.2

用最小二乘法处理数据。

解:

1. 确定  $U = \varphi(I)$  的形式。将数据点描绘在坐标上可以看出这些点在一条直线的附近，故用线性拟合数据，即:

$$U = a_0 + a_1 I$$

2. 建立方程组:

$$U = a_0 + a_1 I, m = 6, \sum_{i=1}^6 I_k = 31, \sum_{i=1}^6 i_k^2 = 221$$
$$\sum_{i=1}^6 U_k = 61.7, \sum_{i=1}^6 I_k U_k = 442.4$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 6 & 31 \\ 31 & 221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61.7 \\ 442.4 \end{pmatrix}$$

3. 求经验公式, 解所得法方程组得:

$$a_0 = -0.215, a_1 = 2.032$$

所求经验公式为

$$U = -0.215 + 2.032I$$

## 附录 D 数值积分

### D.1 填空题

1. 梯形公式具有1次代数精度, Simpson 公式有3次代数精度。
2. 复化 Simpson 求积公式为:  $S_n(f) = \frac{h}{6} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1/2}) \right]$ , 该公式是4阶收敛的。
3. 求定积分  $\int_a^b f(x) dx$  的 Simpson 公式为  $S(f) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$ , 该数值求积公式具有3次代数精度。
4. 复化 Simpson 求积公式为:  $S_n(f) = \frac{h}{6} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1/2}) \right]$ , 该公式是4阶收敛的。
5. 当  $n = 2$  时的 Newton-Cotes 求积公式为  $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{b+a}{2}) + f(b)]$ , 该公式的代数精度为3次。

### D.2 计算题

求积公式  $\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$ , 已知其余项表达式为  $R(f) = k f''(\xi), \xi \in (0, 1)$ , 试确定系数  $A_0, A_1, B_0$ , 使该求积公式具有尽可能高的代数精度, 并给出代数精度的次数及求积公式余项。

解:

本题虽然用到了  $f'(0)$  的值, 仍用代数精度定义确定参数  $A_0, A_1, B_0$ 。令  $f(x) = 1, x, x^2$ , 分别代入求积公式, 令公式两端相等, 得:

$$\begin{cases} f(x) = 1, A_0 + A_1 = 1 \\ f(x) = x, A_1 + B_0 = \frac{1}{2} \\ f(x) = x^2, A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{2}{3} \\ A_1 = \frac{1}{3} \\ B_0 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

则有

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

再令  $f(x) = x^3$ , 此时  $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ , 而上式右端为  $\frac{1}{3}$ , 两端不相等, 故它的代数精度为 2 次。为求余项可将  $f(x) = x^3$  代入求积公式

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0) + kf''(\xi), \xi \in (0, 1)$$

当  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$ , 代入上式得

$$\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3} + 6k \Rightarrow k = -\frac{1}{72}$$

所以余项

$$R(f) = -\frac{1}{72}f''(\xi), \xi \in (0, 1)$$

求  $A, B$  使求积公式  $\int_{-1}^1 f(x) dx = A[f(-1) + f(1)] + B[f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})]$  的代数精度尽量高, 并求其代数精度; 利用此公式求  $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$  (保留四位小数)

解:

$f(x) = 1, x, x^2$  是精确成立, 即:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 2 \\ 2A + \frac{1}{2}B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

得:

$$A = \frac{1}{9}, B = \frac{8}{9}$$

求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{9}[f(-1) + f(1)] + \frac{8}{9}\left[f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

当  $f(x) = x^3$  时, 公式显然精确成立, 当  $f(x) = x^4$  时, 左  $\frac{2}{5}$ , 右  $\frac{1}{3}$ , 所以代数精度为 3。

令  $t = 2x - 3$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+3} dt = \frac{1}{9} \left( \frac{1}{-1+3} + \frac{1}{1+3} \right) + \frac{8}{9} \left( \frac{1}{-\frac{1}{2}+3} + \frac{1}{\frac{1}{2}+3} \right) = \frac{97}{140} \approx 0.69286$$

根据下面给出的函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  的数据表, 分别用复合梯形公式和复合辛甫生公式计算  $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

$x_k$	0.0000	0.125	0.250	0.375	0.500
$f(x_k)$	1	0.9973784	0.98961584	0.97672675	0.95885108
$x_k$	0.625	0.750	0.875	1.000	
$f(x_k)$	0.93615563	0.90885168	0.8719257	0.8417098	

解:

用复合梯形公式, 这里  $n = 8$ ,  $h = \frac{1}{8} = 0.125$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \\
 &\approx \frac{0.125}{2} \left\{ f(0) + 2 \left[ f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{2}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{4}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{6}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right] + f(1) \right\} \\
 &= 0.94569086
 \end{aligned}$$

用复合辛甫生公式, 这里  $n = 4$ ,  $h = \frac{1}{4}$ , 可得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \\
 &\approx \frac{0.25}{6} \left\{ f(0) + 4 \left[ f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right] + 2 \left[ f\left(\frac{2}{8}\right) + f\left(\frac{4}{8}\right) + f\left(\frac{6}{8}\right) \right] + f(1) \right\} \\
 &= 0.946083305
 \end{aligned}$$

试用梯形公式和 Simpson 公式计算定积分。  $\int_0^1 10x^4 dx$ , 并与精确解比较, 指出有几位有效数字。

解:

梯形公式:

$$T = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) = 0.5 \times 10 = 5$$

Simpson 公式:

$$S = \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0.5) + f(1)) \approx 0.20833 \times 10 = 2.0833$$

精确解:

$$\int_0^1 10x^4 dx = 0.2 \times 10 = 2$$

经过与精确解比较得知:

- 梯形公式的计算结果有 0 位有效数字;
- Simpson 公式的计算结果有 1 位有效数字。



选择函数  $a$ , 使  $\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + ah^2[f'(0) + f'(h)]$  的代数精度尽量高, 并求其代数精度。

解:

取  $f(x) = 1$ , 则上述求积公式中: 左  $= h$ , 右  $= h(1+1)/2 = h$ , 故左  $=$  右。

取  $f(x) = x$ , 则左  $= \frac{h^2}{2}$ , 右  $= \frac{h^2}{2} + ah^2(1+1)$ 。令  $\frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{2} + ah^2(1+1)$ , 得  $a = 0$  再取  $f(x) = x^2$ , 则左  $\neq$  右。当取  $a = 0$  时, 求积公式具有 1 次代数精度。

## 附录 E 解线性代数的直接方法

### E.1 计算题

将矩阵  $A$  分解为单位下三角矩阵  $L$  和上三角矩阵  $U$ ，其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}$  然后求解该方

程组  $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。

解：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

求解  $Ly = b$  得

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

求解  $Ux = y$  得方程的解为：

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

直接分解法对  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$  作  $LU$  分解， $L$  为单位下三角阵，给出  $L$  和  $U$  的具体形式。

解：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

用直接三角形分解 Doolittle 法解方程组（不选主元）

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 & 14 \\ 6 & 13 & 20 & 26 \\ 8 & 18 & 29 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 37 \\ 65 \\ 95 \end{pmatrix}$$

解:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 & 4 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = (14, 9, 5, 2)^\top, x = (1, 1, 1, 1)^\top$$

给定方程组  $Ax = b$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。

1. 用矩阵的直接三角分解法, 给出矩阵  $A$  的  $LU$  分解, 并求方程组解;
2. 计算  $\|A\|_1, \|A\|_\infty, \|b\|_1, \|b\|_2, \|b\|_\infty$ 。

解:

矩阵  $A$  的  $LU$  分解为:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

方程组的精确解为:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算结果为:

$$\|A\|_1 = 8, \|A\|_\infty = 10, \|b\|_1 = 25, \|b\|_2 = \sqrt{219} \approx 14.79865, \|b\|_\infty = 13$$

## 附录 F 解线性方程组得迭代解法

### F.1 填空题

1. 对矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $\|A\|_{\infty} = \underline{20}$ , 对向量  $b = (4, -3, 9)^{\top}$ ,  $\|b\|_{\infty} = \underline{9}$ 。
2. 对任意初始向量, 求解线性方程组  $Ax = b$  的迭代公式  $x^{k+1} = Gx^k + g, k = 0, 1, \dots$ , 产生的向量序列收敛到方程组唯一解的充分必要条件是矩阵  $G$  的谱半径  $\rho(G) < 1$ 。
3. 已知  $x = (1, -2)^{\top}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ , 则  $\|x\|_1 = 3, \|Ax\|_1 = \underline{16}$ 。
4. 已知  $x = (1, 2)^{\top}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ , 则  $\|x\|_2 = \underline{\sqrt{5}}, \|Ax\|_1 = \underline{8}$ 。
5. 已知  $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ , 如果用 Gauss-Seidel 迭代法解  $Ax = b$  的近似解, 迭代公式为 
$$\begin{cases} x_1^{n+1} = (7 + x_2^n + 2x_3^n)/10 \\ x_2^{n+1} = (6 - 2x_1^{n+1} + 3x_3^n)/7 \\ x_3^{n+1} = (5 - x_1^{n+1} + 2x_2^{n+1})/6 \end{cases}$$
 由于系数矩阵  $A$  为按行主对角占优的原因, 所以迭代法收敛 (提示: 填写收敛或发散)。
6. 对上题的方程组  $Ax = b$ , 如果要用 Gauss 消去法求解方程组的精确解, 则消元过程能 (请选择“能”或“不能”) 进行下去, 理由是: 系数矩阵  $A$  按行主对角占优。

### F.2 计算题

给定线性方程组 
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \end{cases}$$
 适当调整方程组, 给出收敛的 Gauss-Seidel 迭代公式。

代公式。

解:

将原方程改写为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-x_1 - 4x_3 + 12) \\ x_2 = \frac{1}{3}(8x_1 + 2x_3 - 20) \\ x_3 = 4x_1 + 11x_3 - 33 \end{cases}$$

Gauss-Seidel 公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-x_1^{(k)} - 4x_3^{(k)} + 12) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)} - 20) \\ x_3^{(k+1)} = 4x_1^{(k+1)} + 11x_3^{(k+1)} - 33 \end{cases}$$

$$\text{对方程组} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

1. 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由；
2. 取初值  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$ ，利用 (题1) 中建立的迭代公式求解，要求  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$ 。

解：

调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优：

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \end{cases}$$

故对应的高斯-赛德尔迭代法收敛，迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 10) \end{cases}$$

取  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$ ，经 7 步迭代可得：

$$x^* \approx x^{(7)} = (0.999991459, 0.999950326, 1.000010)^\top$$

$$\text{给定方程组} \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 8x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_4 = -9 \end{cases}。$$

1. 写出 Jacobi 迭代法的迭代公式, 判断其收敛性;
2. 写出 Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式, 判断其收敛性。

解:

(1) Jacobi 迭代公式为:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{5}(7 + x_2^k + x_3^k + x_4^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{7}(2 + x_1^k + 2x_3^k + x_4^k) \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{8}(3 + x_1^k + 2x_2^k + x_4^k) \\ x_4^{k+1} = -\frac{1}{5}(-9 + x_1^k + 2x_2^k) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

系数矩阵是主对角占优矩阵, 故 Jacobi 迭代法收敛。

(2) Gauss-Seidel 迭代公式为:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{5}(7 + x_2^k + x_3^k + x_4^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{7}(2 + x_1^k + 2x_3^k + x_4^k) \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{8}(3 + x_1^k + 2x_2^k + x_4^k) \\ x_4^{k+1} = -\frac{1}{5}(-9 + x_1^k + 2x_2^k) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

系数矩阵是主对角占优矩阵, 故 Gauss-Seidel 迭代法收敛。

$$\text{对方程组} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

1. 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式, 说明理由;
2. 取初值  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$ , 利用 (题1) 中建立的迭代公式求解, 要求  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$ 。

解:

调整方程组的位置, 使系数矩阵严格对角占优:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

故对应的高斯-塞德尔迭代法收敛。迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 15) \end{cases}$$

取  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$ ，经 7 步迭代可得：

$$x^* \approx x^{(7)} = (0.999991459, 0.999950326, 1.000010)^\top$$

## 附录 G 方程求根

### G.1 填空题

1. 对方程  $f(x) = (x-5)^3(x+2)$ , 可用牛顿迭代格式  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  求方程根的近似值, 若取初值为-1.5, 牛顿迭代格式收敛阶至少为2, 若取初值 4.5, 牛顿迭代格式收敛阶为1, 若采用修正的牛顿迭代格式  $x_{k+1} = x_k - 3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ , 可使得修正的牛顿迭代格式至少二阶收敛。
2. 方程  $x^3 - x - 1 = 0$  在区间  $[1, 2]$  根的牛顿迭代格式为  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{2x_k^3 + 1}{3x_k^2 - 1}$ 。

### G.2 计算题

用迭代法求方程  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ , 在  $[1, 1.5]$  内的根, 判断迭代格式的收敛性

1.  $x_{k+1} = x_k^3 + 4x_k^2 + x_k - 10$ ;
2.  $x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{x_k + 4}}$ 。

解: (1) 取  $x_0 = 1, x_{k+1} = x_k^3 + 4x_k^2 + x_k - 10$

$$x_1 = -4, x_2 = -14, x_3 = -1984$$

因此此迭代格式发散

$$\varphi(x) = x^3 + 4x^2 + x - 10$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 8x, \varphi''(x) = 6x + 8, \varphi'''(x) = 6 > 1$$

因此, 此迭代格式发散

$$(2) \text{ 取 } x_0 = 0, x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{x_k + 4}}$$

$x_1 = 1.5811, x_2 = 1.3386$ , 根为 1.3386, 此迭代方法收敛

用牛顿法求方程  $xe^x - 1 = 0$  的根,  $x_0 = 0.5$ , 计算结果准确到四位有效数字。

解:

根据牛顿法得:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{(1 + x_k)e^{x_k}}$$



取迭代结果如下表

$k$	$x_k$
0	0.5
1	0.57102
2	0.56716
3	0.56714

所以, 方程的根约为 0.56714

为求方程  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  在  $x_0 = 1.5$  附近的一个根, 要求:

1. 给出求解方程根的两种迭代公式;
2. 判断两种迭代公式的收敛性;
3. 写出求解上述方程的 Newton 迭代公式。

解:

(1) 方程的三种等价形式为:

1.  $x = 1 + \frac{1}{x^2}$ , 相应的迭代公式为:  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}$ ;

2.  $x^3 = 1 + x^2$ , 相应的迭代公式为:  $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2}$ 。

(2) 令  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ ,  $|\varphi'(1.5)| = \frac{2}{1.5^3} < 1$  第一种迭代法收敛。

令  $\varphi(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$ ,  $|\varphi'(1.5)| = \frac{2}{3} \times \frac{1.5}{(1+1.5^2)^{\frac{2}{3}}} = (\frac{\sqrt{8}}{1+2.25})^{\frac{2}{3}} < 1$  第二种迭代法收敛。

(3) 直线的两点公式为:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

把  $y_k = f(x_k) = x_k^3 - x_k^2 - 1$ ,  $y_{k+1} = 0$ ,  $k = f'(x_k) = 3x_k^2 - 2x_k$  代入方程整理得:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k^2 - 1}{3x_k^2 - 2x_k} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \frac{2x_k - 9}{3x_k^2 - 2x_k}$$

用牛顿迭代法计算  $\sqrt{0.78265}$  的近似值 (保留四位有效数字)。

解:

令  $x = \sqrt{0.78265}$  问题转化为求  $f(x) = x^2 - 0.78265 = 0$  的正根。

由牛顿迭代公式:  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 0.78265}{2x_k}$  取  $x_0 = 0.88$  迭代结果

$k$	0	1	2	3
$x_k$	0.880000	0.884688	0.884675	0.884675

满足了精度要求:  $\sqrt{0.78265} \approx 0.8847$ 。