计算方法

Cls[1]

期末复习资料

[1]点击进入作者的 github 主页

目录

第一章　引论

1.1　误差来源、分类

1. 模型误差：建立数学模型，这就要对实际问题进行抽象、简化，抓住主要特征、舍去次要特征，产生这种误差叫做模型误差；

2. 观测误差：由于测量工具的精度、观测方法或客观条件的限制，使数据含有测量误差，这类误差叫做观测误差或数据误差；

3. 截断误差 (方法误差)：精确公式用近似公式代替时，所产生的误差叫截断误差；

4. 舍入误差：由于计算机存储字长有限，用有限位数字代替精确数，这种误差叫做舍入误差。

1.2　误差、有效数字

1.2.1　绝对误差、绝对误差限

绝对误差定义：$e^* = x^* - x$，其中 x^* 为准确值 x 的近似值。
绝对误差限：$\varepsilon^* = |e^*|$ 的一个上界。
注：绝对误差还不能完全表示近似值的好坏。

1.2.2　相对误差、相对误差限

定义：$e_r^* = \frac{e^*}{x}$
例如：$x = 10 \pm 1, y = 1000{\pm}5, \frac{\varepsilon_x^*}{|x|} = 10\%, \frac{\varepsilon_y^*}{|y|} = 0.5\%$
实际计算时，相对误差通常取 $e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^*-x}{x^*}$
注：绝对误差、绝对误差限有量纲；相对误差、相对误差限无量纲。

1.2.3　有效数字

若近似值 x^* 的误差限是某一位数字的半个单位，该位到 x^* 的第一位数字共有 n 位，就说 x^* 有 n 位有效数字，可表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)})$$

其中 $a_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 是 0 到 9 中的一个数字，$a_1 \neq 0$，m 为整数，且 $|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$

例如，取 $x^*=3.14$ 做 π 的近似值，x^* 就看 3 位有效数字，取 $x^*=3.1416$，x^* 就有 5 位有效数字。

对于“四舍五入”的绝对误差限的说明

1. 通过四舍五入得到的数都是有效数；
2. 有效数字位数与小数点的位置无关；
3. 一般来说，有效位数越多，其误差值越小，但也有例外（如设 $x=1000$，它的两个近似值 999.9 和 1000.1，误差相同为 0.1，分别有 3，4 位有效数字）。

设近似数表示为 $x^*=\pm 10^m\times(a_1+a_2\times 10^{-1}+\cdots+a_n\times 10^{-(l-1)})$，其中 $a_i(i=1,2,\ldots,l)$ 是 0 到 9 中的一个数字，$a_1\neq 0$，m 为正整数，若 x^* 具有 n 位有效数字，则其相对误差限 $\varepsilon_r^*\leq\frac{1}{2a_l}\times 10^{-(n+1)}$

反之，若 x^* 的相对误差限 $\varepsilon_r^*\leq\frac{1}{2a_1+1}\times 10^{-(n+1)}$，则 x^* 至少具有 n 位有效数字。

1.2.4 数值计算的误差估计

记忆时可根据函数的导数法则，本质是误差的一阶泰勒展开。

$$\varepsilon(x_1^*\pm x_2^*)\approx\varepsilon(x_1^*)\pm\varepsilon(x_2^*)$$
$$\varepsilon(x_1^*x_2^*)\approx x_1^*\varepsilon(x_2^*)+x_2^*\varepsilon(x_1^*)$$
$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\approx\frac{x_2^*\varepsilon(x_1^*)-x_1^*\varepsilon(x_2^*)}{x_2^{*2}}$$
$$\varepsilon(y^*)\approx\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^*}\varepsilon(x_1^*)+\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^*}\varepsilon(x_2^*)$$

1.2.5 避免误差危害

一个算法如果输入数据有误差，而在计算过程中舍入误差不增长，则称此算法是数值稳定的，否则称此算法为不稳定的。

数值计算中为防止有效数字损失，通常要避免两相近数相减和用绝对值很小的数做除数，还要注意运算次序和减少运算次数。例如：（常考题，都用右端算式代替左端。）

1. 求 $x^2-16x+1=0$ 的小正根：$x_2=8-\sqrt{63}\approx 8-7.94=0.06=x_2^*$ 只有一位有效数字，若改用 $x_2=8-\sqrt{63}=\frac{1}{8+\sqrt{63}}\approx\frac{1}{15.94}\approx 0.0627$ 具有三位有效数字。这样便可以通过改变计算公式可以避免或者减少有效数字的损失。
2. 类似地，如果 x_1 和 x_2 接近时，则用 $\lg x_1-\lg x_2=\lg\frac{x_1}{x_2}$，可以避免有效数字的损失。
3. 当 x 很大时，$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$。

1.2.6　多项式求值的秦九韶算法

一个计算问题如果能减少运算次数，不但可节省计算量还可减少舍入误差，这是算法设计中一个重要原则。以求多项式为例，设给定 n 次多项式

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$$

求 x^* 处的值 $p(x^*)$。它可表示为

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = b_{i-1}x + a_i, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

则 $b_n = p(x^*)$ 即为所求。此算法被称为秦九韶算法。

第二章　插值法

2.1　预备知识

2.1.1　函数逼近

函数 $y=f(x)$ 不知其表达式，其值只能通过实验或观测的到，考虑用一个较为简单的函数 $P(x)$ 近似地表示 $f(x)$，其中 $f(x)$ 为被逼近函数 $P(x)$ 为逼近函数。

逼近的方法：插值与拟合。

2.1.2　插值问题

假设 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\{x_i\}\subset[a,b]$ 且互不相同。若存在简单函数 $P(x)$ 使得 $P(x_i)=y_i\quad(i=0,1,2\dots)$，则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。其中 $P(x_i)=y_i$ 被称为插值条件。

插值函数 $P(x)$ 有各种类型，如多项式，三角函数……

2.1.3　插值多项式的存在为唯一性

$$P(x)=a_0+a_1\times x+\cdots+a_nx^n\Rightarrow a_0+a_1\times x_i+\cdots+a_nx_i^n=y_i(i=0,1\dots)$$

其系数行列式刚好为范德蒙德行列式：

$$U=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{\substack{i,j=0\\ i>j}}^{n}(x_i-x_j)\neq 0$$

即 $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ 存在且唯一的 $(n+1)$ 个插值节点可构造 n 次插值多项式。

2.2　插值基函数与 Lagrange 插值

2.2.1　计算

$n=1$ 时，设 $y_i=f(x_i)(i=0,1)$，作直线方程 $y=L_1(x)$，两点式插值：

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

$n=2$ 时，设 $y_i=f(x_i)(i=0,1,2)$，作直线方程 $y=L_2(x)$，三点式插值：

$$L_2=(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

2.2.2 推广

$n=1$ 时，记 $l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$，则

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

$n=2$ 时，记 $l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$，则

$$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$$

一般地，令：$l_k=\prod\limits_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)},k=0,1,2\ldots$

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)y_k$$

其中称 $l_k(x)$ 为 Lagrange 插值基函数，$L_n(x)$ 为 Lagrange 插值多项式

$$l_k(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases}(i,k=0,1,2\ldots)$$

2.2.3 Lagrange 插值误差

设 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶可微，$P_n(x)$ 为 f 的 n 次插值多项式，则

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}W_{n+1}(x)$$

其中 $W_{n+1}(x)=\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)$，$\xi$ 依赖于 x。

证明：

易得：$x_0,x_1,\ldots,x_n$ 均为 $R_n(x)$ 的零点，根据零点可设:

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)W_{n+1}(x)$$

作辅助函数：$F(t)=f(t)-P_n(t)-R_n(t)$，有零点：$x_0,x_1,\ldots,x_n$。
由罗尔中值定理可知：$F(n+1)$ 有 1 个零点，$\xi\in[a,b]$，则：

$$F^{(n+1)}(\xi)-K(x)(n+1)!=0$$

得到：

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

利用余项表达式：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)$$

当 $f(x) = x^k (k \le n)$ 时，由于 $f^{(n+1)}(x) = 0$，于是有：

$$R_n(x) = x^k - \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = 0$$

由此得：

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = x^k, k = 0, 1, \ldots, n$$

当 $k = 0$ 时，有:（填空题常考）

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$$

2.3 牛顿插值

2.3.1 计算

记 $f[x,y] = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$（一阶差商）$f[x,y,z] = \frac{f[y,z]-f[x,y]}{z-x}$（二阶差商）。则：
两点公式为

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

三点公式为

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

基函数为

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots$$

其系数称为均差（差商）。
一般地：

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{x-1}]}{x_k - x_0}$$

均差与节点的排列顺序无关，从而：

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k] = [x_{k-1}, x_1, \ldots, x_{k-2}, x_0, x_k]$$

牛顿插值只需要第一排的差商

牛顿插值公式

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) + f[x, x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

表 2.1: 差商表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$F[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,\ldots]$

2.3.2　等距节点的牛顿插值（了解）

设 $f_k = f(x_k)$，则

称 $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$ 为 f 在 $x = x_k$ 处的一阶向前差分，Δ 称为向前差分算子。

称 $\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$ 为 f 在 $x = x_k$ 处的一阶向后差分，∇ 称为简后差分算子。

$\Delta^m f_k = \Delta^{m-1} f_{k+1} - \Delta^{m-1} f_k$ 为 f 在 $x = x_k$ 处的 m 阶向前差分。

$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$ 为 f 在 $x = x_k$ 处的 m 阶向后差分。

$$\Delta^m f_k = \nabla^m f_{k+m}$$

均差与差分有如下关系

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k} = f[x_k,x_{k-1},x,\ldots,x_0] = \frac{\nabla^k f_k}{k!h^k}$$

前插公式（x 在 x_0 附近）

设 $x_k = x_0 + kh(h = 0,1,2,\ldots,n)$ 插值点 $x = x_0 + th(t = 0)$

则 $h = \frac{x_n - x_0}{n}, t = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x - x_k = (t-k)h$

牛顿插值公式中一项式化为：

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)h = \frac{\Delta^k f_0}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)$$

$$\Rightarrow N_n(x) = N_n(x_0+th) = f_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta^k f_0}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)$$

后插公式（x 在 x_n 附近）

$$x_{n-k} = x_n + kh, x = x_n + th(t<0)$$

$$(h = \frac{x_n - x_0}{n}, t = \frac{x - x_n}{h}, x - x_{n-k} = (t+k)h)$$

$$\therefore N_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\nabla^k f_0}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(t+i)$$

2.4　分段插值

插值多项式的次数越高，误差不一定越小。

2.4.1　分段线性 Lagrange 插值

取相邻节点，构成插值子区间：$[x_k, x_{k+1}], h_k = x_{k+1} - x_k$
在子区间上应用两点公式：$L_n^{(k)}(x) = \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}y_k + \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}y_{k+1}$
令

$$L_n(x) = \begin{cases} L_n^0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ L_n^1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ & \vdots \\ L_n^{(n-1)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

（分段函数，计算简单，但光滑性较差）

2.4.2　分段 2 次插值

将每 3 个节点分为一段，每段都为抛物线
在每个区间内利用三点 Lagrange 插值即可，$(L_3(x) = L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2)$

2.5　厄米特插值

分段多次插值无法保证插值函数在节点处的光滑性，希望得到光滑性的插值函数 (与原函数在节点处相切)，这就是插值问题。

已知 $y_i = f(x_i), y_i' = f'(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$ 求插值函数 $H(x)$ 满足：$H(x_i) = y_i, H'(x_i) = y_i'$

2.5.1　两点三次插值

$$H(x) = y_0\alpha_0(x) + y_0'\beta_0(x) + y_1\alpha_1(x) + y_1'\beta_1(x)$$

其中

$$\alpha_i(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_i}{x_i - x_j}\right)\left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)^2 \quad (i = 0, 1)$$
$$\beta_i(x) = (x - x_i)\left(\frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}\right)^2 \quad (i = 0, 1)$$

第三章　最小二乘法

3.1　定义

在函数类 $\phi = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ 中求函数 $S^*(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j^* \rho_j(x)$，使

$$\sum_{i=0}^{m} W_i (S^*(x_i) - y_i)^2 = \min_{(S\in\phi)} \sum_{i=0}^{m} W_i (S(x_i) - y_i)^2$$

称 $S^*(x)$ 为最小二乘拟合函数。

3.2　计算

如何确定 S^* 的构造，即求 $\phi = \mathrm{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$。

通过观繁数据点的分布情况，若像直线，则设 $S^*(x) = a_0 + a_1 x$；若像抛物线，则设 $S^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

设 $\varphi = (a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{i=0}^{m} W_i (S^*(x_i) - y_i)^2 = \sum\limits_{i=0}^{m} W_i (\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i)^2$

注：基函数确定后，因为节点已知，所以 $\sum\limits_{i=0}^{m} W_i (S^*(x_i) - y_i)^2$ 的值只与 a_i 有关。

若要 $\sum\limits_{i=0}^{m} W_i (S^*(x_i) - y_i)^2$ 最小，则使 φ 最小，取其极小值 $(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial a_k} = 0$（必要条件）

$$2\sum_{i=0}^{m} W_i \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right) \varphi_k(x_i) W_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m} W_i \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right) \varphi_k(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m} W_i \varphi_k(x_i) \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = \sum_{i=0}^{m} W_i y_i \varphi_k(x_i)$$

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{m} W_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) a_j \right) = \sum_{i=0}^{m} W_i y_i \varphi_k(x_i)$$

设

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} W_i \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i), (f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} W_i y_i \varphi_k(x_i) = (\varphi_k, f)$$

则

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k)\quad(k=0,1,2,\dots,n)$$

转化为矩阵形式

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_0)\\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

解方程组：

$$(a_0^*,a_1^*,\dots,a_n^*)$$

最小二乘函数：

$$S^*(x)=a_0^*\varphi_0(x),a_1^*\varphi_1(x),\dots,a_n^*\varphi_n(x)$$

最小二乘的平方误差：

$$\|\delta_i\|_2^2=\sum_{i=0}^{m}W_i(S^*(x_i)-y_i)^2=\left|\sum_{i=0}^{m}W_iy_i^2-\sum_{j=0}^{n}a_j^*(\varphi_j,f)\right|$$

若 $\mathrm{span}\{\varphi_0(x),\dots,\varphi_n(x)\}$ 为正交多项式,
即

$$(\varphi_i(x),\varphi_j(x))=\begin{cases}0,i\neq j\\ 1,i=j\end{cases}$$

则法方程组可化为：

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & \square & \cdots & \square\\ \square & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & \square\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \square & \square & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

3.3　常用正交多项式

3.3.1　勒让德多项式

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & ,m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1} & ,m=n\end{cases}$$

递推关系：

$$\begin{cases}P_0(x)=1,P_1(x)=x\\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x),n=1,2,\dots\end{cases}$$

$P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有必互异的实零点

3.3.2 切比雪夫多项式

权函数 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & ,m \neq n \\ \pi/2 & ,m = n \\ \pi & ,m = n = 0 \end{cases}$$

递推关系：

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

或

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta\cos(n-1)\theta, n \geq 1$$

代入 $x = \cos\theta$ 即得递推关系

3.4 矛盾方程组求解

对于方程组 $Ax = b$，若 $R(A,b) = R(A)$，则有解。

若 $R(A,b) \neq R(A)$，则称矛盾方程组，其解即最小二乘解是指在均方误差极小意义下的解，即 $\min \|Ax - b\|_2^2$

方程 $A^\top Ax = A^\top b$ 称为矛盾方程组 $Ax = b$ 的法方程，两解等同。

求解拟合曲线的极小值问题与求解矛盾方程组的法方程等价，即求解拟合曲线的极小问题可转化为求解方程组：$A^\top Ax = A^\top b$

例：求解拟合函数 $S^*(x) = a_0 + a_1x$，则可将所有节点代入 $S^*(x)$，构成一个关于 (a_0, a_1) 的方程组 $Aa = b \Rightarrow A^\top Aa = A^\top b$

第四章　数值积分

有些积分不能用 Nowton–leibniz 公式求解，从而采用用数值计算的办法解决。

4.1　基本思路

积分中值定理

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

4.2　公式

1. 梯形公式：取 $f(\xi)(b-a) \approx \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$, 则有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$
2. 中矩形公式：取 $f(\xi) \approx f\left(\frac{b+a}{2}\right)$，则有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)$

4.3　机械求积

考虑在 $[a,b]$ 上选取某些节点 x_k，以 $f(x_k)$ 的加权平均 $\frac{1}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ 来近似 $f(\xi)$，则有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$（$A_i$ 相当于两节点的间距）A_i 只与 x_i 的选取有关。

由于 $f(x)$ 的函数形式不一定已知，因此求出 $f(x)$ 的近似形式，即插值公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Lagrange 插值：$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$，其中 x_k 为节点，x 为所求点。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b R_n(x)\,\mathrm{d}x$$

则令 $A = \int_a^b \prod\limits_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_i-x_j)}\,\mathrm{d}x$，若节点等距分布，将 $[a,b]$ 分成 n 等分，$h = \frac{b-a}{n}, x_k = a+kh$

$$x = a+th(0 \le t \le n) \Rightarrow \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_0^n \prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n} \frac{t-j}{i-j} h\,\mathrm{d}t = h\prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n}\frac{1}{i-j}\int_0^n \prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t\\
&= h\frac{(-1)^{n-i}}{\prod\limits_{j=0}^{i=0}(i-j)\prod\limits_{j=i+1}^{n}(i-j)}\int_0^n \prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t\\
&= h\frac{(-1)^{n-i}}{j!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{(b-a)(-1)^{n-i}}{nj!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t = (b-a)\mathrm{C}_k^{(n)}
\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{C}_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{i\neq j\\ j=0}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t \qquad h=\frac{b-a}{n}$$

当 $n=1$ 时：

$$\begin{cases}\mathrm{C}_0^{(1)} = -1\times\int_0^1(t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\\ \mathrm{C}_1^{(1)} = 1\times\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\text{（梯形公式）}$$

当 $n=2$ 时：

$$\begin{cases}\mathrm{C}_0^{(2)} = \frac{1}{4}\times\int_0^2(t-1)(t-2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\\ \mathrm{C}_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\times\int_0^2 t(t-2)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{6}\\ \mathrm{C}_2^{(2)} = \frac{1}{4}\times\int_0^2 t(t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\text{（simpson 公式）}$$

当 $n=4$ 时：

$$\therefore \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}[7f(a)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(b)]\text{（cotes 公式）}$$

4.4　代数精度—衡量求积公式的精度

如果某个求积公式对于次数不超过 m 的多项式准确的成立，但对于 $m+1$ 次多项式就不准确地成立，则该求积公式有 m 次代数精度。

设有求积公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，要使它具有 m 次代数精度，只要令它对于 $f(x) =$

$1, x, \ldots, x^m$ 都能准确成立，这就要求：

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k = b - a \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\ \cdots \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}) \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1} \neq \frac{1}{m+2}(b^{m+2} - a^{m+2}) \end{cases}$$

例题：求数值求积公式 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left[2f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$ 的代数精度。

解：

当 $f(x) = 1$ 时，

$$\frac{1}{3}(2 - 1 + 2) = 1$$

当 $f(x) = x$ 时，

$$\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

当 $f(x) = x^2$ 时，

$$\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{9}{16}\right) = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

当 $f(x) = x^3$ 时，

$$\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{27}{64}\right) = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

当 $f(x) = x^4$ 时，

$$\frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{256} - \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{81}{256}\right) \neq \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$$

因此代数精度为：3

注：

1. 同一求积公式即 A_k 相同，针对不同函数，精度是不相同的。
2. 梯形公式，simpson 公式，cotes 公式分别具有 1，3，5 次代数精度。
3. 当 n 为偶数时，Newtou-cotes 公式至少具有 $n+1$ 代数精度。

4.5　复化求积公式

考虑将 $[a, b]$ 分为小区间，每个小区间上用低阶公式，再将结果求和。

4.5.1 复化梯形公式

令 $f(x_0)=f(a), f(x_n)=f(b)$，在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用梯形公式：

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$$

$$\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1})) = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

4.5.2 复化 simpson 公式

在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用 simpson 公式：

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{6}\left(f(x_k)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f(x_{k+1})\right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1/2})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

4.5.3 复化 cotes 公式

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{90}[7f(x_k)+32f(x_{k+1/4})+12f(x_{k+1/2})+32f(x_{k+3/4})+7f(x_{x+1})]$$

4.6 复化求积公式余项

复化梯形：$R_{T_n}(f)=\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta)\approx\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)](b-a)$

复化 simpson：$R_{S_n}(f)=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(y)\approx-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)]$

复化 cotes：$R_{C_n}(f)=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^{(6)}(y)\approx-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6[f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)]$

第五章　解线性方程的直接方法

5.1　非奇异矩阵

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果 $AB = BA = I$，则称 B 是 A 的逆矩阵，记为 A^{-1}，且 $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$，如果 A^{-1} 存在，则称 A 为非奇异矩阵。如果 A, B 均为非奇异矩阵，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

5.2　矩阵的特征值与谱半径

1. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若存在数 λ 和非零向量 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，使 $Ax = \lambda x$，则称 λ 为 A 的特征值，x 为 A 对应 λ 的特征向量，A 的全体特征值称为 A 的谱，记作 $\sigma(A)$，即 $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，记 $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$，则称为矩阵 A 的谱半径。
2. 通过求 $\det(\lambda I - A) = 0$，得到 A 的特征值（具体分析过程可复习线代），谱半径则是判断特征值绝对值的最大值。

5.3　Gauss 消去法

对于 $Ax = b$ 的矩阵形式。

考虑增广矩阵 $(A|b)$ 行变换为 $(A^{(n)}|b^{(n)})$，其中 $A^{(n)}$ 上三角矩阵。（初等行变换）

例题：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

用 Gauss 消去法为：

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_3 = -6 \end{cases}$$

求得 $x = (1, 2, 3)^\top$

（与线性代数中的解法是一致的，考试中如果考到高斯消元法，就这样一步一步来，是没有问题的）

总运算次数：$\frac{n^3}{3} + O(n^2) = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$

5.4 列主元素 Gauss 消元法

为避免小主元作除数，在 $A^{(k)}$ 的第 k 列主对角线以下元素中挑选绝对值最大者，并通过行变换使之位于主对角线上作为主元素。

不带行变换的消元过程：消元 $\rightarrow$ 行变换 $\rightarrow$ 左乘初等矩阵。

$$L_K(A^{(k)}|b^{(k)}) = (A^{(k+1)}|b^{(k+1)}) \Rightarrow L_{K-1}L_{K-2}\cdots L_2L_1(A^{(1)}|b^{(1)}) = (A^{(k)}|b^{(k)})$$

其中 $L_{K-1}L_{K-2}\cdots L_1A^{(1)} = A^{(k)} \Rightarrow L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1A^{(1)} = A^{(n)}$

$$\begin{aligned} &\because A^{(1)} = A \\ &\therefore A = (L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1)^{-1}A^{(n)} = LU \\ &\Rightarrow \begin{cases} L = (L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1)^{-1} \quad \text{单位下三角矩阵} \\ U = A^{(n)} \quad \text{上三角矩阵} \end{cases} \end{aligned}$$

称 $A = LU$ 为矩阵 A 的 LU 分解

5.5 直接三角分解法（重点考察）

若有三角阵 L, U，使 $A = LU$，则方程组 $Ax = b \rightarrow LUx = b \rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

注：LU 分解的条件：A 的各阶顺序主子列不为零，$D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \ldots, D_{n-1} \neq 0$

5.6 不选主元的 Doolittle 分解（重点考察）

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\l_{21}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&1\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1n}\\0&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&u_{nn}\end{pmatrix}$$

$$a_{ij}=\sum_{s=1}^{\min\{ij\}} l_{is}u_{si}\quad 1\le i,j\le n$$

计算 U 第 r 个行，L 的第 r 列元素 $(r=2,3,\dots,n)$

$$u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{ki}\quad (i=r,r+1,\dots,n) \tag{5.1}$$

$$l_{ir}=\frac{1}{u_{rr}}\left(a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr}\right)\quad (i=r+1,\dots,n\wedge r\neq n) \tag{5.2}$$

注意 L 和 U 的特征，L 是下三角矩阵，且对角线元素都是 1，U 为上三角矩阵，对角线元素需要计算求得。

例题：用直接三角法解：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\18\\20\end{pmatrix}$$

用 (5.1)(5.2) 计算得：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{pmatrix}=LU$$

求解 $Ly=(14,18,20)^\top$，得 $y=(14,-10,-72)^\top$

$Ux=(14,-10,-72)^\top$，得 $x=(1,2,3)^\top$

5.7 列主元的 Doolittle 分解（了解）

通过行变换，使对对角元最大（即左乘一个初等矩阵 P）

$$\therefore Ax=b\Rightarrow PAx=Pb\Rightarrow LUx=Pb$$
$$\therefore PA=LU$$
$$\therefore\begin{cases}|A|=\pm|L||U|=\pm|U|\\A^{-1}=U^{-1}L^{-1}P\end{cases}\quad [\pm\text{由换行次数确定}](\text{行列式的计算})$$

注：在不选主元的 Doolitle 分解的基础上，通过行变换选主元。每一步变换后都可做行变换选主元。$Ux=L^{-1}Pb$(紧凑格式的最后一列)

5.8 平方根法（系数矩阵为正定对称矩阵）

5.8.1 正定矩阵

若 A 为对称正定矩阵，则存在唯一的对角元素全为正的下三角阵 L，使 $A = LL^\top$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}$$

直接运用矩阵乘法求解 L 的元素：

$$\begin{cases} a_u = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_u} \\ a_i = l_{11} l_i \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{1i}}{l_{11}} \\ \cdots \end{cases}$$

求解根：$Ax = b \Rightarrow LL^\top x \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^\top x = y \end{cases}$

5.8.2 平方根的改进方法

若对称矩阵 A 各阶顺序主子式不为 0 时，则 A 可以唯一分解为 $A = LDL^\top$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \square & \square & \cdots & \square \\ l_{21} & 1 & \square & \cdots & \square \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & \square & \cdots & \square \\ \square & d_1 & \cdots & \square \\ \square & \square & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \cdots & d_1 \end{pmatrix}$$

$A = LDL^\top = LU$，可用 LU 分解的紧凑格式计算 L

第六章　解线性方程组的迭代解法

6.1　定义

对于线性方程组 $AX=b$，考虑等阶方程组 $X=BX+f$
向量迭代公式：$x^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$

6.2　距离函数应满足的性质

1. 正定性：$\forall x\in U, N(x)\geq 0$
2. 齐次性：$\forall k\in\mathbb{R}, N(kx)=|k|N(x)$
3. 三角不等式：$N(x+y)\leq N(x)+N(y)$

6.3　P 范数

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

最大模范数：

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

绝对值范数：

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

常见几种范数的关系：

$$\begin{cases}\|x\|_\infty\leq\|x\|_1\leq n\|x\|_\infty\\ \|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\|x\|_\infty\\ \|x\|_2\leq\|x\|_1\leq\sqrt{n}\|x\|_2\end{cases}$$

6.4　向量间的距离

设向量 $xy\in\mathbb{R}^n$，则称 $\|x-y\|$ 为，x,y 之间的距离 ($\mathbb{R}^n$ 上的任一种向量范数)

6.5　矩阵范数

只考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的方阵

若对应一个实数 $\|A\|$，满足：

$$\begin{cases} \|A\| > 0 \wedge \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ \|KA\| = \|K\|\|A\| \\ \|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| \le \|A\|\|B\| \end{cases}$$

则称 $\|A\|$ 为方阵的范数

6.6　算子范数

设 $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\|\cdot\|$ 为向量范数，称 $\|A\| = \max\limits_{x\neq 0, x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$ 为矩阵 A 的算子范数。

常见的算子范数：

1. $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|X\|=1} \|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow$ 行范数（每行元素绝对值相）；
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{\|X\|=1} \|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \Rightarrow$ 列范数；
3. $\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|=1} \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)} \Rightarrow 2$ 范数，其中 $\lambda_{\max}(A^\top A)$ 为矩阵 $A^\top A$ 的绝对值最大的特征值。

设 $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 为 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 n 个特征值，则称 $\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ 为 A 的谱半径。

设 A 非奇异，$\|\cdot\|$ 为算子范数，则称 $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ 矩阵 A 的条件数。

条件数的值与范数的类型有关：

$$\begin{cases} \mathrm{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \\ \mathrm{cond}(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\sigma_{\max}}} \end{cases}$$

$\lambda_{\min}$ 为 $A^\top A$ 的特征值。若 $\mathrm{cond}(A) \gg 1$，则称 $Ax = b$ 为病态方程组。

6.7　线性方程组的迭代解法

$$x^{(k+1)} = BX^{(k)} + f \Rightarrow x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} + f$$

其中 B 称为迭代矩阵。如果 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k$ 存在（记为 x^*），称此迭代法收敛，显然 x^* 是此方程组的解，否则称此迭代法发散。

$x^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$ 收敛的充要条件是矩阵 B 得谱半径 $\rho(B) < 1$

6.7.1 G-S 法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 可逆，且 $a_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$，则有：

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j (i = 1, 2, \dots, n) \tag{6.1}$$

可得

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

写成迭代格式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

又式6.1写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

即：$DX = LX + UX + b$，其中 $D - L - U = A$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

得到 $x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$

$$\therefore B_j(\text{迭代矩阵}) = -D^{-1}(L + U), f_j = D^{-1}b \Rightarrow x = D_jx + f_j$$

则有 Jacobi 迭代的矩阵形式：

$$x^{(k+1)} = B_j x^{(k)} + f_j$$

例题：将方程组 $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$ 写成 Jacobi 迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

6.7.2 G–S 法

考虑 Jacobi 迭代分量式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i}^{i_1} a_{ij} x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

通常计算值 $x_j^{(k+1)}$ 比前一步计算值 $x_j^{(k)}$ 更精确

取 $x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum\limits_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$ 称为高斯–赛德尔迭代

将方程组 $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$ 写成 G–S 迭代格式

迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(33 - 4x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(12 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

6.7.3 SOR 法

迭代公式写法:

$$\begin{aligned} &Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} + \omega(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)} + b) \\ &\therefore (D - \omega L)x^{(k+1)} = (D + U\omega - \omega D)x^{(k)} + \omega b \\ &\therefore x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] + (D - \omega U)^{-1}\omega b \\ &\Rightarrow B_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] \end{aligned}$$

1. 严格对角占优矩阵：A 的元素要满足：$|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n$

2. 弱对角占优矩阵：A 的元素要满足：$|a_{ii}| \geq \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n$

3. 迭代的收敛性：

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

6.7.4 J 法

1. $B_j = D^{-1}(L + U)$

2. $\rho(B_j) < 1$

3. $\|B_j\| < 1$

4. A 严格对角占优，或 A 经行变换后的矩阵严格对角占优

6.7.5 G–S 法

1. $B_G = (D - L)^{-1}U$

2. $\rho(B_G) < 1$

3. $\|B_G\| < 1$

4. A 或 A 经行变换后严格对角占优

5. $\|B_j\|_\infty < 1$

6.7.6 SOR 法（了解）

1. 若 A 的对角无均不为 0，则收敛的必要条件 $0 < \omega < 2$

2. 着 A 严格对角占优，则当 $0 < \omega < 1$ 时收敛

3. 若 A 为正定矩阵，则当 $0 < \omega < 2$ 时收敛

第七章　方程求根

7.1　收敛

若一个迭代法收敛，x^* 是方程 $f(x)=0$ 的一个根，则令 $e_k = xk - x^*$。若存在实数 P 和非零常数 C，使得：$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$，则称该达代法为 P 阶收效 $P=1$ 为线性收敏，$P>1$ 为超线性收敏，$P=2$ 为平方收敛。

7.2　二分法求根

利用 $f(a)f(b)<0$，决定 $[a,b]$ 间存在根，再取 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdots$

7.3　不动点迭代

将 $f(x)=0$ 化为 $x=\varphi(x)$，取迭代方程为 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，其中 $p(x)$ 称为迭代函数。

- 不动点迭代的误差：$|x-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$，$L$ 为小于 1 的正实数；
- 收敛性判断：若迭代收敛，设 $\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，且 $|\varphi'(x)|\le|L|$，则迭代收敛；
- 收敛速度：若迭代收敛，设 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为 $P(\ge 2)$ 次可微，且在 $x=\varphi(x)$ 的根 x^* 处有 $\begin{cases}\varphi^{(j)}(x^*)=0\\ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0\end{cases}, \underbrace{j=1,2,\ldots,P-1}_{\text{不是从 0 开始}}$ 则不动点迭代为 P 阶收敛。

注：

1. 若题目中说，根在 x' 附近，则代入 x' 也可。
2. 局部收敛：若题中告诉了根的大概值 x'，判断收敛性，$|\varphi'(x')|<1$ 收敛且 $|\varphi'(x')|<1$ 越小, 收敛性越好。

7.4　Newton 迭代法

设 x_k 是 $f(x)=0$ 的根 x^* 的一个近似值

$$\underbrace{f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)}_{\text{泰勒公式}}=0\Rightarrow x=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

迭代公式：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

1. 收敛性：若 $f(x)$ 在解 x^* 附近二阶连续可导，且 $f'(x) \neq 0$（即 x^* 为单根），则在 x^* 附近，Newton 序列至少二阶敛于 x^*。
2. 收敛性判断 $x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 则相当于 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow |\varphi'(x)| < 1$ 则 Newton 迭代收敛。
3. 收敛速度：同不动点迭代。

7.5　牛顿下山法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \ldots$$

重根情形：设 $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$，整数 $m \geq 2$，$g(x^*) \pm 0$，则 x^* 为 $f(x)$ 的 m 重根，此时有 $f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, f^{(m)}(x^*) \neq 0$。只要 $f'(x_k) \neq 0$ 仍可用牛顿法计算，此时迭代函数 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 的导数满足 $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{m} < 1$，所以牛顿法求重根只是线性收敛，若取 $\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$，则 $\varphi'(x^*) = 0$，用迭代法 $x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 求重根，则具有二阶收敛性（但要知道 x^* 的重数 m）。

7.6　弦截法迭代

在不动点法基础上，以差商代替导数
单点：差商：$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$，则迭代公式：$x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0)$
双点：差商：$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$，则迭代公式：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$
收敛阶数约为 1.618

7.7　迭代加速

Aitken 加速

$$\bar{x}_k = x_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}$$

但要求 $P = 1$

附录 A　引论

A.1　填空题

1. 设 $x_1 = 1.219, x_2 = 3.661$ 均具有 3 位有效数字，则 $x_1 + x_2$ 的误差限为$\underline{0.01}$。

2. 为了使计算 $y = 10 + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{6}{(x-1)^3}$ 的乘除法次数尽量地少，应将该表达式改写为$\underline{y = 10 + (3 + (4 - 6t)t)t, t = \frac{1}{x-1}}$，为了减少舍入误差，应将表达式 $\sqrt{2021} - \sqrt{1999}$ 改写为$\underline{\frac{2}{\sqrt{2021}+\sqrt{1999}}}$。

3. 为了减少舍入误差的影响，当 $x \approx y$ 应将表达式 $\lg x - \lg y$ 改写为$\underline{\lg(x/y)}$。

4. 计算方法实际计算时，对数据只能取有限位表示，这时所产生的误差叫舍入 误差。

5. 设 $x_1 = 1.216, x_2 = 3.654$ 均具有 3 位有效数字，则 $x_1 + x_2$ 的误差限为$\underline{0.01}$。

6. 已知数 $e = 2.718281828\ldots$，取近似值 $x = 2.7182$，那么 x 具有的有效数字是$\underline{4}$。

A.2　计算题

已知测量某长方形场地的长 $a = 110$ 米，宽 $b = 80$ 米。若 $|a - a^*| \le 0.1$（米），$|b - b^*| \le 0.1$（米）试求其面积的绝对误差限和相对误差限。

解：

设长方形的面积为 $s = ab$

当 $a = 110, b = 80$ 时，有 $s = 110 \times 80 = 8800(m^2)$。此时，该近似值的绝对误差可估计为：

$$\Delta(s) \approx \frac{\partial s}{\partial a}\Delta(a) + \frac{\partial s}{\partial b}\Delta(b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$$

相对误差可估计为：

$$\Delta_r(s) = \frac{\Delta(s)}{s}$$

而已知长方形长、宽的数据的绝对误差满足

$$|\Delta(a)| \le 0.1, |\Delta(b)| \le 0.1$$

故求得该长方形的绝对误差限和相对误差限分别为

$$|\Delta(s)| \le b|\Delta(a)| + a|\Delta(b)| \le 80 \times 0.1 + 110 \times 0.1 = 19.0$$

$$|\Delta_r(s)| = \left|\frac{\Delta s}{s}\right| \le \frac{19.0}{8800} = 0.002159$$

绝对误差限为 19.0；相对误差限为 0.002159。

测得某桌面的长 a 的近似值 $a^* = 120\text{cm}$，宽 b 的近似值 $b^* = 60\text{cm}$。若已知 $|e(a^*)| \leq 0.2\text{cm}, |e(b^*)| \leq 0.1\text{cm}$。试求近似面积 $s^* = a^* b^*$ 的绝对误差限与相对误差限。

解：

面积 $s = ab$，则绝对误差限为：

$$e(s^*) = \frac{\partial s(a^*, b^*)}{\partial a} e(a^*) + \frac{\partial s(a^*, b^*)}{\partial b} e(b^*) = b^* e(a^*) + a^* e(b^*)$$

$$|e(s^*)| \leq |b^*||e(a^*)| + |a^*||e(b^*)| \leq 60 \times 0.2 + 120 \times 0.1 = 24\text{cm}^2$$

相对误差限为：

$$|e_r(s^*)| = \left|\frac{e(s^*)}{s^*}\right| \leq \frac{24}{120 \times 60} = 0.33\%$$

附录 B 插值法

B.1 填空题

1. 已知 $f(x)=2x^3+5$，则 $f[1,2,3,4]=\underline{2}; f[1,2,3,4,5]=\underline{0}$。
2. 设 $x_0,x_1,\ldots,x_n(n\geq 5)$ 为互不相同的节点，则插值多项式 $\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(s)x_k^2=\underline{x^2}$。
3. 称 $f[x_0,x_1]=\underline{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0,x_1 的一阶差商（均差），称 $f[x_0,x_1,x_2]=\underline{\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0,x_1,x_2 的二阶差商。

B.2 计算题

当 $x=-1,1,2$ 时，对应的函数值分别为 $f(x)=-3,0,4$，求 $f(x)$ 的二次拉格朗日插值插值多项式，并给出插值余项。

解：

取 $x_0=-1,x_1=1,x_2=2,y_0=-3,y_1=0,y_2=4$

$$\begin{aligned}L_2(x)&=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\&=-3\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(-2)\cdot(-3)}+4\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{3\cdot 1}\\&=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}\end{aligned}$$

插值余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x+1)(x-1)(x-2)$$

已知

x_1	1	3	4	5
$f(x_i)$	2	6	5	4

分别用拉格朗日插值法和牛顿插值法求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $P_3(x)$

解:

$$L_3(x) = 2\tfrac{(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-3)(1-4)(1-5)} + 6\tfrac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-4)(3-5)} + 5\tfrac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-3)(4-5)} + 4\tfrac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-3)(5-4)}$$

差商表为

x_i	y_i	一阶均差	二阶均差	三阶均差
1	2			
3	6	2		
4	5	-1	-1	
5	4	-1	0	1/4

$$P_3(x) = N_3(x) = 2 + 2(x-1) - (x-1)(x-3) + \frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-4)$$

已知下列函数表：

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	9	27

1. 写出相应的三次拉格朗日插值多项式;
2. 作均差表，写出相应的三次 Newton 插值多项式，并计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解:

（1）

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \tfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + \tfrac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + \tfrac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + \tfrac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\ &= \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x + 1 \end{aligned}$$

（2）差商表：

x_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	4/3

$$N_3(x) = 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$f(1.5) \approx N_3(1.5) = 5$$

依据如下函数值表：

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

1. 建立三次 Lagrange 插值多项式，并给出插值余项；
2. 建立三次 Newton 插值多项式，要求列出差商表。

解：

（1）

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &= 1\tfrac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + 9\tfrac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} + 23\tfrac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} + 3\tfrac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} \\
&= -\frac{11}{4}x^3 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1
\end{aligned}
$$

插值余项：

$$
R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)(x-2)(x-4)
$$

（2）建立差商表如下

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
0	1			
1	9	8		
2	23	14	3	
4	3	-10	-8	-11/4

Newton 前插公式为

$$
N_3(x) = -\frac{11}{4}(x-2)(x-1)x + 3(x-1)x + 8x + 1
$$

已知 $f(x)$ 的以下下数据：

x	1	2	3
$f(x)$	1.0000	1.4142	1.7321

1. 求以如上数据为插值结点的 Lagrange 多项式；
2. 给定数据表 $f(x) = \ln x$ 数据表

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80
$f(x_i)$	0.78846	0.87547	0.95551	1.02962

构造差商表，写出三次 Newton 差商插值多项式 $N_3(x)$。

解:

（1）

Lagrange 插值多项式为：

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 1.0\tfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 1.4142\tfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 1.7321\tfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \\ &= -0.04815x^2 + 0.55865x + 0.4895 \end{aligned}$$

（2）

差商表如下：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
2.20	0.78846			
2.40	0.87547	0.43505		
2.60	0.95551	0.40010	-0.087375	
2.80	1.02962	0.37055	-0.073875	0.02250

$$\begin{aligned} N_3(x) = {} & 0.78846 + 0.43505(x-2.20) - 0.087375(x-2.20)(x-2.40) \\ & + 0.0225(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60) \end{aligned}$$

附录 C　最小二乘法

给定数据表

x	1	2	3	4
y	0.8	0.75	0.6	0.5

求一次最小二乘拟合多项式。

解：

令 $S(x) = a_0 + a_1 x, \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, m = 3n = 1$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{3} 1 = 4, (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{3} x_i = 10, (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 30$$

$$(\varphi_0, y) = \sum_{i=0}^{3} y_i = 2.65, (\varphi_1, y) = \sum_{i=0}^{3} = x_i y_i = 6.1$$

得方程组：

$$\begin{cases} 4a_0 + 10a_1 = 2.65 \\ 10a_0 + 30a_1 = 6.1 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} a_0 = 0.925 \\ a_1 = -0.105 \end{cases} \Rightarrow S(x) = -0.105x + 0.925$$

电流通过电阻，用伏安法测得的电压电流如表

I(A)	1	2	4	6	8	10
U(V)	1.8	3.7	8.2	12.0	15.8	20.2

用最小二乘法处理数据。

解：

1. 确定 $U = \varphi(I)$ 的形式。将数据点描绘在坐标上可以看出这些点在一条直线的附近，故用线性拟合数据，即：

$$U = a_0 + a_1 I$$

2. 建立方程组：

$$U = a_0 + a_1 I, m = 6, \sum_{i=1}^{6} I_k = 31, \sum_{i=1}^{6} i_k^2 = 221$$
$$\sum_{i=1}^{6} U_k = 61.7, \sum_{i=1}^{6} I_k U_k = 442.4$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 6 & 31 \\ 31 & 221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61.7 \\ 442.4 \end{pmatrix}$$

3. 求经验公式，解所得法方程组得：

$$a_0 = -0.215, a_1 = 2.032$$

所求经验公式为

$$U = -0.215 + 2.032I$$

附录 D　数值积分

D.1　填空题

1. 梯形公式具有$\underline{1}$ 次代数精度，Simpson 公式有$\underline{3}$ 次代数精度。
2. 复化 Simpson 求积公式为：$S_n(f) = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1/2})\right]$，该公式是$\underline{4}$ 阶收敛的。
3. 求定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 Simpson 公式为 $S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$，该数值求积公式具有$\underline{3}$ 次代数精度。
4. 复化 Simpson 求积公式为：$S_n(f) = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1/2})\right]$，该公式是$\underline{4}$ 阶收敛的。
5. 当 $n = 2$ 时的 Newton–Cotes 求积公式为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$，该公式的代数精度为$\underline{3}$ 次。

D.2　计算题

求积公式 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$，已知其余项表达式为 $R(f) = kf''(\xi), \xi \in (0,1)$，试确定系数 A_0, A_1, B_0，使该求积公式具有尽可能高的代数精度，并给出代数精度的次数及求积公式余项。

解：

本题虽然用到了 $f'(0)$ 的值，仍用代数精度定义确定参数 A_0, A_1, B_0。令 $f(x) = 1, x, x^2$，分别代入求积公式，令公式两端相等，得：

$$\begin{cases} f(x) = 1, A_0 + A_1 = 1 \\ f(x) = x, A_1 + B_0 = \frac{1}{2} \\ f(x) = x^2, A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{2}{3} \\ A_1 = \frac{1}{3} \\ B_0 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

则有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)$$

再令 $f(x)=x^3$，此时 $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，而上式右端为 $\frac{1}{3}$，两端不相等，故它的代数精度为 2 次。为求余项可将 $f(x)=x^3$ 代入求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0)+kf''(\xi),\xi\in(0,1)$$

当 $f(x)=x^3,f'(x)=3x^2,f''(x)=6x,f'''(x)=6$，代入上式得

$$\frac{1}{4}=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+6k\Rightarrow k=-\frac{1}{72}$$

所以余项

$$R(f)=-\frac{1}{72}f''(\xi),\xi\in(0,1)$$

求 A,B 使求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A[f(-1)+f(1)]+B\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 的代数精度尽量高，并求其代数精度；利用此公式求 $I=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$（保留四位小数）

解：

$f(x)=1$，x,x^2 是精确成立，即：

$$\begin{cases}2A+2B=2\\2A+\frac{1}{2}B=\frac{2}{3}\end{cases}$$

得：

$$A=\frac{1}{9},B=\frac{8}{9}$$

求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}[f(-1)+f(1)]+\frac{8}{9}\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

当 $f(x)=x^3$ 时，公式显然精确成立，当 $f(x)=x^4$ 时，左 $\frac{2}{5}$，右 $\frac{1}{3}$，所以代数精度为 3。

令 $t=2x-3$

$$\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{-1+3}+\frac{1}{1+3}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+3}+\frac{1}{\frac{1}{2}+3}\right)=\frac{97}{140}\approx 0.69286$$

根据下面给出的函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的数据表，分别用复合梯形公式和复合辛甫生公式计算 $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

x_k	0.0000	0.125	0.250	0.375	0.500
$f(x_k)$	1	0.9973784	0.98961584	0.97672675	0.95885108
x_k	0.625	0.750	0.875	1.000	
$f(x_k)$	0.93615563	0.90885168	0.8719257	0.8417098	

解:

用复合梯形公式，这里 $n=8$，$h=\frac{1}{8}=0.125$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{0.125}{2}\left\{f(0)+2\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{2}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{4}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{6}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]+f(1)\right\} \\ &= 0.94569086 \end{aligned}$$

用复合辛甫生公式，这里 $n=4, h=\frac{1}{4}$，可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\approx \frac{0.25}{6}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]+2\left[f\left(\frac{2}{8}\right)+f\left(\frac{4}{8}\right)+f\left(\frac{6}{8}\right)\right]+f(1)\right\} \\ &= 0.946083305 \end{aligned}$$

试用梯形公式和 Simpson 公式计算定积分。$\int_0^1 10x^4\,\mathrm{d}x$，并与精确解比较，指出有几位有效数字。

解:

梯形公式:

$$T=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=0.5\times 10=5$$

Simpson 公式:

$$S=\frac{1}{6}(f(0)+4f(0.5)+f(1))\approx 0.20833\times 10=2.0833$$

精确解:

$$\int_0^1 10x^4\,\mathrm{d}x=0.2\times 10=2$$

经过与精确解比较得知:

- 梯形公式的计算结果有 0 位有效数字;
- Simpson 公式的计算结果有 1 位有效数字。

选择函数 a，使 $\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(0)+f(h)] + ah^2[f'(0)+f'(h)]$ 的代数精度尽量高，并求其代数精度。

解：

取 $f(x)=1$，则上述求积公式中：左 $=h$，右 $=h(1+1)/2=h$，故左 $=$ 右。

取 $f(x)=x$，则左 $=\frac{h^2}{2}$，右 $=\frac{h^2}{2}+ah^2(1+1)$。令 $\frac{h^2}{2}=\frac{h^2}{2}+ah^2(1+1)$，得 $a=0$ 再取 $f(x)=x^2$，则左 $\neq$ 右。当取 $a=0$ 时，求积公式具有 1 次代数精度。

附录 E　解线性代数的直接方法

E.1　计算题

将矩阵 A 分解为单位下三角矩陈和上三角矩阵 U，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}$ 然后求解该方程组 $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$。

解：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

求解 $Ly = b$ 得

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

求解 $Ux = y$ 得方程的解为：

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

直接分解法对 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ 作 LU 分解，L 为单位下三角阵，给出 L 和 U 的具体形式。

解：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

用直接三角形分解 Doolittle 法解方程组（不选主元）

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 & 14 \\ 6 & 13 & 20 & 26 \\ 8 & 18 & 29 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 37 \\ 65 \\ 95 \end{pmatrix}$$

解：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 2 & 3 & 4 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = (14, 9, 5, 2)^\top, x = (1, 1, 1, 1)^\top$$

给定方程组 $Ax = b$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$。

1. 用矩阵的直接三角分解法，给出矩阵 A 的的 LU 分解，并求方程组解；
2. 计算 $\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$，$\|b\|_1$，$\|b\|_2$，$\|b\|_\infty$。

解：

矩阵 A 的 LU 分解为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

方程组的精确解为：

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

计算结果为：

$$\|A\|_1 = 8, \|A\|_\infty = 10, \|b\|_1 = 25, \|b\|_2 = \sqrt{219} \approx 14.79865, \|b\|_\infty = 13$$

附录 F　解线性方程组得迭代解法

F.1　填空题

1. 对矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\4&7&9\\-2&4&8\end{pmatrix}$，$\|A\|_\infty=\underline{20}$，对向量 $b=(4,-3,9)^\top$，$\|b\|_\infty=\underline{9}$。

2. 对任意初始向量，求解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代公式 $x^{k+1}=Gx^k+g,k=0,1,\ldots$，产生的向量序列收敛到方程组唯一解的充分必要条件是<u>矩阵 G 的谱半径 $\rho(G)<1$</u>

3. 已知 $x=(1,-2)^\top,A=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}$，则 $\|x\|_1=3,\|Ax\|_1=\underline{16}$。

4. 已知 $x=(1,2)^\top,A=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}$，则 $\|x\|_2=\underline{\sqrt{5}},\|Ax\|_1=\underline{8}$。

5. 已知 $A=\begin{pmatrix}10&-1&-2\\2&7&-3\\1&-2&6\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$，如果用 Gauss-Seidel 迭代法解 $Ax=b$ 的近似解，迭代公式为 $\begin{cases}x_1^{n+1}=(7+x_2^n+2x_3^n)/10\\x_2^{n+1}=(6-2x_1^{n+1}+3x_3^n)/7\\x_3^{n+1}=(5-x_1^{n+1}+2x_2^{n+1})/6\end{cases}$ 由于<u>系数矩阵 A 为按行主对角占优</u> 的原因，所以迭代法<u>收敛</u>（提示：填写收敛或发散）。

6. 对上题的方程组 $Ax=b$，如果要用 Guass 消去法求解方程组的精确解，则消元过程<u>能</u>（请选择“能”或“不能”）进行下去，理由是：<u>系数矩阵 A 按行主对角占优</u>。

F.2　计算题

给定线性方程组 $\begin{cases}6x_1+3x_2+12x_3=36\\8x_1-3x_2+2x_3=20\\4x_1+11x_2-x_3=33\end{cases}$ 适当调整方程组，给出收敛的 Gauss-Seidel 迭代公式。

解：

将原方程改写为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-x_1 - 4x_3 + 12) \\ x_2 = \frac{1}{3}(8x_1 + 2x_3 - 20) \\ x_3 = 4x_1 + 11x_3 - 33 \end{cases}$$

Gauss-Seidel 公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(-x_1^{(k)} - 4x_3^{(k)} + 12) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)} - 20) \\ x_3^{(k+1)} = 4x_1^{(k+1)} + 11x_3^{(k+1)} - 33 \end{cases}$$

对方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$

1. 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由；
2. 取初值 $x^{(0)} = (0,0,0)^\top$，利用 (题1) 中建立的迭代公式求解，要求 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$。

解:

调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优：

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \end{cases}$$

故对应的高斯–赛德尔迭代法收敛，迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 10) \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (0,0,0)^\top$，经 7 步迭代可得：

$$x^* \ x^{(7)} = (0.999991459, 0.999950326, 1.000010)^\top$$

给定方程组 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 8x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_4 = -9 \end{cases}$ 。

1. 写出 Jacobi 迭代法的迭代公式，判断其收敛性；
2. 写出 Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式，判断其收敛性。

解：

(1) Jacobi 迭代公式为：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{5}(7 + x_2^k + x_3^k + x_4^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{7}(2 + x_1^k + 2x_3^k + x_4^k) \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{8}(3 + x_1^k + 2x_2^k + x_4^k) \\ x_4^{k+1} = -\frac{1}{5}(-9 + x_1^k + 2x_2^k) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

系数矩阵是主对角占优矩阵，故 Jacobi 迭代法收敛。

(2) Gauss-Seidel 迭代法公式为：

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{5}(7 + x_2^k + x_3^k + x_4^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{7}(2 + x_1^k + 2x_3^k + x_4^k) \\ x_3^{k+1} = -\frac{1}{8}(3 + x_1^k + 2x_2^k + x_4^k) \\ x_4^{k+1} = -\frac{1}{5}(-9 + x_1^k + 2x_2^k) \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

系数矩阵是主对角占优矩阵，故 Gauss–Seidel 迭代法收敛。

对方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$

1. 试建立一种收敛的 Seidel 迭代公式，说明理由；
2. 取初值 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$，利用 (题1) 中建立的迭代公式求解，要求 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-3}$。

解：

调整方程组的位置，使系数矩阵严格对角占优：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 15 \\ 10x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

故对应的高斯–塞德尔迭代法收敛。迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-2x_1^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-3x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 15) \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$，经 7 步迭代可得：

$$x^* \approx x^{(7)} = (0.999991459, 0.999950326, 1.000010)^\top$$

附录 G　方程求根

G.1　填空题

1. 对方程 $f(x)=(x-5)^3(x+2)$，可用牛顿迭代格式$\underline{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ 求方程根的近似值，署取初值为-1.5，牛顿迭代格式收敛阶至少为$\underline{2}$，若取初值 4.5，牛顿迭代格式收敛阶为$\underline{1}$，若采用修正的牛顿迭代格式$\underline{x_{k+1}=x_k-3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$，可使得修正的牛顿迭代格式至少二阶收敛。

2. 方程 $x^3-x-1=0$ 在区间 $[1,2]$ 根的牛顿迭代格式为$\underline{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{2x_k^3+1}{3x_k^2-1}}$。

G.2　计算题

用迭代法求方程 $f(x)=x^3+4x^2-10$，在 $[1,1.5]$ 内的根，判断送代格式的收敛性

1. $x_{k+1}=x_k^3+4x_k^2+x_k-10$；
2. $x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{x_k+4}}$。

解：(1) 取 $x_0=1,x_{k+1}=x_k^3+4x_k^2+x_k-10$

$$x_1=-4,x_2=-14,x_3=-1984$$

因此此送代格式发散

$\varphi(x)=x^3+4x^2+x-10$

$$\varphi'(x)=3x^2+8x,\varphi''(x)=6x+8,\varphi'''(x)=6>1$$

因此，此迭代格式发散

(2) 取 $x_0=0,x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{x_k+4}}$

$x_1=1.5811$，$x_2=1.3386$，根为 1.3386，此迭代方法收敛

用牛顿法求方程 $xe^x-1=0$ 的根，$x_0=0.5$，计算结果准确到四位有效数字。

解：

根据牛顿法得：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{(1+x_k)e^{x_k}}$$

取迭代结果如下表

k	x_k
0	0.5
1	0.57102
2	0.56716
3	0.56714

所以，方程的根约为 0.56714

为求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根，要求：

1. 给出求解方程根的两种迭代公式；
2. 判断两种迭代公式的收敛性；
3. 写出求解上述方程的 Newton 送代公式。

解：

(1) 方程的三种等价形式为：

1. $x = 1 + \frac{1}{x^2}$，相应的迭代公式为：$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}$；
2. $x^3 = 1 + x^2$，相应的迭代公式为：$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2}$。

(2) 令 $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, |\varphi'(1.5)| = \frac{2}{1.5^3} < 1$ 第一种迭代法收敛。
令 $\varphi(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}, |\varphi'(1.5)| = \frac{2}{3} \times \frac{1.5}{(1+1.5^2)^{\frac{2}{3}}} = (\frac{\sqrt{8}}{1+2.25})^{\frac{2}{3}} < 1$ 第二种迭代法收敛。
(3) 直线的两点公式为：

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$$

把 $y_k = f(x_k) = x_k^3 - x_k^2 - 1, y_{k+1} = 0, k = f'(x_k) = 3x_k^2 - 2x_k^1$ 带入方程整理得：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k^2 - 1}{3x_k - 2x_k} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\frac{2x_k - 9}{3x_k^2 - 2x_k}$$

用牛顿迭代法计算 $\sqrt{0.78265}$ 的近似值（保留四位有效数字）。

解：

令 $x = \sqrt{0.78265}$ 问题转化为求 $f(x) = x^2 - 0.78265 = 0$ 的正根。
由牛顿迭代公式：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 0.78265}{2x_k}$ 取 $x_0 = 0.88$ 迭代结果

k	0	1	2	3
x_k	0.880000	0.884688	0.884675	0.884675

满足了精度要求：$\sqrt{0.78265} \approx 0.8847$。