

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА



ТЕОРЕТИЧЕН И ЧИСЛЕН
АНАЛИЗ НА ДИФЕРЕНЧНИ
СХЕМИ ЗА УРАВНЕНИЯ НА
БУСИНЕСК

Веселина Иванова Вучева

Проект на Дисертационен труд
за присъждане на образователна и научна степен "Доктор"
професионално направление "Математика"
научна специалност "Математическо моделиране и приложение на
математиката"

Научен ръководител: проф. д-р Наталия Кольковска

София, 2019

Съдържание

1	Увод	4
2	Общи сведения	15
2.1	Съществуване на решение на уравненията на Бусинеск във вид на солитон	15
2.2	Представяне на уравненията на Бусинеск като системи ОДУ	16
2.2.1	Хамилтонови системи	17
2.2.2	Уравнения на Бусинеск във вид на обобщени хамилтонови системи (или поасоновите системи)	25
2.3	Означения	28
2.4	Класове устойчиви трислойни схеми	30
2.5	Други твърдения	32
3	Диференчни схеми за уравнението на Бусинеск от шести ред	34
3.1	Постановка на задачата	34
3.2	Консервативна схема с тегло $\sigma = 0$ за уравнението на Бусинеск от шести ред	34
3.2.1	Числени резултати за консервативната схема с тегло $\sigma = 0$	38
3.3	Факторизирана диференчна схема за уравнението на Бусинеск от шести ред	40
3.3.1	Числени резултати за консервативната схема с тегло $\sigma \neq 0$	46
3.4	Консервативна диференчна схема за уравнението на Бусинеск от шести ред, запазваща дискретната маса	53
3.4.1	Числени резултати за консервативната схема, запазваща дискретната маса	57
3.5	Симплектична схема за уравнението на Бусинеск от шести ред	59
3.5.1	Числени резултати за симплектичната схема за уравнението на Бусинеск от шести ред	64
4	Диференчни схеми за Двойно дисперсното уравнение	69
4.1	Постановка на задачата	69
4.2	Диференчни схеми за Двойно дисперсното уравнение	70
4.2.1	Общи свойства на разглежданите диференчни схеми	72
4.2.2	Симплектична схема за Двойно дисперсното уравнение	73
4.2.3	Числени резултати за симплектичната схема за Двойно дисперсното уравнение	77
4.2.4	Диференчна схема, запазваща момента за Двойно дисперсното уравнение	81
4.2.5	Числени резултати за схемата, запазваща момента за Двойно дисперсното уравнение	85
4.2.6	Консервативна диференчна схема за Двойно дисперсното уравнение	89
4.2.7	Числени резултати за консервативната схема за Двойно дисперсното уравнение	92
4.3	Уравнение на Бусинеск от шести ред с $\beta_3 \rightarrow 0$	94
5	Благодарност и посвещение	96
6	Основни научни приноси	97

Списък на фигурите

1	Симплектичност (запазване на лицето) на линейно изображение	18
2	Солитонно решение на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ за УБШР с кубична нелинейност $p = 3$ при $T = 55$	39
3	Разпространение на солитонното решение на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ за УБШР с $p = 2$ при $t \in [0, T]$, $T = 55$	40
4	Солитонно решение на ФДС за УБШР с числено начално условие при $\sigma = 0.5$, $p = 2$ и $T = 20$	49
5	Решение на Кавахара (Задача 3) при $p = 2$, $x \in [-128, 128]$ и $T = 20$	49
6	Осцилираща опашка на решението на Кавахара на Задача 3	50
7	Взаимодействие на вълни, решения на ФДС, движещи се една срещу друга със скорости $c_1 = -c_2 = 0.95$ при $t \in [0, T]$, $T = 95$	51
8	Взаимодействие на вълни, решения на ФДС, движещи се една срещу друга със скорости $c_1 = 0.99$ и $c_2 = -0.95$ при $t \in [0, T]$, $T = 95$	52
9	Разлика $H_h^k - H_h^0$ между енергията на всеки слой и началната енергия при симплектичната схема за УБШР за $T = 20$	66
10	Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = -c_2 = 0.95$, получени чрез симплектичната схема за УБШР при $t \in [0, T]$, $T = 95$	67
11	Разлика $H_h^k - H_h^0$ между енергията на всеки слой и началната енергия при симплектичната схема за ДДУ (Задача 1)	79
12	Разлика $M_h^k - M_h^1$ между момента на всеки слой и началния момент при симплектичната схема за ДДУ (Задача 1)	80
13	Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$, получени чрез симплектична схема за ДДУ (Задача 2)	81
14	Разлика $H_h^k - H_h^0$ на енергията на всеки слой по времето и началната енергия при схемата, запазваща момента за ДДУ (Задача 1)	86
15	Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.7$ и $c_2 = 1.1$, получени чрез схемата, запазваща момента за ДДУ	87
16	Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$, получени чрез на схемата, запазваща момента за ДДУ	88
17	Разлика ψ_h между численото решение на УБШР и точното решение на ДДУ за Пример 2	95

1 Увод

Уравнения на Бусинеск

В дисертацията е разгледана задача на Коши за едномерните уравнения на Бусинеск:

- *Двойно дисперсно уравнение (ДДУ)* или Парадигматично уравнение на Бусинеск

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \Delta f(u); \quad (1.1)$$

- *Уравнение на Бусинеск от шести ред (УБШР)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \beta_3 \Delta^3 u - \Delta f(u); \quad (1.2)$$

в която търсеното решение $u = u(x, t)$ е дефинирано при $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \in [0, T]$.

Началните условия на задачата са

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x).$$

За Двойно дисперсното уравнение се предполага, че

$$u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (1.3)$$

а за уравнението на Бусинеск от шести ред

$$u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L_2(\mathbb{R}). \quad (1.4)$$

Тук с W_2^k са означени класовете на Соболев с k -ти производни от $L_2(\mathbb{R})$, а Δ е едномерният оператор на Лаплас, т.е. $\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$. Освен това $(-\Delta)^{-s} u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2s} \mathcal{F}(u))$ за $s > 0$, където $\mathcal{F}(u)$ и $\mathcal{F}^{-1}(u)$ са съответно *Трансформация на Фурие* и *Обратна трансформация на Фурие*.

Уравненията на Бусинеск са хиперболични частни диференциални уравнения с един, два или три дисперсни члена и нелинейност от полиномиален тип. В разгледачите в дисертацията задачи нелинейният член има вида

$$f(u) = \alpha u^p, \quad p = 2, 3, \dots, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Коефициентите β_1 , β_2 и β_3 са дисперсни параметри, а α е параметър на амплитудата.

Тези уравнения участват в редица математически модели, описващи реални процеси. Уравнението (1.1) се среща при моделиране на надлъжните трептения в нелинейни атомни вериги и при двупосочното разпространение на малка амплитудна вълна на повърхността на плитка вода [12]. ДДУ се появява в редица математически модели на физични процеси, например в дислокационната теория на кристалите, в оптиката и т.н.

Уравнението на Бусинеск от шести ред участва в някои микро-структурни задачи [4] и в динамиката на повърхностна вълна с малка амплитуда в плитка вода [16, 17].

Извеждането на уравнение (1.1) от пълния модел на Бусинеск е описано в [12].

Представяне на уравненията на Бусинеск като обобщени хамилтонови системи

Уравненията на Бусинеск могат да се представят във вид на обобщени хамилтонови системи. За тези системи е характерно свойството *симплектичност*, което в случая означава запазване на ориентираната площ във времето. Дефиниция на хамилтонови системи, техни свойства и самото представяне са показани в Раздел 2.2.1.

Двойно дисперсното уравнение (1.1) е еквивалентно на следната обобщена хамилтонова система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (1.5)$$

Тук $v(x, t)$ е помощна функция, а I_d е идентитетът. Хамилтонианът (енергията) на система (1.5) е дефиниран с израза

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx. \quad (1.6)$$

Подобно на Двойно дисперсното уравнение, скаларното уравнение на Бусинеск от шести ред е еквивалентно на следната система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \alpha \frac{\partial u^p}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (1.7)$$

с хамилтониан

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 2\alpha \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx. \quad (1.8)$$

Началните условия на системите (1.5) и (1.7) са

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{където} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = u_1(x).$$

Условията (1.3) осигуряват, че за решението (u, v) на система (1.5) е в сила $u(x, t) \in W_2^1(\mathbb{R})$, $v(x, t) \in W_2^1(\mathbb{R})$ при $t \in [0, T]$.

От условията (1.4) следва, че за решението (u, v) на система (1.7) е в сила $u(x, t) \in W_2^2(\mathbb{R})$, $v(x, t) \in W_2^1(\mathbb{R})$ при $t \in [0, T]$.

Закони за запазване

Разглежданите уравнения (1.1) и (1.2) имат три инварианти: енергия, маса и момент. Масата $I(u(x, t))$ и моментът $M(u(x, t), v(x, t))$ се дефинират по следния начин:

$$I(u(x, t)) := \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx, \quad (1.9)$$

$$M(u(x, t), v(x, t)) := \int_{\mathbb{R}} (u(x, t)v(x, t) + \beta_1 u_x(x, t)v_x(x, t)) dx. \quad (1.10)$$

Теорема 1. За всяко $t \geq 0$ решението (u, v) на (1.5) и (1.7) удовлетворява следните равенства:

$H(u(x, t), v(x, t)) = H(u(x, 0), v(x, 0))$, т.е. запазване на хамитониана (енергията);

$I(u(x, t)) = I(u(x, 0))$, т.е. запазване на масата;

$M(u(x, t)) = M(u(x, 0))$, т.е. запазване на момента.

Освен чрез изразите (1.6) и (1.8) енергията може да се запише в термините само на функцията $u(x, t)$ и тогава се използва означението $E(u(x, t))$. Еквивалентността на $H(u(x, t), v(x, t))$ и $E(u(x, t))$ е доказана в Теорема 22.

Преглед на литературата

Уравнението (1.1) с $\beta_1 = 0$ е известно в литературата като "Добро" уравнение на Бусинеск. При намиране на численото му решение са използвани следните методи:

- метод на Галъоркин е изследван в [9] и [37];
- метод на крайните разлики е приложен в [15];
- спектрални и псевдоспектрални методи са използвани в [6, 23, 36, 48];
- предикторно-коректорен метод е приложен в [2];
- симплектични методи са публикувани в [1, 3, 5, 26, 47];
- безмрежов метод в [35].

Двойно дисперсното уравнение с $\beta_1 > 0$ не е толкова подробно изследвано числено. За намиране на решението на едномерната задача е използван метод на крайните разлики в [7, 12, 13, 27, 29]. Конструирани диференчни схеми са консервативни. Точното запазване на глобалната дискретна енергия и сходимостта на числения метод са доказани в [28, 29, 31].

Решението на двумерното уравнение на Бусинеск (1.1) е намерено чрез диференчен метод в [14] и [19]. В [14] е конструирана диференчна схема с втори ред на точност по пространството и времето. Използваната мрежа е неравномерна и при конструирането на схемата са използвани две различни асимптотични гранични условия. Първото гранично условие е тривиално, а другото съвпада с очакваното асимптотично поведение в безкрайността.

Три диференчни схеми с втори ред на точност са предложени, изследвани и сравнени в [19]. Схемите се различават по апроксимацията на нелинейния член.

Икономична диференчна схема за двумерното ДДУ е конструирана и изследвана в [30]. Доказано е, че численото решение на линейното двумерно ДДУ удовлетворява дискретно енергетично твърдение и е установена сходимостта на метода в енергетична норма.

Числени решения на уравнението на Бусинеск от шести ред с $\beta_1 = 0$ са получени чрез спектрален и псевдоспектрален метод в [8, 10, 11, 17]. По-конкретно в [11] е използвана пълна ортонормирана система от функции, а в [17] е приложена комбинация от рационални функции на Чебишев и радиални базисни функции, за да се получи правилното поведение на вълната както в началото, така и в безкрайността.

За численото решение на уравнението на Бусинеск от шести ред с $\beta_1 = 0$ в [16] и [22] са получени и изследвани диференчни схеми с различни апроксимации на нелинейността. Схемата в [16] запазва дискретната енергия, а схемата в [22] – дискретната маса.

Решенията на УБШР от тип бягаща вълна $u(x, t) = \phi(x - ct)$ са решения на следното уравнение от четвърти ред

$$\beta_3 \phi^{IV} - (\beta_2 - \beta_1 c^2) \phi^{II} + (1 - c^2) \phi - \alpha \phi^p = 0, \quad (1.11)$$

с гранични условия $\left| \frac{d^s \phi}{dx^s} \right| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ за $s = 0, 1$.

Тези решения при $\beta_1 = 0$ са изследвани в [16]. Точното решение на това обикновено диференциално уравнение (ОДУ) е намерено чрез елиптични функции на Вайерщрас в [4].

При подходящи стойности на параметрите са получени точни решения на (1.11) в [17], виж (2.3) и (2.4).

Единичните вълни и тяхното взаимодействие са изследвани числено в [16] и [22]. В зависимост от знака на дисперсия параметър β_2 съществуват два типа солитонни решения на (1.11): с монотонна форма при $\beta_2 > 0$ и решения с осцилиращо поведение при $\beta_2 < 0$ и $x \rightarrow \pm\infty$. Решенията на (1.11) с осцилиращо поведение се наричат решения от тип на Кавахара [16].

Цели на дисертационната работа

Неписано правило при избора на числен метод е той да запазва колкото е възможно повече от свойствата на непрекъснатата задача. Поради тази причина основните цели на настоящата дисертация са следните:

- Построяване на диференчни схеми за уравненията на Бусинеск от четвърти и шести ред, запазващи дискретни аналози за масата, момента, енергията и симплектичността на дискретно ниво.
- Теоретично изследване на построените диференчни схеми, което включва:
 - определяне на грешката на апроксимация и условието за устойчивост;
 - изследване на сходимостта на дискретното решение към точното;
 - формулиране и доказване на дискретни закони за запазване; получаване на оценки за приближено запазване на енергията, масата и момента;
- Провеждане на редица числени експерименти с цел потвърждаване на теоретичните резултати, по-точно:
 - втори ред на точност за конструираните диференчни схеми;
 - втори ред на сходимост на дискретните инварианти към точните;
- Сравняване на качествените характеристики на разглежданите схеми.

Съдържание на дисертацията

Глава 2

Във втора глава на дисертацията са формулирани условия за съществуване на решението на уравненията на Бусинеск във вид на солитон. Представени са формула (2.1) на точното решение на ДДУ и аналитични решения на УБШР при конкретни стойности на параметрите. Разгледан е метод на Петвиашвили за числено намиране

на решение на уравнението от шести ред във вид на бягаща вълна, което е решение на нелинейното ОДУ от четвърти ред (1.11).

В Глава 2 е доказано хамилтоновото представяне на уравненията на Бусинеск. Показана е еквивалентност на непрекъснатата енергия $E(u(x, t))$, записана в термините само на решението $u(x, t)$ и непрекъснатия хамилтониан $H(u(x, t), v(x, t))$.

Въведени са означения и формули, използвани в следващите две глави.

За удобство на читателите са формулирани и доказани някои важни теореми от [40], които са използвани при теоретичните изследвания в дисертацията.

Глава 3

В третата глава на дисертацията са конструирани четири диференчни схеми за намиране на решението на уравнението на Бусинеск от шести ред. В Раздел 3.2 е разгледана следната диференчна схема:

$$\begin{cases} \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_i^k - \beta_2 \Delta_h y_i^k + \beta_3 \Delta_h^2 y_i^k - \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \\ y_{t,i}^k - \beta_1 \Delta_h y_{t,i}^k = \Delta_h w_i^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Достатъчното й условие за устойчивост $\tau = O(h^2)$ е формулирано и доказано в следната теорема:

Теорема 2. *Линейната диференчна схема, съответстваща на (1.12), (еквивалентно схемата (1.12) с $f_1(y) = 0$) е условно устойчива по начални данни, със следното условие на устойчивост*

$$\tau \leq \sqrt{\frac{\beta_1}{(1+\epsilon)(h^4 + 4\beta_2 h^2 + 16\beta_3)}} h^2,$$

където ϵ е малко положително число, независимо от h и τ .

Това условие е рестриктивно и за намиране на решението при $T \gg 0$ трябва да се извършат значителен брой стъпки по времето. Поради тази причина в Раздел 3.3 е построена нова схема, при която за апроксимация на производната от шести ред е използвана линейна комбинация от стойностите на решението на три времеви слоя с параметър σ . Чрез метод на регуляризацията е получена следната диференчна схема:

$$\begin{cases} \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 \Delta_h^2 \right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_i^k - \beta_2 \Delta_h y_i^k + \beta_3 \Delta_h^2 y_i^k - \\ \quad - \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \\ (I_d - \beta_1 \Delta_h) y_{t,i}^k = \Delta_h w_i^{k+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (1.13)$$

която наричаме *Факторизирана диференчна схема (ФДС)*. Тази схема има достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h)$:

Теорема 3. *Нека съществува малко положително число ϵ , такова че са изпълнени следните условия:*

$$\text{ако } \sigma \geq \max \left\{ \frac{1+\epsilon}{4}, \frac{\beta_1 \beta_2 (1+\epsilon)}{4\beta_3} \right\}, \text{ то } \tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{1+\epsilon};$$

$$\text{ако } \sigma \in \left[\frac{1+\epsilon}{4}, \frac{\beta_1 \beta_2 (1+\epsilon)}{4\beta_3} \right), \text{ то } \tau^2 \leq \min \left\{ \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}, h^2 \frac{4\beta_1^2}{\beta_1 (1+\epsilon) (h^2 + 4\beta_2) - 16\sigma \beta_3} \right\}.$$

Тогави схема (1.13) е устойчива по начални данни и дясна част.

Схемата (1.12) се получава от Факторизираната схема (1.13) при $\sigma = 0$.
Дискретната енергия на ФДС е дефинирана чрез израза

$$E_h(y^k) := E_{h,L}(y^k) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right), \quad (1.14)$$

където линейната част $E_{h,L}(y^k)$ е зададена с равенството

$$\begin{aligned} E_{h,L}(y^k) := & \frac{1}{2} \left((-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} y_t^k, (-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} y_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (y_t^k, y_t^k) + \\ & + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\beta_3 \sigma}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{4} \right) (\Delta_h y_t^k, y_t^k) + \frac{\tau^2 \beta_3}{2} \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) (\Delta_h y_t^k, \Delta_h y_t^k) + \\ & + \frac{1}{8} \left((I_d - \beta_2 \Delta_h + \beta_3 \Delta_h^2) (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k \right). \end{aligned}$$

Решението на двете схеми удовлетворява следния дискретен закон за запазване на енергията $E_h(y^k)$:

Теорема 4. *Диференчните схеми (1.12) и (1.13) са консервативни, т.е. на всеки слой $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила:*

$$E_h(y^k) = E_h(y^0),$$

където дискретната енергия $E_h(y^k)$ се задава с израза (1.14).

За ФДС са доказани следните теореми за сходимост в $W_{2,h}^2$ норма и в C_h норма:

Теорема 5. (Сходимость на метода) *Нека $u(x, t) \in C^{8,4}(R \times [0, T])$ и дискретното решение y^k на ФДС е ограничено. Нека е удовлетворено условието за устойчивост (3.17)-(3.18). Тогава за всички достатъчно малки стъпки τ дискретното решение y^k клони към точното решение u^k при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ и за грешката $z^k = u^k - y^k$ е в сила следната оценка*

$$\beta_1 \|z_t^K\|^2 + \|z^{K+1}\|^2 + \beta_2 \|z_{\bar{x}}^{K+1}\|^2 + \beta_3 \|z_{\bar{x}\bar{x}}^{K+1}\|^2 \leq C(h^2 + \tau^2)^2.$$

Следствие 1.1. *Нека са изпълнени условията на Теорема 5. Тогава са в сила следните оценки за грешката $z^k = u^k - y^k$ в равномерна норма:*

$$\|z^k\|_{C_h} = \max_i |z_i^k| \leq M_1(h^2 + \tau^2), \quad \|z_{\bar{x}}^k\|_{C_h} = \max_i |z_{\bar{x},i}^k| \leq M_2(h^2 + \tau^2),$$

където M_1 и M_2 са положителни константи, независещи от h и τ .

Сравнението на резултатите от проведените числени експерименти показва предимство на ФДС пред схемата с тегло $\sigma = 0$ по отношение на изчислителното време и запазването на дискретната енергия.

Останалите две схеми в трета глава са конструирани след представяне на уравнението на Бусинеск като обобщена хамилтонова система (1.7). Използвани са крайни разлики с втори ред на апроксимация и стъпки $2h$, а след дискретизация по пространството към получената система ОДУ е приложен методът на Щьормер-Верле. В резултат на това в Раздел 3.5 е разгледана схемата

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - \alpha \frac{(y_{i+1}^k)^p - (y_{i-1}^k)^p}{2h}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.15)$$

За нея е характерно следното важно свойство:

Теорема 6. Схемата (1.15) е симплектична, т.е. тя запазва дискретната симплектична структура $\omega^k = dz^k \wedge J_h dz^{k-1}$, $z^k = (u^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ на всеки слой по времето

$$\omega^k = \omega^{k-1} = \dots = \omega^0,$$

където антисиметричната матрица J_h има вида

$$J_h = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} \\ (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

В Теорема 38 е показано, че симплектичната схема (1.15) запазва дискретната енергия $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$ приблизено с грешка $O(\tau^2)$, т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \tau^2 TC.$$

В Раздел 3.4 е получена следната диференчна схема

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - \\ \quad - \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{w_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - w_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2h}. \end{cases} \quad (1.17)$$

В Теорема 34 е доказано, че решението на схема (1.17) удовлетворява дискретен закон за запазване на енергията $H_h(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_h(y^0, w^{\frac{1}{2}})$ за $k = 1, \dots, K$.

Диференчните схеми (1.15) и (1.17) апроксимират хамилтоновата система (1.7) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$. Тъй като двете схеми се различават само по апроксимацията на нелинейния член, те имат едно и също условие за устойчивост $\tau = O(h^2)$, формулирано в Теорема 36. Освен това е в сила следната теорема:

Теорема 7. Решението на диференчните схеми (1.15) и (1.17) запазва дискретната маса $I_h(t_k)$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила следното равенство $I_h(t_k) = I_h(t_0)$, където $I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k$.

В Раздел 3.2.1, Раздел 3.3.1, Раздел 3.4.1 и Раздел 3.5.1 са представени резултати от проведените числени експерименти при два вида нелинейности: квадратична $p = 2$ и кубична $p = 3$. За начални данни е използвано както аналитично решение на задачата, така и числено решение, получено по метода на Петвиашвили.

Разгледани са редица примери за разпространение на единична вълна и за взаимодействие на две вълни, движещи се в една и съща посока и в противоположни посоки, с една и съща скорост и с различни скорости. Числените резултати са илюстрирани в редица таблици и графики. Направено е сравнение между отделните качествени характеристики на схемите: грешка, ред на сходимост, сходимост на дискретната енергия към точната, относителна грешка на енергията, относителна грешка на масата и др.

Получените числени резултати потвърждават доказаните теоретични резултати.

Изследването на диференчните схеми, които са представени в Глава 3 е публикувано в следните статии с импакт ранг [32], [33], [44] и [45].

Глава 4

Четвъртата глава от дисертацията е посветена на намиране на решението на ДДУ с помощта на следната диференчна схема

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + f(y^k)_{\hat{x},i}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Използвани са следните три различни апроксимации на нелинейния член $f(y_i^k)$:

$$\begin{aligned} f(y_i^k) &= f_1(y_i^k) := \alpha(y_i^k)^p; \\ f(y_i^k) &= f_2(y_i^k) := \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}; \\ f(y_i^k) &= f_3(y_i^k) := \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}. \end{aligned}$$

В резултат на това от (4.8) са получени три диференчни схеми с различни свойства. За всяка от тези схеми са дефинирани

- *дискретен момент*

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) := \sum_{i=1}^N h \left(y_i^k w_i^{k-\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}} \right); \quad (1.18)$$

- *дискретен хамилтониан*

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) := H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right), \quad (1.19)$$

където

$$\begin{aligned} H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) &:= \frac{1}{2} \|w^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \|w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} \|w_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1/2}\|^2 + \\ &+ \frac{1}{8} \|y^{k+1} + y^k\|^2 + \frac{\beta_2}{8} \|y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k\|^2; \end{aligned}$$

- *дискретна маса*

$$I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k. \quad (1.20)$$

В Раздел 4.2.2 е изследвана следната диференчна схема:

$$\begin{cases} \left(I_d - \beta_1 \hat{\Delta} \right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \alpha \left((y_i^k)^p \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Теорема 8. Схемата (1.21) е симплектична, т.е. тя запазва дискретната симплектична структура $\omega^k = dz^k \wedge J_h dz^{k-1}$, $z^k = (u^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ на всеки слой по времето

$$\omega^k = \omega^{k-1} = \dots = \omega^0,$$

където антисиметричната матрица J_h се задава с (1.16).

В Теорема 43 е доказано, че симплектичната схема (1.21) запазва приближено дискретния момент $M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}})$ с грешка $O(h^2)$, т.е. за решението ѝ е в сила оценката

$$\left| M_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq Ch^2T.$$

Решението на симплектичната схема не удовлетворява точно дискретен закон за запазване на енергията. В Теорема 44 е показано, че симплектичната схема запазва дискретната енергия $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$ приближено с глобална грешка $O(\tau^2)$, т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \tau^2 TC.$$

В Раздел 4.2.4 е изследвана диференчна схема за ДДУ, която има вида

$$\begin{cases} \left(I_d - \beta_1 \hat{\Delta} \right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right)_{\hat{x},i}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Основното свойство на схема (1.22) е формулирано в следната теорема:

Теорема 9. *Решението на схема (1.22) запазва дискретния момент $M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}})$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството*

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}),$$

където $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (1.18).

В Теорема 46 е доказано, че схема (1.22) запазва приблизително с глобална грешка $O(h^2 + \tau^2)$ дискретния хамилтониан $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$, т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq (h^2 + \tau^2) TC.$$

В Раздел 4.2.6 е изследвана диференчната схема

$$\begin{cases} \left(I_d - \beta_1 \hat{\Delta} \right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Важно нейно свойство е формулирано и доказано в следващата теорема:

Теорема 10. *Схема (1.23) е консервативна, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ решението ѝ удовлетворява следното равенство*

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}),$$

където дискретният хамилтониан $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (1.19).

Друго свойство на схема (1.23), доказано в Теорема 48 е, че решението ѝ запазва началния дискретен момент $M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}})$ с точност $O(h^2 + \tau^2)$, т. е. в сила е оценката

$$\left| M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq C(h^2 + \tau^2)T.$$

Тъй като трите схеми (1.21), (1.22) и (1.23) се различават само по апроксимацията на нелинейния член, те имат едно и също достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h)$, формулирано в Теорема 40. Освен това е в сила следната теорема:

Теорема 11. *Схемите (1.21), (1.22) и (1.23) запазват дискретната маса във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството $I_h(t_k) = I_h(t_0)$, където $I_h(t_k)$ се дефинира с (1.20).*

В Раздел 4.2.4, Раздел 4.2.5 и Раздел 4.2.7 са представени числени резултати за трите схеми, конструирани за намиране на решението на ДДУ. Разгледани са примери за движение на единична вълна и за взаимодействие на две вълни при квадратична и кубична нелинейност с точно начално условие. Получените числени резултати потвърждават теоретичните резултати.

Изследването на диференчните схеми от Глава 4 е публикувано в списание с импакт фактор [34].

Следват благодарности, посвещение, изброяване на основните научни приноси, декларация за оригиналност на резултатите и списък с използваната литература.

Апробация на дисертационната работа

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните международни конференции и семинари:

- Ninth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, Bulgaria, 2017;
- Mathematics Days in Sofia, Bulgaria, 2017;
- Fifteenth International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Solun, Greece, 2017;
- Sixth CMAPT Workshop Computational Mathematics and Approximation Theory, Linz, Austria, 2017;
- Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, Bulgaria, 2018;
- Ninth Numerical Method and Application, Borovets Bulgaria, 2018;
- Seventh CMAPT Workshop Computational Mathematics and Approximation Theory, Sozopol, Bulgaria, 2018;
- Thirteenth Annual Meeting of the Bulgarian Section of Siam, Sofia, Bulgaria, 2018.

Публикации

Резултатите от дисертацията са публикувани както следва:

- В международни научни списания с импакт фактор:
 - N. Kolkovska, V. Vucheva, “Invariant preserving scheme for double dispersion equation”, *Advances in Difference Equations* (2019) 2019:216, 1-16 ;IF 1.510(2018), <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2152-y>, IF 1.510 ;
- В сборници с доклади от международни конференции с SJR:
 - N. Kolkovska, V. Vucheva, “Numerical investigation of sixth order Boussinesq equation,” in *AMiTaNS'17*, AIP CP 1895 (American Institute of Physics, Melville, NY, 2017), paper 110003-1-110003-8. SJR 0.165.
 - V. Vucheva, N. Kolkovska, “Convergence analysis of finite difference scheme for sixth order Boussinesq equation”, *AIP Conference Proceedings*, 1978 (1):470033; 2018, SJR:0.182;
 - N. Kolkovska, V. Vucheva, “Energy preserving finite difference scheme for sixth order Boussinesq Equation”, *Procedia Engineering*, 199 (2017) 1539–1543, SJR 0.282;
 - V. Vucheva, N. Kolkovska, ”A symplectic numerical method for the sixth order Boussinesq equation”, accepted for publication (2019).

2 Общи сведения

2.1 Съществуване на решение на уравненията на Бусинеск във вид на солитон

Решенията на уравненията на Бусинеск съществуват за безкраен период от време или "избухват" за крайно време.

Добре известен факт е, че ДДУ (1.1) притежава точно решение във вид на движеща се вълна, т.е. $u(x, t) = \phi(x - ct)$, където c е скоростта на вълната. Тези решения се наричат *солитони*. Под солитон се разбира вълна, която при движение с постоянна скорост запазва формата си. След заместване на $u(x, t)$ с $\phi(x - ct)$ и интегриране по x , ДДУ (1.1) може да се сведе до следното нелинейно диференциално уравнение от втори ред за функцията ϕ :

$$(\beta_2 - \beta_1 c^2) \phi^{II} + (c^2 - 1) \phi - \alpha \phi^p = 0.$$

Точното решение на Двойно дисперсното уравнение (1.1) се задава с формулата

$$\tilde{u}(x, t; c) = \left[\frac{(c^2 - 1)(p + 1)}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1 - p}{2} \sqrt{\frac{c^2 - 1}{\beta_1 c^2 - \beta_2}} (x - ct) \right) \right]^{\frac{1}{p-1}}. \quad (2.1)$$

От (2.1) се получават следните ограничения за скоростта c :

$$c^2 > \max \left(1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \quad \text{или} \quad c^2 < \min \left(1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \right).$$

За солитонните решения на уравнението на Бусинеск от шести ред (1.2) не съществува точна формула при произволни стойности на коефициентите β_1 , β_2 , β_3 , α и c . Решенията на (1.2) от тип бягаща вълна са решения на следното уравнение от четвърти ред:

$$\beta_3 \phi^{IV} - (\beta_2 - \beta_1 c^2) \phi^{II} + (1 - c^2) \phi - \alpha \phi^p = 0, \quad (2.2)$$

с гранични условия $|\phi(x)| \rightarrow 0$ и $|\phi'(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Следвайки [18], за конкретни стойности на коефициентите се получава:

- точно решение $\tilde{u}(x, t; c)$ на (2.2) с коефициенти $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + \frac{61}{169} \beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $c = \sqrt{\frac{61}{169}}$ при квадратична нелинейност ($p = 2$), което има вида

$$\tilde{u}(x, t; c) = \frac{315}{169} \operatorname{sech}^4 \left(\sqrt{\frac{3}{52}} (x - ct) \right); \quad (2.3)$$

- точно решение $\tilde{u}(x, t; c)$ на (2.2) с коефициенти $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1 + \frac{9}{25} \beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{5}$ и $\alpha = \frac{1}{3}$ при кубична нелинейност ($p = 3$), което има вида

$$\tilde{u}(x, t; c) = \sqrt{\frac{18}{5}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{1}{5}} (x - ct) \right). \quad (2.4)$$

При проведените числени експерименти тези решения са използвани за начални данни за хиперболичната задача (1.2) и за определяне на грешката, и реда на сходимост на приближеното решение към точното.

От [20] и [46] са получени следните достатъчни условия за съществуване на решение във вид на солитон, формулирани в следната теорема:

Теорема 12. *Решението $u(x, t) = \phi(x - ct)$ на (2.2) съществува, ако е в сила едно от следните достатъчни условия:*

1. Ако $1 - c^2 > 0$ и $\beta_2 > 0$, то $c^2 < \min\left\{1, \frac{\beta_2}{\beta_1}\right\}$;
2. Ако $1 - c^2 > 0$, $\beta_2 - \beta_1 c^2 < 0$ и $\beta_2 > 0$, то $\frac{\beta_2}{\beta_1} < c^2 < \min\{1, x_2\}$, където x_2 е по-големият корен на уравнението $\beta_1^2 x^2 - 2(\beta_1 \beta_2 - 2\beta_3)x + \beta_2^2 - 4\beta_3 = 0$;
3. Ако $\beta_2 < 0$ и $4\beta_3 > \beta_2^2$, то $0 < c^2 < \min\{1, x_2\}$;
4. Ако $\beta_2 = 0$, то $0 < c^2 < \min\{1, x_2\}$.

За численото намиране на решението на (2.2) е използван **метод на Петвиашвили**.

Към уравнение (2.2) е приложено *дискретно преобразование на Фурие*:

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{\widetilde{\alpha \phi^p(k)}}{\beta_3 k^4 + (\beta_2 - \beta_1 c^2) k^2 + (1 - c^2)}.$$

Решението $\tilde{\phi}(k)$ се намира с помощта на следния итерационен метод:

$$\tilde{\phi}(k)^{[s+1]} = M^{[s] \frac{p}{p-1}} \frac{\widetilde{\alpha \phi^p(k)}^{[s]}}{\beta_3 k^4 + (\beta_2 - \beta_1 c^2) k^2 + (1 - c^2)},$$

където за нулева итерация $\phi^{[0]}$ е използвана камбановидна функция $\phi^{[0]} := e^{-x^2 C}$.

При метода на Петвиашвили използваме т. нар. стабилизиращ множител $M^{\frac{p}{p-1}}$, където

$$M^{[s]} = \frac{\int_R [\beta_3 k^4 + (\beta_2 - \beta_1 c^2) k^2 + (1 - c^2)] \tilde{\phi}^2(k)^{[s]} dk}{\int_R \tilde{\phi}(k)^{[s]} \cdot \widetilde{\phi^p(k)}^{[s]} dk}.$$

Степенният показател $\frac{p}{p-1}$ на M е оптимален за сходимостта на итерациите (виж [38] и [39]).

2.2 Представяне на уравненията на Бусинеск като системи ОДУ

Уравненията на Бусинеск могат да се представят във вид на система от диференциални уравнения, съдържащи производни от по-нисък ред.

Нека $w(x, t)$ е помощна функция, дефинирана в $\mathbb{R} \times [0, T]$. Уравнението на Бусинеск от шести ред е еквивалентно на следната система

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = u - \beta_2 \Delta u + \beta_3 \Delta^2 u - f(u), \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \beta_1 \Delta \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta w \end{cases} \quad (2.5)$$

с начални условия

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ w(x, 0) &= (-\Delta)^{-1}(\beta_1 \Delta u_1(x) - u_1(x)). \end{aligned}$$

В Раздел 3.2 и Раздел 3.3 са изследвани две диференчни схеми, получени при дискретизацията на система (2.5). Освен във вида (2.5) в следващия параграф е разгледано представяне на уравненията на Бусинеск във вид на обобщена хамилтонова система.

2.2.1 Хамилтонови системи

Хамилтоновите системи са едни от най-важните сред динамичните системи. Те имат широко приложение, което включва, но не се ограничава със структурна биология, фармакология, плазма-физика, механика на материалите и ЧДУ. Най-характерното свойство на хамилтоновите системи е свойството *симплектичност* и едно от предизвикателствата на числения анализ е разработването на устойчиви числени методи за ЧДУ, които запазват симплектичността на дискретно ниво.

В този параграф са представени дефиниция и означения, свързани с хамилтоновите системи, както и някои примери за такива системи. Теоретичният материал е взиман от [24] и [42].

Дефиниция 2.1. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^{2d}$, $\Omega = \{(p, q) = (p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d)\}$, $T \subset \mathbb{R}$, $t \in T$ и $H = H(p, q, t)$ е гладка реална функция, дефинирана в $\Omega \times T$. Тогава системата

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.6)$$

се нарича *хамилтонова система* с *хамилтониан* $H(p, q, t)$.

Числото d се нарича *брой на степените на свобода*, Ω е *фазово пространство*, а $\Omega \times T$ - *разширено фазово пространство*. Точната гладкост на $H(p, q, t)$ не е явно зададена, но навсякъде се предполага поне C^2 -непрекъснатост, така че дясната страна на система (2.6) да е C^1 -непрекъсната и стандартните теореми за съществуване и единственост да са приложими към съответните задачи с начални условия. Когато хамилтонианът H не зависи явно от t , т.е. $H = H(p, q)$, системата (2.6) се нарича *автономна система частни диференциални уравнения*.

Ако хамилтонианът H има вида $H(p, q) = T(p) + V(q)$, където T и V представляват съответно кинетичната и потенциалната енергия, то H се нарича *разделящ се хамилтониан*, а системата (2.6) - *разделяща се хамилтонова система*.

Понякога е по-удобно система (2.6) да се разгледа в следния матричен вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathbb{J}^{-1} \nabla H,$$

където ∇ е операторът градиент

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_d}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_d} \right),$$

а \mathbb{J} е $2d \times 2d$ антисиметрична матрица

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Тук I и 0 представляват съответно единичната и нулевата матрица от ред $d \times d$.

Важно свойство, характерно на хамилтоновите системи, е свойството *симплектичност*. За да се разбере по-лесно това свойство нека разгледаме двумерните успоредници P в \mathbb{R}^{2d} , определени от векторите

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^p \\ \xi^q \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^p \\ \eta^q \end{pmatrix},$$

където $\xi^p, \xi^q, \eta^p, \eta^q$ са в \mathbb{R}^d , като

$$P = \{t\xi + s\eta \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}.$$

В случай, че $d = 1$ ориентираното лице $\omega(P)$ на P се пресмята по следния начин

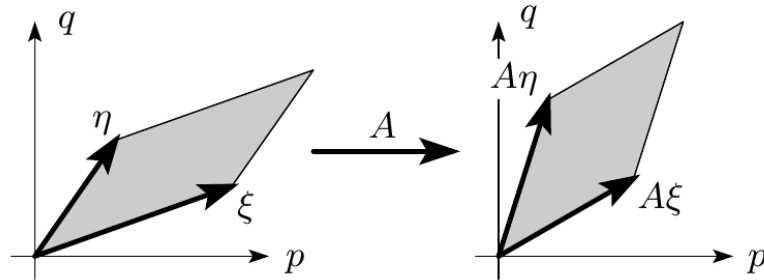
$$\omega(P) = \begin{vmatrix} \xi^p & \eta^p \\ \xi^q & \eta^q \end{vmatrix} = \xi^p \eta^q - \xi^q \eta^p$$

(виж лявата картина на Фигура 1). При по-големи размерности с $w(P)$ се означава сума от ориентираните лица на проекциите на P върху координатните равнини (p_i, q_i) . Това поражда билинейно изображение, действащо върху векторите от \mathbb{R}^{2d} , което играе важна роля за хамилтоновите системи. Това изображение може да се запише в матричен вид по следния начин

$$w(\xi, \eta) = \xi^T \mathbb{J} \eta,$$

където \mathbb{J} се задава с (2.7).

Дефиниция 2.2. Линейното изображение $A : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ се нарича симплектично, ако $A^T \mathbb{J} A = \mathbb{J}$ или еквивалентно $\omega(A\xi, A\eta) = \omega(\xi, \eta)$, за всеки $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{2d}$.



Фигура 1: Симплектичност (запазване на лицето) на линейно изображение

В случай на една степен на свобода ($d = 1$) $\omega(\xi, \eta)$ представлява лицето на успоредника P , а симплектичността на линейното изображение A означава запазване на лицето от A .

При $d > 1$ симплектичността означава, че сумата на ориентираните лица на проекциите на P върху координатните равнини (p_i, q_i) е равна на образа на $A(P)$.

От особена важност е да се дефинира симплектичност при нелинейните изображения. Добре известен факт е, че диференцируемите функции могат да се апроксимират локално чрез линейни изображения. Това води до следната дефиниция:

Дефиниция 2.3. Диференцируемото изображение $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ (където $\Omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ е отворено множество) се нарича симплектично, ако Якобианът $g'(p, q)$ е симплектичен, т.е.

$$g'(p, q)^T \mathbb{J} g'(p, q) = \mathbb{J} \quad \text{или} \quad \omega(g'(p, q)\xi, g'(p, q)\eta) = \omega(\xi, \eta)$$

Дефиниция 2.4. Поток на хамилтоновата система се нарича изображението $\varphi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$, дефинирано чрез равенството

$$\varphi_t(p_0, q_0) = (p(t, p_0, q_0), q(t, p_0, q_0)),$$

където $p(t, p_0, q_0)$ и $q(t, p_0, q_0)$ е решението на системата (2.6) с начални условия $p(0) = p_0$ и $q(0) = q_0$.

Теорема 13. (Поанкаре) Нека $H(p, q)$ е два пъти непрекъснато диференцируема функция в $\Omega \subset \mathbb{R}^{2d}$. Тогава за всяко фиксирано t потокът φ_t е симплектична трансформация навсякъде, където е дефиниран.

Тъй като симплектичността е характерно свойство на хамилтоновите системи естествено е да се търсят числени методи, които споделят това свойство.

Дефиниция 2.5. Численият едностъпков метод се нарича симплектичен, ако едностъпковото изображение

$$y^{k+1} = \Phi_h(y^k)$$

е симплектично, когато е приложено към гладка хамилтонова система.

Симплектичен метод на Ойлер

За системата

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q(p, q) \\ \dot{q} = H_p(p, q) \end{cases} \quad \text{или еквивалентно} \quad \dot{y} = \mathbb{J}^{-1} \nabla H(y),$$

където $y = (p, q)$, а с H_p и H_q са означени векторите стълбове от частните производни на H по p и q , може да се приложи разделящ се метод на Ойлер

$$\begin{cases} p^{k+1} = p^k - \tau H_q(p^k, q^{k+1}) \\ q^{k+1} = p^k + \tau H_p(p^k, q^{k+1}) \end{cases} \quad (2.8)$$

или

$$\begin{cases} p^{k+1} = p^k - \tau H_q(p^{k+1}, q^k) \\ q^{k+1} = p^k + \tau H_p(p^{k+1}, q^k), \end{cases} \quad (2.9)$$

където към едната променлива е приложен неявен метод, а към другата променлива – явен метод на Ойлер.

Теорема 14. Методите на Ойлер (2.8) и (2.9) са симплектични методи от първи ред.

Доказателство. Твърдението е доказано само за метод (2.8). Диференцирането в зависимост от (p^k, q^k) води до

$$\begin{pmatrix} I + \tau H_{qp}^T & 0 \\ -\tau H_{pp} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(p^{k+1}, q^{k+1})}{\partial(p^k, q^k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -\tau H_{qq} \\ 0 & I \tau H_{qp} \end{pmatrix},$$

където матриците H_{qp}, H_{pq} от частните производни са пресметнати при (p^{k+1}, q^k) . Оттук може да се пресметне директно $\left(\frac{\partial(p^{k+1}, q^{k+1})}{\partial(p^k, q^k)}\right)$ и да се провери, че

$$\left(\frac{\partial(p^{k+1}, q^{k+1})}{\partial(p^k, q^k)}\right)^T \mathbb{J} \left(\frac{\partial(p^{k+1}, q^{k+1})}{\partial(p^k, q^k)}\right) = \mathbb{J}$$

□

И двата варианта (2.8) и (2.9) на симплектичния метод на Ойлер са неявни в общия случай. При хамилтонови системи с разделящ се хамилтониан $H(p, q) = T(p) + U(q)$ обаче и двата варианта са явни.

Симплектичен метод на Щърмер-Верле

Теорема 15. *Схемите на Щърмер-Верле*

$$\begin{cases} p^{k+1/2} = p^k - \frac{\tau}{2} H_q(p^{k+1/2}, q^k) \\ q^{k+1} = q^k + \frac{\tau}{2} (H_p(p^{k+1/2}, q^k) + H_p(p^{k+1/2}, q^{k+1})) \\ p^{k+1} = p^{k+1/2} - \frac{\tau}{2} H_q(p^{k+1/2}, q^{k+1}) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} q^{k+1/2} = q^k + \frac{\tau}{2} H_q(p^k, q^{k+1/2}) \\ p^{k+1} = p^k - \frac{\tau}{2} (H_q(p^k, q^{k+1/2}) + H_q(p^{k+1}, q^{k+1/2})) \\ q^{k+1} = q^{k+1/2} + \frac{\tau}{2} H_q(p^{k+1}, q^{k+1/2}) \end{cases}$$

са симплектични методи от ред 2.

Доказателство. Доказателството следва от факта, че схемата на Щърмер-Верле е композиция от два симплектични метода на Ойлер. Вторият ред следва от неговата симетрия. □

Симплектичен метод на Рунге-Кута

Разгледана е задача на Коши за неавтономната система от ОДУ от първи ред

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Дефиниция 2.6. Нека b_i, a_{ij} ($i, j = 1, \dots, s$) са реални числа и нека $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$. S -етапен метод на Рунге-Кута се дефинира със следните равенства

$$\begin{aligned} k_i &= f(t_0 + c_i \tau, y_0 + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, s \\ y_1 &= y_0 + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i \end{aligned}$$

Коефициентите на метода обикновено се представят във вида

Дефиниция 2.7. Методът на Рунге-Кута (или по-общо едностъпковият метод) има ред p , ако локалната грешка $y_1 - y(t_0 + \tau)$ удовлетворява:

$$y_1 - y(t_0 + \tau) = O(\tau^{p+1}), \quad \text{при } \tau \rightarrow 0.$$

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Методът на Щърмер-Верле не принадлежи на класа методи на Рунге-Кута. Той е важен представител на т. нар. разделен метод на Рунге-Кута.

Нека е дадена следната разделена система:

$$\dot{y} = f(y, z), \quad \dot{z} = g(y, z), \quad (2.10)$$

където y и z може да са вектори с различни размерности.

Идеята е да се разгледат два Рунге-Кута метода и първият метод (a_{ij}, b_j) да се приложи към променливата y , а вторият метод $(\hat{a}_{ij}, \hat{b}_j)$ към променливата z .

Дефиниция 2.8. Нека (a_{ij}, b_j) и $(\hat{a}_{ij}, \hat{b}_j)$ са коефициенти на два Рунге-Кута метода. Разделящ се метод на Рунге-Кута за решението на (2.10) се дава с

$$\begin{cases} k_i = f(y_0 + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, z_0 + \tau \sum_{j=1}^s \hat{a}_{ij} l_j) \\ l_i = g(y_0 + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, z_0 + \tau \sum_{j=1}^s \hat{a}_{ij} l_j) \\ y_1 = y_0 + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad z_1 = z_0 + \tau \sum_{i=1}^s \hat{b}_i l_i. \end{cases} \quad (2.11)$$

Методът на Щърмер-Верле се записва във вида (2.11) със следните коефициенти:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Обикновено такива методи не запазват квадратичните инварианти. По тази причина разглеждаме квадратичните инварианти във вида

$$Q(y, z) = y^T D z, \quad (2.12)$$

където D е матрица с подходяща размерност.

Теорема 16. Двойката Лобато IIIA-IIIB запазва всички квадратични инварианти от вида (2.12). В частност, това остава в сила за схемите на Щърмер-Верле.

Теорема 17. Ако коефициентите на разделения метод на Рунге-Кута удовлетворяват следните условия

$$\begin{aligned} b_i \hat{a}_{ij} + \hat{b}_j a_{ji} &= b_i \hat{b}_j, \quad \text{за } i, j = 1, \dots, s, \\ b_i &= \hat{b}_i, \quad \text{за } i = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (2.13)$$

то те запазват квадратичните инварианти от вида (2.12).

Ако разделените диференциални уравнения са от специалния вид

$$\dot{y} = f(z), \quad \dot{z} = g(y),$$

то само условия (2.13) са достатъчни за запазване на инвариантността на (2.12).

Поасонови системи

В този раздел е разгледано обобщение на хамилтоновите системи, където матрицата \mathbb{J}^{-1} се заменя с неконстантна матрица $B(y)$. Такива структури са представени от Ли (1888) и се наричат *поасонови системи*. Те се получават от хамилтоновите системи, записани в неканонични координати.

Производната на функцията $F(p, q)$ по потока на хамилтоновата система (2.6), наричана още *производна на Ли*, се задава с израза

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(p(t), q(t)) &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).\end{aligned}\quad (2.14)$$

Тази симетрична структура води до следната дефиниция

Дефиниция 2.9. Поасонова скобка на две гладки функции $F(p, q)$ и $G(p, q)$ се нарича функцията

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

Горният израз може да се запише в матричен вид

$$\{F, G\}(y) = \nabla F(y)^T \mathbb{J}^{-1} \nabla G(y),$$

където $y = (p, q)$, а антисиметричната матрица \mathbb{J} е дефинирана чрез (2.7).

Поасоновата скобка е билинейна, антисиметрична ($\{F, G\} = -\{G, F\}$) и удовлетворява равенството на Якоби

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0$$

и правилото на Лайбниц

$$\{F \cdot G, H\} = F \cdot \{G, H\} + G \cdot \{F, H\}.$$

При тези означения производната на Ли (2.14) приема вида

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = \{F, H\}(y(t)).$$

Оттук следва, че функцията $I(p, q)$ е първи интеграл на (2.6) тогава и само тогава, когато $\{I, H\} = 0$.

Ако $F(y) = y_i$, то хамилтоновата система (2.6) се записва във вида

$$\dot{y} = \{y_i, H\} \text{ при } i = 1, \dots, 2d. \quad (2.15)$$

Теорема 18 (Поасон). Ако I_1 и I_2 са първи интеграли, то тяхната Поасонова скобка е също първи интеграл.

Доказателството на теоремата следва от равенството на Якоби с $F = I_1$ и $G = I_2$.

Нека $B(y) = (b_{ij}(y))$ и да заместим

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} b_{ij} \frac{\partial G}{\partial y_j} \quad (2.16)$$

или по-компактно $\{F, G\}(y) = \nabla F(y)^T B(y) \nabla G(y)$.

Лема 19. *Поасоновата скобка, дефинирани с (2.16) е билинейна, антисиметрична и удовлетворява равенството на Якоби и правилото на Лайбниц тогава и само тогава, когато*

$$b_{ij} = -b_{ji}, \text{ за всяко } i \text{ и } j,$$

ако за всяко } i, j, k

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial b_{ij}(y)}{\partial y_l} b_{lk} + \frac{\partial b_{jk}(y)}{\partial y_l} b_{li} + \frac{\partial b_{ki}(y)}{\partial y_l} b_{lj} \right) = 0.$$

Дефиниция 2.10. Нека матрицата $B(y)$ удовлетворява условията на Лема 19. Тогава формула (2.16) е (обобщена) Поасонова скобка, а системата

$$\dot{y} = B(y)\nabla H(y) \quad (2.17)$$

е поасонова система.

Теорема 20. (Дарбу, Ли) *Нека матрицата $B(y)$, пораждаща Поасонова скобка, е с постоянен ранг $n - q = 2m$ в околност на $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогава съществуват функции $P_1(y), \dots, P_m(y), Q_1(y), \dots, Q_m(y)$ и $C_1(y), \dots, C_q(y)$, удовлетворяващи следните равенства*

$$\begin{aligned} \{P_i, P_j\} &= 0 & \{P_i, Q_j\} &= -\delta_{ij} & \{P_i, C_l\} &= 0 \\ \{Q_i, P_j\} &= \delta_{ij} & \{Q_i, Q_j\} &= 0 & \{Q_i, C_l\} &= 0 \\ \{C_k, P_j\} &= 0 & \{C_k, Q_j\} &= 0 & \{C_k, C_l\} &= 0 \end{aligned}$$

в околност на y_0 . Градиентите на P_i, Q_i, C_k са линейно независими, така че $y \rightarrow (P_i, Q_i, C_k)$ представлява локална смяна на координатите.

Следствие 2.1. (Трансформация в канонична форма) *Нека трансформацията от Теорема 20 е означена с $z = \vartheta(y) = (P_i, Q_i, C_k)$. С тази смяна на координатите поасоновата система (2.17) се записва във вида*

$$\dot{z} = B_0(z)\nabla K(z) \text{ с } B_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{J}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

където $K(z) = H(y)$. От $z = (p, q, c)$ тази система се записва във вида

$$\dot{p} = -K_q(p, q, c), \quad \dot{q} = K_p(p, q, c), \quad \dot{c} = 0.$$

Системата (2.17) може да се представи във вида (2.15). Формулата за производната на Ли също остава в сила. Избирайки $F = H$ се показва, че хамилтонианът H е първи интеграл на обобщената поасонова система.

Нека M от \mathbb{R}^{2d} е симплектично многообразие, т.е. пространство, в което симплектичната структура

$$\omega_x(\xi_1, \xi_2) = (J\xi_1, \xi_2), \text{ за всяко } \xi_1, \xi_2 \in T_x M,$$

е неизродена за всяко $x \in M$, такова че за всяко ξ_1 в тангенциалното пространство $T_x M$.

В локални координати $x = \chi(y)$ това условие е еквивалентно на обратимостта на матрицата $X(y)^T J X(y)$ с $X(y) = \chi'(y)$ тъй като всеки тангентен вектор в $x = \chi(y)$ има вида $\xi = X(y)\eta$ и $X(y)$ има линейно независими стълбове. Многообразието $M = \{x \in \mathbb{R}^{2d} | c(x) = 0\}$ е симплектично, ако матрицата $c'(x)J^{-1}c'(x)^T$ е обратима за

всяко $x \in M$. Това условие може да бъде зададено по друг начин, като се каже, че матрицата $(\{c_i, c_j\})$ от каноничните Поасоновы скобки е обратима.

Нека разгледаме част от симплектичните системи, които определят крива на решението $t \rightarrow x(t) \in M$ от уравнението

$$(J\dot{x} - \nabla H(x), \xi) = 0 \text{ за всяко } \xi \in T_x M. \quad (2.18)$$

От преобразуването $(\nabla H(x), \xi) = H'(x)\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\gamma(t))$ като производна по направление $\gamma(t) \in M$ с $\gamma(0) = x$ и $\dot{\gamma}(0) = \xi$ е достатъчно, че хамилтонианът H е дефиниран и диференцируем в M . Уравнение (2.18) може да се запише по следния начин

$$\omega_x(\dot{x}, \xi) = H'(x)\xi \text{ за всяко } \xi \in T_x M.$$

В термините на симплектичната проекция $P(x) : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow T_x M$ за всяко $x \in M$, дефинирана чрез определяне на $P(x)v \in T_x M$ за $v \in \mathbb{R}^{2d}$ от условието

$$(JP(x)v, \xi) = (Jv, \xi) \text{ за всяко } \xi \in T_x M,$$

формула (2.18) може да се представи като диференциалното уравнение в M

$$\dot{x} = P(x)J^{-1}\nabla H(x).$$

В координати $x = \chi(t)$ и отново с $X(y) = \chi'(y)$ формула (2.18) се записва във вида

$$X(y)^T (JX(y)\dot{y} - \nabla H(\chi(y))) = 0$$

и след полагане

$$B(y) = (X(y)^T JX(y))^{-1} \text{ и } K(y) = H(\chi(y)) \quad (2.19)$$

се получава диференциалното уравнение

$$\dot{y} = B(y)\nabla K(y). \quad (2.20)$$

Теорема 21. *За хамилтонови системи (2.18) еквивалентното диференциално уравнение в локални координати (2.20) с (2.19) е поасонова система.*

Дефиниция 2.11. Трансформацията $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (където U е отворено множество в \mathbb{R}^n) се нарича поасоново изображение в зависимост от поасоновата скобка (2.16), ако матрицата на Якоби удовлетворява

$$\varphi'(y)B(y)\varphi'(y)^T = B(\varphi(y)). \quad (2.21)$$

За канонични симплектични структури, където $B(y) = \mathbb{J}^{-1}$ условието (2.21) е еквивалентно на симплектичността на трансформацията $\varphi(y)$.

Дефиниция 2.12. Изображението $\psi : M \rightarrow M$, където M е симплектично многообразие, се нарича симплектично, ако за всяко $x \in M$,

$$\omega_{\psi(x)}(\psi'(x)\xi_1, \psi'(x)\xi_2) = \omega_x(\xi_1, \xi_2), \text{ за всеки } \xi_1, \xi_2 \in T_x M.$$

Числените методи, които запазват свойство (2.21) на дискретно ниво, се наричат Poisson integrators, а в дисертацията- *симплектични методи за поасоновы системи*.

2.2.2 Уравнения на Бусинеск във вид на обобщени хамилтонови системи (или поасонови системи)

Уравненията на Бусинеск (1.1) и (1.2) могат да се запишат във вид на обобщена хамилтонова система (или поасонова система)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta v} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

с помощта на спомагателна функция v , дефинирана чрез $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Тук J е анти-симетричен оператор, хамилтонианът H представлява пълната енергия на системата, записана в термините на u и v , а $\frac{\delta H}{\delta u}$ и $\frac{\delta H}{\delta v}$ са вариационните производни на H по отношение u и v .

Поасоновата скобка се дефинира чрез равенството $\omega(G_1, G_2) = \nabla G_1^T J \nabla G_2$.

- За Двойно дисперсното уравнение (1.1) операторите J и H имат следния вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \partial_x \\ (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \partial_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2F(u) \right) dx, \quad (2.23)$$

където с I_d е идентитета, а с $F(u)$ е означена функцията

$$F(u) = \int_0^u f(s) ds = \alpha \int_0^u s^p ds = \alpha \frac{u^{p+1}}{p+1}.$$

И така скаларното ДДУ (1.1) е еквивалентно на следната система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (2.24)$$

За да покажем, че уравнението (1.1) се записва във вида (2.22), ще пресметнем вариационните производни $\frac{\delta H}{\delta u}$ и $\frac{\delta H}{\delta v}$.

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta v} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(u, v + \epsilon z) - H(u, v)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left((v + \epsilon z)^2 - v^2 + \beta_1 (v_x + \epsilon z_x)^2 - \beta_1 v_x^2 \right) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} (2v\epsilon z + \epsilon^2 z^2 + 2\beta_1 \epsilon v_x z_x + \beta_1 \epsilon^2 z_x^2) dx. \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{\delta H}{\delta v} = \int_{\mathbb{R}} (vz + \beta_1 v_x z_x) dx = \int_{\mathbb{R}} (vz) dx + \beta_1 v_x z|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \beta_1 v_{xx} z dx = \int_{\mathbb{R}} (v - \beta_1 v_{xx}) z dx$$

и $\frac{\delta H}{\delta v} = v - \beta_1 \Delta v$.

От симетричността на $(I_d - \beta_1 \Delta)$ и първото уравнение на (2.22) се получава следното равенство:

$$\frac{du}{dt} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \partial_x (v - \beta_1 v_{xx}) = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \partial_x (I_d - \beta_1 \Delta) v = \partial_x v,$$

т.е. получаваме първото уравнение на (2.24).

За втората вариационна производна $\frac{\delta H}{\delta u}$ последователно получаваме:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(\beta_2 (u_x + \epsilon z_x)^2 + (u + \epsilon z)^2 - u_x^2 - u^2 + \frac{2\alpha}{p+1} ((u + \epsilon z)^{p+1} - u^{p+1}) \right) dx = \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \left(2\beta_2 \epsilon u_x z_x + \beta_2 \epsilon^2 z_x^2 + 2\epsilon u z + \epsilon^2 z^2 + \frac{2\alpha}{p+1} ((p+1)u^p \epsilon z + u^{p-1} \epsilon^2 z^2 + \dots + \right. \\ \left. + \epsilon^{p+1} z^{p+1}) \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\beta_2 u_x z_x + u z + \frac{\alpha}{p+1} u^p z \right) dx = \int_{\mathbb{R}} (-\beta_2 u_{xx} z + u z + \alpha u^p z) dx = \\ = \int_{\mathbb{R}} (-\beta_2 u_{xx} + u + \alpha u^p) z dx, \end{aligned}$$

т.е. $\frac{\delta H}{\delta u} = -\beta_2 \Delta u + u + \alpha u^p$ откъдето следва верността на второто равенство на (2.24).

- За уравнението на Бусинеск от шести ред (1.2) антисиметричния оператор J и хамилтонианът H имат следния вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \\ (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} H(u(x, t), v(x, t)) = \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 2\alpha \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подобно на Двойно дисперсното уравнение, скаларното уравнение на Бусинеск от шести ред е еквивалентно на следната обобщена хамилтонова система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \alpha \frac{\partial u^p}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (2.26)$$

Началните условия на системите (2.24) и (2.26) са

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{където} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = u_1(x).$$

Тъй като числените методи трябва да запазват свойства на непрекъснатата задача, в Глава 3.5 и Глава 4.2.2 са разгледани схеми, които запазват симплектичността на дискретно ниво. Такива схеми са известни в литературата като *симплектични схеми* [24], [42]. Тези схеми са конструирани след представяне на съответното уравнение на Бусинеск във вид на обобщена хамилтонова система.

Важно е да се отбележи, че системите (2.24) и (2.26) са разделящи се хамилтонови системи. Когато е приложен към такива системи методът на Щьормер-Верле е еквивалентен на Лобато IIIa-IIIb и на симплектичния разделен метод на Рунге-Кута. От [43] следва, че така получените схеми са Poisson integrators.

Теорема 22. *Хамильтонианът $H(u(x, t), v(x, t))$, дефиниран чрез (2.23) и (2.25), може да се запише само в термините на функцията $u(x, t)$ по следния начин:*

- За Двойно дисперсното уравнение

$$\begin{aligned} E(u(x, t)) &= \frac{1}{2} \left\| (-\Delta)^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{\beta_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \|u(x, t)\|^2 + \\ &+ \frac{\beta_2}{2} \|\nabla u(x, t)\|^2 + \int_R \int_0^{u(x, t)} f(s) ds dx; \end{aligned} \quad (2.27)$$

- За уравнението на Бусинеск от шести ред

$$\begin{aligned} E(u(x, t)) &= \frac{1}{2} \left\| (-\Delta)^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{\beta_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \|u(x, t)\|^2 + \\ &+ \frac{\beta_2}{2} \|\nabla u(x, t)\|^2 + \frac{\beta_3}{2} \|\Delta u(x, t)\|^2 - \int_R \int_0^{u(x, t)} f(s) ds dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Доказателство. Твърдението е доказано за уравнението на Бусинеск от шести ред (1.2). За уравнението (1.1) доказателството следва същия алгоритъм.

Нека операторът $A = -\Delta$ е дефиниран в пространството от функции, които се анулират при $x \rightarrow \pm\infty$. За да се получи закона за запазване на енергията в термините на u първо оператора A^{-1} се прилага към двете страни на (1.2). После полученото уравнение

$$(-\Delta)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u + \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta u + \beta_3 \Delta^2 u - f(u) = 0$$

се умножава скаларно с $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ и се интегрира по x . Това води до следното уравнение

$$\begin{aligned} \int_R (-\Delta)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_R u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \beta_1 \int_R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx - \\ - \beta_2 \int_R \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \beta_3 \int_R \Delta^2 u \frac{\partial u}{\partial t} dx - \int_R f(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx = 0 \end{aligned}$$

От асимптотичните гранични условия и след интегриране по части на горните интегрални, те се записват във вида

$$\begin{aligned} \int_R A^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \left(A^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \left(A^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, A^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| A^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \\ \int_R u \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_R u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|^2 \\ \int_R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \\ \int_R \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx &= - \int_R \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \\ \int_R \Delta^2 u \frac{\partial u}{\partial t} dx &= - \int_R \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx = \int_R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_R (\Delta u)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\Delta u\|^2 \\ \int_R f(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \int_R \frac{\partial}{\partial u} F(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_R F(u) dx. \end{aligned}$$

Така за всяко $t \geq 0$ решението $u(x, t)$ на (1.2) удовлетворява равенството

$$\frac{d}{dt} E(u(x, t)) = 0.$$

Следователно

$$E(u(x, t)) = E(u(x, 0)), \quad (2.29)$$

където $E(u(x, t))$ се дефинира чрез (2.28).

За да се завърши доказателството, остана да се преработи първия член на $E(u(x, t))$. Нека положим $A^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} := w$. Тогава

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Aw = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.30)$$

откъдето следва $\left(A^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = (w, Aw) = \left(w, -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right)$. След заместване на (2.30) в уравнението $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$ се получава $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Накрая след интегриране по x се получава връзката $-\frac{\partial w}{\partial x} = v$ откъдето

$$\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 = \left(A^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = (v, v).$$

С това равенство доказателството на Теорема 22 е завършено. \square

При всяка конструирана и изследвана диференчна схема за намиране численото решение на разглежданите задачи е предложена апроксимация на енергията, наречена дискретна енергия. В Глава 3.2 и Глава 3.3 дискретната енергия E_h^k е записана във термините на дискретната функция y^k , апроксимираща решението $u(x, t)$ на k -тия слой по времето. За всички останали диференчни схеми дискретната енергия H_h^k , наричана още дискретен хамилтониан, е записана в термините на дискретните функции y^k и v^k , апроксимиращи решението $u(x, t)$ и $v(x, t)$ на съответната хамилтонова система. Дискретните енергии E_h^k и H_h^k апроксимират с втори ред на точност непрекъснатата енергия.

2.3 Означения

Дискретната задача е разгледана при $x \in [-L_1, L_2]$ и $t \in [0, T]$, където L_1 и L_2 са достатъчно големи числа, такива че решението $u(x, t)$ и неговите производни са пренебрежимо малки извън този интервал. В крайния интервал $[-L_1, L_2]$ е въведена равномерна мрежа със стъпка h и нека τ е стъпката по времето. Възлите на мрежата са означени с (x_i, t_k) , където $x_i = -L_1 + ih$, $i = 0, \dots, N$ и $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \dots, K$. Нека y^k е приближеното решение на k -тия слой по времето, т.е. в момента от време $t_k = k\tau$, а y_i^k е приближеното решение във възела (x_i, t_k) .

- Крайни разлики за апроксимация на първите производни:

$$y_{t,i}^k := \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau}, \quad y_{\bar{x},i}^k := \frac{y_i^k - y_{i-1}^k}{h}, \quad y_{\bar{x},i}^k := \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2h}$$

- Крайни разлики за апроксимация на вторите производни и производни от по-висок ред:

$$1. \text{ със стъпки } h \text{ и } \tau: \\ y_{tt,i}^k := \frac{y_i^{k+1} - 2y_i^k + y_i^{k-1}}{\tau^2}, \quad \Delta_h y_i^k \equiv y_{\bar{x}\bar{x},i}^k := \frac{y_{i+1}^k - 2y_i^k + y_{i-1}^k}{h^2};$$

2. със стъпка $2h$:

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}y_i^k &\equiv y_{\hat{x}\hat{x},i}^k := \frac{y_{i+2}^k - 2y_i^k + y_{i-2}^k}{4h^2}, \quad y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k := \frac{y_{i+3}^k - 3y_{i+1}^k + 3y_{i-1}^k - y_{i-3}^k}{8h^3}, \\ y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k &:= \frac{y_{i+5}^k - 5y_{i+3}^k + 10y_{i+1}^k - 10y_{i-1}^k + 5y_{i-3}^k - y_{i-5}^k}{32h^5}.\end{aligned}$$

В Глава 3.3 при конструиране на ФДС е използвано симетрично σ -тегло

$$y_i^{k,\sigma} \equiv \sigma y_i^{k+1} + (1 - 2\sigma)y_i^k + \sigma y_i^{k-1} = y_i^k + \sigma \tau^2 y_{tt,i}^k, \quad \sigma \in [0; 1].$$

Нелинейният член $f(u(x_i, t_k))$ е апроксимиран чрез следните формули:

- при консервативни схеми:

$$f_1(y_i^k) = \frac{F(y_i^{k+1}) - F(y_i^{k-1})}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \quad (2.31)$$

където $F(y) = \alpha \int_0^y s^p ds = \alpha \frac{y^{p+1}}{p+1}$.

В случай на квадратична нелинейност $p = 2$ получаваме

$$f_1(y_i^k) = \alpha \frac{(y_i^{k+1})^3 - (y_i^{k-1})^3}{3(y_i^{k+1} - y_i^{k-1})} = \alpha \frac{(y_i^{k+1})^2 + y_i^{k+1}y_i^{k-1} + (y_i^{k-1})^2}{3},$$

а при кубична нелинейност $p = 3$ $f_1(y_i^k)$ приема вида

$$f_1(y_i^k) = \alpha \frac{(y_i^{k+1})^3 + (y_i^{k+1})^2 y_i^{k-1} + y_i^{k+1} (y_i^{k-1})^2 + (y_i^{k-1})^3}{4}.$$

- при симплектични схеми:

$$f_2(y_i^k) = \alpha (y_i^k)^p; \quad (2.32)$$

- при схеми, запазващи момента:

$$f_3(y_i^k) = \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}. \quad (2.33)$$

Изразите (2.31), (2.32) и (2.33) апроксимират нелинейния член с втори ред на точност.

Нека \mathbb{H} е пространството от мрежови функции, които се анулират извън $[-L_1, L_2]$. В \mathbb{H} е въведено дискретно скалярно произведение $(v, w) = \sum_{i=1}^{N-1} h v_i w_i$, а $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ е породената от него норма. Нека $\|v\|^2 = (v, v) = \sum_{i=1}^N h v_i^2$.

При пресмятане на дискретната енергия е използван дискретен аналог на първата формулата на Грийн от [40], който в общия случай има вида

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + az y_{\bar{x}}|_N - a_1 y_{x,0} z_0.$$

В частност, при $z = y$, $y_0 = y_N = 0$ и $a = 1$, се получава следния израз

$$(y_{\bar{x}x}, y) = -(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}].$$

Сходимостта и точността на разглежданите диференчни схеми са изследвани с помощта на вложени мрежи.

Нека с u^k е означено точното решение на задачата в момента от време t_k , т. е. $u^k := u(x, t_k)$. За пресмятането на грешката $\psi_{h\tau}$ и реда на сходимост κ на приближеното решение към точното са използвани следните формули:

$$\psi_{h\tau} = \max_k |\psi_h^k|, \quad \kappa = \log_2 \left(\frac{\psi_{h\tau}}{\psi_{(h\tau)/2}} \right), \quad (2.34)$$

където $\psi_h^k = \max_{i=0, \dots, N} |y_i^k - u_i^k|$, а с $\psi_{(h\tau)/2}$ е грешката при мрежа със стъпки $h/2$ и $\tau/2$.

Когато не разполагаме с точно решение на задачата, грешката $\psi_{h/4}^K$ и реда на сходимост κ на последния слой $K = T/\tau$ по времето са определени по *метода на Рунге*:

$$\psi_{h/4}^K = \frac{\|y_h^K - y_{h/2}^K\|_\infty^2}{\|y_h^K - y_{h/2}^K\|_\infty - \|y_{h/2}^K - y_{h/4}^K\|_\infty}, \quad \kappa = \log_2 \left(\frac{\|y_h^K - y_{h/2}^K\|_\infty}{\|y_{h/2}^K - y_{h/4}^K\|_\infty} \right). \quad (2.35)$$

С E_h^K , I_h^K и M_h^K са означени съответно дискретната енергия, дискретната маса и дискретния момент при $T = K\tau$.

В голяма част от разглежданите примери, когато не разполагаме с точната стойност на енергията, грешката ψ_E и реда на сходимост κ_E на дискретната енергия E_h^K на крайния слой по времето е определена по *метода на Рунге*:

$$\psi_E = \frac{|E_h^K - E_{h/2}^K|^2}{|E_h^K - E_{h/2}^K| - |E_{h/2}^K - E_{h/4}^K|}, \quad \kappa_E = \log_2 \left| \frac{E_h^K - E_{h/2}^K}{E_{h/2}^K - E_{h/4}^K} \right|. \quad (2.36)$$

Аналогично се определя грешката ψ_M и реда на сходимост κ_M на дискретния момент M_h^K .

Относителните грешки на енергията *relEnergy*, на масата *relMass* и на момента *relMom* се пресмятат по формулите

$$relEnergy = \frac{|E_h - E_h^0|}{E_h^0}, \quad relMass = \frac{|I_h^K - I_h^0|}{I_h^0}, \quad relMom = \frac{|M_h^K - M_h^0|}{M_h^0}. \quad (2.37)$$

За да се избегнат повторенията с C са означени различни положителни константи, независещи от стъпките h и τ .

2.4 Класове устойчиви трислойни схеми

В този раздел е дефинирана устойчивост на диференчни схеми и са разгледани достатъчни условия за устойчивост. Материалът в този раздел е взиман от [40].

Да разгледаме следната канонична форма

$$B \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau} + \tau^2 R y_{tt}^k + A y^k = \varphi(t^k) \quad y(t^0) = y^0, \quad y(t^1) = y^1. \quad (2.38)$$

Тук $y^k, k = 0, \dots, K$ са произволни вектори от крайномерното реално пространство \mathbb{H} , $\varphi(t^k)$ е произволна функция, а A , B и R са линейни оператори в \mathbb{H} .

Решението на (2.38) може да бъде представено като сума $y^k = \bar{y}^k + \tilde{y}^k$, където \bar{y} е решение на хомогенното уравнение

$$B \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau} + \tau^2 R y_{tt}^k + A y^k = 0, \quad y(t^0) = y^0, \quad y(t^1) = y^1$$

а \tilde{y} е решението на нехомогенното уравнение

$$B \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau} + \tau^2 R y_{tt}^k + A y^k = \varphi(t^k), \quad y(t^0) = y(t^1) = 0.$$

За удобство задача (2.38) се записва в следния по-удобен вид

$$(B + 2\tau R) y^{k+1} = \Phi^k,$$

$$\Phi^k = 2(2R - A)\tau y^k + (B - 2\tau R) y^{k-1} + 2\tau \varphi^k.$$

Задачата (2.38) е разрешима, ако съществува обратният оператор $(B + 2\tau R)^{-1}$. Да допуснем, че това изискване е изпълнено и освен това операторът $(B + 2\tau R)^{-1}$ е положително определен.

Да разгледаме функционала, известен като **сложна норма**:

$$\|Y^{k+1}\|^2 = \frac{1}{4} \|y^k + y^{k+1}\|_{(l_1)}^2 + \|y^{k+1} - y^k\|_{(l_2)}^2, \quad (2.39)$$

където $\|\cdot\|_{(l_1)}$ и $\|\cdot\|_{(l_2)}$ са енергетични норми, конструирани за операторите A и R . По тази причина считаме, че тези оператори са симетрични и положително определени.

Дефиниция 2.13. Трислойната схема (2.38) се нарича **устойчива**, ако за всички достатъчно малки стъпки h и τ могат да се намерят положителни константи M_1 и M_2 , независещи от h и τ , така че за всяко $k = 1, \dots, K$ решението на (2.38) удовлетворява една от следните оценки:

$$\|Y^k\|_{(1)} \leq M_1 \|Y^1\|_{(1^0)} + M_2 \max_{0 \leq j \leq K} \|\varphi(t^j)\|_{(2)}$$

$$\|Y^k\|_{(1)} \leq M_1 \|Y^1\|_{(1^0)} + M_2 \max_{0 \leq j \leq K} (\|\varphi(t^j)\|_{(2)} + \|\varphi_{\bar{t}}(t^j)\|_{(2)}),$$

където $\|\cdot\|_2$ е подходяща норма в \mathbb{H} , а $\|\cdot\|_1$ е дефинирана с (2.39).

Нека сега разгледаме по-общия каноничен вид на трислойните схеми:

$$D y_{tt}^k + B \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2\tau} + A y^k = \varphi(t^k), \quad y(t^0) = y^0, \quad y(t^1) = y^1. \quad (2.40)$$

Теорема 23. Нека са изпълнени следните условия:

$$D(t) = D^*(t) > 0, \quad A(t) = A^*(t) > 0, \quad B(t) \geq 0,$$

$$D(t) \text{ и } A(t) \text{ са непрекъснати по Липшиц и } D \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 A.$$

Тогави схема (2.40) е устойчива по начални данни и по дясна част и за решението на (2.40) е в сила следната априорна оценка:

$$\|Y^{k+1}\|_{A(t^k)} \leq M_1 \sqrt{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \left(\|y^0\|_{A(t^1)} + \|y_t^0\|_{A(t^1)} + \sum_{s=1}^K \tau \|\varphi(t^s)\|_{D^{-1}(t^s)} \right).$$

Лема 24. Да разгледаме схемата $\tilde{D} y_{tt} + \tilde{A} y = \varphi$, където операторите \tilde{D} и \tilde{A} са симетрични и положително определени. Нека $\tilde{D} \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \tilde{A}$ за малко положително число ϵ . Дефинираме енергетична норма

$$\|Y^k\|^2 := \left(\left(\tilde{D} - \frac{\tau^2}{4} \tilde{A} \right) y_t^k, y_t^k \right) + \frac{1}{4} \left(\tilde{A} (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k \right).$$

Тогави е в сила оценката

$$\|Y^k\|^2 \geq \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)} \left[\left(\tilde{A} y^{k+1}, y^{k+1} \right) + \left(\tilde{D} y_t^k, y_t^k \right) \right].$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
\|Y^k\|^2 &= \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) - \frac{\tau^2}{4} \left(\tilde{A}y_t^k, y_t^k\right) + \frac{1}{4} \left(\tilde{A}(y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k\right) = \\
&= \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) - \frac{1}{4} \left(\tilde{A}(y^{k+1} - y^k), y^{k+1} - y^k\right) + \frac{1}{4} \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^k\right) + \frac{1}{4} \left(\tilde{A}y^k, y^k\right) = \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) - \frac{1}{4} \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^k\right) - \frac{1}{4} \left(\tilde{A}y^k, y^k\right) + \frac{1}{4} \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^k\right) + \\
&+ \frac{1}{4} \left(\tilde{A}y^k, y^k\right) = \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) + \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^k\right) = \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) + \left(\tilde{A}y^k, y^{k+1}\right).
\end{aligned}$$

За да преработим члена $\left(\tilde{A}y^k, y^{k+1}\right)$ използваме, че $y^k = y^{k+1} - \tau y_t^k$ откъдето

$$\left(\tilde{A}y^k, y^{k+1}\right) = \left(\tilde{A}(y^{k+1} - \tau y_t^k), y^{k+1}\right) = \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) - \tau \left(\tilde{A}y^{k+1}, y_t^k\right).$$

След прилагане на неравенството на Коши-Буняковски към $\left(\tilde{A}y^{k+1}, y_t^k\right)$, т.е.

$$\left(\tilde{A}y^{k+1}, y_t^k\right) \geq \sqrt{(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1})(\tilde{A}y_t^k, y_t^k)},$$

за енергетичната норма е в сила

$$\|Y^k\|^2 \geq \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) + \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) - \tau \sqrt{(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1})(\tilde{A}y_t^k, y_t^k)}.$$

От условието $\tilde{D} \geq \frac{1+\epsilon}{4}\tau^2\tilde{A}$ следва, че $(\tilde{A}y_t^k, y_t^k) \geq \frac{4}{\tau^2(1+\epsilon)}(\tilde{D}y_t^k, y_t^k)$. Оттук

$$\|Y^k\|^2 \geq \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) + \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) - \sqrt{(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1})} \sqrt{\frac{4}{1+\epsilon}(\tilde{D}y_t^k, y_t^k)}. \quad (2.41)$$

Тъй като $ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}$, неравенство (2.41) се записва във вида

$$\|Y^k\|^2 \geq \left(1 - \frac{1}{\delta(1+\epsilon)}\right) \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) + (1-\delta) \left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right).$$

Нека δ е избрано така, че коефициентите пред $\left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right)$ и $\left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right)$ да са равни, т.е. $\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}}$. Тогава $1 - \delta = \frac{\epsilon}{1+\epsilon+\sqrt{1+\epsilon}}$ и $1 - \delta > \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}$ откъдето следва финалната оценка

$$\|Y^k\|^2 \geq \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)} \left[\left(\tilde{A}y^{k+1}, y^{k+1}\right) + \left(\tilde{D}y_t^k, y_t^k\right) \right].$$

Доказателството на Лема 24 е завършено. \square

2.5 Други твърдения

За доказателството на дискретния закон за запазване на енергията, формулиран в Теорема 28, е необходимо следното свойство на симетричните оператори, описано в [40]:

Лема 25. Ако D е симетричен оператор, то

$$\begin{aligned} & (D(w^{k+1} + w^{k-1}), w^{k+1} - w^{k-1}) = \\ & = 0.5 [(D(w^{k+1} + w^k), w^{k+1} + w^k) + (D(w^{k+1} - w^k), w^{k+1} - w^k)] - \\ & - 0.5 [(D(w^k + w^{k-1}), w^k + w^{k-1}) + (D(w^k - w^{k-1}), w^k - w^{k-1})], \end{aligned}$$

за всеки вектор w от пространството \mathbb{H} .

Доказателство. Тъй като

$$\begin{aligned} & (D(w^{k+1} + w^{k-1}), w^{k+1} - w^{k-1}) = \\ & = (Dw^{k+1}, w^{k+1}) - (Dw^{k+1}, w^{k-1}) + (Dw^{k-1}, w^{k+1}) - (Dw^{k-1}, w^{k-1}) \end{aligned}$$

от симетричността на оператора D се получава

$$(D(w^{k+1} + w^k), w^{k+1} - w^k) = (Dw^{k+1}, w^{k+1}) - (Dw^{k-1}, w^{k-1}).$$

След добавяне и изваждане на члена (Dw^k, w^k) от дясната страна на горното уравнение, то се записва във вида

$$\begin{aligned} & (D(w^{k+1} + w^k), w^{k+1} - w^k) = \\ & = [(Dw^{k+1}, w^{k+1}) + (Dw^k, w^k)] - [(Dw^{k-1}, w^{k-1}) + (Dw^k, w^k)]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Отново е използвана симетричността на оператора D и израза в първата скоба вдясно на (2.42) е представен по следния начин:

$$\begin{aligned} & (Dw^{k+1}, w^{k+1}) + (Dw^k, w^k) = 0.5 [2(Dw^{k+1}, w^{k+1}) + 2(Dw^k, w^k)] = \\ & = 0.5 [(Dw^{k+1}, w^{k+1}) + 2(Dw^{k+1}, w^k) + (Dw^k, w^k) + \\ & + ((Dw^{k+1}, w^{k+1}) - 2(Dw^{k+1}, w^k) + (Dw^k, w^k))] = \\ & = 0.5 [(D(w^{k+1} + w^k), w^{k+1} + w^k) + (D(w^{k+1} - w^k), w^{k+1} - w^k)]. \end{aligned}$$

По същия начин е преобразуван изразът във втората скоба на (2.42)

$$\begin{aligned} & (Dw^{k-1}, w^{k-1}) + (Dw^k, w^k) = \\ & = 0.5 [(D(w^k + w^{k-1}), w^k + w^{k-1}) + (D(w^k - w^{k-1}), w^k - w^{k-1})]. \end{aligned}$$

Доказателството на Лема 25 е завършено. \square

За да се докаже сходимостта на числения метод е използван следния диференчен аналог на лемата на Гроуол от [40]:

Лема 26. (Гроуол) Нека $g_j \geq 0$, $f_j \geq 0$, $j = 0, 1, \dots$, f_j е монотонно растяща функция на j и c_0 е положителна константа. Нека

$$g_{j+1} \leq c_0 \sum_{k=1}^j \tau g_k + f_j, j = 1, 2, \dots, g_1 \leq f_0.$$

Тогава

$$g_{j+1} \leq \exp^{c_0 \tau j} f_j.$$

3 Диференчни схеми за уравнението на Бусинеск от шести ред

В тази глава са конструирани и изследвани диференчни схеми за намиране на численото решение на задачата на Коши за уравнението на Бусинеск с дисперсни членове от шести ред.

В Раздел 3.2 и Раздел 3.3 са представени две диференчни схеми с втори ред на точност. Доказано е запазване на дискретната енергия за всяка от схемите и сходимост на дискретното решение на втората схема към точното в дискретни $W_{2,h}^2$ и C_h норми. Схемите имат различно условие за устойчивост: $\tau = O(h^2)$ за първата диференчна схема и $\tau = O(h)$ за втората.

В последните два раздела са конструирани диференчни схеми, основани на представянето на уравнението на Бусинеск от шести ред във вид на обобщена хамилтонова система. В резултат на това в Раздел 3.4 е получена диференчна схема, запазваща точно дискретната енергия и дискретната маса, а в Раздел 3.5 - *симплектична* диференчна схема, чието решение запазва симплектичната структура на дискретно ниво и дискретната маса. Също така е доказано, че при симплектичната схема началната енергия се запазва с грешка $O(\tau^2)$.

Разгледаните диференчни схеми са илюстрирани с числени примери. Представените във вид на таблици и графики резултати съответстват на получените теоретични резултати.

Изследването на диференчните схеми е публикувано в следните статии с импакт ранг [32], [33], [44] и [45].

3.1 Постановка на задачата

Разгледана е задача на Коши за уравнението на Бусинеск от шести ред (УБШР)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \beta_3 \Delta^3 u - \Delta f(u), \quad (3.1)$$

чието търсено решение $u = u(x, t)$ е дефинирано при $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \in [0, T]$, с начални условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (3.2)$$

Предполагаме, че

$$u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L_2(\mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Тук $\beta_1 > 0$, $\beta_2 \neq 0$ и $\beta_3 > 0$ са дисперсни параметри, а нелинейният член има вида $f(u) = \alpha u^p$, $p = 2, 3, \dots$, $p \in N$, където α е параметър на амплитудата.

Всички коефициенти в уравнението на Бусинеск (3.1) са константи.

3.2 Консервативна схема с тегло $\sigma = 0$ за уравнението на Бусинеск от шести ред

Дискретната задача е разгледана в крайния интервал $[-L_1, L_2]$, където е въведена равномерна мрежа $\{x_i \mid x_i = -L_1 + ih, \quad i = 0, \dots, N\}$ със стъпка h .

Производните в уравнението на Бусинеск от шести ред са заменени с крайни разлики с втори ред на апроксимация и във вътрешните точки на мрежата е получено следното диференчно уравнение

$$y_{tt,i}^k - \Delta_h y_i^k - \beta_1 \Delta_h y_{tt,i}^k + \beta_2 \Delta_h^2 y_i^k - \beta_3 \Delta_h^3 y_i^k + \Delta_h f_1(y_i^k) = 0, \quad (3.4)$$

с апроксимация на нелинейния член от вида

$$f_1(y_i^k) = \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}.$$

За да се апроксимират граничните условия мрежата е разширена извън $[-L_1, L_2]$ с помощта на две допълнителни линии във всеки край на интервала $x_{-i} = x_0 - ih$, $i = \{1, 2\}$ и $x_{N+j} = x_N + jh$, $j = \{1, 2\}$. Граничните условия са апроксимирани по следния начин

$$y_0^k = 0, \Delta_h y_0^k = 0, \Delta_h^2 y_0^k = 0, y_N^k = 0, \Delta_h y_N^k = 0, \Delta_h^2 y_N^k = 0. \quad (3.5)$$

От (3.5) се получават следните зависимости

$$y_{-1}^k = y_1^k, y_{-2}^k = y_2^k, y_{N+1}^k = y_{N-1}^k, y_{N+2}^k = y_{N-2}^k.$$

За началните условия (3.2) са използвани равенствата

$$\begin{aligned} y_i^0 &= u_0(x_i), \\ y_i^1 &= u_0(x_i) + \tau u_1(x) + \\ &+ 0.5\tau^2(I_d - \beta_1 \Delta_h)^{-1}(\Delta_h u_0(x_i) - \beta_2 \Delta_h^2 u_0(x_i) + \beta_3 \Delta_h^3 u_0(x_i) - \Delta_h f(u_0(x_i))), \end{aligned} \quad (3.6)$$

където с I_d е означен идентитетът.

От апроксимацията на нелинейния член $f_1(y_i^k)$ следва, че получената схема (3.4), (3.5) и (3.6) е неявна спрямо y_i^{k+1} , тъй като стойностите на $f_1(y_i^k)$ зависят от стойностите на решението y_i^{k+1} на следващия слой по времето.

Чрез развитие в ред на Тейлър във възлите на мрежата (x_i, t_k) лесно се доказва, че локалната грешка на апроксимация е $O(h^2 + \tau^2)$.

За по-добрата алгоритмична реализация диференчната схема (3.4) е представена в следната по-удобна форма

$$\begin{cases} \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_i^k - \beta_2 \Delta_h y_i^k + \beta_3 \Delta_h^2 y_i^k - f_1(y_i^k) \\ y_{t,i}^k - \beta_1 \Delta_h y_{t,i}^k = \Delta_h w_i^{k+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.7)$$

където w е дискретна спомагателна функция, а с $w_i^{k+\frac{1}{2}}$ са означени стойностите на w на $(k + \frac{1}{2})$ полуслой, т.е. $w_i^{k+\frac{1}{2}} = w(x_i, t_k + \frac{\tau}{2})$.

Важно е да се отбележи, че система (3.7) апроксимира система (2.5) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

За теоретичните изследвания схема (3.4) се разглежда в следния каноничен вид

$$By_{tt} + (A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3)y = Af_1(y), \quad (3.8)$$

където операторите $Ay = -\Delta_h y$ и $B = I_d + \beta_1 A$ са дефинирани в пространството \mathbb{H} от мрежови функции, които се анулират извън интервала $[-L_1, L_2]$. Важно е да се отбележи, че операторите A и B са симетрични и положително определени.

Диференчната схема (3.4) е условно устойчива и в следващата теорема е формулирано достатъчно условието за устойчивост.

Теорема 27. *Линейната диференчна схема, съответстваща на (3.8), (еквивалентно схемата (3.8) с $f_1(y) = 0$) е условно устойчива по начални данни, със следното условие на устойчивост*

$$\tau \leq \sqrt{\frac{\beta_1}{(1+\epsilon)(h^4 + 4\beta_2 h^2 + 16\beta_3)}} h^2,$$

където ϵ е малко положително число, независимо от h и τ .

Доказателство. След прилагане оператора A^{-1} към двете страни на диференчното уравнение (3.8) с $f_1(y) = 0$ се получава

$$(A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{\bar{t}t} + (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y = 0.$$

От [40] следва, че схемата ще бъде устойчива, ако съществува положително число ϵ , такова че да е изпълнено неравенството

$$A^{-1} + \beta_1 I_d \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2). \quad (3.9)$$

Търсят се условия за стъпките h и τ , при които е в сила (3.9).

Тъй като $A \leq \| -\Delta_h \| I_d$ и $\| A \| \leq \frac{4}{h^2}$, получаваме $A^2 \leq \frac{4}{h^2} A \leq \frac{16}{h^4} I_d$, а оттук

$$\frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \left(I_d + \beta_2 \frac{4}{h^2} I_d + \beta_3 \frac{16}{h^4} I_d \right) \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2).$$

Оттук следва, че неравенство (3.9) ще бъде изпълнено, ако е в сила

$$A^{-1} + \beta_1 I_d \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \left(1 + \beta_2 \frac{4}{h^2} + \beta_3 \frac{16}{h^4} \right) I_d.$$

Тъй като операторът A^{-1} е положителен достатъчно е да е в сила неравенството

$$\beta_1 \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \left(1 + \beta_2 \frac{4}{h^2} + \beta_3 \frac{16}{h^4} \right).$$

Оттук

$$\tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{(1+\epsilon)(h^4 + 4\beta_2 h^2 + 16\beta_3)} h^4.$$

Доказателството на Теорема 27 е завършено. \square

Нека дискретната енергия $E_h(y^k)$ е дефинирана по следния начин

$$E_h(y^k) := E_{h,L}(y^k) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right), \quad (3.10)$$

където линейната част $E_{h,L}$ е зададена с равенството

$$\begin{aligned} E_{h,L}(y^k) &:= \frac{1}{2} \left(A^{-\frac{1}{2}} y_t^k, A^{-\frac{1}{2}} y_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (y_t^k, y_t^k) - \frac{\tau^2 \beta_2}{8} (A y_t^k, y_t^k) - \\ &\quad - \frac{\tau^2 \beta_3}{8} (A y_t^k, A y_t^k) + \frac{1}{8} \left((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k \right). \end{aligned}$$

Дискретната енергия $E_h(y^k)$, зададена с формула (3.10), апроксимира непрекъснатата енергия (2.28) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Важно свойство на разглежданата схема (3.4), формулирано в следващата теорема, е нейната *консервативност*.

Теорема 28. (*Дискретен закон за запазване на енергията*) Диференчната схема (3.4) е консервативна, т.е дискретната енергия $E_h(y^k)$, зададена с (3.10), се запазва във времето:

$$E_h(y^k) = E_h(y^0), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Доказателство. Операторът $A^{-1} = (-\Delta_h)^{-1}$ е приложен към диференчното уравнение (3.8) двете страни на полученото уравнение

$$(A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{tt}^k + (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y^k = f_1(y^k)$$

са умножени скалярно с $\tau \frac{y_t^k + y_t^k}{2} = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2}$. След това y_{tt}^k и y^k са заместени със следните изрази

$$y_{tt}^k = \frac{y_t^k - y_t^k}{\tau}, \quad y^k = \frac{y^{k+1} + y^{k-1}}{2} - \frac{\tau(y_t^k - y_t^k)}{2}.$$

По този начин е получено уравнението

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ((A^{-1} + \beta_1 I_d)(y_t^k - y_t^k), y_t^k + y_t^k) + \frac{1}{4} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y^{k+1} + y^{k-1}), y^{k+1} - y^{k-1}) - \\ & - \frac{\tau^2}{4} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y_t^k - y_t^k), (y_t^k + y_t^k)) - \frac{1}{2} (f_1(y^k), y^{k+1} - y^{k-1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Последният член на горното уравнение се представя по следния начин

$$\begin{aligned} (f_1(y^k), y^{k+1} - y^{k-1}) &= \alpha \sum_{i=1}^{N-1} h \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} (y_i^{k+1} - y_i^{k-1}) = \\ &= \alpha \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right) - \alpha \left((y^k)^{p+1} + (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right). \end{aligned}$$

От свойствата на скаларното произведение и след прилагане на Лема 25 към (3.11) се получава следното равенство

$$E_{h,L}(y^k) - \frac{\alpha}{2} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right) = E_{h,L}(y^{k-1}) - \frac{\alpha}{2} \left((y^k)^{p+1} + (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right),$$

където с $E_{h,L}(y^k)$ е означена линейната част

$$\begin{aligned} E_{h,L}(y^k) &= \frac{1}{2} ((A^{-1} + \beta_1 I_d) y_t^k, y_t^k) + \frac{1}{8} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k) + \\ &+ \frac{1}{8} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y^{k+1} - y^k), y^{k+1} - y^k) - \frac{\tau^2}{4} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y_t^k, y_t^k) = \\ &= \frac{1}{2} ((A^{-1} + \beta_1 I_d) y_t^k, y_t^k) + \frac{1}{8} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k) + \\ &+ \frac{\tau^2}{8} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y_t^k, y_t^k) - \frac{\tau^2}{4} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y_t^k, y_t^k) = \\ &= \frac{1}{2} (A^{-1/2} y_t^k, A^{-1/2} y_t^k) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (y_t^k, y_t^k) - \frac{\tau^2 \beta_2}{8} (A y_t^k, y_t^k) - \frac{\tau^2 \beta_3}{8} (A y_t^k, A y_t^k) + \\ &+ \frac{1}{8} ((I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k). \end{aligned}$$

Доказателството на Теорема 28 е завършено. \square

Нелинейността на числената схема (3.7) налага използването на итерационен метод за пресмятане на стойностите на решението y^{k+1} . Използван е прост итерационен метод $y^{k+1,[s]}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, който започва със стойностите на решението $y^{k+1,[0]} = y^k$ на предишния слой по времето. Итерационният процес продължава докато грешката между две последователни итерации стане по-малка от предварително зададен толеранс tol , т.е. $|y^{k+1,[s+1]} - y^{k+1,[s]}| < tol$. Всички резултати, представени в следващия параграф, са получени при $tol = 10^{-12}$.

3.2.1 Числени резултати за консервативната схема с тегло $\sigma = 0$

Този раздел съдържа числени резултати за неявната диференчна схема (3.4) с тегло $\sigma = 0$. Задачата е решена при квадратична ($p = 2$) и кубична ($p = 3$) нелинейност. Сходимостта и точността на схемата са изследвани числено с помощта на вложени мрежи.

- При квадратична нелинейност $p = 2$, нека стойностите на параметрите са

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1 + \frac{61}{169}\beta_1, \beta_3 = \frac{1}{3}, c = \sqrt{\frac{61}{169}} \text{ и } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Тогава точното решение $\tilde{u}(x, t; c)$ на задачата се получава по формула (2.3).

- При кубична нелинейност $p = 3$ и следните стойности на параметрите

$$\beta_1 = 3, \beta_2 = 1 + \frac{9}{25}\beta_1, \beta_3 = \frac{1}{4}, c = \frac{3}{5} \text{ и } \alpha = \frac{1}{3},$$

точното решение $\tilde{u}(x, t; c)$ се задава с формула (2.4).

Началните условия и в двата случая са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -c \frac{\partial \tilde{u}(x, 0; c)}{\partial t},$$

Нека $x \in [-160, 160]$ и $t \in [0, T]$, където $T = 20$.

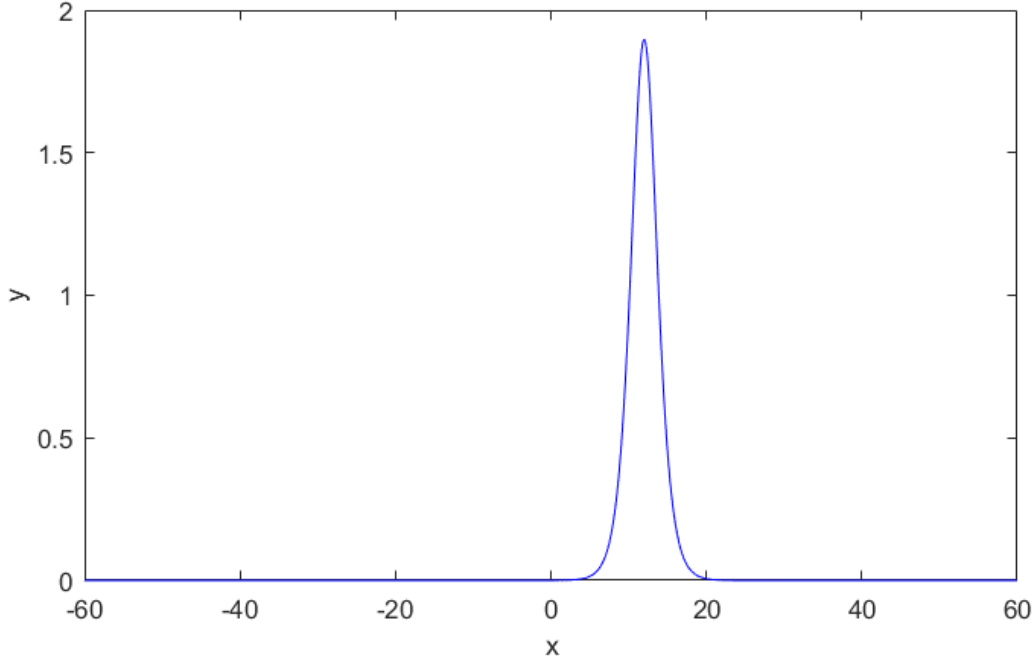
В Таблица 1 са представени резултати за грешката $\psi_{h\tau} = \max_{i,k} |u(x_i, t^k) - y_i^k|$, $i = 0, \dots, N$, $k = 0, \dots, K$ и реда на сходимост κ , които са пресметнати по формули (2.34). Числените резултати показват, че приближеното решение е много близко до точното решение, с грешка $O(10^{-5})$ в последния ред за задачата с квадратична нелинейност и $O(10^{-4})$ за задачата с кубична нелинейност. И в двата случая се получава втори ред на сходимост на приближеното решение към точното.

В колона *sec* е показано изчислителното време в секунди, необходимо за намиране на решението на задачата върху различните мрежи.

Таблица 1: Грешка $\psi_{h\tau}$ и ред на сходимост κ при $T = 20$ за $p = 2$ и $p = 3$.

p = 2					p = 3		
Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec	h	τ	Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec
0.0371343246		4	0.4	0.004	0.1086316405		4
0.0091485834	2.0211	14	0.2	0.002	0.0265570211	2.0323	15
0.0022786095	2.0054	59	0.1	0.001	0.0065958306	2.0095	61
0.0005691166	2.0014	213	0.05	0.0005	0.0016470460	2.0017	223
0.0001422195	2.0006	841	0.025	0.00025	0.0004114136	2.0012	851
0.0000353696	2.0075	2115	0.0125	0.000125	0.0001011566	2.0240	2099

В Таблица 2 и Таблица 3 са представени резултати за дискретната енергия E_h^K в крайния момент от време, пресметната по формула (3.10). Показани са грешката *Error* ψ_E и реда на сходимост κ_E на дискретната енергия E_h^K , получени по формула (2.35), както и относителната грешка на енергията $relEnergy = |E_h^K - E_h^0|/E_h^0$.



Фигура 2: Солитонно решение на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ за УБШР с кубична нелинейност $p = 3$ при $T = 55$

Таблица 2: Енергия E_h^K , грешка ψ_E , ред на сходимост κ_E и относителна грешка $relEnergy$ на енергията при $T = 20$ и $p = 2$.

h	τ	Energy E_h^K	Error ψ_E	κ_E	relEnergy
0.4	0.004	6.920591985685416			$2.5 * 10^{-12}$
0.2	0.002	6.922133787500153			$5.3 * 10^{-12}$
0.1	0.001	6.922525496376082	0.0020669223814	1.9768	$7.8 * 10^{-11}$
0.05	0.0005	6.922623811886917	0.0005229697114	1.9943	$7.1 * 10^{-10}$
0.025	0.00025	6.922648379501831	0.0001310673281	2.0007	$6.0 * 10^{-9}$
0.0125	0.000125	6.922654282922673	0.0000323382676	2.0571	$4.2 * 10^{-8}$

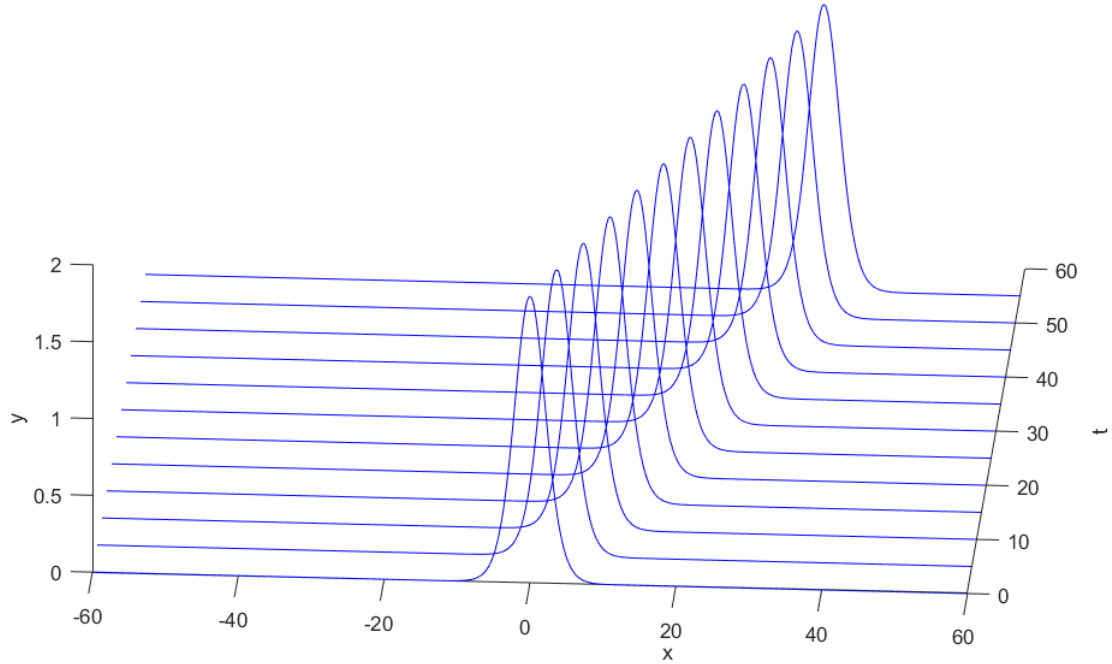
При двата случая на нелинейност $p = 2$ и $p = 3$ дискретната енергия E_h^K има втори ред на сходимост към точната енергия. Освен това относителната грешка на енергията $relEnergy$ достига точност 10^{-12} върху мрежата с най-големи стъпки. Използването на по-дребни стъпки h по пространството води до още по-дребни стъпки по времето поради условието $\tau = O(h^2)$, а оттам нарастват грешките от пресмятанията. По тази причина относителната грешка на енергията се увеличава при намаляване на стъпката. Например при стъпки $h = 0.0125$ и $\tau = 0.000125$ $relEnergy$ достига точност 10^{-7} при кубична нелинейност и точност 10^{-8} при квадратична нелинейност.

На Фигура 2 и Фигура 3 е показано решението на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ за уравнението на Бусинеск съответно с кубична и квадратична нелинейност при $T = 55$.

Забележка: Конструираната диференчна схема (3.7) с тегло $\sigma = 0$ е условно устойчива с условие $\tau = O(h^2)$ за стъпките h и τ . Това условие води до много пресмятания, когато се търси численото решение при $t = T$, когато $T \gg 0$. За да се ускори изчислителния процес, в следващата глава е конструирана и изследвана диференчна

Таблица 3: Енергия E_h^K , грешка ψ_E , ред на сходимост κ_E и относителна грешка $relEnergy$ на енергията при $T = 20$ и $p = 3$.

h	τ	Energy E_h^K	Error ψ_E	κ_E	relEnergy
0.4	0.004	7.913589595452327			$2.0 * 10^{-12}$
0.2	0.002	7.923289369871691			$2.8 * 10^{-11}$
0.1	0.001	7.925745560006571	0.0129888215684	1.9815	$1.5 * 10^{-10}$
0.05	0.0005	7.926361563173010	0.0032784005550	1.9954	$2.3 * 10^{-9}$
0.025	0.00025	7.926515586611381	0.0008213778181	1.9998	$1.6 * 10^{-8}$
0.0125	0.000125	7.926553181308633	0.0002037574171	2.0346	$1.3 * 10^{-7}$



Фигура 3: Разпространение на солитонното решение на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ за УБШР с $p = 2$ при $t \in [0, T]$, $T = 55$

схема със тегло $\sigma \neq 0$, наречена *Факторизирана диференчна схема (ФДС)*. Тази схема има по-слабо изискване за устойчивост $\tau = O(h)$ по отношение на стъпките h и τ . Освен по-добро изчислително време новата диференчна схема с тегло $\sigma \neq 0$ показва по-добри резултати за относителната грешка на енергията.

3.3 Факторизирана диференчна схема за уравнението на Бусинеск от шести ред

Разгледана е задачата на Коши (3.1)-(3.3) за уравнението на Бусинеск от шести ред.

За апроксимация на уравнението (3.1) е изпозвана следната диференчна схема

$$y_{tt,i}^k - \Delta_h y_i^k - \beta_1 \Delta_h y_{tt,i}^k + \beta_2 \Delta_h^2 y_i^k - \beta_3 \Delta_h^3 y_i^{k,\sigma} + \Delta_h f_1(y_i^k) = 0. \quad (3.12)$$

Тук с $y_i^{k,\sigma}$ е означена апроксимация с тегло σ на $u(x_i, t_k)$, зададена с равенството

$$y_i^{k,\sigma} \equiv \sigma y_i^{k+1} + (1 - 2\sigma) y_i^k + \sigma y_i^{k-1} = y_i^k + \sigma \tau^2 y_{tt,i}^k, \quad \sigma \in [0; 1].$$

След заместване на $y_i^{k,\sigma}$ с израза $y_i^k + \sigma\tau^2 y_{tt,i}^k$ в (3.12) е получено следното диференчното уравнение

$$(I_d - \beta_1 \Delta_h - \sigma\tau^2 \beta_3 \Delta_h^3) y_{tt,i}^k + (-\Delta_h + \beta_2 \Delta_h^2 - \beta_3 \Delta_h^3) y_i^k = -\Delta_h f_1(y_i^k),$$

където с I_d е означен идентитетът.

Апроксимацията $f_1(y_i^k)$ на нелинейния член се задава с формулата

$$f_1(y_i^k) = \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}.$$

За намиране на решението y^{k+1} на следващия слой по времето при $\sigma \neq 0$ е нужно да се реши система със седемдиагонална матрица с голямо число на обусловеност от ред $O(h^{-6})$. За опростяване на изчисленията операторът $I_d - \beta_1 \Delta_h - \sigma\tau^2 \beta_3 \Delta_h^3$, действащ върху y_{tt} , се представя като произведение на операторите $(I_d - \beta_1 \Delta_h)$ и $\left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma\tau^2 \Delta_h^2\right)$ с грешка на апроксимация $O(\tau^2)$, т.е.

$$I_d - \beta_1 \Delta_h - \beta_3 \sigma\tau^2 \Delta_h^3 = (I_d - \beta_1 \Delta_h) \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma\tau^2 \Delta_h^2\right) + O(\tau^2).$$

По този начин е конструирана нова схема, наречена *Факторизирана диференчна схема (ФДС)*:

$$(I_d - \beta_1 \Delta_h) \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma\tau^2 \Delta_h^2\right) y_{tt,i}^k + (-\Delta_h + \beta_2 \Delta_h^2 - \beta_3 \Delta_h^3) y_i^k = -\Delta_h f_1(y_i^k). \quad (3.13)$$

Началните и граничните условия са апроксимирани по същия начин, както при консервативната схема с тегло $\sigma = 0$, т. е. чрез следните формули

$$\begin{aligned} y_0^k &= 0, \quad \Delta_h y_0^k = 0, \quad \Delta_h^2 y_0^k = 0, \quad y_N^k = 0, \quad \Delta_h y_N^k = 0, \quad \Delta_h^2 y_N^k = 0. \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \\ y_i^1 &= u_0(x_i) + \tau u_1(x) + 0.5\tau^2 (I_d - \beta_1 \Delta_h)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \Delta_h (u_0(x_i) - \beta_2 \Delta_h u_0(x_i) + \beta_3 \Delta_h^2 u_0(x_i) - f(u_0(x_i))). \end{aligned}$$

За по-добра алгоритмична реализация диференчната схема (3.13) е представена в следния вид:

$$\begin{cases} \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma\tau^2 \Delta_h^2\right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_i^k - \beta_2 \Delta_h y_i^k + \beta_3 \Delta_h^2 y_i^k - f_1(y_i^k), \\ (I_d - \beta_1 \Delta_h) y_{t,i}^k = \Delta_h w_i^{k+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (3.14)$$

където w е спомагателна мрежова функция, а $w_i^{k+\frac{1}{2}} = w(x_i, t_k + \frac{\tau}{2})$.

Важно е да се отбележи, че схемите (3.7) и (3.14) се различават само по оператора, действащ върху $\frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau}$. Оттук като се замести $\sigma = 0$ в схема (3.14), се получава диференчната схема (3.7).

Система (3.14) има петдиагонална матрица с число на обусловеност $O(h^{-4})$ относно $w^{k+\frac{1}{2}}$. За да се намери решението y^{k+1} на системата е използван прост итерационен метод $y^{k+1,[s]}$, $s = 0, 1, \dots$, който започва със стойностите на решението на предишния слой, т. е. $y^{k+1,[0]} = y^k$. На всяка стъпка по времето първо се пресмята дясната страна на първото уравнение на (3.14) и се определят стойностите на помощната функция

$w^{k+\frac{1}{2},[s+1]}$ на следващия полуслой. След това, от второто уравнение се получава численото решение на следващата итерация $y^{k+1,[s+1]}$. Итерационният процес приключва, когато разликата между две последователни итерации стане по-малка от предварително зададен толеранс tol , т.е. $|y^{k+1,[s+1]} - y^{k+1,[s]}| < tol$. Числените резултати са получени при $tol = 10^{-12}$.

Матриците $\left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 \Delta_h^2\right)$ и $(I_d - \beta_1 \Delta_h)$ на (3.14) имат специална структура- те са съответно петдиагонални и тридиагонални матрици с преобладаващ главен диагонал. По тази причина за намиране на решенията $w_i^{k+\frac{1}{2}}$ и y_i^{k+1} може да бъде използван *метод на прогонката*.

От симетричността на матриците $\left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 \Delta_h^2\right)$ и $(I_d - \beta_1 \Delta_h)$ следва, че решението $w_i^{k+\frac{1}{2}}$ и y_i^{k+1} може да бъде получено и с помощта на *метод на спрегнатия градиент*.

Нека с A и B са означени следните оператори

$$A = -\Delta_h \text{ и } B = (I_d + \beta_1 A) \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 A^2 \right),$$

дефинирани в пространството \mathbb{H} . За по-нататъчните теоретични изследвания е удобно схема (3.13) да се запише в следната операторна форма:

$$By_{\bar{t}t} + Ay + \beta_2 A^2 y + \beta_3 A^3 y = Af_1(y). \quad (3.15)$$

За да се получат условията за устойчивост, които трябва да удовлетворяват стъпките h и τ е разгледана следната линеаризирана диференчна схема:

$$By_{\bar{t}t} + (A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3) y = \varphi. \quad (3.16)$$

Теорема 29. *Нека съществува малко положително число ϵ , такова че са изпълнени следните условия:*

$$\text{ако } \sigma \geq \max \left\{ \frac{1+\epsilon}{4}, \frac{\beta_1 \beta_2 (1+\epsilon)}{4\beta_3} \right\}, \text{ то } \tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}; \quad (3.17)$$

$$\text{ако } \sigma \in \left[\frac{1+\epsilon}{4}, \frac{\beta_1 \beta_2 (1+\epsilon)}{4\beta_3} \right), \text{ то } \tau^2 \leq \min \left\{ \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}, h^2 \frac{4\beta_1^2}{\beta_1(1+\epsilon)(h^2 + 4\beta_2) - 16\sigma\beta_3} \right\}. \quad (3.18)$$

Тогава схема (3.16) е устойчива по начални данни и дясна част φ .

Доказателство. Нека операторът A^{-1} е приложен към двете страни на (3.16). От Глава 6 на [40] следва, че схемата (3.13) ще бъде устойчива, ако съществува малко положително число ϵ , такова че да е изпълнено неравенството

$$A^{-1} + \beta_1 I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 A + \beta_3 \sigma \tau^2 A^2 \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2). \quad (3.19)$$

Достатъчно условие за удовлетворяването на (3.19) са следните две неравенства:

$$\beta_3 \sigma \tau^2 \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_3, \quad (3.20)$$

$$\beta_1 I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 A \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 (I_d + \beta_2 A). \quad (3.21)$$

От неравенство (3.20) получаваме ограничение за теглото $\sigma \geq \frac{1+\epsilon}{4}$.

Неравенство (3.21) се записва във вида

$$\tau^2 A \left(\frac{1+\epsilon}{4} \beta_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \right) \leq \left(\beta_1 - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \right) I_d.$$

За израза в скобите вляво са възможни следните два случая:

- Ако $\frac{1+\epsilon}{4} \beta_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \leq 0$, достатъчно условие за да бъде изпълнено неравенство (3.21) е $\beta_1 - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 > 0$, т.е. схемата ще бъде устойчива при $\tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}$;
- Ако $\frac{1+\epsilon}{4} \beta_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma > 0$, тъй като $A = -\Delta_h$ и $\|A\| \leq \frac{4}{h^2}$ се получава

$$\frac{4}{h^2} \tau^2 \left(\frac{1+\epsilon}{4} \beta_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \right) < \beta_1 - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2$$

и оттук

$$(\beta_1(1+\epsilon)(4\beta_2 + h^2) - 16\beta_3\sigma) \tau^2 < 4\beta_1^2 h^2$$

Доказателството на Теорема 29 е завършено. \square

Следствие 3.1. В частния случай, когато $\sigma = 0.5$ условията за устойчивост от Теорема 29 са:

- ако $\frac{\beta_1\beta_2(1+\epsilon)}{4\beta_3} < 0.5$, то $\tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}$;
- ако $\frac{\beta_1\beta_2(1+\epsilon)}{4\beta_3} > 0.5$, то $\tau^2 \leq \min \left\{ \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}, h^2 \frac{4\beta_1^2}{\beta_1(1+\epsilon)(h^2 + 4\beta_2) - 8\beta_3} \right\}$.

Нека дискретната енергия $E_h(y^k)$ на схемата (3.13) е дефинирана чрез следното равенство

$$E_h(y^k) := E_{h,L}(y^k) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right), \quad (3.22)$$

където линейната част $E_{h,L}(y^k)$ на енергията $E_h(y^k)$ има вида

$$\begin{aligned} E_{h,L}(y^k) := & \frac{1}{2} \left\| (-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} y_t^k \right\|^2 + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \|y_t^k\|^2 + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\beta_3\sigma}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{4} \right) \|y_{tx}^k\|^2 + \\ & + \frac{\tau^2\beta_3}{2} \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \|\Delta_h y_t^k\|^2 + \frac{1}{8} \|y^{k+1} + y^k\|^2 + \frac{\beta_2}{8} \|y_x^{k+1} + y_x^k\|^2 + \frac{\beta_3}{8} \|y_{xx}^{k+1} + y_{xx}^k\|^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

След полагане $\sigma = 0$ в израза (3.22) се получава дискретната енергия (3.10). В следващата теорема е доказано, че решението на ФДС запазва дискретната енергия (3.22) на всеки слой по времето.

Теорема 30. (Дискретен закон за запазване на енергията) Факторизираната диференчна схема (3.13) е консервативна, т.е. решението ѝ удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K$ следното равенство

$$E_h(y^k) = E_h(y^0),$$

където дискретната енергия $E_h(y^k)$ се определя от формула (3.22).

Доказателството на теоремата е аналогично на доказателството на дискретния закон за запазване на енергията (виж Теорема 28) на консервативната диференчна схема с тегло $\sigma = 0$. Съществената разлика е в дефиницията на оператора, действащ върху $y_{\bar{t}}$, който включва допълнителния член $\beta_3 A^3$.

Дискретната енергия (3.22) е апроксимация на енергията (2.28) на непрекъснатата задача с втори ред на точност и дискретния закон за запазване на енергията отговаря на непрекъснатия закон (2.29).

Важно е да се отбележи, че условията за устойчивост от Теорема 29 гарантират, че изразът $E_{h,L}$, зададен с (3.23), е положително определен и може да се разглежда като енергетична норма.

Нека с u^k са означени стойностите на точното решение, а с y^k стойностите на приближеното решение на k -тия слой по времето.

Теорема 31. (Сходимость на метода) Нека $u(x, t) \in C^{8,4}(R \times [0, T])$ и дискретното решение y^k на факторизираната схема (3.13) е ограничено. Нека е удовлетворено условието за устойчивост (3.17)-(3.18). Тогава за всички достатъчно малки стъпки τ дискретното решение y^k клони към точното решение u^k при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ и за грешката $z^k = u^k - y^k$ е в сила следната оценка

$$\beta_1 \|z_t^K\|^2 + \|z^{K+1}\|^2 + \beta_2 \|z_{\bar{x}}^{K+1}\|^2 + \beta_3 \|z_{\bar{x}\bar{x}}^{K+1}\|^2 \leq C(h^2 + \tau^2)^2, \quad (3.24)$$

с константа C , независеща от h и τ .

Доказателство. За простота е разгледан случай с квадратична нелинейност $f(u) = \alpha u^2$. Доказателството в общия случай $f(u) = \alpha u^p$ се извършва по подобен начин.

Тук с C_i са означени константи, независещи от стъпките h и τ .

Нека грешката на численото решение е означена с $z^k = y^k - u^k$ и $y^k = u^k + z^k$ е заместено в (3.15). Тогава грешката z^k удовлетворява следното уравнение

$$Bz_{\bar{t}\bar{t}}^k + Az^k + \beta_2 A^2 z^k + \beta_3 A^3 z^k = A\psi_1^k + \psi_2^k, \quad (3.25)$$

където $B = (I_d + \beta_1 A) \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 A^2 \right)$, $\psi_1^k = \frac{F(y^{k+1}) - F(y^{k-1})}{y^{k+1} - y^{k-1}} - \frac{F(u^{k+1}) - F(u^{k-1})}{u^{k+1} - u^{k-1}}$ и $\psi_2^k = -Bu_{\bar{t}\bar{t}}^k - Au^k - \beta_2 A^2 u^k - \beta_3 A^3 u^k + Af_1(u^k)$.

Чрез развиване в ред на Тейлър лесно се показва, че $\psi_2^k = O(h^2 + \tau^2)$.

Нека u^k и y^k , $k = 1, \dots, K$ са ограничени отгоре от константа m . Тогава за

$$\psi_1^k = \frac{\alpha}{3} \left[(y^{k+1})^2 + y^{k+1} y^{k-1} + (y^{k-1})^2 - (u^{k+1})^2 - u^{k+1} u^{k-1} - (u^{k-1})^2 \right]$$

е в сила оценката

$$|\psi_1^k| < C_1(|z^{k+1}| + |z^{k-1}|), \quad (3.26)$$

където $C_1 = C_1(\alpha, m)$ е константа.

След прилагане на оператора A^{-1} към (3.25) и заместване на z^k и $z_{\bar{t}\bar{t}}^k$ с изразите

$$z^k = \frac{z^{k+1} + z^{k-1}}{2} - \frac{\tau^2}{2} z_{\bar{t}\bar{t}}^k, \quad z_{\bar{t}\bar{t}}^k = \frac{z_t^k - z_{\bar{t}}^k}{\tau}$$

се получава уравнението

$$\begin{aligned} & \left(A^{-1}B - \frac{\tau^2}{2} I_d - \frac{\tau^2 \beta_2}{2} A - \frac{\tau^2 \beta_3}{2} A^2 \right) \frac{z_t^k - z_{\bar{t}}^k}{\tau} + \frac{1}{2} (z^{k+1} + z^{k-1}) + \\ & + \frac{\beta_2}{2} A (z^{k+1} + z^{k-1}) + \frac{\beta_3}{2} A^2 (z^{k+1} + z^{k-1}) = \psi_1^k + A^{-1} \psi_2^k. \end{aligned} \quad (3.27)$$

След умножаване на двете страни на (3.27) скалярно с $\frac{z^{k+1} - z^{k-1}}{2} = \frac{\tau(z_t^k + z_t^k)}{2}$ и сумиране по части (виж [40]) се получава

$$E_{h,L}(z^{k+1}, z^k) = E_{h,L}(z^k, z^{k-1}) + \frac{\tau}{2}(\psi_1^k, z_t^k + z_t^k) + \frac{\tau}{2}(A^{-1}\psi_2^k, z_t^k + z_t^k), \quad (3.28)$$

където

$$\begin{aligned} E_{h,L}(z^{k+1}, z^k) &= \frac{1}{2} \left(A^{-1}z_t^k, z_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (z_t^k, z_t^k) + \frac{\tau^2}{2} \left(\sigma \frac{\beta_3}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{4} \right) (Az_t^k, z_t^k) + \\ &+ \frac{\tau^2 \beta_3}{2} \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) (Az_t^k, Az_t^k) + \frac{1}{8} (z^{k+1} + z^k, z^{k+1} + z^k) + \\ &+ \frac{\beta_2}{8} (A(z^{k+1} + z^k), z^{k+1} + z^k) + \frac{\beta_3}{8} (A(z^{k+1} + z^k), A(z^{k+1} + z^k)). \end{aligned}$$

След преработване на (3.28) и прилагане на оценка (3.26) се получава

$$\begin{aligned} E_{h,L}(z^{k+1}, z^k) &< E_{h,L}(z^k, z^{k-1}) + 0.25\tau \|z_t^k\|^2 + 0.25\tau \|z_t^k\|^2 + 0.25\tau \|A^{-1}\psi_2^k\|^2 + 0.25\tau \|\psi_1^k\|^2 < \\ &< E_L(z^k, z^{k-1}) + \tau \|z_t^k\|^2 + \tau \|z_t^k\|^2 + C_2\tau \|z^{k+1}\|^2 + C_2\tau \|z^{k-1}\|^2 + \tau \|A^{-1}\psi_2^k\|^2. \end{aligned}$$

Сега сумираме горните неравенства за $k = 1, 2, \dots, K$ и получаваме следната оценка

$$E_{h,L}(z^{K+1}, z^K) < E_{h,L}(z^0, z^1) + 2\tau \sum_{k=1}^K \|z_t^k\|^2 + 2C_2\tau \sum_{k=1}^{K+1} \|z^k\|^2 + \tau \sum_{k=1}^K \|A^{-1}\psi_2^k\|^2. \quad (3.29)$$

Ще оценим отдолу израза $E_{h,L}(z^{K+1}, z^K)$.

Нека положим $\tilde{D} = (A^{-1} + \beta_1 I_d) \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 A^2 \right)$ и $\tilde{A} = I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2$. Тъй като е в сила условието за устойчивост (3.17)-(3.18) следва, че $\tilde{D} \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \tilde{A}$. Сега след прилагане на Лема 24 и от $\|Y^K\| = E_{h,L}(z^{K+1}, z^K)$ се получава оценката

$$E_{h,L}(z^{K+1}, z^K) \geq C_\epsilon \left[\left(\tilde{A}z^{K+1}, z^{K+1} \right) + \left(\tilde{D}y_t^K, y_t^K \right) \right],$$

където C_ϵ е константа, зависеща от ϵ .

Тъй като $\tilde{D} > \beta_1 I_d$ и

$$(\tilde{A}z^{K+1}, z^{K+1}) = (z^{K+1}, z^{K+1}) + \beta_2 (Az^{K+1}, z^{K+1}) + \beta_3 (Az^{K+1}, Az^{K+1}),$$

от неравенство (3.29) получаваме

$$\begin{aligned} &\beta_1 (z_t^K, z_t^K) + (z^{K+1}, z^{K+1}) + \beta_2 (Az^{K+1}, z^{K+1}) + \beta_3 (Az^{K+1}, Az^{K+1}) < \\ &< C_3 \left(E_{h,L}(z^0, z^1) + 2C_2\tau \|z^{K+1}\|^2 + 2\tau \|z_t^K\|^2 + 2\tau \sum_{k=1}^{K-1} \|z_t^k\|^2 + \right. \\ &\left. + 2C_2\tau \sum_{k=1}^K \|z^k\|^2 + \tau \sum_{k=1}^K \|A^{-1}\psi_2^k\|^2 \right). \end{aligned}$$

Нека изберем достатъчно малка стъпка τ , така че да са изпълнени едновременно неравенствата $2C_3\tau < \beta_1$ и $2C_2C_3\tau < 1$. Тогава

$$\begin{aligned} &\beta_1 (z_t^K, z_t^K) + (z^{K+1}, z^{K+1}) + \beta_2 (Az^{K+1}, z^{K+1}) + \beta_3 (Az^{K+1}, Az^{K+1}) < \\ &< C_4 \left(E_{h,L}(z^0, z^1) + 2\tau \sum_{k=1}^{K-1} \|z_t^k\|^2 + 2C_2\tau \sum_{k=1}^K \|z^k\|^2 + \tau \sum_{k=1}^K \|A^{-1}\psi_2^k\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

От лемата на Гронуол, приложена към неравенство (3.30), следва оценката

$$\beta_1 \|z_t^K\|^2 + \|z^K\|^2 + \beta_2 \|z_{\bar{x}}^{K+1}\|^2 + \beta_3 \|z_{\bar{x}\bar{x}}^{K+1}\|^2 < C_4 \left(E_{h,L}(z^0, z^1) + \tau \sum_{k=1}^K \|A^{-1}\psi_2^k\|^2 \right).$$

Началните условия са апроксимирани с грешка $O(h^2 + \tau^2)$ и $\psi_2^k = O(h^2 + \tau^2)$. Оттук следва оценката

$$\beta_1 \|z_t^K\|^2 + \|z^{K+1}\|^2 + \beta_2 \|z_{\bar{x}}^{K+1}\|^2 + \beta_3 \|z_{\bar{x}\bar{x}}^{K+1}\|^2 \leq C(h^2 + \tau^2)^2,$$

с константа C , независеща от h и τ .

С това доказателството на Теорема 31 е завършено. \square

Оценката на грешката z^k , получена в Теорема 31, е в дискретна W_2^2 норма. За да получим оценка за грешката z^k в равномерна норма ще използваме следната теорема за влягане от [41]:

Теорема 32. *Нека $v(x)$ е мрежова функция, зададена върху произволна мрежа ω_h в интервала $[0, l]$. Тогава е в сила неравенството*

$$\|v\|_{C_h}^2 \leq \epsilon \|v_{\bar{x}}\|_0^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{l} \right) \|v\|_0^2,$$

където ϵ е произволна положителна константа.

В горната теорема с $\|v\|_{C_h}$ и $\|v\|_0$ са означени нормите

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x \in \omega_h} |v(x)|, \quad \|v\|_0 = (v, v)^{1/2}.$$

Следствие 3.2. *Нека са изпълнени условията на Теорема 31. Тогава са в сила следните оценки за грешката $z^k = u^k - y^k$ в равномерна норма:*

$$\|z^k\|_{C_h} = \max_i |z_i^k| \leq M_1(h^2 + \tau^2), \quad \|z_{\bar{x}}^k\|_{C_h} = \max_i |z_{\bar{x},i}^k| \leq M_2(h^2 + \tau^2),$$

където M_1 и M_2 са константи, независещи от h и τ .

3.3.1 Числени резултати за консервативната схема с тегло $\sigma \neq 0$

В този раздел са представени числени резултати свързани с точността и сходимостта на диференчната схема (3.13). Разгледана е задачата (3.1)-(3.3) с квадратична и кубична нелинейност ($f(u) = \alpha u^p$, $p = 2, 3$). Точността и сходимостта на схемата са определени с помощта на вложени мрежи. Дискретната енергия е получена по формула (3.22).

Разпространение на солитонна вълна

Задача 1. Нека стойностите на коефициентите за задачата (3.1)-(3.3) с кубична нелинейност $p = 3$ са $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1 + \frac{9}{25}\beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{5}$ и $\alpha = \frac{1}{3}$. При тези стойности на параметрите разглежданата задача притежава аналитично решение, което се получава по формула (2.3).

При квадратична нелинейност $p = 2$ и параметри $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + \frac{61}{169}\beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $c = \sqrt{\frac{61}{169}}$, точното решение на задачата (3.1)-(3.3) се получава по формула (2.4).

Началните условия са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}(x, 0; c)}{\partial t}.$$

Стойностите на коефициентите за Задача 1 са същите, както при консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ от Раздел 3.2.1.

Нека $x \in [-160, 160]$ и $t \in [0, T]$, където $T = 20$ и $\sigma = 0.5$.

Таблица 4: Грешка $\psi_{h\tau}$ и ред на сходимост κ при $T = 20$ за **Задача 1** с $p = 2$ и $p = 3$.

p = 2					p = 3		
Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec	h	τ	Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec
0.01760248366		0	0.4	0.2	0.0437425644		0
0.00433794588	2.02070	1	0.2	0.1	0.0107101201	2.03006	1
0.00108363581	2.00113	5	0.1	0.05	0.0026643193	2.00714	4
0.00027073992	2.00090	19	0.05	0.025	0.0006652339	2.00183	13
0.00006767832	2.00014	118	0.025	0.0125	0.0001662653	2.00037	75

В Таблица 4 са представени резултати за грешката $\psi_{h\tau}$ и реда на сходимост κ , които са пресметнати по формулите (2.34). Числените резултати показват, че приближеното решение е много близко до точното решение, с точност 10^{-5} в последния ред за задачата с квадратична нелинейност и точност 10^{-4} за задачата с кубична нелинейност. И в двата случая редът на сходимост на приближеното решение към точното решение е втори.

В Таблица 5 и Таблица 6 са представени резултати за дискретната енергия E_h^K в крайния момент от време, пресметната по формула (3.22). Относителната грешка на енергията $relEnergy$ в крайния момент от време, е пресметната по формула (2.37) и достига 10^{-11} при $p = 2$ и 10^{-12} при $p = 3$.

Таблица 5: Енергия E_h^K , грешка ψ_E , ред на сходимост κ_E и относителна грешка $relEnergy$ на енергията за **Задача 1** при $T = 20$ и $p = 2$.

h	τ	Energy E_h^K	Error ψ_E	κ_E	relEnergy
0.4	0.2	6.913633018461376			$4.9 * 10^{-11}$
0.2	0.1	6.920391132552632			$5.6 * 10^{-11}$
0.1	0.05	6.922089650556980	0.0090268284	1.99234	$8.1 * 10^{-11}$
0.05	0.025	6.922514843655145	0.0022656931	1.99809	$7.8 * 10^{-12}$
0.025	0.0125	6.922621176225277	0.0005669851	1.99953	$1.5 * 10^{-10}$

Таблица 6: Енергия E_h^K , грешка ψ_E , ред на сходимост κ_E и относителна грешка $relEnergy$ на енергията за **Задача 1** при $T = 20$ и $p = 3$.

h	τ	Energy E_h^K	Error ψ_E	κ_E	relEnergy
0.4	0.2	7.899468345192322			$2.8 * 10^{-11}$
0.2	0.1	7.919737491857475			$4.4 * 10^{-11}$
0.1	0.05	7.924856229900426	0.0271173086	1.98543	$2.4 * 10^{-11}$
0.05	0.025	7.926139162759125	0.0068307638	1.99634	$3.5 * 10^{-11}$
0.025	0.0125	7.926460097546489	0.0017109356	1.99909	$3.0 * 10^{-10}$

Сравнение на резултатите от консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ и факторизираната схема:

При факторизираната схема, както и при консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ (Таблица 2 и Таблица 3) дискретната енергия E_h^K се сходяща към точната с втори ред на точност. Основната разлика в двете схеми е по отношение на относителната грешка *relEnergy*. И при двата случая на нелинейност $p = 2$ и $p = 3$, относителната грешка при факторизираната схема е по-малка. Например при кубична нелинейност и стъпка по пространството $h = 0.025$, относителната грешка при схемата с тегло $\sigma = 0$ е $relEnergy = O(10^{-8})$, а при факторизираната схема относителната грешка е $relEnergy = O(10^{-10})$.

В Таблица 4 е показано, че времето *sec*, необходимо за намиране на численото решение на ФДС при стъпки $h = 0.025$ и $\tau = 0.0125$, и квадратична нелинейност ($p = 2$) е 118 секунди. При същите стъпки и кубична нелинейност ($p = 3$) изчислителното време е по-малко– 75 секунди.

В Таблица 1 е показано изчислителното време за намиране на численото решение на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$. При $h = 0.025$ и $\tau = 0.00025$, и квадратична нелинейност $p = 2$ то е 841 секунди, а при кубична нелинейност $p = 3$ са необходими 851 секунди. С други думи, при квадратична нелинейност и конкретния избор на стъпките, решението на факторизираната схема е намерено приблизително за 7 пъти по-малко време, отколкото при консервативната схема с тегло $\sigma = 0$, а при кубична нелинейност- приблизително 11 пъти по-малко време.

Извод: Факторизираната схема показва по-добри свойства по отношение на запазването на енергията във времето и по необходимото изчислително време от схемата с тегло $\sigma = 0$. Причината за това е по-малкият брой изчисления до фиксиран период T (условието за устойчивост е $\tau = O(h)$ в сравнение с $\tau = O(h^2)$), при което се натрупват по-малко грешки от пресмятанията.

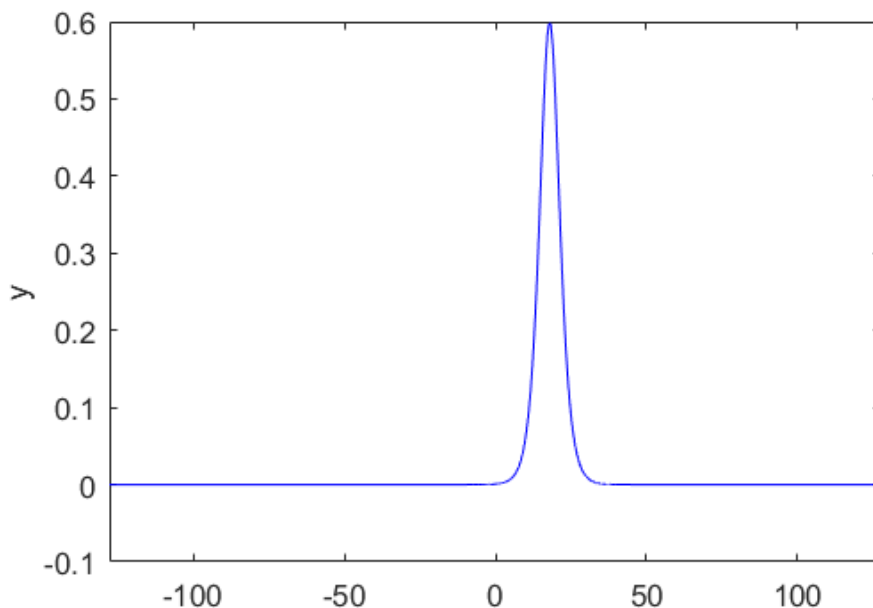
Задача 2. Нека коефициентите на уравнението на Бусинеск от шести ред са $\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \beta_3 = 1, c = 0.9, \alpha = 1$ и е разгледан случай с кубична нелинейност $p = 3$. При този избор на коефициентите уравнението на Бусинеск има солитонно решение, за което няма точна формула. За да се пресметне числено солитонното решение на нелинейното ОДУ от четвърти ред (2.2) е използван известния *метод на Петвиашвили* (виж [38, 39]). При него е приложен итерационен метод със стабилизиращ множител (стабилизатор) за да се изчисли *Дискретното преобразование на Фурие* на солитонното решение. Полученото числено решение е използвано като начално условие за динамичната задача (3.13).

Таблица 7: Грешка $\psi_{h/4}^K$ на решението, ред на сходимост κ , енергия и относителна грешка на енергията за **Задача 2** при $T = 20$ и $p = 3$.

h	τ	Error $\psi_{h/4}^k$	κ	Energy E_h^K	relEnergy	sec
0.4	0.2			1.898548610264492	$3.9 * 10^{-11}$	0
0.2	0.1			1.899049661001606	$3.9 * 10^{-11}$	1
0.1	0.05	0.0028848279	2.0102	1.899175037237036	$7.7 * 10^{-11}$	5
0.05	0.025	0.0007172283	2.0034	1.899206388768950	$1.5 * 10^{-10}$	23
0.025	0.0125	0.0001790016	2.0005	1.899214226520659	$1.1 * 10^{-10}$	176

Разгледана е задачата с тегло $\sigma = 0.5$ при $x \in [-128, 128]$ и $t \in [0, 20]$.

Грешката $\psi_{h/4}^K$ и реда на сходимост κ на приближеното решение y^K върху последния слой по времето са получени по формули (2.35) и са показани в Таблица 7. За определяне на грешката $\psi_{h/4}^K$ и реда на сходимост е използван *метод на Рунге* и

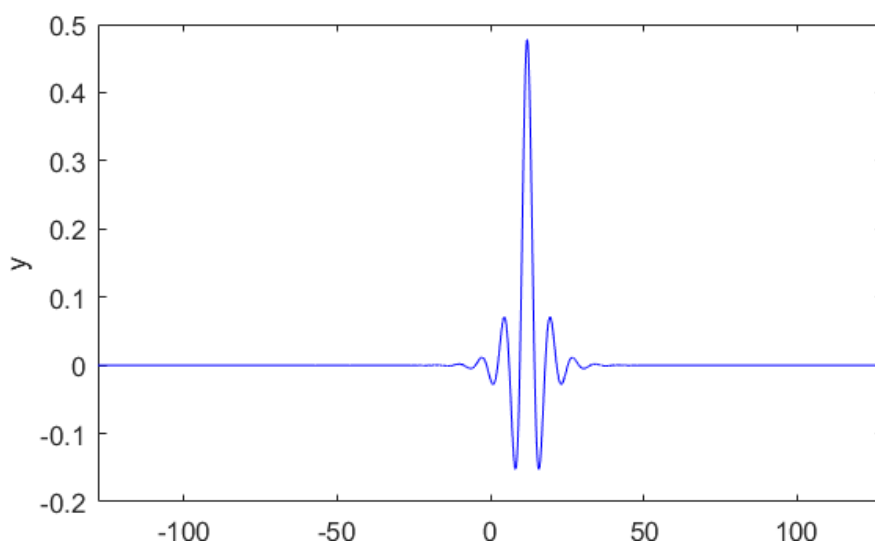


Фигура 4: Солитонно решение на ФДС за УБШР с числено начално условие при $\sigma = 0.5$, $p = 2$ и $T = 20$

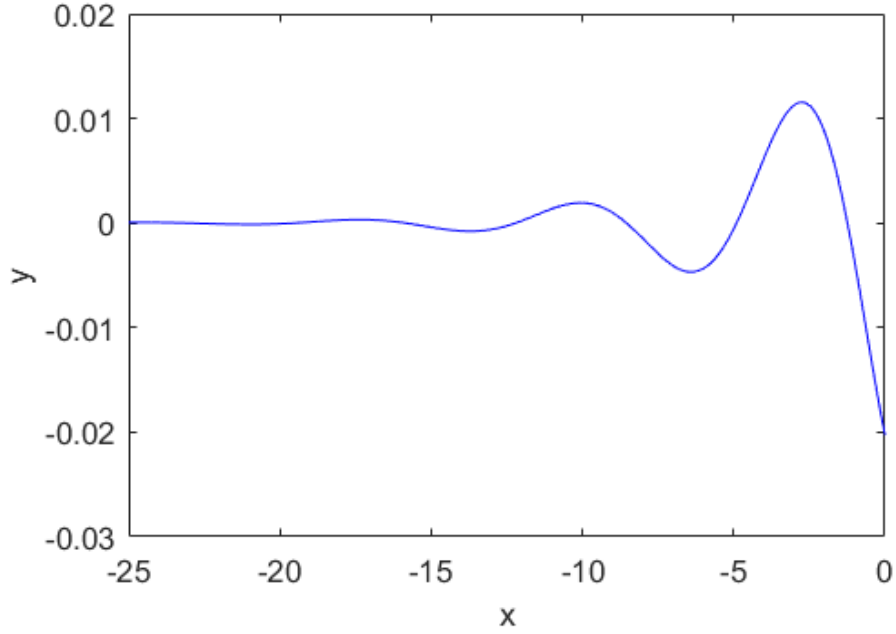
стойностите на приближеното решение y^K върху три вложени мрежи.

На Фигура 4 е показано численото решение на Задача 2 с кубична нелинейност в момента $T = 20$.

Задача 3. В този пример се търси решение на уравнението на Бусинеск от шести ред с квадратична нелинейност $p = 2$. Нека $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, $\beta_3 = 1$, $\alpha = 1$, $c = 0.6$ и $x \in [-128, 128]$, $T = 20$. Началните данни отново са получени чрез *метод на Петвиашвили*. Важно е да се отбележи, че дисперсният параметър β_2 е отрицателен и солитонното решение има осцилиращо поведение при $|x| \rightarrow \infty$. Такива решения са наречени решения от вида на Кавахара.



Фигура 5: Решение на Кавахара (Задача 3) при $p = 2$, $x \in [-128, 128]$ и $T = 20$



Фигура 6: Осцилираща опашка на решението на Кавахара на Задача 3

Таблица 8: Грешка $\psi_{h/4}^K$, ред на сходимост κ , енергия E_h^K и относителна грешка на енергията $relEnergy$ за **Задача 3** при $p = 2$ и $T = 20$.

h	τ	Error $\psi_{h/4}^K$	κ	Energy E_h^K	relEnergy	sec
0.4	0.2			0.357685678406126	$1.9 * 10^{-10}$	1
0.2	0.1			0.357692592084690	$2.8 * 10^{-10}$	1
0.1	0.05	0.0449743015	2.0255	0.357692987690998	$2.6 * 10^{-10}$	7
0.05	0.025	0.0110912076	2.0078	0.357693007148886	$9.1 * 10^{-9}$	24
0.025	0.0125	0.0027618616	2.0014	0.357693013198666	$4.7 * 10^{-9}$	176

Резултатите, които са представени в Таблица 7 и Таблица 8 показват, че численото решение е близко до точното решение с максимална грешка $\approx 10^{-4}$ за Задача 2 и $\approx 10^{-3}$ за Задача 3. При всички разгледани примери се получава втори ред на сходимост на приближеното решение, т. е. грешката е $O(h^2 + \tau^2)$. Дискретната енергия се запазва за дълго време.

На Фигура 5 е показано численото решение на Задача 3 в момента от време $T = 20$, а осцилиращата му опашка се вижда на Фигура 6.

Взаимодействие на две вълни

Задача 4. Разгледано е взаимодействието на две вълни, движещи се една срещу друга със скорости c_1 и c_2 . Нека стойностите на коефициентите са $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 1$, $\alpha = 2$, а началните условия са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x + 128, 0; c_1) + \tilde{u}(x - 128, 0; c_2),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x + 128, 0; c_1) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x - 128, 0; c_2).$$

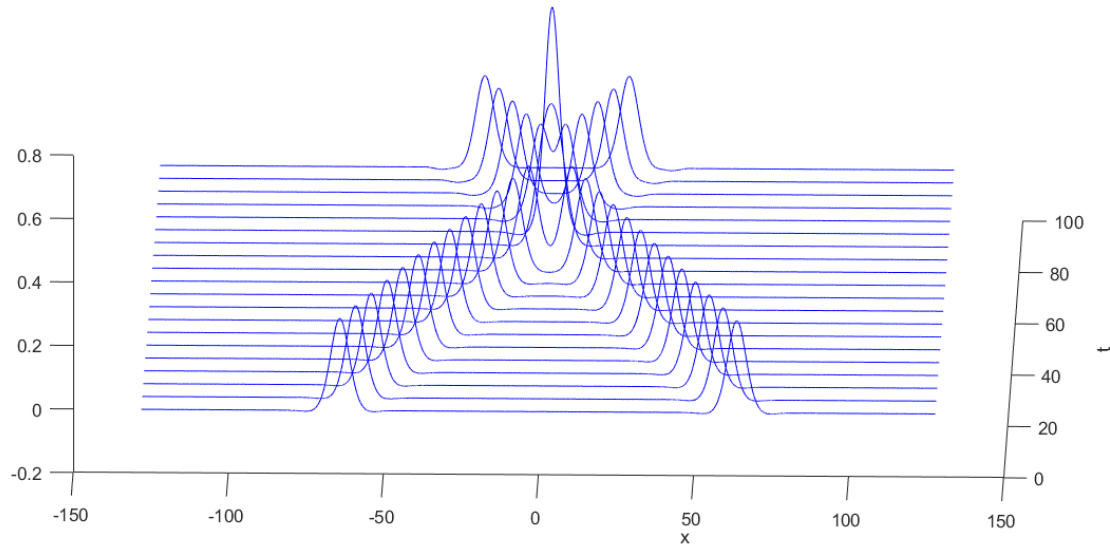
В този пример уравнението на Бусинеск от шести ред не притежава точно вълново решение, а численото решение, което е използвано като начално условие, е получено по споменатия по-горе *метод на Петвиашвили* (виж [38], [39]).

В Таблица 9 са показани резултати за Задача 4 при $x \in [-128, 128]$ и $t = [0, T]$, $T = 95$. Двете вълни се движат със скорости съответно $c_1 = 0.95$ и $c_2 = -0.95$, а движението им е показано на Фигура 6.

В Таблица 10 при същия избор на коефициентите и същите времеви и пространствени интервали, са показани резултати от взаимодействието на две вълни, движещи се със скорости $c_1 = 0.97$ и $c_2 = -0.97$.

Таблица 9: Грешка $\psi_{h/4}^K$, ред на сходимост κ , енергия E_h^K и относителна грешка на енергията $relEnergy$ за **Задача 4** при $T = 95$ и $c_1 = -c_2 = 0.95$.

h	τ	Error $\psi_{h/4}^K$	κ	Energy E_h^K	relEnergy	sec
0.4	0.04			0.911497000226452	$7.8 * 10^{-8}$	3
0.2	0.02			0.911400573893141	$5.0 * 10^{-9}$	7
0.1	0.01	0.0067122514	2.339036	0.911376328467195	$7.9 * 10^{-9}$	30
0.05	0.005	0.0012205010	2.967174	0.911370251797586	$2.0 * 10^{-9}$	151
0.025	0.025	0.0002773805	0.973462	0.911368723095981	$9.1 * 10^{-9}$	892



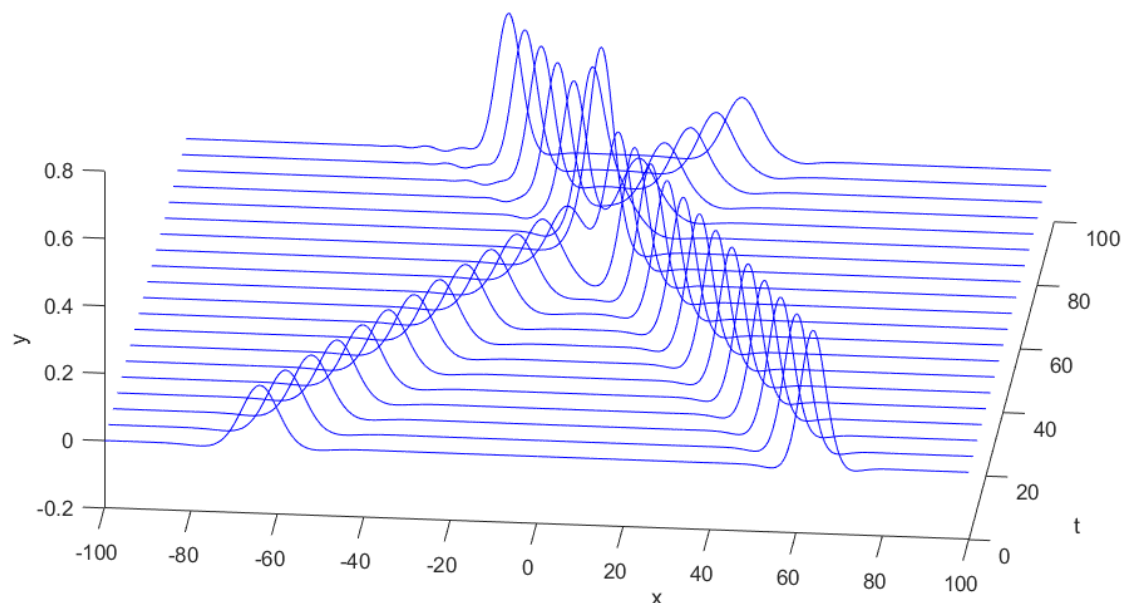
Фигура 7: Взаимодействие на вълни, решения на ФДС, движещи се една срещу друга със скорости $c_1 = -c_2 = 0.95$ при $t \in [0, T]$, $T = 95$

Таблица 10: Грешка $\psi_{h/4}^K$, ред на сходимост κ на решението, енергия E_h^K и относителна грешка на енергията $relEnergy$ за **Задача 4** при $T = 95$ със скорости $c_1 = 0.97$ и $c_2 = -0.97$.

h	τ	Error $\psi_{h/4}^K$	κ	Energy E_h^K	relEnergy	sec
0.4	0.04			0.613146949830697	$1.0 * 10^{-8}$	3
0.2	0.02			0.613075666234309	$8.5 * 10^{-10}$	7
0.1	0.01	0.0038127639	2.4538	0.613057778231275	$4.7 * 10^{-9}$	37
0.05	0.005	0.0006842480	2.5688	0.613053298613344	$3.6 * 10^{-10}$	173
0.025	0.025	0.0003274151	0.5000	0.613052173392717	$9.9 * 10^{-9}$	1005

При двата разгледани примера на взаимодействие между две вълни се получава грешка $\psi_{h/4}^K$ на решението y^K с един и същи порядък. Също така относителната грешка на енергията при $c_1 = -c_2 = 0.95$ достига точност 10^{-9} , а при $c_1 = -c_2 = 0.97$ точността е 10^{-10} .

Прави впечатление, че при различни скорости е необходимо различно изчислителното време, което е показано в колона *sec* в двете таблици. Стойностите на числената енергия E_h^K в Таблица 9 и Таблица 10 показват зависимост на енергията на вълната от скоростта и по-точно, по-малката скорост на вълната води до по-високи стойности на енергията.



Фигура 8: Взаимодействие на вълни, решения на ФДС, движещи се една срещу друга със скорости $c_1 = 0.99$ и $c_2 = -0.95$ при $t \in [0, T]$, $T = 95$

Забележка: По време на числените експерименти при движението на две вълни е наблюдавано следното интересно явление: Ако едната от двете вълни или и двете вълни се движат с достатъчно малка скорост, която наричаме *критична*, при срещата им настъпва така нареченото избухване на решението. За Задача 4 критичната скорост е $|c_i| \leq 0.93$ и избухването настъпва при $T = 75$. Това явление е описано в [12].

Заклучение:

В Раздел 3.2 и Раздел 3.3 е проведено подробно изследване на качествата на консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ и факторизираната схема с тегло $\sigma \neq 0$. Множеството числени експерименти за двете консервативни схеми потвърждават получените теоретични резултати за сходимост на численото решение към точното с втори ред и за запазване на дискретната енергия. Освен това дават възможност да се направи сравнение на схемите, както по отношение на избора на стъпки и времето, необходимо за пресмятанията, така и по отношение на грешките и относителните грешки на енергията. Анализирайки отделните бази за сравнение стигаме до заключението, че факторизираната схема е много по-ефективна от консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ по отношение на използваното изчислително време и запазването на енергията за дълъг период от време.

3.4 Консервативна диференчна схема за уравнението на Бусинеск от шести ред, запазваща дискретната маса

В този раздел е конструирана и изследвана още една консервативна схема с втори ред на точност. Схемата е построена върху 9-точков шаблон и е некомпактна. Основното предимство на новата схема е, че освен дискретната енергия, решението ѝ запазва теоретично и числено дискретната маса.

В Раздел 2.2.1е показано представянето на уравненията на Бусинеск във вид на обобщени хамилтонови системи. Въз основа на това представяне вместо задачата (3.1)-(3.3) е разгледана следната еквивалентна задача на Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \alpha \frac{\partial u^p}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (3.31)$$

с начални условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{където} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = u_1(x).$$

Безкрайната област \mathbb{R} е заменена с крайния интервал $[-L_1, L_2]$, където числата L_1 и L_2 са избрани достатъчно големи така, че решението и производните му да са много малки извън този интервал. В краищата на интервала $[-L_1, L_2]$ са избрани периодични гранични условия и е въведена равномерна мрежа $\{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ със стъпка h . Нека с $y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ и $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))$ са означени апроксимациите на решението $u(x, t)$ и $v(x, t)$ на системата (3.31) във възлите на мрежата, т. е. $y_i(t) \approx u(x_i, t)$ и $w_i(t) \approx v(x_i, t)$ при $i = 1, \dots, N$.

Производните в (3.31) са заменени с крайни разлики със стъпка $2h$, които имат втори ред на апроксимация. По този начин е получена следната полу-дискретна система от ОДУ за неизвестните компоненти на векторите $y(t)$ и $w(t)$

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{dw_i(t)}{dt} = y_{\hat{x},i} - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i} + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i} - \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i(t))^{p+1} - (y_i(t))^{p+1}}{y_i(t) - y_i(t)} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = w_{\hat{x},i}, \end{cases} \quad (3.32)$$

където $y_{\hat{x},i} = (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$.

За дискретизацията на система (3.32), във времевия интервал $[0, T]$ е въведена равномерна мрежа $\{t_k = k\tau \mid k = 0, \dots, K, K = T/\tau\}$ със стъпка τ .

Нека y^k и $w^{k+\frac{1}{2}}$ са апроксимациите на решението y и w съответно в момента от време t_k и $t_k + \tau/2$. Получена е следната дискретна система:

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{w_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - w_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2h}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Схемата (3.33) апроксимира система (3.31) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

След изключване на спомагателната функция w от (3.33) се получава следното неявно диференчно уравнение за y_i^k :

$$(I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) y_{it,i}^k = \left(\hat{\Delta} - \beta_2 \hat{\Delta}^2 + \beta_3 \hat{\Delta}^3 \right) y_i^k - \frac{\alpha}{p+1} \hat{\Delta} \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right). \quad (3.34)$$

Диференчната схема (3.34) е условно устойчива с достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h^2)$, формулирано в следната теорема:

Теорема 33. *Линейната схема, съответстваща на (3.34) е устойчива по начални данни и дясна част, ако е в сила*

$$\tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{(1+\epsilon)(h^4 + \beta_2 h^2 + \beta_3)} h^4,$$

за някое малко положително число ϵ , независимо от h , τ и y .

Доказателство. От теорията за устойчивост на трислойните диференчни схеми в [40] следва, че схемата (3.34) ще бъде устойчива, ако за някое малко положително число ϵ е в сила неравенството

$$I_d - \beta_1 \hat{\Delta} \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \left(-\hat{\Delta}_h + \beta_2 \hat{\Delta}^2 - \beta_3 \hat{\Delta}^3 \right),$$

което може да се запише във вида

$$(-\hat{\Delta})^{-1} + \beta_1 I_d \geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \left(I_d - \beta_2 \hat{\Delta} + \beta_3 \hat{\Delta}^2 \right). \quad (3.35)$$

Тъй като операторът $(-\hat{\Delta})^{-1}$ е положителен, то за да се удовлетвори (3.35) е достатъчно да е в сила

$$\left(\beta_1 - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \right) I_d \geq -\frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_2 \hat{\Delta} + \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_3 \hat{\Delta}^2.$$

От $I_d \geq \frac{-\hat{\Delta}}{\|-\hat{\Delta}\|}$ и $\|-\hat{\Delta}\|(-\hat{\Delta}) \geq \hat{\Delta}^2$ последователно получаваме

$$\begin{aligned} \left(\beta_1 - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \right) \frac{(-\hat{\Delta})}{\|-\hat{\Delta}\|} &\geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_2 (-\hat{\Delta}) + \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_3 \|-\hat{\Delta}\| (-\hat{\Delta}), \\ \beta_1 - \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 &\geq \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_2 \|-\hat{\Delta}\| + \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \beta_3 \|-\hat{\Delta}\|^2, \\ \frac{1+\epsilon}{4} \tau^2 \left(1 + \beta_2 \|-\hat{\Delta}\| + \beta_3 \|-\hat{\Delta}\|^2 \right) &\leq \beta_1. \end{aligned}$$

Тъй като $\|-\hat{\Delta}_h\| \leq \frac{4}{h^2}$ и операторът $\hat{\Delta}$ съвпада с оператора Δ_h , изчислен върху мрежа със стъпка $2h$, то $\|-\hat{\Delta}\| \leq \frac{4}{4h^2}$. Оттук

$$\tau^2 \left(1 + \frac{\beta_2}{h^2} + \frac{\beta_3}{h^4} \right) \leq \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}.$$

Доказателството на Теорема 33 е завършено. \square

Нека дефинираме дискретен хамилтониан $H_h \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ по следния начин

$$H_h \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) := H_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left(\left(y^{k+1} \right)^{p+1} + \left(y^k \right)^{p+1}, 1 \right), \quad (3.36)$$

където линейната част $H_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ на $H_h \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ е зададена с изрази

$$\begin{aligned} H_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) &:= \frac{1}{2} \left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left(w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}} \right) - \\ &- \frac{\tau^2 \beta_2}{8} \left(\hat{\Delta} w^{k+\frac{1}{2}}, \hat{\Delta} w^{k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\tau^2 \beta_3}{8} \left(\hat{\Delta} w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, \hat{\Delta} w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} \left(\left(I_d - \beta_2 \hat{\Delta} + \beta_3 \hat{\Delta}^2 \right) \left(y^{k+1} + y^k \right), y^{k+1} + y^k \right). \end{aligned}$$

Дискретният хамилтониан $H_h \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ апроксимира непрекъснатия хамилтониан $H(u, v)$, дефиниран с (2.25), с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Решението на диференчната схема (3.34) удовлетворява дискретния закон за запазване на енергията, който е формулиран в следната теорема:

Теорема 34. (*Дискретен закон за запазване на енергията*) Схемата (3.34) е консервативна, т.е. на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството

$$H_h(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_h(y^0, w^{\frac{1}{2}}),$$

където $H_h(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ се дефинира с формула (3.36).

Доказателство. При доказателството на Теорема 34 се използва същия метод, както при доказателството на Теорема 28. За разлика от консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ и факторизираната схема, тук с A е означен оператора $Ay = -\hat{\Delta}y = -y_{\hat{x}\hat{x}}$, действащ в пространството от периодични дискретни функции. Операторът A е симетричен и положително определен, следователно съществува обратният оператор A^{-1} . След прилагане на A^{-1} към (3.34) е получено следното уравнение

$$(A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{tt}^k + (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y^k - \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}}{y^{k+1} - y^{k-1}} \right) = 0.$$

Полученото уравнение е умножено скалярно с $\tau \frac{y_t^k + y_t^k}{2} = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2}$, а след това y_{tt}^k и y^k са заместени по формулите

$$y_{tt}^k = \frac{y_t^k - y_t^k}{\tau}, \quad y^k = \frac{y^{k+1} + y^{k-1}}{2} - \frac{\tau(y_t^k - y_t^k)}{2}.$$

По този начин се получава уравнението

$$E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) = E_{h,L} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right), \quad (3.37)$$

където с $E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ е означен

$$\begin{aligned} E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{2} \left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left(y_t^k, y_t^k \right) - \frac{\tau^2 \beta_2}{8} \left(y_{t\hat{x}}^k, y_{t\hat{x}}^k \right) - \\ &- \frac{\tau^2 \beta_3}{8} \left(A y_t^k, A y_t^k \right) + \frac{1}{8} \left(y^{k+1} + y^k, y^{k+1} + y^k \right) - \\ &- \frac{\beta_2}{8} \left(y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k, y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k \right) + \frac{\beta_3}{8} \left(y_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}\hat{x}}^k, y_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}\hat{x}}^k \right), \end{aligned}$$

а нелинейния член се записва във вида

$$\begin{aligned} \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) &= \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) + \left((y^k)^{p+1} - (y^k)^{p+1}, 1 \right) = \\ &= \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^k)^{p+1}, 1 \right) - \left((y^k)^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right). \end{aligned}$$

От (3.37) следва

$$\begin{aligned} E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^k)^{p+1}, 1 \right) = \\ E_{h,L} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^k)^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right), \end{aligned}$$

т. е. получен е дискретният закон за запазване на енергията, записан в термините на функцията y .

Сега ще преобразуваме полученото уравнение в термините на y и на дискретната нововъведена функция w . За целта нека $A^{-1}y_t^k := g^k$. Тогава $y_t^k = Ag^k = -g_{\hat{x}\hat{x}}^k$ и

$$\left(A^{-1}y_t^k, y_t^k \right) = \left(g^k, Ag^k \right) = \left(g^k, -g_{\hat{x}\hat{x}}^k \right) = \left(g_{\hat{x}}^k, g_{\hat{x}}^k \right).$$

Освен това от (3.33) имаме, че $y_{t,i}^k = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}$ и получаваме $-g_{\hat{x}\hat{x}}^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$, а оттук $-g_{\hat{x}}^k = w^{k+\frac{1}{2}}$ и $\left(A^{-1}y_t^k, y_t^k \right) = \left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$. Замествайки в $E_{h,L}$ израза $\left(A^{-1}y_t^k, y_t^k \right)$ с $\left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$, получаваме $H_{h,L}(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ и доказателството на Теорема 34 е завършено. \square

Нека дискретната маса $I_h(t_k)$ е дефинирана чрез равенството

$$I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k. \quad (3.38)$$

Дискретната маса $I_h(t_k)$ апроксимира непрекъснатата маса $I(u(x, t))$, зададена с (1.9), с втори ред на точност.

Теорема 35 (Запазване на дискретната маса). *Решението на консервативната схема (3.33) запазва дискретната маса $I_h(t_k)$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила следното равенство*

$$I_h(t_k) = I_h(t_0),$$

където $I_h(t_k)$ е дефинирана с формула (3.38).

Доказателство. От периодичните гранични условия, наложени върху дискретните функции y и w и от второто диференчно уравнение на схема (3.33) последователно се получава

$$\frac{I_h(t_{k+1}) - I_h(t_k)}{\tau} = \sum_{i=1}^N h \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Оттук $I_h(t_{k+1}) = I_h(t_k) = \dots = I_h(t_0)$.

Доказателството на Теорема 35 е завършено. \square

Обърнете внимание, че както при консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ и факторизираната схема, апроксимацията на нелинейния член зависи от решението y^{k+1} на следващия слой по времето. По тази причина за намиране на численото решение на (3.33) е използван итерационен метод. Началните стойности $y^{k+1,[0]}$ са стойностите на решението на предишния слой по времето, т.е. $y^{k+1,[0]} = y^k$. На всяка итерация първо се пресмятат стойностите на нелинейния член

$$f(y_i^{k+1,[s+1]}) = \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i^{k+1,[s]})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1,[s]} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}.$$

Получените стойности се заместват в следната система

$$(I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k+\frac{1}{2},[s+1]} = (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k-\frac{1}{2}} + \tau \left(y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - f(y^{k+1,[s+1]}) \right) \quad (3.39)$$

и се изчислява дясната страна на (3.39) за $i = 1, \dots, N$.

Тъй като матрицата на системата (3.39) има специална структура, за намиране на решението $w^{k+\frac{1}{2},[s+1]}$ може да се използва следния подход:

- Системата (3.39) се разделя на две нови системи. Едната система е съставена от уравненията за четните възли, а другата - от уравненията за нечетните възли.
- За определяне на решенията на двете системи е приложен метода на цикличната прогонка.

След това от уравнението $y_i^{k+1,[s+1]} = y_i^k + \tau \frac{w_{i+1}^{k+\frac{1}{2},[s+1]} - w_{i-1}^{k+\frac{1}{2},[s+1]}}{2h}$ се получава решението $y^{k+1,[s+1]}$ на следващата итерация. Итерационният процес приключва, когато разликата между две последователни итерации стане по-малка от предварително зададен толеранс tol , т.е. $|y^{k+1,[s+1]} - y^{k+1,[s]}| < tol$. Числените резултати, които са представени в следващата глава, са получени при $tol = 10^{-12}$.

3.4.1 Числени резултати за консервативната схема, запазваща дискретната маса

В тази глава представяме числени резултати за консервативната схема (3.33), която запазва дискретната енергия и дискретната маса. Численото решение на схемата е изследвано при квадратична и кубична нелинейност ($p = 2$ и $p = 3$).

Разгледана е задачата с квадратична нелинейност ($p = 2$) и следните стойности на коефициентите

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 1 + \frac{61}{169}\beta_1, \beta_3 = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{1}{2} \text{ и } c = \sqrt{\frac{61}{169}}.$$

При този избор на коефициентите от [18] следва, че непрекъснатата задача има аналитично решение (2.3), а точната енергия H , изчислена по формула (2.25), приема стойност $H \approx 6.92265662500127$.

При задачата с кубична нелинейност ($p = 3$) и коефициенти

$$\beta_1 = 3, \beta_2 = 1 + \frac{9}{25}\beta_1, \beta_3 = \frac{1}{4}, c = \frac{3}{5} \text{ и } \alpha = \frac{1}{3},$$

уравнението на Бусинеск от шести ред има аналитично решение (2.4) и точна енергия $H \approx 7.92656709701685$.

Важно е да се отбележи, че коефициентите и при двата случая на нелинейност са избрани както при консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ и при факторизираната схема. Това позволява да се сравнят резултатите от трите схеми.

Нека началните условия на задачата са

$$y(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad w\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = -c\tilde{u}\left(x, \frac{\tau}{2}; c\right).$$

Сходимостта и точността са числено изследвани при $x \in [-120, 120]$ посредством вложени мрежи. Максималната грешка между точното решение и изчисленото решение в равномерна норма е показана в колона *Error* $\psi_{h\tau}$. Численият ред на сходимость на приближеното решение към точното е пресметнат по формула (2.34) и е показан в колона κ .

Таблица 11: Грешка $\psi_{h\tau}$ и ред на сходимость к при **консервативната схема**, запазваща масата за $T = 20$ с $p = 2$ и $p = 3$.

p = 3					p = 2		
Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec	h	τ	Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec
0.3689399009		5	0.4	0.004	0.1463316774		5
0.0884783026	2.0600	16	0.2	0.002	0.0347951612	2.0723	16
0.0217652307	2.0233	58	0.1	0.001	0.0085797827	2.0199	56
0.0054201987	2.0056	249	0.05	0.0005	0.0021374324	2.0051	236
0.0013535713	2.0016	1030	0.025	0.00025	0.0005338842	2.0013	917
0.0003381075	2.0012	2608	0.0125	0.000125	0.0001334125	2.0006	2385

От резултатите, публикувани в Таблица 11 се вижда, че при двата вида нелинейност, численото решение приближава точното с грешка $\psi_{h\tau} = O(10^{-4})$ при най-дребната мрежа $h = 0.0125$ и $\tau = 0.000125$, и методът е с втори ред на сходимость на численото решение към точното.

Таблица 12: Дискретна маса I_h^K в крайния момент и относителна грешка на масата *relMass* при $T = 20$.

p = 3				p = 2	
mass I_h^K	relMass	h	τ	mass I_h^K	relMass
8.48528137423858	$2 * 10^{-15}$	0.4	0.004	10.34674224586719	$1 * 10^{-16}$
8.48528137423860	$3 * 10^{-15}$	0.2	0.002	10.34674224586719	$7 * 10^{-16}$
8.48528137423857	$3 * 10^{-15}$	0.1	0.001	10.34674224586716	$2 * 10^{-15}$
8.48528137423862	$3 * 10^{-15}$	0.05	0.0005	10.34674224586718	$2 * 10^{-15}$
8.48528137423856	$2 * 10^{-15}$	0.025	0.00025	10.34674224586720	$3 * 10^{-15}$
8.48528137423861	$9 * 10^{-15}$	0.0125	0.000125	10.34674224586716	$4 * 10^{-16}$

В Таблица 12 са представени резултати за дискретната маса I_h^K в крайния момент от време, пресметната по формула (3.38). Стойностите на относителната грешка на масата *relMass* показват, че при двата вида нелинейност решението на разглежданата задача запазва дискретната маса с висока точност. При квадратична нелинейност ($p = 2$) относителната грешка на масата достига точност 10^{-16} , а при кубична нелинейност ($p = 3$) точността е 10^{-15} .

Резултатите за дискретната енергия H_h^K в крайния момент от време, както и грешката, и реда на сходимость на H_h^K са представени в Таблица 13 и Таблица 14.

Таблица 13: Дискретна енергия H_h^K , грешки и ред на сходимост κ_E на дискретната енергия при $T = 20$ и кубична нелинейност ($p = 3$).

h	τ	Energy H_h^K	relEnergy	$ H_h^K - H $	κ_E
0.4	0.004	7.832337818894812	$1.0 * 10^{-9}$	0.0942292781	
0.2	0.002	7.902430337525830	$6.6 * 10^{-10}$	0.0241367595	1.964943
0.1	0.001	7.920495264900505	$1.4 * 10^{-10}$	0.0060718321	1.991028
0.05	0.0005	7.925046760902601	$2.8 * 10^{-10}$	0.0015203361	1.997742
0.025	0.00025	7.926186759255580	$1.3 * 10^{-8}$	0.0003803378	1.999037
0.0125	0.000125	7.926471572590061	$5.8 * 10^{-8}$	0.0000955244	1.993340

В последната колона κ_E в двете таблици се вижда, че дискретната енергия H_h^K в крайния момент от време се сходя към точната енергия H приблизително с втори ред на сходимост.

Таблица 14: Дискретна енергия H_h^K , грешки и ред на сходимост на дискретната енергия при $T = 20$ и квадратична нелинейност ($p = 2$).

h	τ	Energy H_h^K	relEnergy	$ H_h^K - H $	κ_E
0.4	0.004	6.897306186571161	$3.5 * 10^{-9}$	0.0253504384	
0.2	0.002	6.916229835633470	$2.4 * 10^{-10}$	0.0064267894	1.9798
0.1	0.001	6.921044238334686	$6.3 * 10^{-11}$	0.0016123867	1.9949
0.05	0.0005	6.922253166942417	$5.9 * 10^{-10}$	0.0004034581	1.9987
0.025	0.00025	6.922555701180909	$5.5 * 10^{-9}$	0.0001009238	1.9992
0.0125	0.000125	6.922631141641089	$3.8 * 10^{-8}$	0.0000254834	1.9856

Сравнение на консервативната схема, запазваща дискретната маса с консервативната схема с тегло $\sigma = 0$:

При сравняване на резултатите за консервативната схема, запазваща масата от Таблица 11 с тези за консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ от Таблица 1 прави впечатление, че всеки избор на стъпките h и τ изчислителното време при схемата, запазваща масата е по-голямо, например при $h = 0.0125$ и $\tau = 0.000125$ са необходими 2608 секунди при $p = 3$. При същия избор на стъпките и нелинейността, намирането на решението схемата с тегло $\sigma = 0$ отнема едва 2099 секунди.

Друга разлика се наблюдава в колона $Error \psi_h$ при квадратична нелинейност $p = 2$. Например при стъпки $\tau = 0.000125$ и $h = 0.0125$ грешката при схема със $\sigma = 0$ е $\psi_h = 3.5 * 10^{-5}$, а при схемата, запазваща масата $\psi_h = 1.3 * 10^{-4}$.

3.5 Симплектична схема за уравнението на Бусинеск от шести ред

В тази част е конструирана и изследвана симплектична диференчна схема за уравнението на Бусинеск от шести ред. Решението ѝ запазва точно дискретната маса и приблизително с грешка $O(h^2 + \tau^2)$ дискретния хамилтониан.

Подобно на Раздел 3.4 тук е използвано представянето на уравнението на Бусинеск от шести ред във вид на обобщена хамилтонова система и е разгледана следната

задача на Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \alpha \frac{\partial u^p}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.40)$$

с начални условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{където} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = u_1(x).$$

Дискретната задача се разглежда в достатъчно голям интервал $[-L_1, L_2]$, така че решението и неговите производни да са много близки до нулата извън този интервал. За простота са избирани периодични гранични условия. В $[-L_1, L_2]$ е въведена равномерна мрежа $\{x_i = -L_1 + ih, i = 0, 1, \dots, N\}$ със стъпка $h = (L_1 + L_2)/N$. С $y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ и $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))$ са означени апроксимациите на решението $u(x, t)$ и $v(x, t)$ на системата (3.40) във възлите на мрежата, т.е. $y_i(t) \approx u(x_i, t)$ и $w_i(t) \approx v(x_i, t)$ при $i = 1, \dots, N$.

След заместване на производните в система (3.40) с крайни разлики със стъпка $2h$, които имат втори ред на апроксимация се получава следната полу-дискретна система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dw_i(t)}{dt} = (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} (y_{\hat{x},i} - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i} + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i} - \alpha (y_i^p)_{\hat{x}}) \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = w_{\hat{x},i}, \end{cases} \quad (3.41)$$

където $y_{\hat{x},i} = (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h)$.

Новата система (3.41) е също обобщена хамилтонова система с разделящ се хамилтониан $H_h(y(t), w(t))$ и матрица J_h , дефинирани по следния начин

$$H_h(y(t), w(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(w_i^2 + y_i^2 + \beta_1 w_{\hat{x},i}^2 + \beta_2 y_{\hat{x},i}^2 + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x},i}^2 - \frac{2\alpha}{p+1} (y_i)^{p+1} \right),$$

$$J_h = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} \\ (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Във времевия интервал $[0, T]$ се въвежда равномерна мрежа $\{t_k = k\tau \mid k = 0, \dots, K, K = T/\tau\}$ със стъпка τ по времето.

Нека с y_i^k и $w_i^{k+\frac{1}{2}}$ са означени апроксимациите на решението y_i и w_i съответно в момента от време t_k и $t_k + \tau/2$. След прилагане на метода на Щьормер-Верле (еквивалентно метода leap-frog) към (3.41) се получава следната напълно дискретна схема

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - \alpha \frac{(y_{i+1}^k)^p - (y_{i-1}^k)^p}{2h}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.43)$$

Чрез развитие в ред на Тейлър директно се показва, че схемата (3.43) апроксимира система (3.40) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Изключването на помощната функция w от (3.43) води до следното некомпактно диференчно уравнение за y_i^k :

$$(I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) y_{tt,i}^k = \hat{\Delta} y_i^k - \beta_2 \hat{\Delta}^2 y_i^k + \beta_3 \hat{\Delta}^3 y_i^k - \alpha \hat{\Delta} (y_i^k)^p.$$

За удобство при теоретичните изследвания, след полагане $Ay = -\hat{\Delta}y = -y_{\hat{x}\hat{x}}$ схема (3.43) се записва в следния каноничен вид:

$$(I_d + \beta_1 A) y_{tt,i}^k + (A + \beta_2 A^2 y_i^k + \beta_3 A^3) y_i^k = \alpha A (y_i^k)^p. \quad (3.44)$$

Симплектичната схема (3.43) е със същата линейна част като консервативната схема (3.33). По тази причина за двете схеми получаваме едно и също достатъчно условие за устойчивост.

Теорема 36. *Симплектичната схема (3.44) е устойчива по начални данни и дясна част, ако е в сила условието*

$$\tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{(1+\epsilon)(h^4 + \beta_2 h^2 + \beta_3)} h^4,$$

за някое малко положително число ϵ , независимо от h , τ и y .

Доказателството на теоремата е съвпада с доказателството на Теорема 33.

Важно свойство на разглеждания числен метод е формулирано в следната теорема:

Теорема 37. *Схемата (3.43) е симплектична, т.е. тя запазва дискретната симплектична структура $\omega^k = dz^k \wedge J_h dz^{k-1}$, $z^k = (u^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ на всеки слой по времето*

$$\omega^k = \omega^{k-1} = \dots = \omega^0.$$

Доказателство. Системата (3.41) е разделяща се хамилтонова система. Когато е приложен към такива системи методът на Щьормер-Верле е еквивалентен на Лобато Ша-Шб и на симплектичния разделен метод на Рунге-Кута.

Матрицата J_h , зададена с (3.42), е произведение на симетричната матрица с постоянни коефициенти $(I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1}$ и на матрицата $\begin{bmatrix} 0 & \partial_{\hat{x}} \\ \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{bmatrix}$, където $S = (S_{ij})_{d \times d}$ е такава, че $S_{i,i+1} = -S_{i+1,i} = 1$ и $S_{i,j} = 0$ за $|i-j| \neq 1$. Следователно J_h удовлетворява изискванията за Поасонова скобка от [24], която се дефинира по следния начин $\{F, G\} = \nabla F^T J_h \nabla G$.

От [43] следва, че така получените схеми са Poisson integrators. \square

За удобство на читателите отново е дефиниран дискретния хамилтониан от Раздел 3.4:

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) := H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right), \quad (3.45)$$

където линейната част $H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ на $H_h(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ се задава с израза

$$\begin{aligned} H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) &:= \frac{1}{2} \left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left(w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}} \right) - \\ &- \frac{\tau^2 \beta_2}{8} \left(\hat{\Delta} w^{k+\frac{1}{2}}, \hat{\Delta} w^{k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\tau^2 \beta_3}{8} \left(\hat{\Delta} w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, \hat{\Delta} w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} \left((I_d - \beta_2 \hat{\Delta} + \beta_3 \hat{\Delta}^2)(y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Теорема 38. Решението на симплектичната схема (3.43) удовлетворява на всеки слой по времето k , $k = 1, 2, \dots, K$ следното равенство

$$H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) = H_{h,L}^{k-1} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\alpha}{2} \left((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1} \right), \quad (3.47)$$

където $H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ е дефиниран с (3.46).

Освен това, то запазва приблизително с глобална грешка $O(\tau^2)$ дискретния хамилтониан $H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right)$, т.е.

$$\left| H_h^K \left(y^K, w^{K+\frac{1}{2}} \right) - H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq \tau^2 TC, \quad (3.48)$$

с константа C , независеща от h и τ .

Доказателство. Операторът $Ay = -\hat{\Delta}y$ е симетричен и положително определен. След прилагане на A^{-1} към (3.44) се получава следното уравнение

$$(A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{tt}^k + (I_d + \beta_2 A + \beta_3 A^2) y^k = \alpha (y^k)^p.$$

Полученото уравнение е умножено скалярно с $\tau \frac{y_t^k + y_{\bar{t}}^k}{2} = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2}$ и y_{tt}^k и y^k са заместени по следните формули

$$y_{tt}^k = \frac{y_t^k - y_{\bar{t}}^k}{\tau}, \quad y^k = \frac{y^{k+1} + y^{k-1}}{2} - \frac{\tau(y_t^k - y_{\bar{t}}^k)}{2}.$$

След преобразуване на изразите се получава уравнението

$$E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) = E_{h,L} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\alpha}{2} \left((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1} \right),$$

където с $E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ е положено

$$\begin{aligned} E_{h,L} \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{2} (A^{-1} y_t^k, y_t^k) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (y_t^k, y_t^k) - \frac{\tau^2 \beta_2}{8} (y_{t\hat{x}}^k, y_{t\hat{x}}^k) - \\ &\quad - \frac{\tau^2 \beta_3}{8} (A y_t^k, A y_t^k) + \frac{1}{8} (y^{k+1} + y^k, y^{k+1} + y^k) - \\ &\quad - \frac{\beta_2}{8} (y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k, y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k) + \frac{\beta_3}{8} (y_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}\hat{x}}^k, y_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}\hat{x}}^k). \end{aligned}$$

Нека $A^{-1} y_t^k := g^k$ и $y_t^k = A g^k = -g_{\hat{x}\hat{x}}^k$. Тогава

$$(A^{-1} y_t^k, y_t^k) = (g^k, -g_{\hat{x}\hat{x}}^k) = (g_{\hat{x}}^k, g_{\hat{x}}^k).$$

От $y_t^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$ следва, че $-g_{\hat{x}\hat{x}}^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$, а оттук $-g_{\hat{x}}^k = w^{k+\frac{1}{2}}$ и $(A^{-1} y_t^k, y_t^k) = (w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}})$. По този начин заместваем $(A^{-1} y_t^k, y_t^k)$ с $(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}})$ и доказателството на (3.47) е завършено.

За да се докаже (3.48) е необходимо да се оцени отгоре разликата R^k

$$R^k = H_h^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - H_h^{k-1} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.49)$$

От (3.45) и (3.47) последователно получаваме

$$\begin{aligned}
R^k &= H_{h,L}^k - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right) - H_{h,L}^{k-1} + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^k)^{p+1} + (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) = \\
&= H_{h,L}^{k-1} + \frac{\alpha}{2} \left((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1} \right) - H_{h,L}^{k-1} - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) = \\
&= \frac{\alpha}{2} \left((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1} \right) - \frac{\alpha}{2(p+1)} \left(\frac{(y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}}{y^{k+1} - y^{k-1}}, y^{k+1} - y^{k-1} \right).
\end{aligned}$$

След прилагане на свойствата на скаларното произведение изразът R^k се записва в следния вид

$$R^k = \frac{\alpha}{2(p+1)} \left(y^{k+1} - y^{k-1}, (p+1)(y^k)^p - (y^{k+1})^p - (y^{k+1})^{p-1}y^{k-1} - \dots - (y^{k-1})^p \right). \quad (3.50)$$

Чрез развитие в ред на Тейлър около y^k в израза

$$(p+1)(y^k)^p - (y^{k+1})^p - (y^{k+1})^{p-1}y^{k-1} - \dots - (y^{k-1})^p.$$

се получава следната оценка

$$|(p+1)(y^k)^p - (y^{k+1})^p - (y^{k+1})^{p-1}y^{k-1} - \dots - (y^{k-1})^p| \leq C_1 \tau^2. \quad (3.51)$$

Оттук след прилагане на неравенството (3.51) в (3.50) получаваме

$$|R^k| \leq C_2 \frac{\alpha}{2(p+1)} \tau^3,$$

където константите C_1 и C_2 зависят от $\max_k(|y^k|, |y_t^k|, |y_{tt}^k|)$ при $k = 1, \dots, K$.

И така грешката $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) - H_h^{k-1}(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}})$ между две последователни стойности на хамилтониана е оценена отгоре от $O(\tau^3)$.

След сумиране на (3.49) при $k = 1, \dots, K$ се получава разликата

$$H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k=1}^K R^k,$$

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \sum_{k=1}^K |R^k| < KC\tau^3.$$

От $K\tau^3 = T\tau^2$ следва окончателната оценка

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq CT\tau^2.$$

Доказателството на Теорема 38 е завършено. \square

От Теорема 38 ясно се вижда, че решението на симплектичната схема не запазва точно, на всеки слой по времето, дискретния хамилтониан (3.45). Това потвърждава добре известния резултат (виж [25]), че методът на Щьормер-Верле в общия случай не запазва квадратичните първи интеграли.

За удобство на читателите дискретната маса $I_h(t_k)$ се дефинира чрез равенството

$$I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k. \quad (3.52)$$

Теорема 39. (*Запазване на дискретната маса*) Симплектичната схема (3.44) запазва дискретната маса $I_h(t_k)$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила следното равенство

$$I_h(t_k) = I_h(t_0).$$

Доказателство. Доказателството на теоремата е аналогично на доказателството на Теорема 35.

Разгледана е разликата

$$\frac{I_h(t_{k+1}) - I_h(t_k)}{\tau} = \sum_{i=1}^N h \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau}.$$

От второто уравнение $\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}$ на диференчната схема (3.43) и граничните условия на задачата, се получава

$$\frac{I_h(t_{k+1}) - I_h(t_k)}{\tau} = \sum_{i=1}^N h \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Оттук $I_h(t_{k+1}) = I_h(t_k) = \dots = I_h(t_0)$. Доказателството на Теорема 39 е завършено. \square

3.5.1 Числени резултати за симплектичната схема за уравнението на Бусинеск от шести ред

В тази глава са представени числени резултати за симплектичната схема (3.41). Точността и сходимостта са изследвани посредством вложени мрежи. Разгледани са случаите на квадратична и кубична нелинейност. Числените експерименти са проведени върху две задачи: разпространение на солитонно решение и взаимодействие на два солитона.

Задача 1. Разпространение на солитонна вълна:

Нека $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + \frac{61}{169}\beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $c = \sqrt{\frac{61}{169}}$. При тези стойности на параметрите, следвайки [18], непрекъснатата задача има аналитично решение (2.3). Точната енергия H е изчислена по формула (2.25) и получената стойност е $H \approx 6.92265662500127$.

При кубична нелинейност ($p = 3$) нека $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1 + \frac{9}{25}\beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{5}$ и $\alpha = \frac{1}{3}$. Тогава уравнението на Бусинеск от шести ред има точно решение във вида (2.4) и точната енергия е $H \approx 7.92656709701685$.

Параметрите, точните решения и стойностите на точната енергия за двата случая на нелинейност при симплектичната схема са същите, както при разглежданите консервативни схеми.

Нека началните условия на разглежданата задача са

$$y(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad w\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = -c\tilde{u}\left(x, \frac{\tau}{2}; c\right).$$

Задачата е разгледана при $x \in [-120, 120]$, $T = 20$.

В Таблица 15 са показани резултати за грешката $\psi_{h\tau}$ и числения ред на сходимост κ , пресметнат по формули (2.34). От резултатите се вижда, че при двата вида нелинейност, численото решение приближава точното с грешка $O(10^{-4})$ при най-дребната мрежа $h = 0.0125$ и $\tau = 0.000125$ и методът е с втори ред на сходимост.

Таблица 15: Грешка $\psi_{h\tau}$ и ред на сходимост κ за **симплектичната схема (Задача 1)** при $T = 20$.

p = 3					p = 2		
Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec	h	τ	Error $\psi_{h\tau}$	κ	sec
0.3689673273		1	0.4	0.004	0.1463413839		1
0.0884850386	2.0600	4	0.2	0.002	0.0347974279	2.0723	4
0.0217668932	2.0233	17	0.1	0.001	0.0085803416	2.0199	17
0.0054206110	2.0056	64	0.05	0.0005	0.0021375716	2.0051	62
0.0013536742	2.0016	261	0.025	0.00025	0.0005339190	2.0013	252
0.0003381332	2.0012	1005	0.0125	0.000125	0.0001334211	2.0006	994

Таблица 16: Дискретна маса I_h^K в крайния момент и относителна грешка на масата $relMass$ за **симплектичната схема (Задача 1)** при $T = 20$.

p = 3				p = 2	
mass I_h^K	relMass	h	τ	mass I_h^K	relMass
8.48528137423860	$2 * 10^{-16}$	0.4	0.004	10.34674224586720	$5 * 10^{-16}$
8.48528137423860	$3 * 10^{-15}$	0.2	0.002	10.34674224586719	$7 * 10^{-16}$
8.48528137423858	$2 * 10^{-15}$	0.1	0.001	10.34674224586719	$1 * 10^{-15}$
8.48528137423858	$2 * 10^{-15}$	0.05	0.0005	10.34674224586723	$3 * 10^{-15}$
8.48528137423856	$1 * 10^{-15}$	0.025	0.00025	10.34674224586714	$3 * 10^{-15}$
8.48528137423858	$7 * 10^{-15}$	0.0125	0.000125	10.34674224586710	$6 * 10^{-15}$

Дискретната маса I_h^M в крайния момент $T = K\tau$, получена по формула (3.52), е показана в Таблица 16. Резултатите за относителната грешка на масата $relMass$ показват, че дискретната маса се запазва с много добра точност. При двата вида нелинейност- квадратична и кубична, относителната грешка на масата достига порядък 10^{-16} .

Таблица 17: Дискретна енергия H_h^K , грешки и ред на сходимост на дискретната енергия за **симплектичната схема (Задача 1)** при кубична нелинейност ($p = 3$) и $T = 20$.

h	τ	Energy H_h^K	relEnergy	$H_h^K - H$	κ_E
0.4	0.004	7.832336499041642	$1.8 * 10^{-7}$	0.0942305980	
0.2	0.002	7.902430278592994	$8.1 * 10^{-9}$	0.0241368184	1.9650
0.1	0.001	7.920495261367458	$5.9 * 10^{-10}$	0.0060718356	1.9910
0.05	0.0005	7.925046760682399	$3.1 * 10^{-10}$	0.0015203363	1.9977
0.025	0.00025	7.926186759222194	$1.3 * 10^{-8}$	0.0003803378	1.9990
0.0125	0.000125	7.926471572809858	$5.8 * 10^{-8}$	0.0000955242	1.9933

Дискретната енергия H_h^K , изчислена в последния момент $T = K\tau$ по формула (3.36), е показана в Energy H_h^M на Таблица 17 и Таблица 18. Максималната грешка между точната енергия H и дискретната енергия е дадена в колона $|H_h^K - H|$, докато редът на сходимост на дискретната енергия към точната е представен в последната колона κ_E .

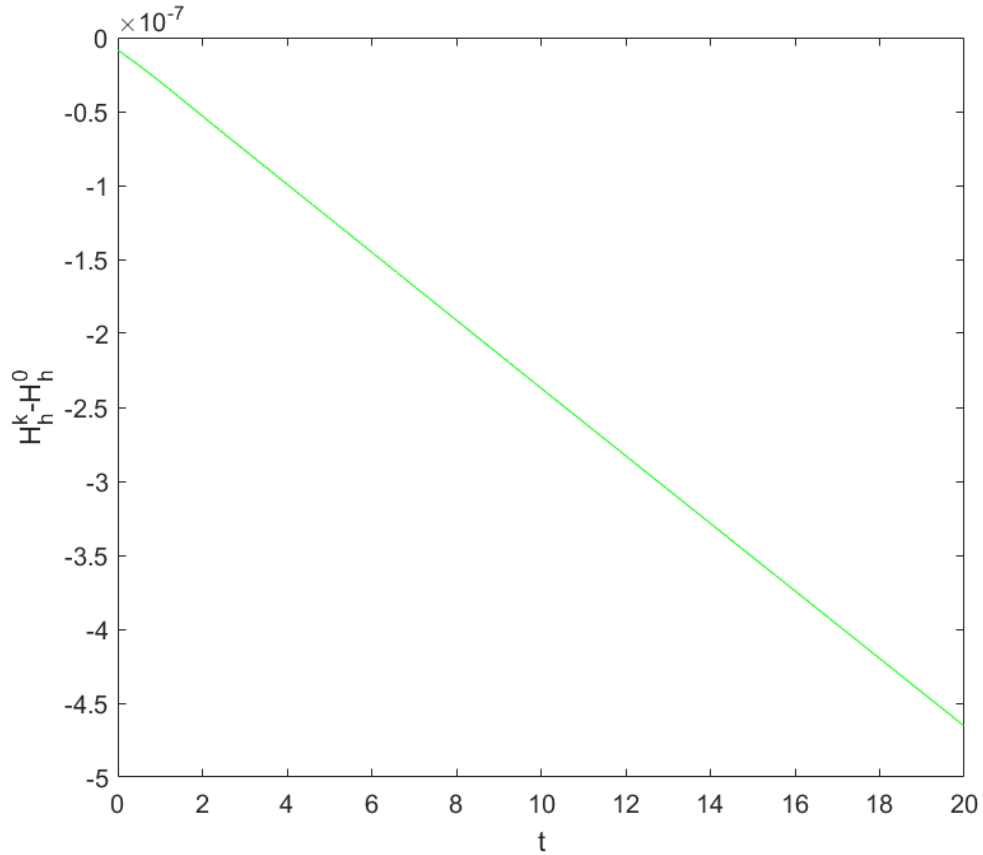
Изследвана е грешката на дискретния хамилтониан в началния момент $t = 0$ и крайния момент $t = T$. Резултатите в Таблица 17 и Таблица 18 показват, че дискретната енергия се запазва с грешка $O(10^{-7}) - O(10^{-10})$ въпреки, че симплектичната

схема не запазва точно дискретната енергия H_h^k . Освен това дискретната енергия клони към точната енергия с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Таблица 18: Дискретна енергия H_h^K , грешки и ред на сходимост на дискретната енергия за **симплектичната схема (Задача 1)** при квадратична нелинейност ($p = 2$) и $T = 20$.

h	τ	Energy H_h^K	relEnergy	$ H_h^K - H $	κ_E
0.4	0.004	6.897305934106303	$4.0 * 10^{-8}$	0.0253506909	
0.2	0.002	6.916229820971417	$2.4 * 10^{-9}$	0.0064268040	1.9799
0.1	0.001	6.921044237433179	$1.9 * 10^{-10}$	0.0016123876	1.9949
0.05	0.0005	6.922253166885215	$6.0 * 10^{-10}$	0.0004034581	1.9987
0.025	0.00025	6.922555701141143	$5.5 * 10^{-9}$	0.0001009239	1.9992
0.0125	0.000125	6.922631141655073	$3.8 * 10^{-8}$	0.0000254833	1.9856

На Фигура 9 е показана разликата $H_h^k - H_h^0$ между дискретната енергия H_h^k на k -тия слой и дискретната енергия H_h^0 на нулевия слой по времето за симплектичната схема. Разгледали сме случая на квадратична нелинейност при $x \in [-120, 120]$, $T = 20$ със стъпки $h = 0.0125$ и $\tau = 0.000125$. Изменението на графиката показва, че запазването на началната дискретна енергия зависи от големината на времевия интервал, т.е. потвърждава оценка (3.48) на Теорема 38.



Фигура 9: Разлика $H_h^k - H_h^0$ между енергията на всеки слой и началната енергия при симплектичната схема за УБШР за $T = 20$

Сравнение на симплектичната схема със схемата, запазваща масата:

Представените резултати за симплектичната схема са сравнени с резултатите от Раздел 3.4.1 за консервативната схема, запазваща масата. При двете схеми, за всеки избор на стъпките h и τ , грешката между точното и приближеното решение е от един и същи порядък. Освен това редът на сходимост при симплектичната схема е еднакъв, с този на консервативната схема, запазваща масата.

Получени са идентични резултати по отношение на запазването на дискретната маса и дискретната енергия.

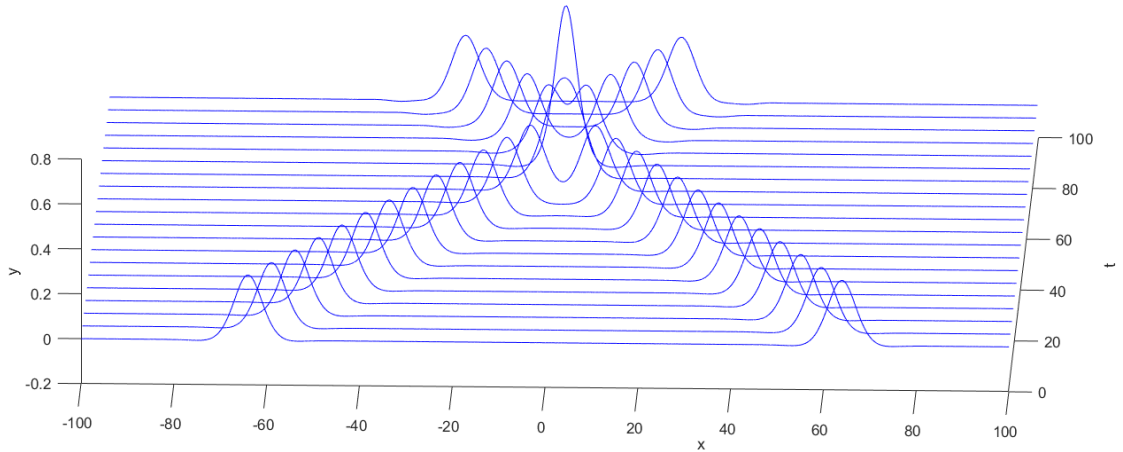
Единствената разлика при двете разглеждани схеми е в продължителността на изчислителния процес. Причината е, че при консервативната схема, запазваща масата апроксимацията на нелинейността зависи от стойностите на решението и на следващия слой по времето. Това налага използването на итерационен метод, а оттам възниква необходимостта от повече време за пресмятане на численото решение. Например при стъпки $h = 0.025$ и $\tau = 0.00025$ изчислителното време при кубична нелинейност е 261 секунди за симплектичната схема и 1030 секунди за консервативната схема.

Задача 2. Взаимодействие на два солитона:

В този пример е разгледано взаимодействието на две вълни, движещи се една срещу друга със скорости $c_1 = 0.95$ и $c_2 = -0.95$. Нека стойностите на коефициентите са $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 1$, $\alpha = 2$, а началните условия са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x + 128, 0; c_1) + \tilde{u}(x - 128, 0; c_2),$$
$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x + 128, 0; c_1) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(x - 128, 0; c_2).$$

При този избор на параметрите УБШР не притежава точно решение. За да бъде получена числено солитонната вълна \tilde{u}_{c_1} , която е използвана като начално условие в (3.40), (3.5), е решено съответното нелинейно ОДУ от четвърти ред по известния метод на Петвиашвили, виж [39] и [38]. При този метод е използвана итерационна процедура със стабилизиращ множител, за да се пресметне дискретната трансформация на Фурие.



Фигура 10: Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = -c_2 = 0.95$, получени чрез симплектичната схема за УБШР при $t \in [0, T]$, $T = 95$

Резултатите от Таблица 19 са получени в случай на кубична нелинейност ($p = 3$), при $x \in [-160, 160]$ и $T = 50$. От тези резултати се вижда, че грешката $\psi_{h/4}^K$ на решението на Задача 2 е $O(h^2 + \tau^2)$.

При същия избор на стъпките точността е $O(10^{-4})$ и се получава втори ред на сходимост на приближеното решение към точното.

Таблица 19: Грешка $\psi_{h/4}^K$, ред на сходимост κ на решението, енергия E_h^K относителна грешка на енергията $relEnergy$ за **Задача 4** при $T = 95$.

h	τ	Error $\psi_{h/4}^K$	κ	Energy E_h^K	relEnergy	sec
0.4	0.004			0.9104188997086	$1.2 * 10^{-7}$	7
0.2	0.002			0.9111294343719	$2.8 * 10^{-8}$	17
0.1	0.001	0.03325668	2.0533	0.9113084341963	$5.7 * 10^{-9}$	67
0.05	0.0005	0.00806807	2.0223	0.9113532638716	$7.3 * 10^{-9}$	295
0.025	0.00025	0.00198869	2.0165	0.9113644447036	$4.6 * 10^{-8}$	1137
0.0125	0.000125	0.00049087	2.0222	0.9113668016217	$5.4 * 10^{-7}$	4610

В колона $relEnergy$ на Таблица 19 е представена относителната грешка на енергията, т. е. точността, с която симплектичната схема запазва дискретната енергия. При задачата за взаимодействие на две вълни максималната точност при запазването на енергията е 10^{-9} , а при Задача 1 (виж Таблица 17) запазването на енергията при същия избор на стъпките е 10^{-10} .

На Фигура 10 е показано разпространението на тези вълни до време $T = 95$.

При най-дребната мрежа $h = 0.0125$ и $\tau = 0.000125$, и времеви интервал $[0, 95]$ за пресмятане на решението са използвани 760000 слоя по времето.

4 Диференчни схеми за Двойно дисперсното уравнение

В тази глава са разработени ефективни числени методи за намиране на решението на Двойно дисперсното уравнение. Три диференчни схеми са конструирани след представяне на разглежданото уравнение във вид на обобщена хамилтонова система. В Раздел 4.2.2 е изследвана *симплектична* диференчна схема, която запазва симплектичността на потока на дискретно ниво. Останалите две схеми са *консервативни*, по-точно в Раздел 4.2.4 е изследвана схема, която запазва точно дискретния момент, а в Раздел 4.2.6 схема, запазваща точно дискретния хамилтониан (енергията).

Доказано е, че трите диференчни схеми запазват точно дискретната маса.

Симплектичната схема и схемата, запазваща момента запазват дискретната енергия приближено с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Числените резултати на разглежданите диференчни схеми, представени във вид на таблици и графики, потвърждават получените теоретични резултати.

Изследването на диференчните схеми е публикувано в списание с импакт фактор [34].

4.1 Постановка на задачата

Разгледана е следната задача на Коши за Двойно дисперсното уравнение (ДДУ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \Delta f(u), \quad (4.1)$$

чието търсено решение $u = u(x, t)$ е дефинирано при $x \in \mathbb{R}$ и $t \in [0, T]$, с начални условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (4.2)$$

Нека

$$u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L_2(\mathbb{R}). \quad (4.3)$$

Тук $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ са дисперсни параметри, нелинейният член има вида $f(u) = \alpha u^p$, където $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, а α е параметър на амплитудата. Всички коефициенти в уравнението (4.1) са константи.

Точното решение на Двойно дисперсното уравнение (4.1) във вид на бягаща вълна $\tilde{u}(x, t; c) = \phi(x - ct)$ се получава по формулата

$$\tilde{u}(x, t; c) = \left[\frac{(c^2 - 1)(p + 1)}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1 - p}{2} \sqrt{\frac{c^2 - 1}{\beta_1 c^2 - \beta_2}} (x - ct) \right) \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad (4.4)$$

където с c е означена скоростта на вълната.

В Глава 2.2.1 уравнението (4.1) е представено в следната обобщена хамилтонова форма:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\delta H}{\delta u} \\ \frac{\delta H}{\delta v} \end{bmatrix},$$

с помощта на спомагателна функция v , дефинирана чрез равенството $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Тук с J е означен антисиметричният оператор

$$J = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \\ (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix},$$

I_d е идентитетът, а хамилтонианът $H = H(u(x, t), v(x, t))$, дефиниран чрез израза

$$H(u(x, t), v(x, t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx, \quad (4.5)$$

представлява пълната енергия на системата, записана в термините на u и v .

По този начин вместо Двойно дисперсното уравнение (4.1) се разглежда следната еквивалентна система

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (4.6)$$

с начални условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{където} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = u_1(x).$$

4.2 Диференчни схеми за Двойно дисперсното уравнение

Теоретичният анализ на солитонното решение (4.4) на Двойно дисперсното уравнение показва, че това решение клони към нула експоненциално при $|x| \rightarrow \pm\infty$. Във връзка с това и поради асимптотичните гранични условия са избрани достатъчно големи числа L_1 и L_2 , такива че решението и неговите производни са много близки до нулата извън интервала $[-L_1, L_2]$.

За простота се предполага, че дискретното решение на Двойно дисперсното уравнение удовлетворява периодични гранични условия.

В интервала $[-L_1, L_2]$ е въведена равномерна мрежа $\{x_i = -L_1 + ih, i = 0, 1, \dots, N\}$ със стъпка h . Нека с $y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ и $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))$ са означени апроксимациите на решението $u(x, t)$ и $v(x, t)$ на системата (4.6) във възлите на мрежата, т. е. $y_i(t) \approx u(x_i, t)$ и $w_i(t) \approx v(x_i, t)$ при $i = 1, \dots, N$.

Заместването на производните в обобщената хамилтонова система (4.6) с крайни разлики, със стъпка $2h$, които имат втори ред на апроксимация води до следната полу-дискретна система от ОДУ за неизвестните компоненти на векторите $y(t)$ и $w(t)$

$$\begin{cases} \frac{dw_i(t)}{dt} = (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} (y_{\hat{x},i} - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i} + f(y)_{\hat{x},i}) \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = w_{\hat{x},i}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Системата (4.7) също е обобщена хамилтонова система с разделящ се хамилтониан $H_h(y(t), w(t))$ и матрица J_h , дефинирани по следния начин

$$H_h(y(t), w(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(w_i^2 + \beta_1 w_{\hat{x},i}^2 + y_i^2 + \beta_2 y_{\hat{x},i}^2 + \frac{2\alpha}{p+1} y_i^{p+1} \right),$$

$$J_h = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} \\ (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицата J_h удовлетворява изискванията за Поасонова скобка от [24], тъй като е произведение на симетричната матрица с постоянни коефициенти $(I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1}$ и на матрицата $\begin{bmatrix} 0 & \partial_{\hat{x}} \\ \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{bmatrix}$, където $S = (S_{ij})_{d \times d}$ е такава, че $S_{i,i+1} = -S_{i+1,i} = 1$ и $S_{i,j} = 0$ за $|i - j| \neq 1$. Следователно с помощта на матрицата J_h се дефинира Поасонова скобка $\{F, G\} = \nabla F^T J_h \nabla G$.

След дискретизация по времето $\{t_k = k\tau, k = 1, \dots, K\}$ със стъпка $\tau = T/K$, към система (4.7) е приложен метода на Störmer-Verlet (известен още като leap-frog метод) и е получена следната дискретна система

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + f(y^k)_{\hat{x},i}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.8)$$

където $y_{\hat{x},i}^k = \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2h}$, а y_i^k и $w_i^{k+\frac{1}{2}}$ са апроксимации на y_i и w_i съответно в момента от време t_k и $t_k + \tau/2$.

Използвани са следните три различни апроксимации на нелинейния член $f(y_i^k)$:

$$\begin{aligned} f(y_i^k) &= f_1(y_i^k) := \alpha(y_i^k)^p, \\ f(y_i^k) &= f_2(y_i^k) := \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \\ f(y_i^k) &= f_3(y_i^k) := \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}. \end{aligned}$$

Това води до конструирането на три диференчни схеми с различни свойства. За да се изследват свойствата на схемите е нужно да се дефинират дискретни инварианти: момент, енергия и маса.

Нека **дискретния момент** $M_h^k = M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ е дефиниран по следния начин:

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) := \sum_{i=1}^N h \left(y_i^k w_i^{k-\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.9)$$

Моментът $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ апроксимира точния момент (1.10) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

За удобство дискретният момент $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ се представя във вида

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = \left(y^k, (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w^{k-\frac{1}{2}} \right).$$

Нека с $H_h^k = H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ е означен **дискретен хамилтониан**, дефиниран с израза

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) := H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right), \quad (4.10)$$

където линейната част на $H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ на $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ се задава с формулата

$$H_{h,L}^k = \frac{1}{2} \|w^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8}\right) \|w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{\beta_2\tau^2}{8} \|w_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1/2}\|^2 + \frac{1}{8} \|y^{k+1} + y^k\|^2 + \frac{\beta_2}{8} \|y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k\|^2. \quad (4.11)$$

Дискретният хамилтониан H_h^k апроксимира непрекъснатият хамилтониан $H(u, v)$, дефиниран чрез формула (2.23), с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Нека с $I_h(t_k)$ е означена **дискретната маса**, която се пресмята по формулата

$$I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k. \quad (4.12)$$

4.2.1 Общи свойства на разглежданите диференчни схеми

Чрез развитие в ред на Тейлър във възлите (x_i, t_k) се показва, че трите разглеждани схеми апроксимират Двойно дисперсното уравнение с локална грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Схемите (4.8) са конструирани върху седем точков шаблон и поради това са некомпактни. Освен това те имат еднаква линейна част. Оттук следва, че притежават едно и също достатъчно условие за устойчивост, формулирано в следната теорема:

Теорема 40. *Линейната схема, отговаряща на (4.8), е устойчива по начални данни и дясна част, ако стъпките τ и h удовлетворяват неравенството*

$$\tau < h \sqrt{\frac{4\beta_1}{(1+\epsilon)(\beta_2 + h^2)}}, \quad (4.13)$$

където ϵ е подходящо малко положително число.

Доказателството на тази теорема следва от теорията за устойчивост на диференчни схеми от [40]. Линейната схема, съответстваща на (4.16), е устойчива, ако е в сила операторното неравенство

$$I_d + \beta_1(-\hat{\Delta}) > \frac{1+\epsilon}{4} (-\hat{\Delta} + \beta_2\hat{\Delta}^2).$$

Достатъчно условие за да е изпълнено горното неравенство е да е в сила неравенство (4.13).

Теорема 41. *Схемите (4.8), с всяка от апроксимациите $f_1(y_i^k)$, $f_2(y_i^k)$ и $f_3(y_i^k)$ на нелинейния член, запазват дискретната маса във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството*

$$I_h(t_k) = I_h(t_0),$$

където $I_h(t_k)$ се дефинира с (4.12).

Доказателство. От периодичните гранични условия за дискретните функции y и w , и от второто уравнение на съответната система получаваме последователно

$$\frac{I_h(t_{k+1}) - I_h(t_k)}{\tau} = \sum_{i=1}^N h \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} = 0.$$

Оттук $I_h(t_{k+1}) = I_h(t_k) = \dots = I_h(t_0)$ и Теорема 41 е доказана. \square

4.2.2 Симплектична схема за Двойно дисперсното уравнение

В този раздел е разгледана диференчна схема (4.8) с апроксимация $f_1(y_i^k)$ на нелинейния член, т. е. схемата

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \alpha ((y_i^k)^p)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.14)$$

След елиминирание на помощната функция w от (4.14) се получава следното трислойно диференчно уравнение за функцията y_i^k :

$$(I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) y_{tt,i}^k - \hat{\Delta} y_i^k + \beta_2 \hat{\Delta}^2 y_i^k - \alpha \hat{\Delta} (y_i^k)^p = 0. \quad (4.15)$$

За удобство при теоретичните изследвания нека с A е означен операторът $A = -\hat{\Delta}$, дефиниран в пространството от мрежови функции с периодични гранични условия и уравнението (4.15) е записано в следната канонична форма

$$(I_d + \beta_1 A) y_{tt}^k + A y^k + \beta_2 A^2 y^k + \alpha A (y^k)^p = 0. \quad (4.16)$$

Теорема 42. *Диференчната схема (4.14) е симплектична относно $\omega^k = dz^k \wedge J_h dz^{k-1}$, $z^k = (u^k, w^{k-\frac{1}{2}})$, т.е. на всеки слой по времето схемата запазва дискретната симплектична структура*

$$\omega^K = \omega^{K-1} = \dots = \omega^1.$$

Доказателство. Системата (4.7) е разделяща се хамилтонова система. Когато е приложен към такива системи методът на Шьормер-Верле е еквивалентен на Лобато Ша-Шб и на симплектичния разделен метод на Рунге-Кута.

Матрицата J_h , зададена с (3.42), е произведение на симетричната матрица с постоянни коефициенти $(I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1}$ и на матрицата $\begin{bmatrix} 0 & \partial_{\hat{x}} \\ \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{bmatrix}$, където $S = (S_{ij})_{d \times d}$ е такава, че $S_{i,i+1} = -S_{i+1,i} = 1$ и $S_{i,j} = 0$ за $|i-j| \neq 1$. От [24] следва, че с помощта на матрицата J_h се дефинира Поасонова скобка $\{F, G\} = \nabla F^T J_h \nabla G$.

Така получените схеми са Poisson integrators (виж [43]), т.е. запазват симплектичността на дискретно ниво. \square

В следващата теорема е изследвано запазването на дискретния момент M_h^k от симплектичната диференчна схема.

Теорема 43. *Решението на симплектичната схема (4.14) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K-1$ следното дискретно равенство*

$$M_h^{k+1} \left(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right) = -\tau \alpha \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k (y_i^k)^p, \quad (4.17)$$

където дискретният момент $M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right)$ е дефиниран с (4.9).

Освен това е в сила оценката

$$\left| M_h^K \left(y^K, w^{K-\frac{1}{2}} \right) - M_h^1 \left(y^1, w^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C h^2 T, \quad (4.18)$$

с константа C , независеща от h и τ .

Доказателство. Нека с R^k е означена разликата

$$R^k := M_h^{k+1} - M_h^k = \sum_{i=1}^N h \left[\left(y_i^{k+1} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^{k+1} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} \right) - \left(y_i^k w_i^{k-\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right].$$

След добавяне и изваждане на израза $\sum_{i=1}^N h \left(y_i^k w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} \right)$ към R^k последователно се получава

$$\begin{aligned} R^k &= \sum_{i=1}^N h (y_i^{k+1} w_i^{k+\frac{1}{2}} - y_i^k w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^{k+1} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} - \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + y_i^k w_i^{k+\frac{1}{2}} - y_i^k w_i^{k-\frac{1}{2}} + \\ &+ \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} - \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}}) = \tau \sum_{i=1}^N h \left(y_{t,i}^k w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{t\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + y_i^k w_{t,i}^{k-\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{t\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Нека $y_{t,i}^k$ се замени с $w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}$. Тогава

$$\begin{aligned} R^k &= \tau \sum_{i=1}^N h \left(w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 w_{\hat{x}\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + y_i^k w_{t,i}^{k-\frac{1}{2}} - \beta_1 y_i^k w_{\hat{x}\hat{x}t,i}^{k-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \tau \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h \beta_1 w_{\hat{x}\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(I_d - \beta_1 \hat{\Delta} \right) w_{t,i}^{k-\frac{1}{2}} = \\ &= \tau \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h \beta_1 w_{\hat{x}\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \alpha ((y_i^k)^p)_{\hat{x}} \right) = \\ &= \tau \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h \beta_1 w_{\hat{x}\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k y_{\hat{x},i}^k - \\ &- \beta_2 \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \alpha \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k ((y_i^k)^p)_{\hat{x}}. \end{aligned}$$

Всички членове без последния се анулират заради периодичните гранични условия. За да се докаже (4.17) нелинейният член се записва по следния начин

$$R^k = \alpha \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k \left((y_i^k)^p \right)_{\hat{x}} = -\alpha \tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k (y_i^k)^p.$$

Оттук

$$M_h^{k+1}(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}}) - M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = -\alpha \tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k (y_i^k)^p, \quad (4.19)$$

с което доказателството на (4.17) е завършено.

За да се получи оценка (4.18) към дясната част на (4.19) се добавя членът

$$\tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} = 0$$

и се оценява изразът R^k :

$$R^k = M_h^{k+1} \left(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right) = \tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k S_i^k, \quad (4.20)$$

където

$$\begin{aligned} S_i^k &:= \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} - \alpha(y_i^k)^p \\ &= \frac{\alpha}{p+1} \left((y_{i+1}^k)^p + (y_{i+1}^k)^{p-1} y_{i-1}^k + \dots + (y_{i-1}^k)^p - (p+1)(y_i^k)^p \right). \end{aligned}$$

От развитието в ред на Тейлър около y_i^k се получава следната оценка

$$|S_i^k| \leq h^2 \frac{\alpha}{p+1} C_{1,i}, \quad (4.21)$$

където константите $C_{1,i}$ зависят от стойностите на функцията u и нейните първа и втора производна, т.е. $C_{1,i} = C_{1,i} \left(\max_{\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})} |u(\xi, t^k)|, \left| \frac{\partial u(\xi, t^k)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial^2 u(\xi, t^k)}{\partial x^2} \right| \right)$. След заместване на оценка (4.21) в (4.20) се получава

$$|R^k| \leq \tau h^2 \frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h |y_{\hat{x},i}^k| C_{1,i} \leq \tau h^2 \frac{\alpha}{p+1} C_2. \quad (4.22)$$

Накрая се сумират изразите (4.20) за $k = 1, 2, \dots, K-1$

$$M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k=1}^{K-1} R^k$$

и се прилага оценка (4.22). Тогава

$$\left| M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |R^k| \leq \sum_{k=1}^{K-1} \tau h^2 \frac{\alpha}{p+1} C_3 \leq K \tau h^2 \frac{\alpha}{p+1} C_4 \leq h^2 T C,$$

което завършва доказателството на оценка (4.18) и на Теорема 43. \square

В следващата теорема е изследвано запазването на дискретния хамилтониан (4.10) от решението на симплектичната схема.

Теорема 44. *Решението на симплектичната схема (4.14) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K$ следните равенства:*

$$H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) = H_{h,L}^{k-1} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right) - \frac{\alpha}{2} \left((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1} \right), \quad (4.23)$$

където $H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ е дефиниран с (4.11).

Освен това, решението запазва приблизително с глобална грешка $O(\tau^2)$ дискретния хамилтониан $H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right)$, дефиниран с (4.10), т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K \left(y^K, w^{K+\frac{1}{2}} \right) - H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq \tau^2 T C, \quad (4.24)$$

с константа C , независеща от h и τ .

Доказателство. Операторът A^{-1} е приложен към двете страни на (4.16) и полученото уравнение

$$(A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{tt}^k + (I_d + \beta_2 A) y^k + \alpha (y^k)^p = 0$$

е умножено скалярно с $\frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2} = \frac{\tau(y_t^k + y_t^k)}{2}$.

Нека y_{tt}^k и y^k са заменени съответно с изразите

$$y_{tt}^k = \frac{y_t^k - y_t^k}{\tau} \quad \text{и} \quad y^k = \frac{y^{k+1} + y^{k-1}}{2} - \frac{\tau}{2} (y_t^k - y_t^k).$$

Тогава

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\left[A^{-1} + \beta_1 I_d - \frac{\tau^2}{4} I_d - \frac{\beta_2 \tau^2 A}{4} \right] y_t^k, y_t^k \right) + \frac{1}{8} (y^{k+1} + y^k, y^{k+1} + y^k) + \\ & + \frac{\beta_2}{8} (A(y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k) = \frac{1}{2} \left(\left[A^{-1} + \beta_1 I_d - \frac{\tau^2}{4} I_d - \frac{\beta_2 \tau^2 A}{4} \right] y_t^{k-1}, y_t^{k-1} \right) + \\ & + \frac{1}{8} (y^k + y^{k-1}, y^k + y^{k-1}) + \frac{\beta_2}{8} (A(y^k + y^{k-1}), y^k + y^{k-1}) - \frac{\alpha}{2} ((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1}). \end{aligned}$$

След преработване на изразите в горното уравнение и заместване на $y_{t,i}^k$ с $w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$ се получава

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (A^{-1} y_t^k, y_t^k) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}) - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} (A w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}) + \\ & + \frac{1}{8} (y^{k+1} + y^k, y^{k+1} + y^k) + \frac{\beta_2}{8} (A(y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k) = \\ & = \frac{1}{2} (A^{-1} y_t^{k-1}, y_t^{k-1}) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (w_{\hat{x}}^{k-\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k-\frac{1}{2}}) - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} (A w_{\hat{x}}^{k-\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k-\frac{1}{2}}) + \\ & + \frac{1}{8} (y^k + y^{k-1}, y^k + y^{k-1}) + \frac{\beta_2}{8} (A(y^k + y^{k-1}), y^k + y^{k-1}) - \frac{\alpha}{2} ((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

След полагане $g^k := A^{-1} y_t^k$ и прилагане на оператора A получаваме $y_t^k = A g^k = -g_{\hat{x}\hat{x}}^k$ и

$$(A^{-1} y_t^k, y_t^k) = (g^k, A g^k) = (g^k, -g_{\hat{x}\hat{x}}^k) = (g_{\hat{x}}^k, g_{\hat{x}}^k).$$

Тъй като $y_t^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$ следва, че $-g_{\hat{x}\hat{x}}^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$, а оттук $-g_{\hat{x}}^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$ и $(A^{-1} y_t^k, y_t^k) = (w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}})$. По този начин $(A^{-1} y_t^k, y_t^k)$ се замества с $(w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}, w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}})$ в (4.25) и доказателството на (4.23) е завършено.

За да се докаже оценка (4.24) е необходимо да се оцени отгоре разликата R^k :

$$R^k := H_h^k (y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) - H_h^{k-1} (y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}}) \quad (4.26)$$

От (4.23) следва, че R^k се представя в следния вид

$$\begin{aligned} R^k &= H_{h,L}^k + \frac{\alpha}{2(p+1)} ((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1) - H_{h,L}^{k-1} - \frac{\alpha}{2(p+1)} ((y^k)^{p+1} + (y^{k-1})^{p+1}, 1) = \\ &= H_{h,L}^{k-1} - \frac{\alpha}{2} ((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1}) - H_{h,L}^{k-1} + \frac{\alpha}{2(p+1)} ((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1) = \\ &= \frac{\alpha}{2(p+1)} \left(\frac{(y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}}{y^{k+1} - y^{k-1}}, y^{k+1} - y^{k-1} \right) - \frac{\alpha}{2} ((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1}) \end{aligned}$$

$$R^k = \frac{\alpha}{2(p+1)} (y^{k+1} - y^{k-1}, (y^{k+1})^p + (y^{k+1})^{p-1} y^{k-1} + \dots + (y^{k-1})^p - (p+1)(y^k)^p). \quad (4.27)$$

Чрез развитие в ред на Тейлър около y^k в израза

$$(y^{k+1})^p + (y^{k+1})^{p-1}y^{k-1} + \dots + (y^{k-1})^p - (p+1)(y^k)^p$$

се получава следната оценка

$$\left| (y^{k+1})^p + (y^{k+1})^{p-1}y^{k-1} + \dots + (y^{k-1})^p - (p+1)(y^k)^p \right| \leq C_1\tau^2. \quad (4.28)$$

Оттук като се приложи неравенството (4.28) в (4.27) се получава

$$|R^k| \leq C_2 \frac{\alpha}{2(p+1)} \tau^3,$$

където константите C_1 и C_2 зависят от $\max_k(|y^k|, |y_t^k|, |y_{tt}^k|)$ при $k = 1, \dots, K$. Следователно грешката $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) - H_h^{k-1}(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}})$ между две последователни стойности на хамилтониана е оценена отгоре от $O(\tau^3)$.

Нека (4.26) се сумира при $k = 1, \dots, K$. По този начин се получава разликата

$$H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k=1}^K R^k,$$

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \sum_{k=1}^K |R^k| < K C \tau^3.$$

От $K\tau^3 = T\tau^2$ следва окончателната оценка

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq C T \tau^2.$$

С това доказателството на Теорема 44 е завършено. \square

4.2.3 Числени резултати за симплектичната схема за Двойно дисперсното уравнение

В този раздел са представени резултати и са изследвани числено свойствата на симплектичната схема за Двойно дисперсното уравнение. За определяне на точността и сходимостта, както и за изследване на поведението на дискретния момент и дискретната енергия са използвани вложени мрежи.

Дискретната енергия H_h^k е определена по формула (4.10), а дискретния момент M_h^k чрез израза (4.9). При всички изчисления дискретната маса I_h^k е пресметната от (4.12).

Числените резултати са получени в случай на квадратична нелинейност, т.е. $f(u) = \alpha u^2$.

Предложените схеми са изследвани върху две типични задачи за Двойно дисперсното уравнение:

Задача 1. Разпространение на солитонна вълна:

Нека стойностите на коефициентите за задача (4.1)-(4.2) са $\alpha = 3$, $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 0.5$, $c = 2$, а началните условия са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = -c\tilde{u}\left(x, \frac{\tau}{2}; c\right).$$

Тук $\tilde{u}(x, t; c)$ е точното решение, зададено с формула (4.4).

Таблица 20: Грешка $\psi_{h\tau}$, ред на сходимост κ и енергия H_h^K при **симплектичната схема (Задача 1)** за ДДУ с $p = 2$ и $T = 20$.

$h = \tau$	Error $\psi_{h\tau}$	κ	H_h^K	$ H - H_h^K $	κ_E	sec
0.2	0.01400684		32.8831331874396	0.05614980		0
0.1	0.00345161	2.0208	32.9250248651775	0.01425812	1.9775	0
0.05	0.00086053	2.0040	32.9357050000242	0.00357799	1.9946	1
0.025	0.00021497	2.0011	32.9383876524840	0.00089533	1.9987	2
0.0125	0.00005374	2.0002	32.9390590683403	0.00022392	1.9995	9
0.00625	0.00001343	2.0008	32.9392267219635	0.00005626	1.9927	53

При тези стойности на коефициентите точната енергия H , пресметната по формула (4.5), приема стойност $H = 32.9392829860694$. Точният момент е $M = -18.9068530144255$.

Задачата е разгледана при $x \in [-100, 100]$ и $T = 20$.

В Таблица 20 са представени данни за грешката $\psi_{h\tau}$ и реда на сходимост κ , които са пресметнати по формули (2.34). От резултатите в колона *Error* $\psi_{h\tau}$ се вижда, че приближеното решение е много близко до точното с грешка $O(10^{-5})$ при стъпки $h = 0.00625$ и $\tau = 0.00625$, и методът е с втори ред на сходимост на приближеното решение към точното. Стойностите в колона κ_E показват, че дискретната енергия H_h^K в крайния момент от време $T = K\tau$ се сходя към точната енергия H с грешка $\psi_E = O(h^2 + \tau^2)$.

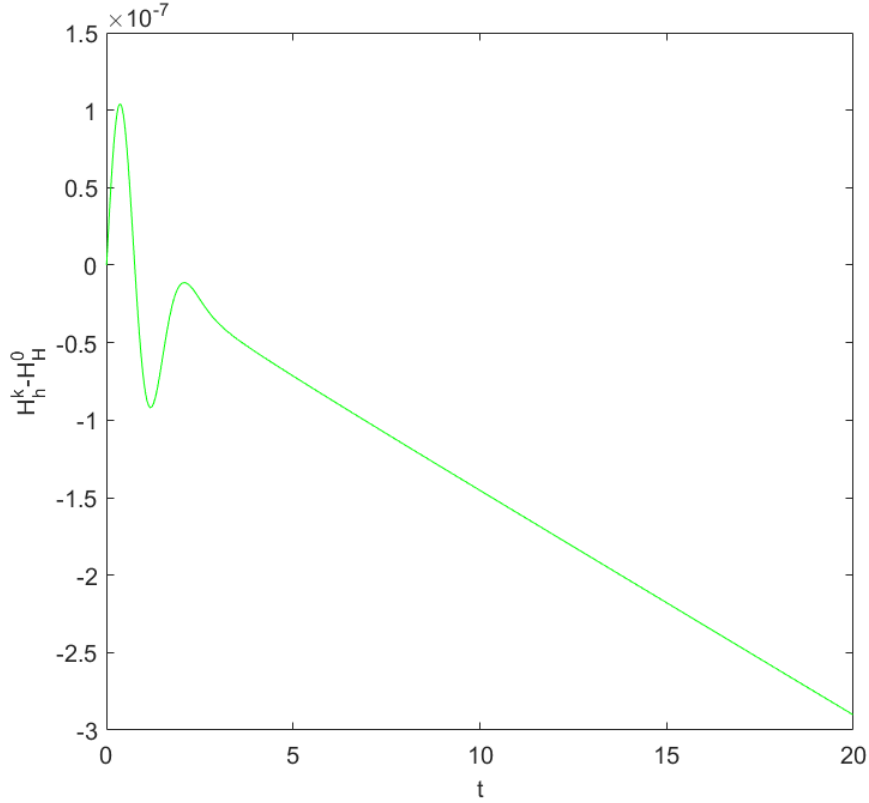
В колона *sec* е показано времето в секунди, необходимо за получаване на приближеното решение.

На Фигура 11 е представена разликата $H_h^k - H_h^0$ между дискретната енергия H_h^k на всеки слой по времето и дискретната енергия H_h^0 в началния момент при $T = 20$ и $h = \tau = 0.00625$. От графиката се вижда, че запазването на началната енергия от симплектичната схема зависи от големината на времевия интервал T . Това е в пълно съответствие с наличието на множителя T в оценка (4.24).

Таблица 21: Числени резултати за масата I_h^K и момента M_h^K при **симплектичната схема (Задача 1)** за ДДУ с $p = 2$ и $T = 20$.

$h = \tau$	I_h^K	relMass	M_h^K	$ M - M_h^K $	κ_M
0.2	8.12403840463597	$8.7 * 10^{-16}$	-18.83692650	0.06992651	
0.1	8.12403840463596	$2.2 * 10^{-16}$	-18.88936152	0.01749150	1.9992
0.05	8.12403840463596	$2.2 * 10^{-16}$	-18.90247949	0.00437352	1.9998
0.025	8.12403840463593	$3.1 * 10^{-15}$	-18.90575959	0.00109342	1.9999
0.0125	8.12403840463594	$6.8 * 10^{-15}$	-18.90657964	0.00027337	1.9999
0.00625	8.12403840463588	$3.5 * 10^{-15}$	-18.90678453	0.00006848	1.9970

В Таблица 21 са показани резултати за дискретната маса I_h^K и дискретния момент M_h^K на последния слой $K = T/\tau$ по времето. Стойностите за относителната грешка на масата *relMass* потвърждават, че симплектичната схема запазва точно дискретната маса (*relMass* достига точност 10^{-16}). В колона $|M - M_h^K|$ е показана разликата между точния момент M и дискретния момент M_h^K . При симплектичната схема дискретният момент M_h^K клони към точния момент M с втори ред на сходимост (виж колона κ_M).



Фигура 11: Разлика $H_h^k - H_h^0$ между енергията на всеки слой и началната енергия при симплектичната схема за ДДУ (Задача 1)

На Фигура 12 се вижда разлика $M_h^k - M_h^1$ на дискретния момент M_h^k на всеки слой по времето и дискретния момент M_h^1 в началото, при $T = 20$ и $h = \tau = 0.00625$. От тази графика и от оценка (4.18) можем да се заключи, че точността, с която се запазва дискретния момент зависи от дължината на времевия интервал T на разглежданата задача.

Задача 2. Взаимодействие на два солитона:

В този пример е изследвано взаимодействието на две вълни, движещи се в противоположни посоки с различни скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$. Нека $\alpha = 3$, $\beta_1 = 1.5$ и $\beta_2 = 0.5$, а началните условия на задачата (4.1)-(4.2) са

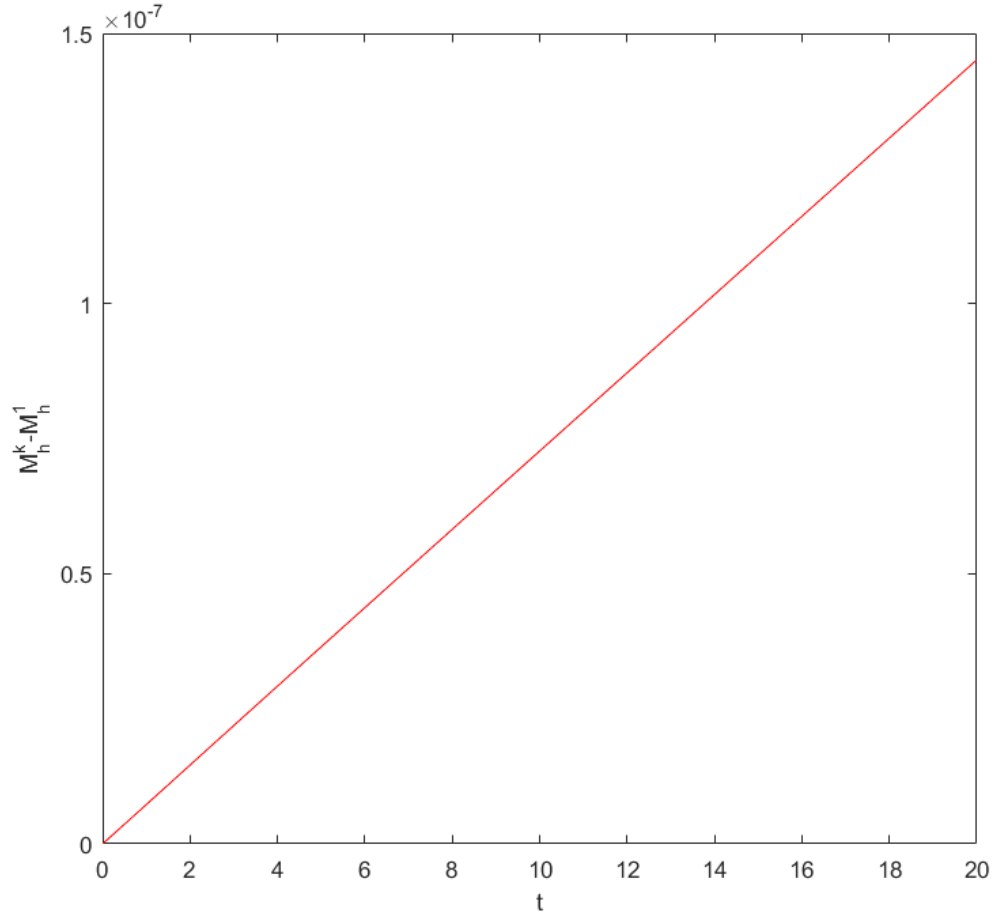
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tilde{u}(x + 30, 0; c_1) + \tilde{u}(x - 40, 0; c_2) \\ v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= -c_1 \tilde{u}\left(x + 30, \frac{\tau}{2}; c_1\right) - c_2 \tilde{u}\left(x - 40, \frac{\tau}{2}; c_2\right). \end{aligned}$$

Численото решение на задачата се търси при $x \in [-160, 160]$ и $T = 50$.

Тъй като разглежданата задача не притежава точно решение, за пресмятане на грешката $\psi_{h/4}^K$ и реда на сходимост κ е използван метод на Рунге.

В Таблица 22 и Таблица 23 са показани резултати, подобни на резултатите от Задача 1. Полученото числено решение е много близко до точното с грешка $O(10^{-4})$ при най-дребната мрежа. От стойностите в колона κ се вижда, че методът е с втори ред на сходимост на приближеното решение към точното.

Дискретната енергия H_h^K и дискретния момент M_h^K също се сходят с втори ред на сходимост към точните енергия H и момент M (виж колони κ_E и κ_M).



Фигура 12: Разлика $M_h^k - M_h^1$ между момента на всеки слой и началния момент при симплектичната схема за ДДУ (Задача 1)

Относителната грешка на енергията $relEnergy$, на масата $relMass$ и на момента $relMom$ са пресметнати по формули (2.37). Точността, с която се запазва дискретната маса I_h е много висока 10^{-15} .

Таблица 22: Грешка $\psi_{h/4}^K$, ред на сходимост κ и енергия H_h^K при симплектичната схема (Задача 2) за ДДУ с $p = 2$ и $T = 50$.

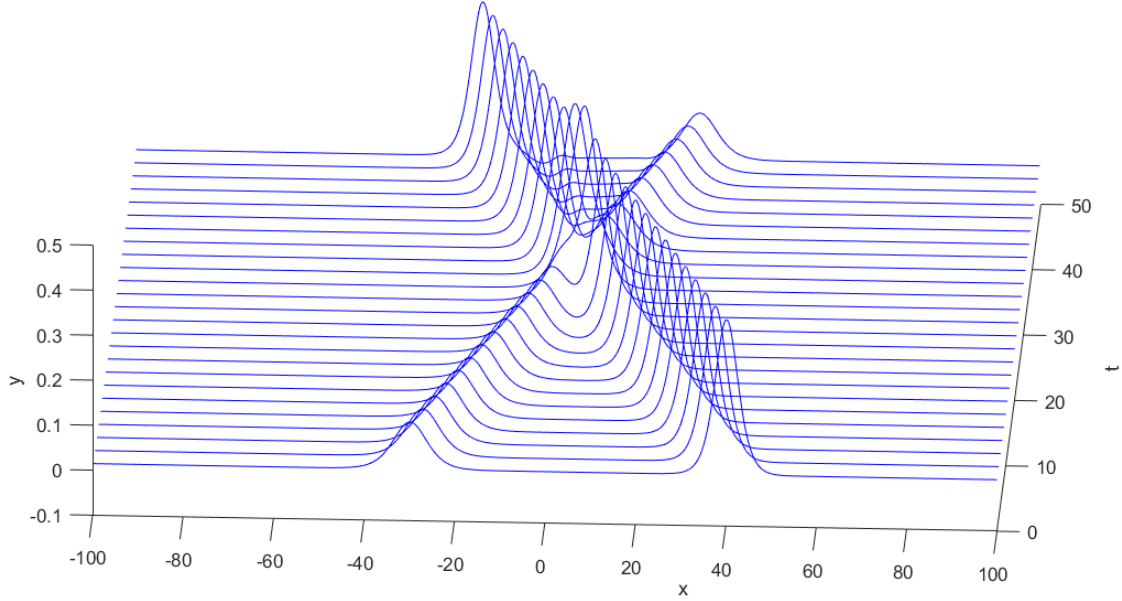
$h = \tau$	Error $\psi_{h/4}^K$	κ	H_h^K	κ_E	relEnergy	sec
0.2			1.028966637880823		$7.9 * 10^{-6}$	0
0.1	0.00721666		1.029644287436932		$2.0 * 10^{-6}$	1
0.05	0.00180639	1.9997	1.029814248721495	1.9953	$5.0 * 10^{-7}$	2
0.025	0.00045173	1.9993	1.029856773907699	1.9988	$1.2 * 10^{-7}$	9
0.0125	0.00011298	1.9995	1.029867405148359	2.0000	$2.9 * 10^{-8}$	62

Получените числени резултати потвърждават теоретичните резултати, които са формулирани и доказани в Теорема 43 и Теорема 44.

На Фигура 13 е показано взаимодействието на две вълни, които са решение на Задача 2. Вълните се движат една срещу друга със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$ при $T = 50$. След срещата им всяка вълна продължава движението си, като запазва първоначалната си форма.

Таблица 23: Числени резултати за масата I_h^K и момента M_h^K при **симплек-
тичната схема (Задача 2)** за ДДУ с $p = 2$ и $T = 50$.

$h = \tau$	I_h^K	relMass	M_h^K	κ_M	relMom
0.2	3.420936232278131	$3.5 * 10^{-15}$	0.695144059576		$2.5 * 10^{-5}$
0.1	3.420936232278141	$5.4 * 10^{-15}$	0.695700486927		$5.8 * 10^{-6}$
0.05	3.420936232278123	$3.8 * 10^{-15}$	0.695840217799	1.9935	$1.4 * 10^{-6}$
0.025	3.420936232278125	$1.8 * 10^{-15}$	0.695875190588	1.9983	$3.5 * 10^{-7}$
0.0125	3.420936232278099	$9.0 * 10^{-15}$	0.695883934919	1.9998	$8.6 * 10^{-8}$



Фигура 13: Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$, получени чрез симплектична схема за ДДУ (Задача 2)

Трябва да се отбележи, че за намиране на решението на Задача 2 във времевия интервал $[0, 50]$ при $\tau = 0.0125$ са използвани 4000 слоя по времето. На всеки слой е решена система със неособена матрица с размери 16001×16001 .

4.2.4 Диференчна схема, запазваща момента за Двойно дисперсното уравнение

В този раздел е разгледана диференчна схема (4.8) с апроксимация $f_2(y_i^k)$ на нелинейния член, т. е. следната схема:

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right)_{\hat{x},i} \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.29)$$

След изключване на помощната функция w , системата (4.29) се записва като ек-

вивалентно диференчно уравнение, съдържащо само дискретната функция y_i^k :

$$(I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) y_{tt,i}^k - \hat{\Delta} y_i^k + \beta_2 \hat{\Delta}^2 y_i^k - \frac{\alpha}{p+1} \hat{\Delta} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right) = 0. \quad (4.30)$$

За теоретичните изследвания е удобно да се положи $Ay = -\hat{\Delta}y$ и схема (4.30) да се представи в следния вид:

$$(I_d + \beta_1 A) y_{tt,i}^k + Ay_i^k + \beta_2 A^2 y_i^k + \frac{\alpha}{p+1} A \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right) = 0. \quad (4.31)$$

Теорема 45. (*Дискретен закон за запазване на момента*) Решението на схема (4.29) запазва дискретния момент $M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}})$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}),$$

където $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ се дефинира с (4.9).

Доказателство. Разгледана е разликата $R^k := \frac{M_h^{k+1}(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}}) - M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})}{\tau}$, т.е.

$$R^k = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N h \left(y_i^{k+1} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k+\frac{1}{2}} - y_i^k (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k-\frac{1}{2}} \right).$$

След добавянето и изваждането на члена $\frac{1}{\tau} y_i^k (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k+\frac{1}{2}}$ се получава

$$\begin{aligned} R^k &= \sum_{i=1}^N h \left(y_{t,i}^k (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k+\frac{1}{2}} + y_i^k (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}_h) w_{t,i}^{k-\frac{1}{2}} \right) = \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) w_i^{k+\frac{1}{2}} + \\ &+ \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right)_{\hat{x},i} \right) = \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_i^{k+\frac{1}{2}} - \\ &- \beta_1 \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x}\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N h y_i^k y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 \sum_{i=1}^N h y_i^k y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right)_{\hat{x}} \end{aligned}$$

Всички членове в горния израз са равни на нула заради периодичността на дискретните функции. Последният член също се анулира поради следните преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right)_{\hat{x},i} &= -\frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h (y_i^k)_{\hat{x}} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right) = \\ &= \frac{-\alpha}{2(p+1)} \sum_{i=1}^N \left((y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Оттук $R^k = 0$ следва, че $M_h^k(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}}) = M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ за всяко $k = 1, 2, \dots, K$, което завършва доказателството на теоремата. \square

Поради Теорема 45 схема (4.29) е наречена **диференчна схема, запазваща момента**.

За удобство на читателите дискретния хамилтониан е дефиниран отново чрез израза

$$H_h^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) := H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right),$$

където линейната част на $H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ се задава с формулата

$$\begin{aligned} H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) = & \frac{1}{2} \left\| w^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left\| w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}} \right\|^2 - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} \left\| w_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1/2} \right\|^2 + \\ & + \frac{1}{8} \left\| y^{k+1} + y^k \right\|^2 + \frac{\beta_2}{8} \left\| y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k \right\|^2. \end{aligned}$$

В следващата теорема е изследвано запазването на дискретния хамилтониан H_h^k от диференчната схема, запазваща момента.

Теорема 46. *Решението на диференчната схема, запазваща момента (4.29) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K$ следните равенства:*

$$\begin{aligned} H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) = & H_{h,L}^{k-1} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right) - \\ & - \frac{\alpha}{2(p+1)} \sum_{i=1}^N h \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \left(y_i^{k+1} - y_i^{k-1} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

където $H_{h,L}^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ е дефиниран с (4.11).

Освен това, решението запазва приблизително с глобална грешка $O(h^2 + \tau^2)$ дискретния хамилтониан $H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right)$, дефиниран с (4.10), т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K \left(y^K, w^{K+\frac{1}{2}} \right) - H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq (h^2 + \tau^2) TC, \quad (4.33)$$

с константа C , независеща от h и τ .

Доказателство. Операторът A^{-1} е приложен към двете страни на уравнение (4.31) и полученото уравнение е умножено скалярно с $\frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2} = \frac{\tau (y_t^k + y_t^k)}{2}$. В резултат на това се получава

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \left((A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{tt}^k, y_t^k + y_t^k \right) + \frac{1}{2} \left((I_d + \beta_2 A) y^k, y^{k+1} - y^{k-1} \right) + \\ & + \frac{\alpha}{2(p+1)} \sum_{i=1}^N h \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \left(y_i^{k+1} - y_i^{k-1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

В горното уравнение y_{tt}^k и y^k се заместват със следните изрази

$$y_{tt}^k = \frac{y_t^k - y_t^k}{\tau} \quad \text{и} \quad y^k = \frac{y^{k+1} + y^{k-1}}{2} - \frac{\tau}{2} \left(y_t^k - y_t^k \right),$$

и след преобразуване на членовете уравнение (4.34) се записва във вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left(y_t^k, y_t^k \right) - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} \left(A y_t^k, y_t^k \right) + \frac{1}{8} \left(y^{k+1} + y^k, y^{k+1} + y^k \right) + \\ & + \frac{\beta_2}{8} \left(A \left(y^{k+1} + y^k \right), y^{k+1} + y^k \right) = \frac{1}{2} \left(A^{-1} y_t^{k-1}, y_t^{k-1} \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left(y_t^{k-1}, y_t^{k-1} \right) - \\ & - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} \left(A y_t^{k-1}, y_t^{k-1} \right) + \frac{1}{8} \left(y^k + y^{k-1}, y^k + y^{k-1} \right) + \frac{\beta_2}{8} \left(A \left(y^k + y^{k-1} \right), y^k + y^{k-1} \right) - \\ & - \frac{\alpha}{2(p+1)} \sum_{i=1}^N h \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \left(y_i^{k+1} - y_i^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Уравнение (4.35) е еквивалентно на (4.32), но е записано само в термините на функцията y . За да получим (4.32) заместваме $y_t^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$ в (4.35). Освен това нека положим $g^k := A^{-1} y_t^k$. Тогава $y_t^k = A g^k = -g_{\hat{x}\hat{x}}^k$ и

$$\left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) = \left(g^k, A g^k \right) = \left(g^k, -g_{\hat{x}\hat{x}}^k \right) = \left(g_{\hat{x}}^k, g_{\hat{x}}^k \right).$$

Получаваме $-g_{\hat{x}\hat{x}}^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$, а оттук $-g_{\hat{x}}^k = w^{k+\frac{1}{2}}$ и $\left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) = \left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$. По този начин заместваме $\left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right)$ с $\left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$ и доказателството на (4.32) е завършено.

За да се докаже оценка (4.33) е необходимо да се оцени отгоре разликата R^k :

$$R^k := H_h^k \left(y^k, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - H_h^{k-1} \left(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.36)$$

За простота нека е разгледан случая с квадратична нелинейност, т.е. $p = 2$. Тогава

$$\begin{aligned} R^k &= H_{h,L}^k + \frac{\alpha}{6} \left((y^{k+1})^3 + (y^k)^3, 1 \right) - H_{h,L}^{k-1} - \frac{\alpha}{6} \left((y^k)^3 + (y^{k-1})^3, 1 \right) = \\ &= -\frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^N h \frac{(y_{i+1}^k)^3 - (y_{i-1}^k)^3}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} (y_i^{k+1} - y_i^{k-1}) + \frac{\alpha}{6} ((y^{k+1})^3 - (y^{k-1})^3, 1) = \\ &= \frac{\alpha}{6} \sum_{i=1}^N h (y_i^{k+1} - y_i^{k-1}) \left((y_i^{k+1})^2 + y_i^{k+1} y_i^{k-1} + (y_i^{k-1})^2 - (y_{i+1}^k)^2 - y_{i+1}^k y_{i-1}^k - (y_{i-1}^k)^2 \right). \end{aligned}$$

Чрез развитие в ред на Тейлър около y_i^k в израза

$$S_i^k := \left(y_i^{k+1} \right)^2 + y_i^{k+1} y_i^{k-1} + \left(y_i^{k-1} \right)^2 - \left(y_{i+1}^k \right)^2 - y_{i+1}^k y_{i-1}^k - \left(y_{i-1}^k \right)^2$$

се получава следната оценка

$$|S_i^k| \leq C_1 (h^2 + \tau^2),$$

откъдето следва, че

$$|R^k| \leq C_2 \tau (h^2 + \tau^2). \quad (4.37)$$

Тук с C_i , $i = 1, 2$ са означени константи, независещи от стъпките h и τ .

След сумиране на (4.36) за $k = 1$ до K и прилагане на оценка (4.37) се получава

$$\left| H_h^K \left(y^K, w^{K+\frac{1}{2}} \right) - H_h^0 \left(y^0, w^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^K |R^k| \leq C_2 K \tau (h^2 + \tau^2) \leq (h^2 + \tau^2) C T.$$

Доказателството на оценка (4.33) и на Теорема 46 е завършено. \square

4.2.5 Числени резултати за схемата, запазваща момента за Двойно дисперсното уравнение

В този раздел са изследвани числено свойствата на схемата, запазваща момента за Двойно дисперсното уравнение. Грешката и редът на сходимост на метода са определени с помощта на вложени мрежи. Също така са установени грешката и редът на сходимост на дискретната енергия и дискретния момент.

Дискретната енергия H_h^k е получена по формула (4.10), дискретния момент M_h^k е пресметнат чрез израза (4.9), а дискретната маса I_h^k е изчислена от (4.12).

Схемата, запазваща момента е изследвана върху две основни задачи за ДДУ: разпространение на единична вълна и взаимодействие на две вълни.

Задача 1. Разпространение на солитонна вълна:

Разгледана е задача (4.1)-(4.2) с квадратична нелинейност $f(u) = \alpha u^2$ и коефициенти $\alpha = 3$, $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 0.5$ и $c = 2$.

Началните условия са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = -c\tilde{u}\left(x, \frac{\tau}{2}; c\right),$$

където $\tilde{u}(x, t; c)$ е означено точното решение, зададено с формула (4.4). При тези стойности на коефициентите точната енергия е $H = 32.9392829860694$, а точния момент приема стойност $M = -18.9068530144255$.

Численото решение се търси при $x \in [-100, 100]$ и $T = 20$.

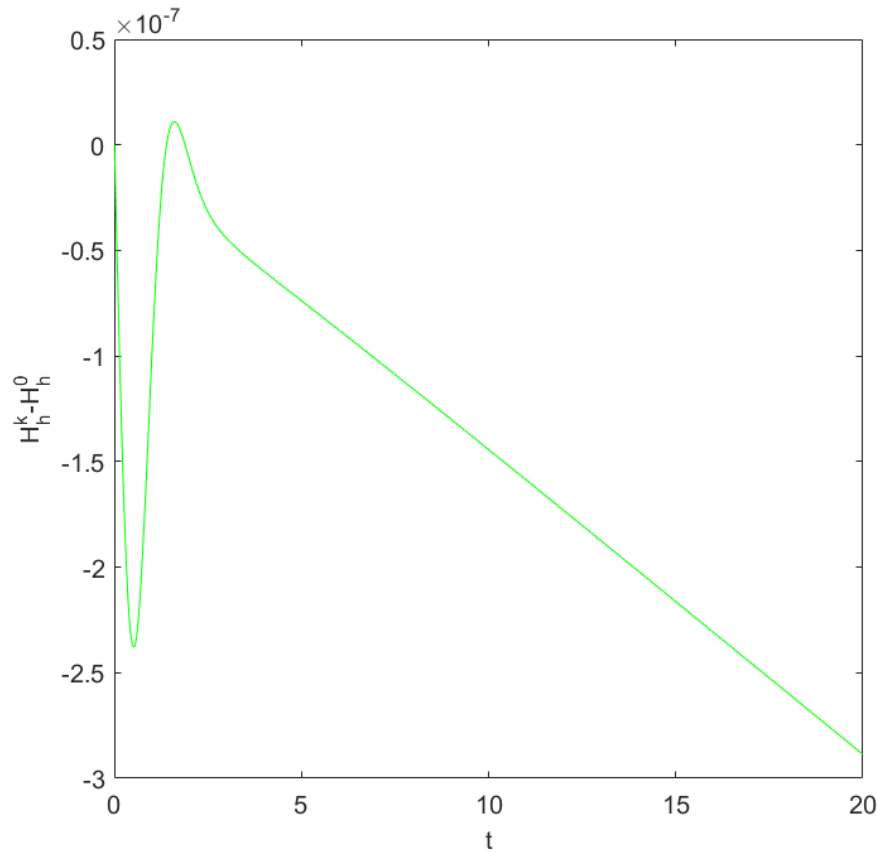
Таблица 24: Грешка $\psi_{h\tau}$, ред на сходимост κ и енергия H_h^K при схемата, запазваща момента (Задача 1) за ДДУ с $p = 2$ и $T = 20$.

$h = \tau$	Error $\psi_{h\tau}$	κ	H_h^K	$ H - H_h^K $	κ_E	sec
0.2	0.03198895		32.880793458985160	0.05848953		0
0.1	0.00801111	1.9975	32.924880590908501	0.01440240	2.0219	0
0.05	0.00200544	1.9981	32.935696013284783	0.00358697	2.0054	1
0.025	0.00050162	1.9993	32.938387091284618	0.00089589	2.0014	2
0.0125	0.00012544	1.9996	32.939059033269331	0.00022395	2.0001	9
0.00625	0.00003137	1.9995	32.939226719759240	0.00005627	1.9929	56

В Таблица 24 са представени данни за грешката $\psi_{h\tau}$ и реда на сходимост κ на решението, пресметнати по формули (2.34). От резултатите в колона *Error $\psi_{h\tau}$* се вижда, че приближеното решение е много близко до точното решение с грешка $O(10^{-5})$ в последният ред на таблицата и методът е с втори ред на точност. Също така е установено, че дискретната енергия H_h^K в крайния момент от време $T = K\tau$ се сходя към точната енергия H с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

На Фигура 14 е показана разликата $H_h^k - H_h^0$ на дискретната енергия H_h^k на всеки слой по времето и началната дискретна енергия H_h^0 при стъпки $h = \tau = 0.00625$ и $T = 20$. Графиката на разликата $H_h^k - H_h^0$ показва, че запазването на дискретната енергия зависи от времето T и потвърждава валидността на оценка (4.33).

В Таблица 25 са представени данни, свързани с дискретната маса I_h^K и дискретния момент M_h^K на K -тия слой по времето. Стойностите в колона κ_M показват втори ред на сходимост на дискретния момент M_h^K на последния слой по времето към точния момент M . Относителната грешка на масата *relMass* достига стойности 10^{-15} и 10^{-16} , т.е. схемата, запазваща момента запазва точно дискретната маса.



Фигура 14: Разлика $H_h^k - H_h^0$ на енергията на всеки слой по времето и началната енергия при схемата, запазваща момента за ДДУ (Задача 1)

Таблица 25: Числени резултати за масата I_h^K и момента M_h^K при **схемата, запазваща момента (Задача 1)** за ДДУ с $p = 2$ и $T = 20$.

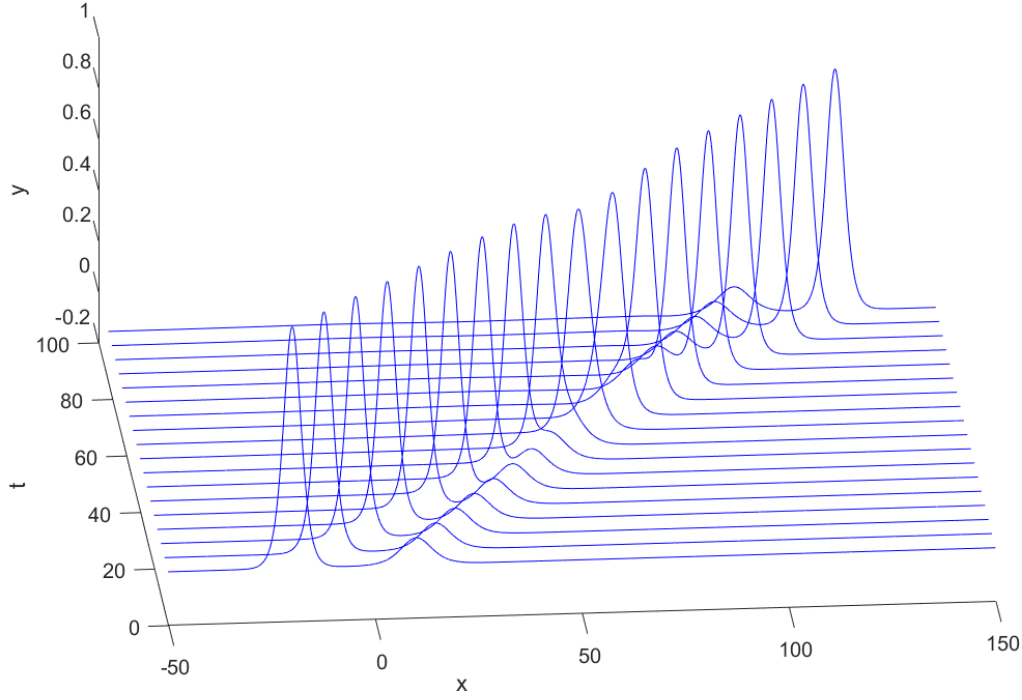
$h = \tau$	I_h^K	relMass	M_h^K	$ M - M_h^K $	κ_M
0.2	8.12403840463597	$8.7 * 10^{-16}$	-18.8372364943	0.06961652	
0.1	8.12403840463599	$2.8 * 10^{-16}$	-18.8893808695	0.01747214	1.9944
0.05	8.12403840463598	$2.0 * 10^{-15}$	-18.9024806987	0.00437232	1.9986
0.025	8.12403840463594	$3.1 * 10^{-15}$	-18.9057596670	0.00109335	1.9996
0.0125	8.12403840463592	$3.5 * 10^{-15}$	-18.9065796447	0.00027337	1.9998
0.00625	8.12403840463587	$4.8 * 10^{-15}$	-18.9067845302	0.00006848	1.9970

Задача 2. Взаимодействие на два солитона.

В този пример е разгледано взаимодействието на две вълни, движещи се в една и съща посока със скорости $c_1 = 1.7$ и $c_2 = 1.1$. Численото решение на задачата се търси при $x \in [-120, 200]$, $t \in [0, 80]$.

Нека коефициентите са $\alpha = 3$, $\beta_1 = 1.5$ и $\beta_2 = 0.5$, а началните условия са

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \tilde{u}(x + 30, 0; c_1) + \tilde{u}(x - 40, 0; c_2) \\
 v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= -c_1 \tilde{u}\left(x + 30, \frac{\tau}{2}; c_1\right) - c_2 \tilde{u}\left(x - 40, \frac{\tau}{2}; c_2\right).
 \end{aligned}$$



Фигура 15: Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.7$ и $c_2 = 1.1$, получени чрез схемата, запазваща момента за ДДУ

Решението на Задача 2 е показано на Фигура 15.

За определяне на грешката и реда на сходимост е използвана вложена мрежа и метод на Рунге.

При стъпки $h = 0.0125$ и $\tau = 0.0125$ грешката е $\psi_{h/4}^K = 0.00349427$, а редът на сходимост κ на приближеното решение към точното е $\kappa = 1.999083$. Относителната грешка на момента е $relMom = O(10^{-9})$. Относителната грешка на енергията достига същата точност $relEnergy = O(10^{-9})$, а относителната грешка на масата е $relMass = 2.5 * 10^{-11}$. По-голямата стойност на относителната грешка на масата, в сравнение със стойностите на $relMass$ в Таблица 27, е следствие от близостта на вълната до границата на разглеждания интервал.

Задача 3. Взаимодействие на две солитонни вълни.

В този пример отново е изследвано взаимодействието на две вълни. За разлика от Задача 2 вълните се движат в противоположни посоки със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$.

Нека $\alpha = 3$, $\beta_1 = 1.5$ и $\beta_2 = 0.5$, а началните условия на задачата (4.1)-(4.2) са

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tilde{u}(x + 30, 0; c_1) + \tilde{u}(x - 40, 0; c_2) \\ v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= -c_1 \tilde{u}\left(x + 30, \frac{\tau}{2}; c_1\right) - c_2 \tilde{u}\left(x - 40, \frac{\tau}{2}; c_2\right). \end{aligned}$$

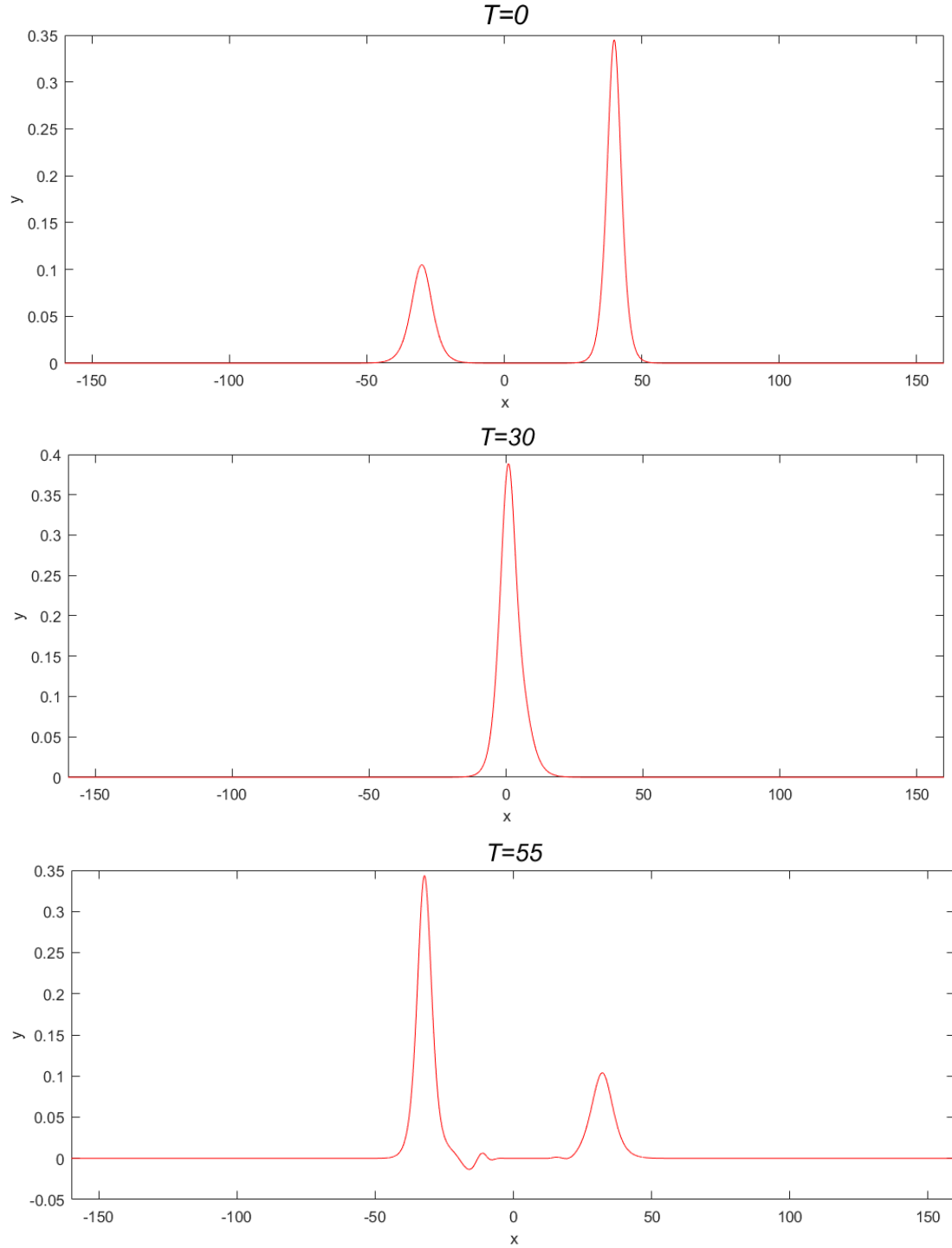
Решението на Задача 3 се търси при $x \in [-160, 160]$ и $T = 50$.

Резултатите от Таблица 26 показват, че численото решение приближава точното решение с грешка $O(10^{-4})$ при стъпки $h = 0.0125$ и $\tau = 0.0125$. Освен това методът е с втори ред на сходимост.

Дискретната енергия H_h^K се сходя към точната енергия с грешка $\psi_E = O(h^2 + \tau^2)$. Запазването на началната енергия е показано в колона $relEnergy$ и достига точност до 10^{-8} .

На Фигура 16 е показано решението на Задача 3 при $T = 0$, $T = 30$ и $T = 55$.

Фигура 16: Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$, получени чрез на схемата, запазваща момента за ДДУ



Стойностите на дискретната маса I_h^K на K -тия слой по времето, $K = T/\tau$, са показани в Таблица 27. Резултатите за относителната грешка на масата $relMass$ потвърждават теоретичните резултати от Теорема 41, че схемата запазваща момента, запазва точно дискретната маса.

В Таблица 27 са показани резултати за дискретния момент M_h^K . От стойностите

Таблица 26: Грешка $\psi_{h/4}^K$ на решението, ред на сходимост κ и енергия H_h^K за схемата, запазваща момента (Задача 3) при $p = 2$ и $T = 50$.

$h = \tau$	Error $\psi_{h/4}^K$	κ	H_h^K	κ_E	relEnergy	sec
0.2			1.028906426148772		$7.9 * 10^{-6}$	0
0.1			1.029632848430297		$2.0 * 10^{-6}$	1
0.05	0.00732004	1.9815	1.029811622332355	2.0227	$5.0 * 10^{-7}$	2
0.025	0.00184795	1.9946	1.029856132303249	2.0059	$1.2 * 10^{-7}$	8
0.0125	0.00046330	1.9986	1.029867245726586	2.0018	$2.9 * 10^{-8}$	62

Таблица 27: Числени резултати за масата I_h^K и момента M_h^K при схемата, запазваща момента (Задача 3) за $p = 2$ и $T = 50$.

$h = \tau$	I_h^K	relMass	M_h^K	κ_M	relMom
0.2	3.420936232278138	$1.4 * 10^{-15}$	0.695126476289		$3.4 * 10^{-15}$
0.1	3.420936232278154	$9.3 * 10^{-15}$	0.695696432805		$8.1 * 10^{-13}$
0.05	3.420936232278125	$3.2 * 10^{-15}$	0.695839226804	1.9969	$3.5 * 10^{-11}$
0.025	3.420936232278110	$2.7 * 10^{-15}$	0.695874944395	1.9992	$9.0 * 10^{-11}$
0.0125	3.420936232278104	$7.7 * 10^{-15}$	0.695883873486	2.0000	$2.3 * 10^{-9}$

в колона κ_M ясно личи, че дискретният момент M_h^K на последния слой по времето, се сходя към точния момент с грешка $O(h^2 + \tau^2)$. Също така решението на схемата запазва началния момент M_h^1 с много висока точност до 10^{-15} (виж колона *relMom*).

4.2.6 Консервативна диференчна схема за Двойно дисперсното уравнение

В този раздел е разгледана диференчна схема (4.8) с апроксимация $f_3(y_i^k)$ на нелинейния член, т.е. схемата

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.38)$$

След изключване на помощната функция w и полагане $Ay = -\hat{\Delta}y$, схема (4.38) се представя в следния вид

$$(I_d + \beta_1 A) y_{tt}^k + Ay^k + \beta_2 A^2 y^k + \frac{\alpha}{p+1} A \left(\frac{(y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}}{y^{k+1} - y^{k-1}} \right) = 0. \quad (4.39)$$

В следващата теорема е формулирано и доказано важно свойство на разглежданата диференчна схема (4.38).

Теорема 47 (Дискретен закон за запазване на енергията). *Решението на диференчната схема (4.38) удовлетворява за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ следното равенство*

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}),$$

където дискретният хамилтониан $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (4.10).

Доказателство. След прилагане на операторът A^{-1} към (4.39) се получава следното уравнение

$$(A^{-1} + \beta_1 I_d) y_{tt}^k + (I_d + \beta_2 A) y^k + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}}{y^{k+1} - y^{k-1}} \right) = 0.$$

Полученото уравнение е умножено скалярно с $\tau \frac{y_t^k + y_t^k}{2} = \frac{y^{k+1} - y^{k-1}}{2}$ и y_{tt}^k и y^k са заместени със следните изрази

$$y_{tt}^k = \frac{y_t^k - y_t^k}{\tau}, \quad y^k = \frac{y^{k+1} + y^{k-1}}{2} - \frac{\tau (y_t^k - y_t^k)}{2}.$$

По този начин се получава уравнението

$$E_{h,L}(y^k) + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) = E_{h,L}(y^{k-1}), \quad (4.40)$$

където

$$E_{h,L}(y^k) := \frac{1}{2} \left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) \left(y_t^k, y_t^k \right) - \frac{\tau^2 \beta_2}{8} \left(A y_t^k, y_t^k \right) - \frac{\tau^2 \beta_3}{8} \left(A y_t^k, A y_t^k \right) + \\ + \frac{1}{8} \left(y^{k+1} + y^k, y^{k+1} + y^k \right) - \frac{\beta_2}{8} \left(y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k, y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k \right).$$

Нелинейният член се представя във вида

$$\left((y^{k+1})^{p+1} - (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right) = \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right) - \left((y^k)^{p+1} + (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right).$$

След заместване на горния израз в уравнение 4.40 се получава следното уравнение

$$E_{h,L}(y^k) + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1 \right) = E_{h,L}(y^{k-1}) + \frac{\alpha}{2(p+1)} \left((y^k)^{p+1} + (y^{k-1})^{p+1}, 1 \right),$$

т.е. дискретният закон за запазване на енергията, записан в термините на решението y .

След прилагане на A към $A^{-1} y_t^k := g^k$ се получава $y_t^k = A g^k = -g_{\hat{x}\hat{x}}^k$ и

$$\left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) = \left(g^k, A g^k \right) = \left(g^k, -g_{\hat{x}\hat{x}}^k \right) = \left(g_{\hat{x}}^k, g_{\hat{x}}^k \right).$$

От $y_t^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$, следва че $-g_{\hat{x}\hat{x}}^k = w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}$ и $-g_{\hat{x}}^k = w^{k+\frac{1}{2}}$. Следователно $\left(A^{-1} y_t^k, y_t^k \right) = \left(w^{k+\frac{1}{2}}, w^{k+\frac{1}{2}} \right)$. Доказателството на Теорема 47 е завършено. \square

И така решението на схема (4.38) запазва дискретната енергия (хамилтониана) на всеки слой по времето. По тази причина схема (4.38) е наречена **консервативна диференчна схема**.

В следващата теорема е изследвано запазването на дискретния момент M_h^k от консервативната диференчна схема.

Теорема 48. *Решението на консервативната схема (4.38) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K-1$ следното дискретно равенство*

$$M_h^{k+1} \left(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right) = -\tau \frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \quad (4.41)$$

където дискретният момент $M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right)$ е дефиниран с (4.9).

Освен това е в сила оценката

$$\left| M_h^K \left(y^K, w^{K-\frac{1}{2}} \right) - M_h^1 \left(y^1, w^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq C(h^2 + \tau^2)T,$$

с константа C , независеща от h и τ .

Доказателство. Нека с R^k е означена разликата

$$R^k := M_h^{k+1} \left(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.42)$$

$$R^k = \sum_{i=1}^N h \left[\left(y_i^{k+1} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^{k+1} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} \right) - \left(y_i^k w_i^{k-\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}} \right) \right].$$

Подобно на доказателството на Теорема 43 след добавяне и изваждане на израза $\sum_{i=1}^N h \left(y_i^k w_i^{k+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} \right)$ и преработване на членовете се получава

$$\begin{aligned} R^k = & \tau \sum_{i=1}^N h w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_i^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h \beta_1 w_{\hat{x}\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}} + \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \\ & + \frac{\alpha}{p+1} \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}. \end{aligned}$$

Всички членове без последния се анулират заради периодичните гранични условия. За да се получи равенство (4.41) нелинейния член се преработва по следния начин

$$R^k = \frac{\alpha}{p+1} \tau \sum_{i=1}^N h y_i^k \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}} = -\frac{\alpha}{p+1} \tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}.$$

Следователно

$$M_h^{k+1}(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}}) - M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = -\frac{\alpha}{p+1} \tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \quad (4.43)$$

с което доказателството на (4.41) е завършено.

За да се получи оценка (48) към дясната част на (4.43) се добавя членът

$$\tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} = 0$$

и се оценява изразът

$$R^k = M_h^{k+1} \left(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}} \right) - M_h^k \left(y^k, w^{k-\frac{1}{2}} \right) = \tau \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k S_i^k, \quad (4.44)$$

където

$$\begin{aligned} S_i^k &:= \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} - \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right) = \\ &= \frac{\alpha}{p+1} \left((y_{i+1}^k)^p + (y_{i+1}^k)^{p-1} y_{i-1}^k + \dots + (y_{i-1}^k)^p - (y_i^{k+1})^p - (y_i^{k+1})^{p-1} y_i^{k-1} - \dots - (y_i^{k-1})^p \right). \end{aligned}$$

Чрез развитие в ред на Тейлър около y_i^k се получава следната оценка

$$|S_i^k| \leq (h^2 + \tau^2) \frac{\alpha}{p+1} C_{1,i}, \quad (4.45)$$

където константите $C_{1,i}$ не зависят от стъпките h и τ , а зависят от стойностите на функциите y и нейните първи и втори производни. Оценка (4.45) е заместена в (4.44) и е получена оценката

$$|R^k| \leq \tau(h^2 + \tau^2) \frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h |y_{x,i}^k| C_{1,i} \leq \tau(h^2 + \tau^2) C_2. \quad (4.46)$$

След сумиране на (4.42) за $k = 1, 2, \dots, K-1$

$$M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) = \sum_{k=1}^{K-1} R^k$$

и прилагане на (4.46) се получава

$$\left| M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |R^k| \leq \sum_{k=1}^{K-1} \tau(h^2 + \tau^2) C_2 \leq K\tau(h^2 + \tau^2) C.$$

От $K\tau = T$ следва окончателната оценка

$$\left| M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq (h^2 + \tau^2) TC,$$

което завършва доказателството на Теорема 43. \square

Важно е да се отбележи, че при консервативната схема апроксимацията на нелинейния член зависи от стойностите на решението y^{k+1} на следващия слой по времето. По тази причина се налага използването на прост итерационен метод $y^{k+1,[s]}$, $s = 0, 1, \dots$, който започва със стойностите на решението на предишния слой, т.е. $y^{k+1,[0]} = y^k$. Итерациите продължават докато разликата между две последователни итерации стане по-малка от предварително зададен толеранс tol . Числените резултати, представени в Глава 4.2.7, са получени при $tol = 10^{-12}$.

4.2.7 Числени резултати за консервативната схема за Двойно дисперсното уравнение

В този раздел са представени резултати и са изследвани числено свойствата на консервативната схема за Двойно дисперсното уравнение. Точността и сходимостта на решението и на дискретните инварианти са определени чрез вложени мрежи.

С H_h^K е означена дискретната енергия на K -тия слой по времето, определена по формула (4.10). Дискретният момент M_h^K е изчислен от (4.9), а дискретната маса I_h^K е пресметната от (4.12).

Числените резултати са получени при квадратична нелинейност, т.е. $f(u) = \alpha u^2$.

Нека коефициентите на задачата са $\alpha = 3$, $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 0.5$ и $c = 2$, а началните условия са

$$u(x, 0) = \tilde{u}(x, 0; c), \quad v\left(x, \frac{\tau}{2}\right) = -c\tilde{u}\left(x, \frac{\tau}{2}; c\right).$$

Тук с $\tilde{u}(x, t; c)$ е означено точното решение на задачата, зададено с формула (4.4).

При тези стойности на коефициентите точната енергия H и точният момент M приемат стойности съответно $H = 32.9392829860694$ и $M = -18.9068530144255$.

Задачата е разгледана при $x \in [-100, 100]$ и $T = 20$.

Коефициентите, началните условия и изчислителния интервал са избрани по същия начин, както при Задача 1 на симплектичната схема и Задача 1 на схемата,

запазваща момента. По тази причина са получени едни и същи стойности за точната енергия и точния момент. Този избор позволява да се направи сравнение между качествените характеристики на трите диференчни схеми за ДДУ.

Таблица 28: Грешка $\psi_{h\tau}$, ред на сходимост κ и енергия H_h^K при **консервативната** схема за ДДУ с $p = 2$ и $T = 20$.

$h = \tau$	Error $\psi_{h\tau}$	κ	H_h^K	$ H - H_h^K $	κ_E	sec
0.1	0.04139573		32.924977278451394	0.01430571		2
0.05	0.01051845	1.9765	32.935702049596919	0.00358094	1.9982	5
0.025	0.00264067	1.9939	32.938387468450657	0.00089552	1.9995	15
0.0125	0.00066092	1.9983	32.939059056844364	0.00022393	1.9996	48
0.00625	0.00016529	1.9994	32.939226721237254	0.00005626	1.9927	220

В Таблица 28 са представени данни за грешката и реда на сходимост, които са пресметнати по формули (2.34). От резултатите в колона *Error $\psi_{h\tau}$* се вижда, че приближеното решение е много близко до точното с грешка $O(10^{-4})$ при стъпки $h = \tau = 0.00625$ и методът е с втори ред на точност. Установено е, че дискретната енергия H_h^K в крайния момент от време $T = K\tau$ се сходя към точната енергия с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.

Таблица 29: Числени резултати за масата I_h^K и момента M_h^K при **консервативната** схема за ДДУ с $p = 2$ и $T = 20$.

$h = \tau$	I_h^K	relMass	M_h^K	$ M - M_h^K $	κ_M
0.1	8.124038404635964	$2.2 * 10^{-16}$	-18.8900185691	0.01683445	
0.05	8.124038404635966	$2.2 * 10^{-16}$	-18.9025215194	0.00433150	1.9585
0.025	8.124038404635938	$1.7 * 10^{-15}$	-18.9057622338	0.00109078	1.9895
0.0125	8.124038404635911	$2.8 * 10^{-15}$	-18.9065798054	0.00027321	1.9973
0.00625	8.124038404635877	$3.5 * 10^{-15}$	-18.9067845403	0.00006847	1.9964

От резултатите в Таблица 29 може да се заключи, че консервативната схема, запазва дискретната маса I_h с много висока точност (виж колона *relMass*). Освен това дискретният момент M_h^K клони към точния момент M с втори ред на сходимост.

Сравнение на трите диференчни схеми за ДДУ:

При трите разгледани схеми са избрани едни и същи параметри, интервал, стъпки и начални условия за Задача 1. Нека са разгледани резултатите, получени при най-дребната мрежа $h = \tau = 0.00625$. По отношение на енергията, масата и момента грешките на сходимост и относителните грешки са от един и същ порядък.

Основните разлики са по отношение на времето, необходимо за пресмятането на численото решение, грешката и реда на сходимост на метода. Изчислителното време при консервативната схема е 220 секунди, а при симплектичната схема и схемата, запазваща момента е съответно 53 секунди и 56 секунди, т.е. приблизително четири пъти по-малко. Причината е, че при консервативната схема за разлика от другите две схеми е използван итерационен метод. При консервативната схема разликата между точното и приближеното решение е $\psi_{h\tau} = O(10^{-4})$, а при останалите две схеми $\psi_{h\tau} = O(10^{-5})$.

4.3 Уравнение на Бусинеск от шести ред с $\beta_3 \rightarrow 0$

Разгледани са Двойно дисперсното уравнение (ДДУ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \Delta f(u) \quad (4.47)$$

и уравнението на Бусинеск от шести ред (УБШР)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \beta_3 \Delta^3 u - \Delta f(u). \quad (4.48)$$

Основните разлики в двете уравнения са допълнителния член $\beta_3 \Delta^3 u$ в УБШР и знака пред нелинейността. Оттук естествено възниква въпросът дали решението на уравнението (4.48) ще клони към решението на (4.47), когато $\beta_3 \rightarrow 0$. И така нека всички останали параметри са фиксирани и на β_3 се задават произволни, клонящи към нула стойности. Тъй като няма формула, по която да се получи решението на УБШР при произволни стойности на параметрите, началните данни са получени чрез *метод на Петвиашвили*.

Дискретната задача е разгледана в крайния интервал $[-L_1, L_2]$, където е въведена равномерна мрежа $\{x_i, i = 0, \dots, N\}$ със стъпка h , а τ е стъпката по времето. С y_i^K е означено решението на УБШР на последния слой $K = T/\tau$ по времето. Нека $\tilde{u}_i, i = 0, \dots, N$ са стойностите на решението на ДДУ във възлите на мрежата $\{x_i\}$, получени по формулата (4.4) при $t = T$.

Нека с ψ_h е означена разликата $\psi_h = \max_i |y_i^K - \tilde{u}_i|$, $i = 0, \dots, N$.

Пример 1. Разгледано е уравнението на Бусинеск от шести ред с кубична нелинейност $p = 3$ и параметри $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\alpha = 1$, $c = 0.9$.

Нека $x \in [-128, 128]$, $T = 20$ и стъпките $h = 0.05$ и $\tau = 0.025$ са фиксирани.

β_3	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...	10^{-15}
ψ_h	$1.0 * 10^{-1}$	$2.5 * 10^{-2}$	$3.1 * 10^{-3}$	$6.8 * 10^{-4}$	$9.6 * 10^{-4}$...	$9.9 * 10^{-4}$

При стойности на β_3 по-малки от 10^{-5} максималната грешка ψ_h е $O(10^{-4})$.

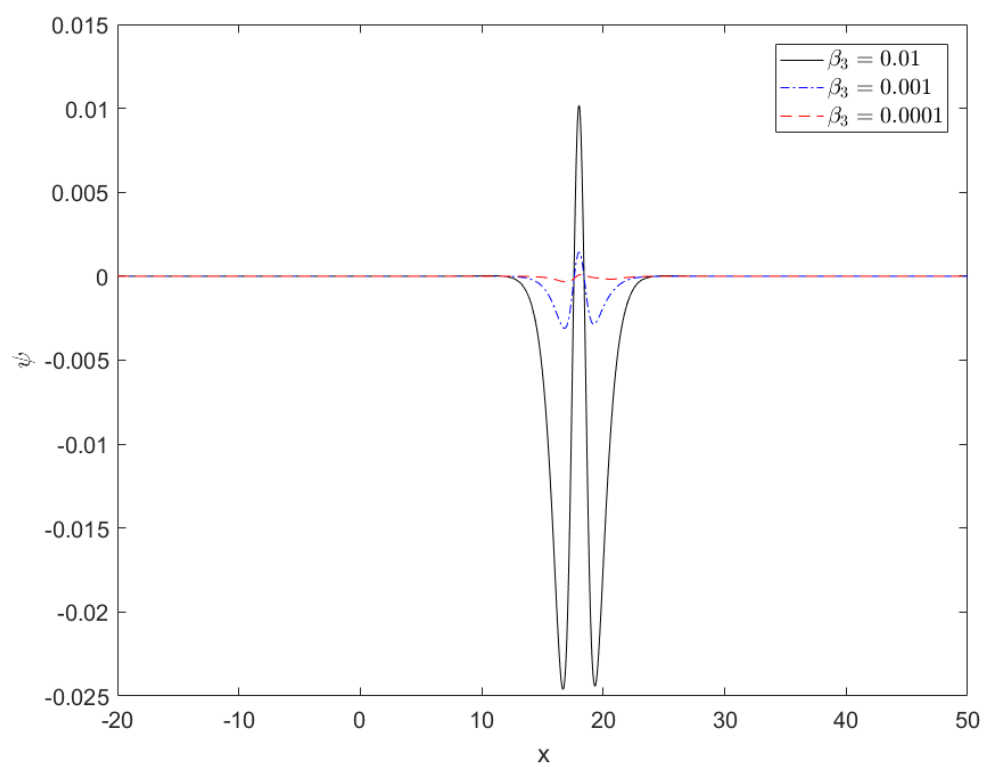
Пример 2. Нека сега стъпките са $h = 0.025$ и $\tau = 0.0125$.

β_3	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...	10^{-15}
ψ_h	$1.1 * 10^{-1}$	$2.4 * 10^{-2}$	$3.1 * 10^{-3}$	$3.4 * 10^{-4}$	$2.4 * 10^{-4}$...	$2.4 * 10^{-4}$

На Фигура 17 е показана графиката на разликата ψ_h между численото решение y^K на УБШР и точното решение на ДДУ за Пример 2.

Пример 3. При стъпки $h = 0.0125$ и $\tau = 0.00625$, и $\beta_3 = 10^{-15}$ грешката е $\psi_h = 6.1 * 10^{-5}$.

От получените резултати може да се направи предположение, че когато $\beta_3 \rightarrow 0$ численото решение на уравнението на Бусинеск от шести ред клони към точното решение на Двойно дисперсното уравнение с грешка $O(h^2 + \tau^2)$.



Фигура 17: Разлика ψ_h между численото решение на УБШР и точното решение на ДДУ за Пример 2

5 Благодарност и посвещение

*Сърдечно благодаря на научния си ръководител
проф. д-р Наталия Кольковска за времето,
което ми отдели, като превърна всяка споделена
минута в повод да разширя и обогатя познанията си!
Безкрайно съм ѝ благодарна за търпението,
прецизността, подкрепата и разбирането, които са
изключителен дар в нашия забързан живот!*

Посвещавам дисертацията на моето семейство!

6 Основни научни приноси

Основните научни приноси на дисертационния труд са:

1. Построяване на диференчна схема ФДС за уравнението на Бусинеск от шести ред (УБШР) с достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h)$. Тази схема има втори ред на точност и запазва точно дискретната енергия.
2. Доказана е сходимостта на приближеното решение на ФДС към точното решение на непрекъснатата задача в дискретни $W_{2,h}^2$ и C_h норми с точност $O(h^2 + \tau^2)$.
3. За уравнението на Бусинеск от шести ред е конструирана и изследвана диференчна схема, чието решение запазва симплектичната структура на дискретно ниво и дискретната маса. При тази схема началната енергия се запазва с грешка $O(\tau^2)$.
4. Конструирани са две диференчни схеми за уравнението на Бусинеск от четвърти ред. Схемите са с втори ред на апроксимация, а условието за устойчивост е $\tau = O(h)$. Едната схема запазва точно симплектичната структура на дискретното решение и дискретната маса, и приближено с глобална грешка $O(h^2)$ дискретния момент. Втората схема запазва точно дискретния момент и дискретната маса, и приближено с грешка $O(h^2 + \tau^2)$ началната дискретна енергия.
5. Всички теоретични резултати са потвърдени при провеждането на редица числени експерименти. Направено е сравнение на качествените характеристики на разглежданите схеми.

7 Декларация

Декларирам, че представената дисертация на тема: "Теоретичен и числен анализ на диференчни схеми за уравнения на Бусинеск" е мой труд. В нейното разработване не са ползвани разработки и чужди публикации в нарушение на авторските им права.

Всички цитиранията на източници на информация, текст и други са обозначени според стандартите.

Резултатите от дисертационното изследване са оригинални и не са взимствани от източници, в които нямам участие.

Подпис:

Литература

- [1] Aydin, A., Karasözen, B.: Symplectic and multisymplectic Lobato methods for the 'good' Boussinesq Equation, *Journal of Mathematical Physics*, (2008).
- [2] Bratsos, A.: A second order numerical scheme for the solution of the one-dimensional Boussinesq equation, *Springer Science*, (2007).
- [3] Brugnano, L., Gurioli, G., Zhang, C: Spectrally accurate energy-preserving methods for the numerical solution of the "good" Boussinesq equation, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, **35** (2019), 1343-1362.
- [4] Casasso, A., Pastrone, F., Samsonov, A.: Travelling waves in microstructure as exact solutions to the 6th order nonlinear equation, *Acoustical Physics* **56** (2010), 871-876.
- [5] Chen, M., Kong, L., Hong, Y.: Efficient structure-preserving scheme for 'good' Boussinesq equation, *Math. Methods Appl. Sci*, **41** (2018), 1743-1752.
- [6] Cheng, K., Feng, W., Gottlieb, S., Wang, C.: A Fourier pseudospectral method for the 'Good' Boussinesq Equation with second order temporal accuracy, *Numerical Methods for PDE* **31** (2014), 20-224.
- [7] Chertock, A., Christov, C., Kurganov, A.: Central-upwind schemes for the Boussinesq paradigm equation. *Computational Science and High Performance Computing IV*, NNFM, 113 (2011), 267–281.
- [8] Christou, M.: Christov-Galerkin expansion for localized solutions in model equations with higher order dispersion, *AIP CP* **946** (2007), 91-98.
- [9] Christou, M., Christov, C.: Fourier-Galerkin method for 2D solitons of Boussinesq equation, *Mathematics and Computers in Simulation* **74** (2007), 82-92.
- [10] Christou, M., Christov, C.: Fourier-Galerkin method for localized solutions of the sixth-order generalized Boussinesq equation, *Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, May 18-22 2000, Atlanta, 121–130.
- [11] Christou, M., Papanicolaou, N.: Kawahara solitons in Boussinesq equations using a robust Christov-Galerkin spectral method, *Applied Mathematics and Computation* **243** (2014), 245-257.
- [12] Christov, C.: An energy-consistent dispersive shallow-water model, *Wave motion* **34** (2001), 161-174.
- [13] Christov, C.: Conservative difference scheme for Boussinesq model of surface water, *Proc.ICFD* **5** (1996), Oxford University Press, 343-349.
- [14] Christov, C., Kolkovska, N., Vasileva D.: On the Numerical Simulation of Unsteady Solutions for the 2D Boussinesq Paradigm Equation, *LNCS* **6046** (2011), 386-394.
- [15] Christov, C., Velarde, M.: Inelastic iteration for Boussinesq solutions, *Intern. J Bifurcation Chaos* **4** (1994), 1095-1112.
- [16] Christov, C., Maugin, G., Velarde, M.: Well-posed Boussinesq paradigm equation with purely spatial higher-order derivatives, *Physics Review E* **54** (1996), 3621-3637.

- [17] Daripa, P., Dash, R.: Weakly non-local solitary wave solutions of a singularly perturbed Boussinesq equation, *Mathematics and Computers in Simulations* **55** (2001), 393-405.
- [18] Day, B., Khare, A., Kumar, C.: Stationary solutions of the fifth order KdV-type equations and their stabilization, *Physics Letters A*, **223** (1996), 449-452.
- [19] Dimova, M., Vasileva, D.: Comparison of two Numerical Approaches to Boussinesq Paradigm Equation, *LNCS* **8236** (2013), 255-262.
- [20] Eshahani, A., Levandovsky, S.: Stability of solitary waves for the generalized higher-order Boussinesq equation, *Y of Dinamics and Differential Equations*, **24** (2012) 391-425.
- [21] Esfahani, A., Farah, L.: Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **385** (2012), 230-242.
- [22] Feng, B., Kawahara, T., Mitsui, T., Chan, Y.: Solitary wave propagation and interactions for a sixth-order generalized Boussinesq equation, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **9** (2005), 1435-1448.
- [23] De Frutos, J., Ortega, T., Sanz-Serna, J.: Pseudospectral method for the "good" Boussinesq equation, *Mathematics of computation* **57** (1991), 109-122.
- [24] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G.: Geometric numerical integration, *Springer*, (2004).
- [25] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G.: Geometric numerical integration by Störmer-Verlet method, *Acta Numerica*, (2003), 399-450.
- [26] Huang, L., Zeng, W., Qin, M.: A new multisymplectic scheme for nonlinear 'good' Boussinesq Equation, *Journal of Computational Mathematics* **21** (2003), No 6, 703-714.
- [27] Kolkovska, N.: Two families of finite difference schemes for a multidimensional Boussinesq equation, *AIP CP* **1301** (2010), 395-403.
- [28] Kolkovska, N.: Convergence of finite difference schemes for a multidimensional Boussinesq equation, *LNCS* **6046** (2011), 469-476.
- [29] Kolkovska, N.: Four level conservative finite difference schemes for Boussinesq paradigm equation, *AIP CP* **1561** (2013), 68-74 .
- [30] Kolkovska, N., Angelow, K.: A Multicomponent Alternating Direction Method for Numerical Solving of Boussinesq Paradigm Equation, *Lecture Notes in Computer Science*, LNCS , **8236** (2013), 371-378
- [31] Kolkovska, N., Dimova, M.: A New Conservative Finite Different Scheme for Boussinesq Paradigm Equation, *Cent. Eur. J. Math.* **10** (3) (2012), 1159-1171.
- [32] Kolkovska, N., Vucheva, V.: Numerical investigation of sixth order Boussinesq equation, *AIP CP* **1895** (2017), 110003.
- [33] Kolkovska, N., Vucheva, V.: Energy preserving finite difference scheme for sixth order Boussinesq equation, *Procedia Engineering*, (2017).
- [34] Kolkovska, N., Vucheva, V.: Invariant preserving schemes for double dispersion equation, *Advances in Difference Equations*, <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2152-y>

- [35] Mehdi, Dehghan, Rezvan, Salehi , A meshless based numerical technique for traveling solitary wave solution of Boussinesq equation, *Appl. Math. Model* **36** (2012), 1939-1956.
- [36] Ortega, T., Sanz-Serna, J.M.: Nonlinear stability and convergence of finite-difference methods for the "good" Boussinesq equation, *Numer. Math.* **58** (1990), 215-229.
- [37] Pani, A., Saranga, H.: Finite element Galerkin method for the "good" Boussinesq equation, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications* **29** (1997), 937-956.
- [38] Pelinovski, D., Stepanyants, Y.: Convergence of Petviashvili's iteration method for numerical approximation of stationary solutions of nonlinear wave equations, *SIAM J. Numer. Analysis* **42** (3) (2004), 1110-1127.
- [39] Petviashvili, V.: Equation of an extraordinary soliton, *Plasma Physics* **2** (1976), 469-472.
- [40] Samarsky, A.: The theory of difference schemes, *Marcel Dekker Inc.*, New York, 2001.
- [41] Самарский А.А., Андреев В.Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, Наука, 1976.
- [42] Sanz-Serna, J., Calvo. M.: Numerical Hamiltonian Problems
- [43] Song, L.: Poisson integrators for Lie-Poisson structures on \mathbb{R}^3 , *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011), 155204 (14pp)
- [44] Vucheva, V., Kolkovska, N.: Convergence analysis of finite difference scheme for sixth order Boussinesq equation, *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics , SJR= <https://doi.org/10.1063/1.5044103>;
- [45] Vucheva, V., Kolkovska, N.: A symplectic numerical method for the sixth order Boussinesq equation, accepted for publication.
- [46] Xu Runzhang, Liu Yacheng: Global existence and nonexistence of solution for Cauchy problem of multi-dimensional double dispersion equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **359** (2009), 739-751.
- [47] Yan, J., Zhang, Z.: New energy-preserving schemes using Hamiltonian boundary value and Fourier pseudospectral methods for the numerical solution of the 'good' Boussinesq equation, *Comput. Phys. Commun* **201** (2016), 33-43.
- [48] Zhang, C., Huang, J., Wang, C., Yue, X.: On the operator splitting and integral equation preconditioned deferred correction methods for the "good" Boussinesq equation, *J.Sci.Comput.* **75** (2018), 687-712.