

# Теория на диференчните схеми

Татяна Черногорова

24 септември 2005 г.

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Предварителни сведения</b>	<b>5</b>
1.1	Изчислителен експеримент . . . . .	5
1.2	Основни понятия в теорията на диференчните схеми . . .	7
<b>2</b>	<b>Принцип за максимума</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Основни задачи на математическата физика</b>	<b>18</b>
3.1	Параболични частни диференциални уравнения . . . . .	18
3.2	Елиптични частни диференциални уравнения . . . . .	23
3.3	Хиперболични частни диференциални уравнения . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Хомогенни диференчни схеми</b>	<b>27</b>
4.1	Хомогенни диференчни схеми за ОДУ от втори ред с променливи коефициенти . . . . .	28
4.2	Консервативни диференчни схеми . . . . .	32
4.3	Сходимост и точност на хомогенните консервативни диференчни схеми за ОДУ от втори ред . . . . .	37
4.4	Хомогенни диференчни схеми върху неравномерни мрежи	47
4.5	Други задачи . . . . .	51
4.5.1	Трета гранична задача . . . . .	51
4.5.2	Задача с условия за периодичност . . . . .	53
4.5.3	Стационарно уравнение на топлопроводността в цилиндрични координати . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Диференчни схеми за елиптични частни диференциални уравнения</b>	<b>60</b>
5.1	Диференчна задача на Дирихле за уравнението на Поасон в правоъгълник и в област със сложна форма . . . . .	60
5.1.1	Диференчна задача на Дирихле в правоъгълник . .	63

Съдържание	3
5.1.2 Диференчна задача на Дирихле в област със сложна форма . . . . .	64
5.2 Устойчивост и сходимост . . . . .	67
5.3 Уравнения с променливи коефициенти . . . . .	72
5.4 Схема с повишен ред на точност за задачата на Дирихле за уравнението на Поасон в правоъгълник . . . . .	73
<b>6 Диференчни схеми за параболични частни диференциални уравнения</b>	<b>76</b>
6.1 Едномерно уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти. Двуслойни схеми . . . . .	76
6.2 Собствени стойности и собствени функции на диференчен оператор . . . . .	80
6.3 Метод на разделяне на променливите за изследване на устойчивостта по начални данни и дясна част . . . . .	85
6.3.1 Устойчивост по начални данни . . . . .	87
6.3.2 Устойчивост по дясната част . . . . .	90
6.4 Устойчивост и сходимост в $C$ -норма . . . . .	94
6.5 Трета гранична задача . . . . .	96
6.6 Трислойни схеми за уравнението на топлопроводността . .	97
6.6.1 Явна трислойна схема на Ричардсон . . . . .	97
6.6.2 Явна трислойна схема на Дюфорт и Франкел (схема „ромб“) . . . . .	98
6.6.3 Неявна симетрична схема с тегло . . . . .	99
6.7 Диференчни схеми за уравнението на топлопроводността с няколко пространствени променливи . . . . .	100
6.7.1 Явна двуслойна схема . . . . .	100
6.7.2 Явна трислойна схема на Ричардсон . . . . .	101
6.7.3 Явна трислойна схема на Дюфорт и Франкел (схема „ромб“) . . . . .	101
6.7.4 Двуслойна схема с едно и също тегло по всяко направление . . . . .	102
6.7.5 Двуслойна схема с различно тегло по всяко направление . . . . .	102
6.8 Хомогенни диференчни схеми за уравнението на топлопроводността с променливи коефициенти . . . . .	103
6.9 Диференчни схеми за квазилинейното уравнение на топлопроводността . . . . .	107

<b>7</b>	<b>Диференчни схеми за хиперболични частни диференциални уравнения</b>	<b>110</b>
7.1	Едномерно уравнение на струната с постоянни коефициенти	110
7.2	Метод на енергетичните неравенства за изследване на устойчивостта . . . . .	112
7.3	Хомогенни диференчни схеми за уравнението на струната с променливи коефициенти . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Икономични диференчни схеми за многомерни задачи</b>	<b>117</b>
8.1	Метод на променливите направления за уравнението на топлопроводността . . . . .	119
8.2	Метод на сумарната апроксимация. Локално-едномерна схема за уравнението на топлопроводността в произволна област . . . . .	125
<b>9</b>	<b>Методи за решаване на мрежови уравнения</b>	<b>133</b>
9.1	Методи на прогонката . . . . .	133
9.1.1	Метод на дясната прогонка . . . . .	133
9.1.2	Метод на лявата прогонка . . . . .	137
9.1.3	Метод на цикличната прогонка . . . . .	137
9.2	Директни и итерационни методи . . . . .	140
9.2.1	Метод на матричната прогонка . . . . .	141
9.2.2	Итерационни методи . . . . .	144

# Глава 1

## Предварителни сведения

### 1.1 Изчислителен експеримент

В последните 25–30 години се заговори за един нов метод за изследване на сложни процеси, допускащи математическо описание, т. е. за така наречения *изчислителен експеримент* (ИЕ). Каква е същността на изчислителния експеримент?

Изучаването на даден процес с помощта на ИЕ се разделя на няколко етапа.

**Първи етап.** Той представлява математическо моделиране на процеса, т. е. указване на съвкупността от търсените и известните променливи и връзките между тях. С изучаването на математическите модели за физически процеси се занимава математическата физика. Уравненията на математическата физика най-често са диференциални уравнения (обикновени или частни), а също така и интегрални и интегро-диференциални уравнения. Обикновено те отразяват някакви закони за запазване на физически величини (маса, количество движение, енергия и др.) и като правило са нелинейни.

След съставянето на математическия модел трябва да се извърши изследването му с помощта на общата теория на диференциалните и интегралните уравнения. Трябва да се установи дали правилно е поставена задачата, достатъчни и непротиворечиви ли са данните, да се намерят условия, при които задачата е разрешима и има единствено решение, да се провери дали решението не може да се напише в явен вид или да се намерят частни решения. Частните решения са важни за получаване на първична информация за ха-

рактера на процеса, а също и като тестови примери за проверка на качествата на числените алгоритми.

**Втори етап.** Построяване на числен метод за приближено решаване на задачата, написване на изчислителния алгоритъм.

**Трети етап.** Програмиране на изчислителния алгоритъм.

**Четвърти етап.** Провеждане на числени пресмятания с помощта на написаната програма.

**Пети етап.** Анализ на получените числени резултати и уточняване (при необходимост) на математическия модел.

Може да се окаже, че математическият модел е много груб — резултатите от пресмятанията не се съгласуват с експерименталните данни, или че моделът е много сложен и че решение с достатъчна точност може да се получи върху по-прости модели. Тогава се започва пак от първия етап, като се минава през всички останали, и т. н.

ИЕ не е еднократно пресмятане по стандартни формули, а пресмятане на серия варианти за различни математически модели.

За численото решаване на задачите на математическата физика най-често се прилагат методът на крайните разлики (МКР), методът на крайните елементи (МКЕ) и методът на граничните елементи (МГЕ). Те свеждат решаването на диференциалните уравнения до решаването на система алгебрични уравнения.

Цел на настоящия курс е изучаването на най-често използваните *диференчни методи* за решаване на типичните задачи на математическата физика. Той е разширение и продължение на курса по ЧМДУ. В *теорията на диференчните схеми* има два главни въпроса:

- построяване на диференчната схема и изследване на априорните характеристики на качеството на схемата, което преди всичко се свежда до изучаване на апроксимацията, устойчивостта и точността на схемата;
- решаване на получените диференчни уравнения с помощта на директни или итерационни методи, избрани от съображения за икономичност на изчислителния алгоритъм.

## 1.2 Основни понятия в теорията на диференчните схеми

За да се напише диференчна схема, апроксимираща дадена диференциална задача, трябва:

1. Да се направи дискретизация на областта, т. е. да се замени областта на непрекъснато изменение на аргумента с област на дискретно изменение.
2. Да се направи дискретизация на задачата, т. е. да се заменят основното диференциално уравнение и допълнителните условия с диференчни аналози.

Към основните понятия в теорията на диференчните схеми се отнасят:

- *Мрежа* — това е множество от точки, в което се търси приближено решение на задачата. Мрежата може да бъде както *равномерна* (точките са равноотдалечени), така и *неравномерна*.
- *Възли* на мрежата се наричат точките на мрежата.
- *Мрежова функция* се нарича всяка функция, дефинирана във възлите на мрежата.
- *Шаблон* на даден възел  $x$  от мрежата, който ще означаваме с  $\Pi(x)$ , се нарича множеството от възела  $x$  и съседните му възли, стойностите на мрежовата функция в които се използват при апроксимирание на производните във възела  $x$ .
- *Околност* на възела  $x$ :  $\Pi'(x) = \Pi(x) \setminus \{x\}$  — това е множеството от точките, включени в шаблона на възела  $x$  без самия възел  $x$ .

Сега ще въведем понятията *апроксимация*, *устойчивост*, *сходимость* и *точност* на диференчните схеми.

Нека е дадена линейната диференциална задача:

$$(1.1) \quad Lu = f(x), \quad x \in G,$$

$$(1.2) \quad lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad \overline{G} = G \cup \Gamma,$$

където  $u(x)$ ,  $f(x)$  и  $\mu(x)$  са елементи на нормираното пространство  $H$  с норма  $\|\cdot\|$ , а  $L$  и  $l$  са линейни диференциални оператори, действащи от

$H$  в  $H$ . Уравнение (1.1) обобщава основните диференциални уравнения, а (1.2) — допълнителните условия (начални и/или гранични) на разглежданата задача. Ще предположим, че решението на задача (1.1), (1.2) съществува и е единствено.

Нека на задача (1.1), (1.2) е съпоставена диференчната задача (схема)

$$(1.3) \quad L_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \omega_h,$$

$$(1.4) \quad l_h y_h = \tilde{\mu}_h, \quad x \in \gamma_h, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

където  $\bar{\omega}_h$  е мрежата от точки, въведена в областта  $\bar{G}$ , функциите  $y_h$ ,  $\varphi_h$  и  $\tilde{\mu}_h$  са мрежови функции, принадлежащи на нормираното пространство  $H_h$  с норма  $\|\cdot\|_h$ , а  $L_h$  и  $l_h$  са линейни диференчни оператори  $H_h \rightarrow H_h$ . Решението на задача (1.3), (1.4) зависи от стъпката на мрежата  $h$  като от параметър. Ще отбележим, че ако мрежата е неравномерна, то под  $h$  трябва да се разбира векторът  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$  с компоненти разстоянията между всеки две последователни точки от мрежата. Ако областта  $G$  е многомерна и  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ , то  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$ , ако мрежата  $\omega_h$  е равномерна по всеки от аргументите  $x_1, x_2, \dots, x_p$ .

Основен интерес в теорията на диференчните схеми представлява оценката на разликата между функциите  $u$  и  $y_h$ . Но те са функции от различни пространства. За тяхното сравняване има две възможности:

а) мрежовата функция  $y_h$ , дефинирана върху мрежата  $\bar{\omega}_h$ , да се додефинира (например чрез линейна интерполация) в цялата област  $\bar{G}$ . Тогава разликата между непрекъснатата функция  $\tilde{y}$ , съответстваща на  $y_h$ , и  $u$  е елемент на  $H$ , т. е.  $\tilde{y} - u \in H$  и близостта им се характеризира с  $\|\tilde{y} - u\|$ ;

б) пространството  $H$  се изобразява в пространството  $H_h$  с помощта на някакъв проектор  $P$ , т. е. на функцията  $u \in H$  се съпоставя  $u_h \in H_h$ ,  $u_h = Pu$  (ако  $u(x)$  е непрекъснатата, полагаме  $u_h(x) = u(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ ; или ако  $u(x)$  е интегрируема, полагаме  $u_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(x) dx$ ). Тогава  $y_h - u_h \in H_h$  и близостта им се оценява с  $\|y_h - u_h\|_h$ . Навсякъде по-нататък ще считаме, че  $H$  и  $H_h$  са нормирани пространства. Ако в  $H$  е въведена някаква норма (най-често ще използваме  $C$  и  $L_2$  норми), то в  $H_h$  се въвежда мрежов аналог на нормата в  $H$ , като при това е естествено да се иска  $\|\cdot\|_h$  да апроксимира  $\|\cdot\|$  в следния смисъл:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|, \quad u \in H.$$



Това условие ще наричаме *условие за съгласуваност* на нормите в  $H$  и  $H_h$ . Тук под  $\|h\|$  разбираме аналог на  $C$ -нормата, т. е.  $\|h\| = \max_i h_i$  (ако мрежата е неравномерна; при равномерна мрежа  $\|h\| = h$ ), или  $\|h\| = (\sum h_i^2)^{1/2}$ , което е аналог на  $L_2$ -нормата. Ако в  $H$  е въведена  $C$ -норма, т. е.

$$\|u\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |u(x)|,$$

аналог на  $C$ -нормата в  $H_h$  е

$$\|y_h\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y_h(x)|.$$

Мрежов аналог на  $L_2$ -нормата

$$\|u\|_{L_2} = \left( \int_{\bar{G}} u^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

е например

$$\|y_h\|_{L_2} = \left( \sum_{\omega_h} h y^2(x) \right)^{1/2}.$$

**Определение.** Под *грешка на диференчната схема* (1.3), (1.4) се разбира мрежовата функция

$$(1.5) \quad z_h = y_h - u_h.$$

Навсякъде по-нататък при сравняване на точното и приближеното решение ще използваме втория подход б), т. е. ще оценяваме нормата на  $y_h - u_h$ , като най-често ще пропускаме индекса  $h$ .

Да видим сега каква задача удовлетворява грешката  $z_h$ . От (1.5) имаме  $y_h = z_h + u_h$  и като заместим в задача (1.3), (1.4) получаваме

$$\begin{aligned} L_h z_h &= \varphi_h - L_h u_h, \\ l_h z_h &= \tilde{\mu}_h - l_h u_h. \end{aligned}$$

**Определение.** Под *грешка на апроксимация* на диференциалното уравнение (1.1) с диференчното уравнение (1.3), пресметната за точното решение на диференциалното уравнение (1.1), се разбира мрежовата функция

$$\psi_h = \varphi_h - L_h u_h.$$

Аналогично се дефинира и грешка на апроксимация за граничното условие (1.2) с диференчното условие (1.4), а именно

$$\nu_h = \tilde{\mu}_h - l_h u_h.$$

Ако се разглеждат тези грешки в една конкретна точка от мрежата, се говори за *локална грешка на апроксимацията*.

Да представим грешката  $\psi_h$  по друг начин. Имаме

$$\begin{aligned}\psi_h &= \varphi_h - L_h u_h = \varphi_h - L_h u_h + (Lu - f)_h = \varphi_h - f_h + (Lu)_h - L_h u_h \\ &= \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)},\end{aligned}$$

където изразът  $\psi_h^{(1)} = \varphi_h - f_h$  е грешката на апроксимация на дясната част на уравнение (1.1), а изразът  $\psi_h^{(2)} = (Lu)_h - L_h u_h$  е грешката на апроксимация на диференциалния оператор  $L$  с диференчния оператор  $L_h$ .

Ще отбележим, че при дефинирането на понятието грешка на апроксимацията навсякъде използваме точното решение на диференциалната задача (1.1), (1.2). Грешка на апроксимацията понякога се дефинира за произволна функция  $v$ ,  $v \in V$ , където  $V$  е класът на достатъчно гладките функции.

**Определение.** Ако  $\|\psi_h^{(2)}\|_h \rightarrow 0$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ , се казва, че диференчният оператор  $L_h$  апроксимира диференциалния оператор  $L$ . Ако  $\|\psi_h^{(2)}\|_h = O(\|h\|^m)$ , се казва, че апроксимацията на  $L$  с  $L_h$  е от  $m$ -ти ред ( $m > 0$ ).

**Определение.** Казва се, че диференчната схема (1.3), (1.4) има  $n$ -ти ред на апроксимация, ако  $\|\psi_h\|_h = O(\|h\|^n)$  и  $\|\nu_h\|_h = O(\|h\|^n)$ .

**Определение.** Казва се, че диференчната схема (1.3), (1.4) е *сходяща* (решението на диференчната схема (1.3), (1.4) е сходящо към решението на диференциалната задача (1.1), (1.2)), ако  $\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h \rightarrow 0$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ . Ако  $\|z_h\|_h = O(\|h\|^n)$ , казва се, че диференчната схема (1.3), (1.4) е сходяща със скорост  $O(\|h\|^n)$  или, че има  $n$ -ти ред на точност.

**Определение.** Казва се, че диференчната задача (1.3), (1.4) е *коректно поставена*, ако за всички достатъчно малки  $h$ ,  $\|h\| \leq h_0$ :

- решението  $y_h$  съществува и е единствено за всички входни данни  $\varphi_h$  и  $\tilde{\mu}_h$  от някакъв допустим клас;

- решението  $y_h$  непрекъснато зависи от  $\varphi_h$  и  $\tilde{\mu}_h$ , като тази зависимост е равномерна относно  $h$ . Последното означава, че съществуват константите  $M > 0$ ,  $N > 0$ , независещи от  $h$ , и такива, че за всички достатъчно малки  $h$ ,  $\|h\| \leq h_0$ , е в сила неравенството

$$\|\bar{y}_h - y_h\|_h \leq M\|\bar{\varphi}_h - \varphi_h\|_h + N\|\bar{\mu}_h - \tilde{\mu}_h\|_h,$$

където  $y_h$  е решение на задача (1.3), (1.4), а  $\bar{y}_h$  — на задача (1.3), (1.4), но с входни данни  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\mu}$  вместо  $\varphi_h$  и  $\tilde{\mu}$ . Това свойство се нарича *устойчивост* на диференчната схема по входни данни.

Ще отбележим, че ако  $y_h$  е решение за задача (1.3), (1.4), то  $y_h$ ,  $\varphi_h$  и  $\tilde{\mu}_h$  зависят от  $h$  както от параметър. Изменяйки  $h$ , получаваме редица от входни данни  $\{\varphi_h, \tilde{\mu}_h\}$  и редица от решения  $\{y_h\}$ . Следователно ние разглеждаме не една диференчна задача, а семейство задачи, зависещи от параметъра  $h$ . Понятието коректност се въвежда за семейство диференчни схеми при  $\|h\| \rightarrow 0$ .

Връзка между понятията апроксимация, устойчивост и сходимост дава следната

**Теорема (Лакс).** *Ако задача (1.3), (1.4) е коректно поставена и апроксимира задача (1.1), (1.2), то тя е сходяща, като при това скоростта на сходимост (редът на точност) се определя от реда на апроксимация.*

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Щом диференчната задача (1.3), (1.4) е коректно поставена, то решението ѝ съществува, единствено е и непрекъснато зависи от входните данни. Ще докажем, че решението на задача (1.3), (1.4) е сходящо към решението на задача (1.1), (1.2), т. е. че

$$\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Имаме

$$\begin{cases} Lu = f \\ lu = f \end{cases}, \begin{cases} L_h y_h = \varphi_h \\ l_h y_h = \tilde{\mu}_h \end{cases}, \begin{cases} L_h z_h = \psi_h \\ l_h z_h = \nu_h \end{cases}, \begin{cases} z_h = y_h - u_h \\ u_h = y_h - z_h \end{cases}, \begin{cases} L_h u_h = \varphi_h - \psi_h \\ l_h u_h = \tilde{\mu}_h - \nu_h \end{cases}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \|z_h\|_h &= \|y_h - u_h\|_h \leq M\|\varphi_h - (\varphi_h - \psi_h)\|_h + N\|\tilde{\mu}_h - (\tilde{\mu}_h - \nu_h)\|_h \\ &= M\|\psi_h\|_h + N\|\nu_h\|_h \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

като скоростта на сходимост се определя от реда на апроксимация.

## Глава 2

# Принцип за максимума

Принципът за максимума играе съществена роля в теорията на диференчните схеми. Той се използва за получаване на оценки в  $C$ -норма.

Нека  $\bar{\omega}$  е мрежа в някаква ограничена област в  $n$ -мерното евклидово пространство,  $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ , където  $\omega$  е множеството на вътрешните възли, а  $\gamma$  — множеството на граничните възли.

**Определение.** Ще казваме, че мрежата  $\bar{\omega}$  е *свързана*, ако за всеки два възела  $\bar{P}, \bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}$ , поне един от които е вътрешен, може да се намери такава последователност от точки  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , така че ако например  $\bar{P} \in \omega$ , то  $P_1 \in \Pi'(\bar{P})$ ,  $P_2 \in \Pi'(P_1), \dots, \bar{\bar{P}} \in \Pi'(P_m)$ , т.е. може да се придвижим от  $\bar{P}$  до  $\bar{\bar{P}}$  само по точки, принадлежащи на околностите на точките  $\bar{P}, P_1, P_2, \dots, P_m$ .

Ще отбележим, че понятието свързана мрежа непосредствено зависи от разглеждания шаблон. Освен това свързаността означава, че всеки граничен възел принадлежи на околността на поне един вътрешен възел.

Да разгледаме задачата

$$(2.1) \quad A(P)y(P) = \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \omega,$$

$$(2.2) \quad y(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma.$$

Ще считаме, че за точките  $P \in \omega$  са изпълнени условията за положителност на коефициентите

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A(P) &> 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad Q \in \Pi'(P), \quad P \in \omega, \\ D(P) &= A(P) - \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q) \geq 0. \end{aligned}$$

Формално, граничното условие (2.2) може да се получи от уравнение (2.1), ако положим  $A(P) = 1$ ,  $\Pi'(P) = \emptyset$  за  $P \in \gamma$ .

По-нататък ще ни бъдат необходими и други записи на уравнение (2.1).

Да означим с:

$$Ly(P) \equiv A(P)y(P) - \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q).$$

Тогава уравнение (2.1) може да се запише във вида:

$$Ly(P) = F(P), \quad P \in \omega.$$

Освен това,

$$\begin{aligned} Ly(P) &\equiv A(P)y(P) - \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)y(Q) \\ &= D(P)y(P) + \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)(y(P) - y(Q)) \end{aligned}$$

и уравнение (2.1) може да се запише и във вида

$$D(P)y(P) + \sum_{Q \in \Pi'(P)} B(P, Q)(y(P) - y(Q)) = F(P).$$

**Теорема 1 (принцип за максимума).** *Нека  $\bar{\omega}$  е свързана мрежа,  $y(P) \neq \text{const}$  върху  $\bar{\omega}$  и са изпълнени условията за положителност на коефициентите (2.3). Тогава ако  $Ly(P) \leq 0$  ( $Ly(P) \geq 0$ ) върху  $\omega$ , следва, че  $y(P)$  не може да приема най-голяма положителна (най-малка отрицателна) стойност във вътрешен възел  $P \in \omega$ .*

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Нека  $Ly(P) \leq 0$  за  $P \in \omega$ . Да допуснем, че  $y(P)$  приема най-голяма положителна стойност във вътрешен възел  $\bar{P} \in \omega$ , така че  $y(\bar{P}) = \max_{\bar{\omega}} y(P) = M_0 > 0$ . Нека  $P_1 \in \Pi'(\bar{P})$ . Тогава  $y(\bar{P}) \geq y(P_1)$ . Тъй като  $y(P) \neq \text{const}$  върху  $\bar{\omega}$  и мрежата е свързана, то съществува такава редица от възли  $P_1, P_2, \dots, P_m, \bar{\bar{P}}$ , за които условията (2.3) са изпълнени и освен това  $y(P_m) = y(\bar{P}) = M_0$  а  $y(\bar{\bar{P}}) < M_0$ ,  $\bar{\bar{P}} \in \Pi(P_m)$ . Тогава

$$\begin{aligned} Ly(P_m) &= D(P_m)y(P_m) + \sum_{Q \in \Pi'(P_m)} B(P_m, Q)(y(P_m) - y(Q)) \\ &\geq D(P_m)y(P_m) + B(P_m, \bar{\bar{P}})(y(P_m) - y(\bar{\bar{P}})) \\ &\geq B(P_m, \bar{\bar{P}})(y(P_m) - y(\bar{\bar{P}})) > 0, \end{aligned}$$

т. е. достигнахме до противоречие с условието на теоремата.

Ще отбележим, че  $\overline{\overline{P}}$  може да е гранична, но ще принадлежи на околността на поне един вътрешен възел.

Второто твърдение на теоремата се доказва аналогично или като се сведе към първото, заменяйки  $y(P)$  с  $(-y(P))$ .

**Следствие 1.** *Нека мрежата  $\overline{\omega}$  е свързана и са в сила условията (2.3). Ако  $Ly(P) \geq 0$  за  $P \in \omega$ ,  $y(P) \geq 0$  за  $P \in \gamma$ , то  $y(P) \geq 0$  за  $P \in \overline{\omega}$ . Аналогично, ако  $Ly(P) \leq 0$  за  $P \in \omega$ ,  $y(P) \leq 0$  за  $P \in \gamma$ , то  $y(P) \leq 0$  за  $P \in \overline{\omega}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Да предположим, че  $y(P_0) < 0$  поне в една вътрешна точка  $P_0 \in \omega$ . Тогава  $y(P)$  трябва да приема най-малка отрицателна стойност в  $\omega$ , защото  $y(P) \geq 0$  на  $\gamma$ . Това е невъзможно по силата на *Теорема 1*, защото  $y(P) \neq \text{const}$  върху  $\overline{\omega}$  ( $y(P_0) < 0$ ,  $y(P)|_\gamma \geq 0$ ). Второто твърдение се доказва аналогично.

**Следствие 2.** *Нека мрежата  $\overline{\omega}$  е свързана. Задачата  $Ly(P) = 0$ ,  $P \in \omega$ ,  $y(P) = 0$ ,  $P \in \gamma$  има само нулевото решение  $y(P) \equiv 0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Условието на теоремата и Следствие 1 дават следните неравенства:

$$\begin{aligned} Ly(P) \geq 0, \quad P \in \omega, \quad y(P) \geq 0, \quad P \in \gamma &\Rightarrow y(P) \geq 0, \quad P \in \overline{\omega}; \\ Ly(P) \leq 0, \quad P \in \omega, \quad y(P) \leq 0, \quad P \in \gamma &\Rightarrow y(P) \leq 0, \quad P \in \overline{\omega}. \end{aligned}$$

Следователно  $y(P) \equiv 0$ .

**Следствие 3.** *Съществува, при това единствено решение на задачата*

$$(2.4) \quad \begin{cases} Ly(P) = F(P), & P \in \omega, \\ y(P) = \mu(P), & P \in \gamma. \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Ако допуснем, че задача (2.4) има две различни решения, то по Следствие 2 ще стигнем до заключението, че те съвпадат. Да докажем сега съществуването на решение. Задача (2.4) представлява система линейни алгебрични уравнения с равен брой уравнения и неизвестни. Щом хомогенната система има само нулевото решение, то детерминантата ѝ е различна от нула. Тогава нехомогенната система има решение, което може да се намери по формулите на Крамер. (Ще отбележим, че от формулите на Крамер следва и единствеността на решението.)

**Теорема 2 (за сравнение).** Нека  $y(P)$  е решение на задачата

$$Ly(P) = F(P), \quad P \in \omega, \quad y(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma,$$

а  $Y(P)$  е решение на задачата

$$LY(P) = \overline{F}(P), \quad P \in \omega, \quad Y(P) = \overline{\mu}(P), \quad P \in \gamma.$$

Тогава от условията

$$|F(P)| \leq \overline{F}(P), \quad P \in \omega, \quad |\mu(P)| \leq \overline{\mu}(P), \quad P \in \gamma$$

следва, че  $|y(P)| \leq Y(P)$  на  $\overline{\omega}$ .

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Да разгледаме функциите  $u(P) = Y(P) + y(P)$  и  $v(P) = Y(P) - y(P)$ .

Те удовлетворяват съответно задачите

$$\begin{aligned} Lu(P) &= \overline{F}(P) + F(P) \geq 0, \quad P \in \omega, \quad u(P) = \overline{\mu}(P) + \mu(P) \geq 0, \quad P \in \gamma, \\ Lv(P) &= \overline{F}(P) - F(P) \geq 0, \quad P \in \omega, \quad v(P) = \overline{\mu}(P) - \mu(P) \geq 0, \quad P \in \gamma. \end{aligned}$$

Като използваме Следствие 1 получаваме, че  $u(P) \geq 0$ ,  $v(P) \geq 0$  за  $P \in \overline{\omega}$ . Оттук веднага следва, че  $|y(P)| \leq Y(P)$ .

Функцията  $Y(P)$  се нарича *мажоранта* за решението  $y(P)$ .

Сега ще намерим оценка за решението на задача (2.4) чрез десните части  $F(P)$  и  $\mu(P)$ . Решението на задача (2.4) може да се представи във вида

$$y(P) = v(P) + w(P),$$

където  $v(P)$  и  $w(P)$  удовлетворяват съответно задачите

$$(2.4a) \quad \begin{cases} Lv(P) = 0, & P \in \omega, \\ v(P) = \mu(P), & P \in \gamma, \end{cases}$$

$$(2.4b) \quad \begin{cases} Lw(P) = F(P), & P \in \omega, \\ w(P) = 0, & P \in \gamma. \end{cases}$$

**Теорема 3.** За решението на задача (2.4a) е в сила оценката

$$\|v\|_{\overline{C}} \equiv \max_{P \in \overline{\omega}} |v(P)| \leq \|\mu\|_{C_\gamma} \equiv \max_{P \in \gamma} |\mu(P)|.$$

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Да разгледаме задачата

$$\begin{cases} LY(P) = 0, & P \in \omega, \\ Y(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, & P \in \gamma. \end{cases}$$

За решението ѝ  $Y(P)$  имаме (по Следствие 1)  $Y(P) \geq 0$ ,  $P \in \bar{\omega}$ . Следователно функцията  $Y(P)$  приема най-голяма положителна стойност в някакъв възел от  $\bar{\omega}$ . Ако  $Y(P) \neq \text{const}$ , този възел не може да бъде вътрешен и  $\|Y\|_{\bar{C}} \equiv \max_{P \in \bar{\omega}} Y(P) = \max_{P \in \gamma} Y(P) \equiv \|\mu\|_{C_\gamma}$ . Ако  $Y(P) = \text{const}$ , то  $Y(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$ . И в двата случая  $\|Y\|_{\bar{C}} = \|\mu\|_{C_\gamma}$ . Оттук и от неравенството  $\|v\|_{\bar{C}} \leq \|Y\|_{\bar{C}}$  следва, че

$$\|v\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

**Теорема 4.** Ако  $D(P) > 0$ ,  $P \in \omega$ , то за решението на задача (2.46) е в сила оценката

$$\|w\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Да разгледаме задачата

$$\begin{cases} LY(P) = |F(P)|, & P \in \omega, \\ Y(P) = 0, & P \in \gamma. \end{cases}$$

За решението ѝ по Следствие 1 имаме  $Y(P) \geq 0$ ,  $P \in \bar{\omega}$ . Нека  $Y(P)$  приема най-голяма стойност във възела  $P_0 \in \omega$ . Тъй като  $Y(P_0) = \|Y\|_C$ , то от уравнението

$$D(P_0)Y(P_0) + \sum_{Q \in \Pi'(P_0)} B(P_0, Q)(Y(P_0) - Y(Q)) = |F(P_0)|$$

следва

$$D(P_0)Y(P_0) \leq |F(P_0)|$$

или

$$Y(P_0) \leq \frac{|F(P_0)|}{D(P_0)} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

От теоремата за сравнение имаме

$$\|w\|_C \leq \|Y\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$



Ако  $D(P) > 0$  не е изпълнено за всички точки  $P \in \omega$ , а имаме

$$(2.5) \quad \begin{aligned} D(P) &= 0, \quad P \in \dot{\omega}, \\ D(P) &> 0, \quad P \in \omega^*, \\ \dot{\omega} \cup \omega^* &= \omega, \\ \dot{\omega} &\text{ — свързана мрежа,} \end{aligned}$$

то е в сила следната

**Теорема 5.** *За решението на задача*

$$\begin{cases} Lw(P) = F(P), & P \in \omega, \\ w(P) = 0, & P \in \gamma. \end{cases}$$

при условията (2.5), където  $F(P) = 0$ ,  $P \in \dot{\omega}$ ,  $F(P) \neq 0$ ,  $P \in \omega^*$  е в сила оценката  $\|w\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_{C^*}$ , където  $\|f\|_{C^*} = \max_{P \in \omega^*} |f(P)|$ .

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Нека  $Y(P)$  е решение на задачата

$$\begin{cases} LY(P) = |F(P)|, & P \in \omega, \\ Y(P) = 0, & P \in \gamma. \end{cases}$$

За  $Y(P)$  имаме  $Y(P) \geq 0$ ,  $P \in \bar{\omega}$  и  $Y(P) \neq 0$ ,  $P \in \bar{\omega}$ . Функцията  $Y(P)$  приема най-голяма положителна стойност в някой възел  $P_0 \in \bar{\omega}$ . Този възел  $P_0 \notin \gamma$ , тъй като  $Y(P) = 0$ ,  $P \in \gamma$ . Възелът  $P_0 \notin \dot{\omega}$ , защото  $\dot{\omega}$  е свързана мрежа,  $F(P) = 0$ ,  $P \in \dot{\omega}$ , т.е. имаме  $LY(P) \leq 0$ ,  $P \in \dot{\omega}$  и от принципа за максимума следва, че  $Y(P)$  не може да приема максимална положителна стойност върху  $\dot{\omega}$ . Следователно  $P_0 \in \omega^*$ . По условие  $D(P_0) > 0$  върху  $\omega^*$ . Повтаряйки разсъжденията от Теорема 4, ще получим исканата оценка.

## Глава 3

# Основни задачи на математическата физика

Ще се спрем на тези от основните задачи на математическата физика, които ще бъдат предмет на разглеждане в настоящия курс.

В природата се различават два типа процеси — *стационарни* (които не се изменят във времето) и *нестационарни* (които се изменят във времето). Погледнато в по-широк план, в природата всичко се мени, но с различна скорост. Ако обаче разглеждаме процесите в даден интервал от време и ако те се менят много бавно, можем да считаме на практика, че те остават неизменни за разглеждания интервал от време. Стационарните процеси се описват преди всичко с уравнения от елиптичен тип, а нестационарните — с уравнения от параболичен и хиперболичен тип. Сега ще се спрем на някои прости задачи, които водят до уравнения от споменатите типове.

### 3.1 Параболични частни диференциални уравнения

Ще се спрем най-напред на линейната задача за разпространение на топлина. Основните характеристики на средата, които се използват при математическото описание на процеса на разпространение на топлината, са:

- *плътност*  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>]. Това е количеството маса в единица обем.
- *специфична топлемост*  $c$  [kcal/kg°C]. Тя отразява различната способност на телата да задържат топлината. Специфичната топ-

лост се определя като количеството топлина, което е необходимо, за да се повиши температурата на единица маса от материала с  $1^\circ\text{C}$ .

- *коэффициент на топлопроводност*  $k$  [ $\text{kcal/m.h}^\circ\text{C}$ ]. Той отразява различната способност на телата да провеждат топлината навътре в своята маса. Коефициентът на топлопроводност се определя като количеството топлина, протичащо за единица време през единица площ, перпендикулярна към направлението на потока топлина, при разлика в температурите на единица дължина от нормалата, равна на  $1^\circ\text{C}$ .

В най-простия случай, т.е. ако средата е хомогенна,  $c = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ . Ако средата не е хомогенна, топлофизичните характеристики зависят от пространствените променливи и евентуално от времето. При високи температури тези коефициенти зависят от температурата, а в някои случаи и от градиента на температурата.

Да разгледаме прът с дължина  $l$ , топлоизолиран по околната си повърхнина и толкова тънък, че във всеки момент от времето да можем да считаме, че температурата във всички точки от дадено напречно сечение е една и съща. Нека в краищата на пръта се поддържат постоянни температури  $u_1$  и  $u_2$ ,  $u_1 > u_2$ . Да разгледаме процеса на разпределение на температурата в пръта. Този процес може да бъде описан с функцията  $u(x, t)$ , която представлява температурата в сечение с координата  $x$  в момента от времето  $t$ . Нашата цел ще бъде да намерим уравнението, което функцията  $u(x, t)$  удовлетворява. За тази цел най-напред ще формулираме физическите закономерности, които са свързани с разпространението на топлината.

- *Закон на Фурие*. Ако температурата на едно тяло е различна в различните точки, в него възникват топлинни потоци, насочени от местата с по-висока температура към местата с по-ниска температура. Величината

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

се нарича *плътност на топлинния поток* и е равна на количеството топлина, което протича за единица време през единица площ. Тогава количеството топлина, което протича през сечение на пръта с площ  $S$  за единица време, се дава с формулата

$$Q_1 = -Sk \frac{\partial u}{\partial x}.$$

На този закон може да се придаде и интегрална форма. Ако разглеждаме количеството топлина, протичащо за интервала от време  $(t_1, t_2)$  през сечение с координата  $x$ , то

$$(3.1) \quad Q'_1 = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt.$$

- Количеството топлина, което е необходимо, за да повиши температурата си едно еднородно тяло с  $\Delta u$  градуса, е равно на

$$Q_2 = cm\Delta u = c\rho V\Delta u = c\rho S\Delta x\Delta u,$$

където  $m$  е масата на тялото, а  $V$  — обемът му. Ако изменението на температурата е различно върху различните участъци от пръта или ако прътът не е еднороден, то

$$(3.2) \quad Q'_2 = S \int_{x_1}^{x_2} c\rho\Delta u dx.$$

- Вътре в пръта може да се отделя (или поглъща) топлина. Този процес се характеризира с плътността на топлинните източници (консуматори)  $F(x, t)$  в точката  $x$  в момента от време  $t$ . Да разгледаме случая, когато имаме източници на топлина. В резултат от тяхното действие върху участъка от пръта  $(x_1, x_2)$  за време  $(t_1, t_2)$  се отделя количество топлина

$$(3.3) \quad Q'_3 = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt.$$

Уравнението на топлопроводността се получава, като се направи баланс на топлината за някакъв участък от пръта (в случая интервала  $(x_1, x_2)$ ) за някакъв интервал от време (в случая  $(t_1, t_2)$ ). Като приложим закона за запазване на енергията и използваме (3.1), (3.2) и (3.3), може да запишем равенството

$$\begin{aligned} -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=x_1} dt - \left( -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=x_2} dt \right) \\ + S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S[u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx, \end{aligned}$$

т. е. количеството топлина, което влиза през сечение  $x = x_1$ , минус количеството топлина, което излиза през сечение  $x = x_2$ , плюс количеството

топлина, което се отделя от източниците, отива за нагряване на тялото. Оттук

$$(3.4) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=x_1} \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} c\rho[u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx,$$

което представлява интегрална форма на уравнението на топлопроводността. Може да се докаже, че ако  $u(x, t)$  удовлетворява (3.4), то  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  съществуват. Да приложим към (3.4) теоремата за средните стойности при интегралите. Получаваме равенството

$$\left[ k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=x_1} \right] \Big|_{t=t_3} \Delta t + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = c\rho[u(x, t_2) - u(x, t_1)] \Big|_{x=x_3} \Delta x,$$

където  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Оттук с помощта на теоремата за крайните нараствания получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \Big|_{x=x_5}^{x=x_3} \Delta t \Delta x + F(x_4, t_4) \Delta x \Delta t = \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_5}^{t=t_3} \Delta t \Delta x,$$

където  $t_3, t_4, t_5 \in (t_1, t_2)$ ,  $x_3, x_4, x_5 \in (x_1, x_2)$ . Като разделим на  $\Delta t \Delta x$ , получаваме

$$\left( c\rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_3}^{x=x_5} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_5}^{x=x_3} + F(x_4, t_4).$$

При  $x_1, x_2 \rightarrow x$  и  $t_1, t_2 \rightarrow t$  получаваме уравнението на топлопроводността в диференциална форма

$$(3.5) \quad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t).$$

Ако  $c, \rho$  и  $k$  са константи, уравнението на топлопроводността може да се запише във вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

За да се отдели единствено решение на уравнението на топлопроводността, трябва към уравнение (3.5) да се присъединят допълнителни условия — в случая начални и гранични. Началното условие е едно и има вида

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l].$$

Граничните условия могат да бъдат различни в зависимост от температурните режими в двата края на пръта. Най-често се разглеждат следните три основни гранични условия:

1. На краищата на пръта  $x = 0$  и  $x = l$  е зададена температурата, която се поддържа:

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

където  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  са дефинирани в интервала  $[0, T]$ , в течение на който се изучава процесът.

2. Ако е зададена стойността на топлинния поток  $Q$ , протичащ през единия край на пръта, например  $x = l$ , т. е. имаме

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t),$$

то получаваме условието

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t), \quad \nu(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}.$$

3. Нека на десния край на пръта се осъществява топлообмен с околната среда (с температура  $u_{\text{ср}}$ ) по закона на Нютон. Като използваме двата израза за топлинния поток, протичащ през сечение  $x = l$ ,

$$Q_1 = -k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t), \quad Q_2 = h(u(l, t) - u_{\text{ср}}),$$

получаваме математическата формулировка на граничното условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\alpha(u(l, t) - u_{\text{ср}}), \quad \alpha = \frac{h}{k},$$

където  $\alpha$  се нарича *коэффициент на конвективен топлообмен*. Обикновено това условие се записва във вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \alpha u(l, t) = \mu_1, \quad \mu_1 = \alpha u_{\text{ср}}.$$

При  $x = 0$  аналогичното гранично условие се записва във вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha (u(0, t) - u_{\text{ср}}).$$

Ще отбележим, че граничните условия при  $x = 0$  и  $x = l$  могат да бъдат от различен тип, откъдето можем да получим голям брой различни гранични задачи.

Ще отбележим още нещо. Ако средата е нееднородна и коефициентите на уравнението са прекъснати функции, то интервалът  $(0, l)$ , в който се търси решението, се разделя от точките на прекъсване на коефициентите на няколко подинтервала, във вътрешността на които функцията удовлетворява уравнението на топлопроводността (3.5), а в точките на прекъсване — някакви условия, наречени *условия за свързване*. В най-простия случай тези условия се свеждат до непрекъснатост на температурата и топлинния поток

$$u(x_i^+, t) = u(x_i^-, t), \quad k_+ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_i^+, t)} = k_- \frac{\partial u}{\partial x}(x_i^-, t),$$

където  $x_i$  са точки на прекъсване на коефициентите.

В многомерния случай уравнението на топлопроводността изглежда по следния начин:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x, t),$$

$$x = x(x_1, x_2, \dots, x_p), \quad \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right).$$

Ако коефициентите зависят от температурата, получаваме квазилинейно уравнение на топлопроводността; ако зависят и от  $\operatorname{grad} u$ , получаваме нелинейно уравнение.

### 3.2 Елиптически частни диференциални уравнения

Ако процесът на топлопредаване е стационарен, т.е. не зависи от времето, се установява разпределение на температурата  $u(x)$ , което не се мени във времето и удовлетворява в  $p$ -мерния случай уравнението (ако  $k = \text{const}$  — на Лаплас)

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0.$$

Ако има източници на топлина, получаваме нехомогенното уравнение (на Поасон, ако  $k = \text{const}$ )

$$\text{div}(k \text{ grad } u) = -F,$$

където  $F$  е плътността на топлинните източници. Ако имаме източници или консуматори на топлина, пропорционални на температурата (при екзо- и ендотермични процеси), уравнението добива вида

$$(3.6) \quad \text{div}(k \text{ grad } u) - qu = -F,$$

като при  $q > 0$  имаме консуматор, а при  $q < 0$  — източник на топлина.

Към така формулираните уравнения се поставят гранични условия — от един от разгледаните вече три типа. Основното уравнение се разглежда в крайната област  $G \in \mathbb{R}^p$ , а граничните условия — по нейната граница  $\Gamma$ . Тогава вместо  $\frac{\partial u}{\partial x}$  участва  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ , където  $\vec{n}$  е вътрешната или външната нормала към границата  $\Gamma$ .

При  $p = 1$  уравнението (3.6) е обикновено диференциално уравнение от втори ред и има вида

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -F(x)$$

при  $k = k(x)$  и  $F = F(x)$ .

### 3.3 Хиперболични частни диференциални уравнения

Най-често частните диференциални уравнения от хиперболичен тип се срещат във физически задачи, свързани с процесите на трептене — трептене на струна, прът, мембрана, както и в акустиката и хидродинамиката. Ще се спрем на най-простата линейна задача за малки напречни трептения на струна.

Да разгледаме струна с дължина  $l$ . Всяка точка от струната се характеризира с абсцисата си  $x$ . Ще предполагаме, че преместването на струната лежи в една равнина  $(x, u)$  и че векторът на преместването  $\vec{u}$  е перпендикулярен във всеки момент на оста  $x$ . Тогава процесът на трептене на струната (т. е. извършване на движения около равновесното ѝ положение, което съвпада с оста  $x$ ) може да се опише с функцията  $u(x, t)$ , характеризираща вертикалното преместване на струната. Ще



разглеждаме струната като еластична нишка, която не оказва съпротивление при огъване. Отново, като се използват различни физически закони и подходът, който приложихме при извеждане на уравнението на топлопроводността, се получава уравнението на напречно трептяща струна (едномерното вълново уравнение)

$$(3.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l,$$

където  $a$  е скоростта на разпространение на трептенията, а  $f(x, t)$  е плътността на силата, която действа на струната и е насочена по оста  $u$ . Ако такава сила липсва, ( $f(x, t) \equiv 0$ ), уравнение (3.7) описва свободно трептене на струната.

Да видим как се задават и какво описват допълнителните условия, които осигуряват единственост на решението на уравнение (3.7).

1. Ако краищата на струната са закрепени, то се задават граничните условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Ако краищата на струната се движат по някакъв закон, то граничните условия приемат вида

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

където  $\mu_1$  и  $\mu_2$  са зададени функции на аргумента  $t$ .

2. Ако краят  $x = 0$  се движи по определен закон  $\mu(t)$ , а при  $x = l$  е зададена сила  $\nu(t)$ , то граничните условия изглеждат така:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t).$$

3. Ако краят  $x = 0$  е еластично закрепен и отклонението му от началното положение се дава с функцията  $\theta(t)$ , то граничното условие има вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha[u(0, t) - \theta(t)],$$

където  $\alpha$  е *коэффициент на еластично закрепване*.

Процесът на трептене на струната зависи от началното ѝ положение и началното разпределение на скоростите:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x),$$

където  $\varphi$  и  $\psi$  са зададени функции. Следователно за уравнението за напречно трептене на струната се задават две начални условия.

Двумерното вълново уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F$$

описва малки напречни колебания на мембрана.

Тримерното вълново уравнение описва процеса на разпространение на звука в еднородна среда и електромагнитните вълни в еднородна непроводяща среда.

Най-общо казано, ще разглеждаме уравнението

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f,$$

където  $\rho$  е плътността, а  $k$  е коефициент, свързан с трептящата среда. В едномерния и двумерния случай това е силата на опъване (коефициент на опъване).

## Глава 4

# Хомогенни диференчни схеми

Най-общо казано, за всяка диференциална задача може да се построят безбройно много диференчни схеми. Да разгледаме, например, най-простото ОДУ от II ред с променливи коефициенти

$$u'' - q(x)u = f(x).$$

Върху триточковия шаблон  $\Pi(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  можем да построим еднопараметричното семейство диференчни схеми

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - d_i y_i = f_i,$$

където

$$d_i = \sigma q_{i-1} + (1 - 2\sigma)q_i + \sigma q_{i+1},$$

а  $\sigma$  е реален параметър. Може да се докаже, че при всеки избор на  $\sigma$  тази схема има втори ред на апроксимация. Освен това, към  $d_i$  можем да добавим израза  $\beta h^2$  ( $\beta \in \mathbb{R}$  — произволно) без да нарушим реда на апроксимация. Поставя се задачата за избор на диференчна схема от множеството на допустимите схеми, построени върху някакъв шаблон и имащи един и същ ред на апроксимация. За да направим избор, трябва да формулираме изискванията, на които трябва да отговаря тази диференчна схема. Обикновено, основните изисквания, които се предявяват към диференчните схеми, са следните:

- схемата да бъде *хомогенна*, т. е. диференчните уравнения да изглеждат по един и същ начин за всяка задача от разглеждания клас  $K$  и във всеки възел на всяка мрежа. Класът от задачи  $K$  се определя със задаването на типа ДУ и функционалното пространство, на което трябва да принадлежат коефициентите му.

- системата диференчни уравнения да бъде *разрешима* при произволна допустима мрежа и за произволна задача от разглеждания клас  $K$ ;
- схемата да бъде *сходяща* за всяка задача от разглеждания клас.

Към диференчните схеми се предявяват обикновено и някои допълнителни изисквания:

- *определен ред на апроксимация* за множеството на гладките решения  $\bar{K} \subseteq K$ ;
- *максимален ред на точност* за задачите от целия клас  $K$ ;
- *икономичност*, т. е. минимален брой аритметични операции при численото решаване на получената система диференчни уравнения.

Да се спрем сега по-подробно на понятието *хомогенни диференчни схеми*.

Очевидно е, че не е целесъобразно да се строят диференчни схеми и да се съставят програми, предназначени за решаването само на отделни задачи от частен вид. Необходимо е да имаме диференчни схеми, които могат да се използват за решаване на класове задачи. Изискването за еднообразие на изчислителния алгоритъм води до понятието хомогенни диференчни схеми.

**Определение.** Под *хомогенна диференчна схема* се разбира диференчна схема, видът на която не зависи нито от избора на конкретната задача от дадения клас, нито от избора на мрежата.

Това означава, че във всички възли на мрежата, за всяка задача от разглеждания клас, диференчните уравнения имат един и същ вид. Коэффициентите на диференчната схема са функционали от коэффициентите на диференциалното уравнение, зависят от стъпката на мрежата  $h$  като от параметър, но не зависят от възела на мрежата и от конкретния избор на коэффициентите.

#### 4.1 Хомогенни диференчни схеми за ОДУ от втори ред с променливи коэффициенти

Ще разгледаме основните въпроси от теорията на хомогенните диференчни схеми върху гранична задача за едномерното стационарно урав-

нение на топлопроводността с променливи коефициенти

$$(4.1) \quad \begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = \mu_1, & u(1) = \mu_2, \end{cases}$$

където  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Нека  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(0)}$  — класа на функциите, които са на части непрекъснати. Ако  $k(x)$  има прекъсване от първи род в точката  $x = \xi$ , т. е. ако

$$[k]_{x=\xi} = k(\xi + 0) - k(\xi - 0) \neq 0,$$

то при  $x = \xi$  се поставят условията за спрягане

$$[u] = 0, \quad [ku'] = 0.$$

Да въведем равномерна мрежа  $\bar{w}_h$  в интервала  $[0, 1]$ :

$$\bar{w}_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Да разгледаме триточковия шаблон  $\Pi(x_i) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$  на възела  $x_i$ . Да означим с  $y_i$  стойността на мрежовата функция  $y_h$  във възела  $x_i \in \bar{w}_h$ . Всяко триточково диференчно уравнение, построено по този шаблон, може да се запише във вида

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -h^2 \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

където  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $\varphi_i$  зависят от стъпката  $h$ , или още във вида

$$(4.2) \quad \frac{1}{h} \left[ b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

където  $d_i = (c_i - a_i - b_i)/h^2$ . Да отбележим, че коефициентите  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$  и  $\varphi_i$  все още не са определени.

Нека коефициентите на диференчната схема (4.2) се пресмятат по едни и същи формули при произволни  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(0)}$  във всички възли  $x_i$  на произволна мрежа  $\bar{w}_h$ , т. е. нека схемата (4.2) е хомогенна. Тогава индексът  $i$  може да се пропусне и (4.2) заедно с граничните условия може да се запише във вида

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{h} [by_x - ay_{\bar{x}}] - dy = -\varphi, & x \in w_h, \\ y(0) = \mu_1, & y(1) = \mu_2, \end{cases}$$

където  $y_x = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ ,  $y_{\bar{x}} = \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$ .

Семейството хомогенни диференчни схеми (4.3) е зададено, ако са зададени функционалите, с помощта на които се пресмятат коефициентите на диференчната схема. Изискванията за апроксимация и разрешимост на задача (4.3) налагат ограничения върху избора на функционалите.

Да разгледаме случая, когато  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  са достатъчно гладки функции. Ще определим условията, които трябва да удовлетворяват коефициентите  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$  и  $\varphi_i$ , така че локалната грешка на апроксимацията на (4.3), пресметната за точното решение  $u$  на задача (4.1), да бъде  $O(h^2)$ . Имаме

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{h} \left[ b_i \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] - d_i u_i + \varphi_i \\ &= \frac{1}{h} \left[ b_i \frac{1}{h} \left( u_i + \frac{h}{1!} u'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + O(h^4) - u_i \right) \right. \\ &\quad \left. - a_i \frac{1}{h} \left( u_i - u_i + \frac{h}{1!} u'_i - \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + O(h^4) \right) \right] - d_i u_i + \varphi_i \\ &= \frac{1}{h} \left[ b_i \left( u'_i + \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3) \right) - a_i \left( u'_i - \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3) \right) \right] \\ &\quad - d_i u_i + \varphi_i - k'_i u'_i - k_i u''_i + q_i u_i - f_i \\ &= \left( \frac{b_i - a_i}{h} - k'_i \right) u'_i + \left( \frac{b_i + a_i}{2} - k_i \right) u''_i + \frac{h}{6} (b_i - a_i) u'''_i \\ &\quad - (d_i - q_i) u_i - (-\varphi_i + f_i) + O(h^2). \end{aligned}$$

Оттук следва, че ако

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{b_i - a_i}{h} &= k'_i + O(h^2), \quad d_i = q_i + O(h^2), \\ \frac{b_i + a_i}{2} &= k_i + O(h^2), \quad \varphi_i = f_i + O(h^2), \end{aligned}$$

то  $\psi_i = O(h^2)$ , т. е. условията (4.4) са достатъчни за втори ред на апроксимация.

Да разгледаме сега два начина, по които могат да бъдат пресметнати коефициентите на диференчната схема (4.3):

1.  $b_i = k(x_i + \frac{h}{2})$ ,  $a_i = k(x_i - \frac{h}{2})$ ,  $d_i = q_i$ ,  $\varphi_i = f_i$ ;
2.  $b_i = \frac{k_{i+1} + k_i}{2}$ ,  $a_i = \frac{k_i + k_{i-1}}{2}$ ,  $d_i = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}}{2}$ ,  $\varphi_i = \frac{f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}}{2}$ .

От принципа за максимума следва, че достатъчно условие за разрешимост на задача (4.3) е

$$(4.5) \quad a > 0, \quad b > 0, \quad d \geq 0, \quad x \in \omega_h,$$

защото уравнение (4.2), което е еквивалентно на диференчното уравнение от (4.3), може да се запише във вида

$$c_i y_i = a_i y_{i-1} + b_i y_{i+1} + h^2 \varphi_i$$

и следователно трябва

$$c_i > 0, \quad a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i - a_i - b_i = h^2 d_i \geq 0.$$

По-нататък ще разглеждаме семейство диференчни схеми (4.3), за които коефициенти са в сила условията (4.4) и (4.5).

Освен формалните изисквания за апроксимация от определен ред и разрешимост на получената система линейни алгебрични уравнения (изисквания, които се проверяват непосредствено) е необходимо при избора на схемата да се осигури най-важното изискване, а именно — сходимост на схемата с определена скорост при  $h \rightarrow 0$ . Това свойство не винаги може да се провери просто, особено в случая на уравнения с прекъснати коефициенти или в случая на нелинейни уравнения.

Оказва се например, че не всяка хомогенна схема от вида (4.3), удовлетворяваща условията за апроксимация (4.4) (в случая на гладки коефициенти) и условията за разрешимост (4.5) е сходяща в класа на прекъснатите коефициенти  $k(x)$ .

Да разгледаме задачата

$$\begin{cases} (ku')' = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, & u(1) = 0. \end{cases}$$

Да представим  $(ku')'$  във вида  $(ku')' = ku'' + k'u'$ . Естествено е на пръв поглед за диференчна схема с втори ред на апроксимация да използваме схемата

$$\begin{cases} k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = 1, & y_N = 0. \end{cases}$$

След преобразуване във вида (4.2) се вижда, че

$$a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad d_i = \varphi_i = 0.$$

Условията (4.4) за втори ред на апроксимация са изпълнени. При достатъчно малки  $h$  са изпълнени и условията за разрешимост (4.5). Оказва се обаче, че схемата е разходяща дори в класа на на части постоянните коефициенти  $k(x)$ ,

$$k(x) = \begin{cases} k_1 = \text{const}, & 0 < x < \xi, \\ k_2 = \text{const}, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad k_1 \neq k_2.$$

Физическата причина за разходимостта на схемата е в нарушаването на баланса на топлината, т.е. в това, че тя води до появяването на допълнителен източник или консуматор на топлина. Схемите, нарушаващи законите за запазване, се наричат *неконсервативни*.

## 4.2 Консервативни диференчни схеми

Както вече казахме, уравненията на математическата физика изразяват някакви закони за запазване (на енергия, топлина, маса и т.н.) в диференциална форма. Методът на крайните разлики физически означава преход от непрекъснатата среда към някакъв дискретен неин модел. При такъв преход е естествено изискването за запазване на основните свойства на физическия процес. Такива свойства са преди всичко законите за запазване.

**Определение.** Диференчни схеми, отразяващи законите за запазване върху мрежата, се наричат *консервативни*.

Да разгледаме задача (4.1), чиито коефициенти  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  са достатъчно гладки функции. Ще считаме, че решението на задача (4.1) съществува, единствено е и е достатъчно гладко. Да интегрираме основното диференциално уравнение на (4.1) по  $x$  в интервала  $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ . Получаваме закона за запазване на топлината за интервала  $x^{(1)} \leq x \leq x^{(2)}$ , записан в интегрална форма:

$$(4.6) \quad W(x^{(1)}) - W(x^{(2)}) - \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} q(x)u(x) \, dx = - \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x) \, dx.$$

В равенството (4.6)  $W(x^{(1)})$  е количеството топлина, влизащо през сечение  $x = x^{(1)}$ ,  $W(x^{(2)})$  е количеството топлина, излизащо през сечение  $x = x^{(2)}$ ,  $\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} q(x)u(x) \, dx$  е количеството топлина, отдадено на околната среда за сметка на топлообмена с нея по околната повърхнина на



пръта, а  $\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x) dx$  е количеството топлина, отделило се за сметка на разпределения с плътност  $f(x)$  източници.

Да поясним смисъла на консервативността на диференчните схеми върху следния пример. Да напишем хомогенна триточкова диференчна схема за уравнението от (4.1):

$$\frac{1}{h} \left[ b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i.$$

Тази схема може да се запише във вида

$$(4.7) \quad \frac{1}{h} \left[ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i - \frac{b_i - a_{i+1}}{h} \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Да разгледаме равенство (4.7) за интервала  $x^{(1)} = (i_1 - \frac{1}{2})h \leq x_i \leq x^{(2)} = (i_2 + \frac{1}{2})h$  и да сумираме по  $i$  от  $i_1$  до  $i_2$ , означавайки  $W_{i-\frac{1}{2}} = -a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ . Тогава имаме последователно

$$(4.8) \quad \begin{aligned} -W_{i+\frac{1}{2}} + W_{i-\frac{1}{2}} - h d_i y_i &= -h \varphi_i - (b_i - a_{i+1}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \\ W_{i_1-\frac{1}{2}} - W_{i_2+\frac{1}{2}} - \sum_{i=i_1}^{i_2} h d_i y_i &= - \sum_{i=i_1}^{i_2} h \varphi_i - \sum_{i=i_1}^{i_2} (b_i - a_{i+1}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \end{aligned}$$

Като сравним (4.8) с (4.6) виждаме, че в дясната страна на (4.8) стои величината

$$D = \sum_{i=i_1}^{i_2} (b_i - a_{i+1}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

която се нарича *величина на дисбаланса*. Тя се анулира за произволна мрежова функция само ако  $b_i = a_{i+1}$ . Тогава получаваме схемата

$$(4.9) \quad \frac{1}{h} \left[ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i$$

и вместо (4.8) — мрежовия аналог на закона за запазване

$$W_{i_1-\frac{1}{2}} - W_{i_2+\frac{1}{2}} - \sum_{i=i_1}^{i_2} h d_i y_i = - \sum_{i=i_1}^{i_2} h \varphi_i,$$

който е алгебрично следствие от диференчните уравнения (4.9). Диференчната схема (4.9) е консервативна, а условията

$$(4.10) \quad b_i = a_{i+1}$$

са необходими и достатъчни за консервативност на схемата.

В разглеждания в края на 4.1 пример, условието (4.10) е нарушено и затова диференчната схема не е консервативна.

Сега ще се спрем на *интегро-интерполяционния метод* (*метода на баланса*), който дава хомогенни консервативни диференчни схеми. Ще илюстрираме този метод отново върху диференциалната задача (4.1).

Да построим в интервала  $[0, 1]$  равномерна мрежа със стъпка  $h$ :

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \ i = 0, 1, 2, \dots, N, \ h = \frac{1}{N} \right\}$$

и да въведем означението  $x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}$ . Да интегрираме по  $x$  уравнението от (4.1) в интервала  $x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}$ . Получаваме

$$(4.11) \quad \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (k(x)u'(x))' dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx.$$

Като вземем предвид равенството  $W = -ku'$ , (4.11) може да се запише във вида

$$(4.12) \quad W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx.$$

Равенството (4.12) представлява уравнението на баланса на топлината за интервала  $x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}$ . Сега ще направим диференчна апроксимация на (4.12). За целта да заменим  $W$  и първия интеграл с линейни комбинации от стойностите на функцията  $u$  във възлите на мрежата. Да използваме най-простата интерполация в околност на възела  $x_i$ :

$$u = u_i = \text{const} \quad \text{при } x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}.$$

Тогава имаме

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx \approx u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx = hu_i \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx = hu_i \mathring{d}_i,$$

където

$$\mathring{d}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx.$$

Да интегрираме по  $x$  равенството

$$u' = -\frac{W}{k}$$

в интервала  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ . Получаваме

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx, \quad u_i - u_{i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx.$$

Да предположим, че  $W(x) \approx W_{i-\frac{1}{2}} = \text{const}$  при  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . Тогава имаме

$$u_i - u_{i-1} \approx -W_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx = -W_{i-\frac{1}{2}} h \mathring{a}_i,$$

където

$$\mathring{a}_i = \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1},$$

или оттук

$$W_{i-\frac{1}{2}} \approx -\mathring{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -\mathring{a}_i u_{\bar{x},i}.$$

Като заместим в (4.12) и означим с  $y_i$  стойностите на търсената функция в точките от мрежата, получаваме консервативната диференчна схема

$$(4.13) \quad \frac{1}{h} \left[ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] - d_i y_i = -\varphi_i,$$

където

$$(4.14) \quad \begin{aligned} a_i &= \mathring{a}_i = \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right]^{-1}, \\ d_i &= \mathring{d}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx, \\ \varphi_i &= \mathring{\varphi}_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Диференчното уравнение (4.13) е написано във фиксиран възел  $x = x_i$ . Считайки възела за произволен, получаваме (4.13) във всички вътрешни възли на мрежата. Тъй като коефициентите  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\varphi_i$  във всички възли  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , се определят по едни и същи формули (4.14), то схемата (4.13), (4.14) е хомогенна консервативна диференчна схема. Затова индексът  $i$  в (4.13) може да се пропусне и да се запише

$$(4.15) \quad (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \quad c_1 = \text{const}.$$

Да добавим и граничните условия

$$(4.16) \quad y(0) = \mu_1, \quad y(1) = \mu_2.$$

С помощта на интегро-интерполационния метод получихме консервативната диференчна схема (4.15), (4.16), чиито коефициенти се пресмятат по формули (4.14). В общия случай когато разглеждаме тази схема, ще считаме, че коефициентите ѝ са някакви функционали от коефициентите на диференциалното уравнение.

Условията за втори ред на локална апроксимация за хомогенната консервативна диференчна схема (4.15), (4.16) имат вида

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \frac{a(x+h) + a(x)}{2} &= k(x) + O(h^2), & d(x) &= q(x) + O(h^2), \\ \frac{a(x+h) - a(x)}{h} &= k'(x) + O(h^2), & \varphi(x) &= f(x) + O(h^2). \end{aligned}$$

За практически цели е удобно да имаме колкото може по-прости формули за пресмятане на коефициентите на диференчната схема (4.15), използвайки стойностите на  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  в отделни точки. На практика най-често се използват следните формули, които удовлетворяват условията (4.17):

$$(4.18) \quad a_i = k_{i-\frac{1}{2}}, \quad a_i = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}, \quad a_i = \frac{k_i + k_{i-1}}{2},$$

$$(4.19) \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad d_i = \frac{1}{2} \left( q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad \varphi_i = \frac{1}{2} \left( f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}} \right).$$

Първите две формули за  $a_i$  от (4.18), както и (4.19), се получават от (4.14) чрез прилагане съответно на квадратурната формула на централните правоъгълници и формулата на трапеците. Третата формула за  $a_i$  в (4.18) не може да се получи чрез прилагане на квадратурна формула към съответния интеграл от (4.14). Ако  $k(x)$  е прекъснат в точката  $x_{i-\frac{1}{2}}$ , то  $a_i$  може да се пресмята, например, по формулата

$$a_i = \frac{1}{2} \left( k_{i-\frac{1}{2}}^- + k_{i-\frac{1}{2}}^+ \right).$$

Аналогично се пресмятат и коефициентите  $d_i$  и  $\varphi_i$ , ако  $q(x)$  и  $f(x)$  са прекъснати във възела  $x_i$ .

Схемата (4.14)–(4.16) ще наричаме *най-добра схема*.

### 4.3 Сходимость и точность на хомогенните консервативни дифференчни схеми за ОДУ от втори ред

Нека  $u(x)$  е точното решение на задача (4.1), а  $y$  е решение на дифференчната задача (4.15), (4.16). Коефициентите на дифференчната задача (4.15), (4.16) са функционали от коефициентите на дифференциалното уравнение, като тези функционали удовлетворяват изискванията за консервативност и определен ред на апроксимация. По интегро-интерполяционния метод получихме дифференчна схема с функционали от специален тип. Основният въпрос, който ще разгледаме сега, е оценка на реда на точност на хомогенната консервативна дифференчна схема (4.15), (4.16) в класа на непрекъснатите и прекъснатите коефициенти.

В сила е следната

**Теорема.** *Произволна допустима схема (4.15), (4.16) в класа на гладките коефициенти  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in C^2[0, 1]$  има втори ред на точност*

$$\|y - u\|_C \leq Mh^2,$$

*$M = \text{const} > 0$ ,  $M \neq M(h)$ , а в класа на прекъснатите коефициенти  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^2[0, 1]$  — първи ред на точност*

$$\|y - u\|_C \leq Mh.$$

*Най-добрата схема запазва втори ред на точност и в класа на прекъснатите коефициенти.*

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Грешката  $z(x) = y(x) - u(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ , удовлетворява задачата

$$(4.20) \quad \begin{cases} \Lambda z \equiv (az_{\bar{x}})_x - dz = -\psi(x), & x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ z(0) = z(1) = 0, & a(x) \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \end{cases}$$

където  $\psi(x) = \Lambda u + \varphi(x) = (au_{\bar{x}})_x - du - \varphi$  е грешката на апроксимацията. За да оценим реда на точност на схема (4.15), (4.16), ще ни трябва оценка за грешката  $z$  като решение на задача (4.20) чрез дясната част  $\psi(x)$ .

Най-напред ще покажем, че грешката на апроксимация може да се представи във вида

$$(4.21) \quad \psi_i = \eta_{x,i} + \psi_i^*,$$

където

$$\eta_i = (au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_i^* = \left( \varphi_i - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) \, dx \right) - \left( d_i u_i - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) \, dx \right).$$

Наистина, от уравнението на баланса имаме

$$(ku')_{i+\frac{1}{2}} - (ku')_{i-\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) \, dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) \, dx,$$

$$\frac{1}{h} \left[ (ku')_{i+\frac{1}{2}} - (ku')_{i-\frac{1}{2}} \right] - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) \, dx + \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) \, dx = 0.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= (au_{\bar{x}})_{x,i} - d_i u_i + \varphi_i - \frac{1}{2} \left[ (ku')_{i+\frac{1}{2}} - (ku')_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) \, dx \\ &= \left( au_{\bar{x}} - (ku')_{i-\frac{1}{2}} \right)_{x,i} + \left( \varphi_i - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) \, dx \right) \\ &\quad - \left( d_i u_i - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) u(x) \, dx \right) = \eta_{x,i} + \psi_i^*. \end{aligned}$$

Сега ще докажем, че ако  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in C^{(2)}$  (тогава  $u \in C^{(3)}$ ), то

$$\eta_i = O(h^2), \quad \psi_i^* = O(h^2).$$

Знаем, че  $u_{\bar{x},i} = u'_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2)$ . Тогава

$$\eta_i = (a_i - k_{i-\frac{1}{2}}) u_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2) = O(h^2),$$

защото от условията за втори ред на апроксимация последователно получаваме

$$\begin{aligned} a(x+h) + a(x) &= 2k(x) + O(h^2), \\ a(x+h) - a(x) &= k'(x) + O(h^2), \\ 2a(x) &= 2k(x) - k'(x) + O(h^2), \\ a(x) &= k(x) - \frac{1}{2}k'(x) + O(h^2) = k\left(x - \frac{h}{2}\right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Като използваме квадратурната формула на правоъгълника

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta),$$

имаме

$$\frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} V(x) dx = V_i + O(h^2).$$

Тъй като  $q(x)$  и  $f(x) \in C^2$ , то

$$\varphi_i - \frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(x) dx = \varphi_i - f_i + O(h^2) = O(h^2),$$

защото от (4.17) имаме, че  $\varphi_i = f_i + O(h^2)$ . Аналогично

$$d_i u_i - \frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} q(x)u(x) dx = d_i u_i - q_i u_i + O(h^2) = (d_i - q_i)u_i + O(h^2) = O(h^2).$$

Тогава

$$\psi_i^* = O(h^2).$$

Нека сега  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}$ , където с  $Q^{(2)}$  сме означили класа от функции, които са на части непрекъснати заедно с вторите си производни. За опростяване на разсъжденията ще считаме, че всичките тези функции имат прекъсване от първи род само в една точка  $x = \xi \in (0, 1)$  и че  $\xi = x_n + \theta h$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 < n < N$ . При  $x = \xi$  са изпълнени условията за спрягане

$$[u]_\xi = 0, \quad [ku']_\xi = 0.$$

Щом  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}$ , то  $u(x) \in Q^{(3)}$ . Да разгледаме най-напред израза за  $\eta_i$ . Имаме

$$\eta_i = (au_{\bar{x}})_i - (ku')_{i-1/2} = O(h^2) \quad \text{при } i \neq n+1.$$

При  $i = n+1$  имаме

$$\eta_{n+1} = (au_{\bar{x}})_{n+1} - (ku')_{n+1/2} = a_{n+1} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} - (ku')_{n+1/2}.$$

По формулата на Тейлор имаме

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} &= \\ &= \frac{1}{h} [u(\xi) + (1-\theta)hu'(\xi+0) + O(h^2) - u(\xi) + \theta hu'(\xi-0) + O(h^2)] \\ &= (1-\theta)u'_+ + \theta u'_- + O(h), \end{aligned}$$

където  $u_{\pm} = u'(\xi \pm 0)$ . От условието за спрягане имаме  $[ku']_{x=\xi} = 0$ , т. е.  $(ku')_+ = (ku')_- = W_0$ . Тогава

$$(1 - \theta)u'_+ + \theta u'_- = (1 - \theta) \frac{W_0}{k_+} + \theta \frac{W_0}{k_-} = \left( \frac{1 - \theta}{k_+} + \frac{\theta}{k_-} \right) W_0.$$

От друга страна

$$\begin{aligned} (ku')_{n+1/2} &= (ku')_{\xi+0} + O(h) \quad \text{при } \theta \leq \frac{1}{2}, \\ (ku')_{n+1/2} &= (ku')_{\xi-0} + O(h) \quad \text{при } \theta > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следователно, независимо от  $\theta$ , поради непрекъснатостта на потока

$$(ku')_{n+1/2} = W_0 + O(h).$$

Тогава

$$\eta_{n+1} = \left[ \left( \frac{1 - \theta}{k_+} + \frac{\theta}{k_-} \right) a_{n+1} - 1 \right] W_0 + O(h) = O(1).$$

За най-добрата схема имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{a}_{n+1}} &= \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{\xi} \frac{dx}{k(x)} + \frac{1}{h} \int_{\xi}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_n}^{\xi} \left( \frac{1}{k_-} + O(x - \xi) \right) dx + \frac{1}{h} \int_{\xi}^{x_{n+1}} \left( \frac{1}{k_+} + O(x - \xi) \right) dx \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{k_-} (\xi - x_n) + O(h^2) \right) + \frac{1}{h} \left( \frac{1}{k_+} (x_{n+1} - \xi) + O(h^2) \right) \\ &= \frac{\theta}{k_-} + \frac{1 - \theta}{k_+} + O(h) = g + O(h), \end{aligned}$$

където  $g = \frac{\theta}{k_-} + \frac{1 - \theta}{k_+}$ . Следователно за най-добрата схема имаме

$$\dot{\eta}_{n+1} = \left[ g \frac{1}{g + O(h)} - 1 \right] W_0 + O(h) = \left[ 1 + \frac{O(h)}{O(1)} - 1 \right] W_0 + O(h) = O(h).$$

При оценката на  $\psi_i^*$  ще разглеждаме два случая в зависимост от това дали  $\theta < \frac{1}{2}$  или  $\theta > \frac{1}{2}$ . Ако  $\theta = \frac{1}{2}$ , прекъсването на коефициентите е при  $x_{n+1/2}$  и тогава  $\psi_i = O(h^2)$  за всяко  $i$ .



Нека  $\theta < \frac{1}{2}$ . Тогава  $\psi_i^* = O(h^2)$  за  $i \neq n$ . За  $\psi_n^*$  имаме

$$\begin{aligned}
\psi_n^* &= \left( \varphi_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) \, dx \right) - \left( d_n u_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x) u(x) \, dx \right) \\
&= \left( \varphi_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{\xi} f(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_{\xi}^{x_{n+1/2}} f(x) \, dx \right) \\
&\quad - \left( d_n u_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{\xi} q(x) u(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_{\xi}^{x_{n+1/2}} q(x) u(x) \, dx \right) \\
&= \left\{ \varphi_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{\xi} [f_- + (x - \xi) f'_- + O((x - \xi)^2)] \, dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{\xi}^{x_{n+1/2}} [f_+ + (x - \xi) f'_+ + O((x - \xi)^2)] \, dx \right\} \\
&\quad - \left\{ d_n u_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{\xi} [(qu)_- + (x - \xi)(qu)'_- + O((x - \xi)^2)] \, dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h} \int_{\xi}^{x_{n+1/2}} [(qu)_+ + (x - \xi)(qu)'_+ + O((x - \xi)^2)] \, dx \right\} \\
&= \left[ \varphi_n - \frac{1}{h} f'_- \left( x_n + \theta h - x_n + \frac{h}{2} \right) + O(h^2) - \frac{1}{h} f_+ \left( x_n + \frac{h}{2} - \theta h - x_n \right) \right] \\
&\quad - \left[ d_n u_n - \frac{1}{h} \left( (qu)_- \left( x_n + \theta h - x_n + \frac{h}{2} \right) + O(h^2) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h} \left( (qu)_+ \left( x_n + \frac{h}{2} - \theta h - x_n \right) + O(h^2) \right) \right] \\
&= \left[ \varphi_n - f_- \left( \theta + \frac{1}{2} \right) - f_+ \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \right] \\
&\quad - \left[ d_n u_n - (qu)_- \left( \theta + \frac{1}{2} \right) - (qu)_+ \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \right] + O(h) = O(1).
\end{aligned}$$

За най-добрата схема имаме

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_n^* &= \left( \dot{\varphi}_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) \, dx \right) - \left( \dot{d}_n u_n - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x) u(x) \, dx \right) \\
&= \left( \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) \, dx \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{u_n}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x) u(x) dx \right) \\
& = \frac{1}{h} \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x) (u(x) - u_n) dx.
\end{aligned}$$

Но  $u(x) = u(\xi) + O(h)$  за  $x \in [x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$  и  $u_n = u(\xi) + O(h)$ , защото  $[u]_{x=\xi} = 0$ . Следователно  $u(x) - u_n = Ch$ . Тогава

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_n^* &= \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} Cq(x) dx = C \left[ \int_{x_{n-1/2}}^{\xi} q(x) dx + \int_{\xi}^{x_{n+1/2}} q(x) dx \right] \\
&= C \left\{ \int_{x_{n-1/2}}^{\xi} [q_- + O(x - \xi)] dx + \int_{\xi}^{x_{n+1/2}} [q_+ + O(x - \xi)] dx \right\} = O(h).
\end{aligned}$$

Ако  $\theta > \frac{1}{2}$ , то  $\psi_i^* = O(h^2)$  при  $i \neq n+1$ ,  $\psi_{n+1}^* = O(1)$ ,  $\dot{\psi}_{n+1}^* = O(h)$ . Тези равенства се получават аналогично.

Окончателно получаваме

$$\begin{aligned}
& \eta_i = O(h^2), \quad i \neq n+1, \quad \eta_{n+1} = O(1), \quad \dot{\eta}_{n+1} = O(h), \\
& \psi_i^* = O(h^2), \quad i \neq n, \quad \psi_n^* = O(1), \quad \dot{\psi}_n^* = O(h) \quad \text{при } \theta < \frac{1}{2}, \\
& \psi_i^* = O(h^2), \quad i \neq n+1, \quad \psi_{n+1}^* = O(1), \quad \dot{\psi}_{n+1}^* = O(h) \quad \text{при } \theta > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

В сила е следната

**Лема.** За решението на задача (4.20) с дясна част (4.21) е в сила оценката

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C \leq \frac{2}{c_1} \left( (1, |\eta|] + (1, |\mu|] \right),$$

където

$$\mu_i = \sum_{k=1}^{i-1} h\psi_k^*, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \mu_1 = 0, \quad a \quad (f, g] = \sum_{i=1}^N hf_i g_i.$$

ДОКАЗАТЕЛСТВО. Да разгледаме задачата

$$\begin{cases} (av_{\bar{x}})_x - dv = -\eta_x, & x \in \omega_h, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

#### 4.3. Сходимост и точност на хом. консервативни диференчни схеми . . . 43

Нейното решение  $v$  може да се представи във вида  $v = w + \bar{w}$ , където  $w$  е решение на задачата

$$(4.22) \quad \begin{cases} (aw_{\bar{x}})_x = -\eta_x, & x \in \omega_h, \quad a \geq c_1 > 0, \\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases}$$

а  $\bar{w}$  — на задачата

$$(4.23) \quad \begin{cases} (a\bar{w}_{\bar{x}})_x - d\bar{w} = dw, & x \in \omega_h, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0, \\ \bar{w}(0) = \bar{w}(1) = 0. \end{cases}$$

За задача (4.22) имаме последователно

$$(4.24) \quad \begin{aligned} (aw_{\bar{x}} + \eta)_x &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ aw_{\bar{x}} + \eta &= c_0 = \text{const}, \\ a_k \frac{w_k - w_{k-1}}{h} + \eta_k &= c_0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ a_k(w_k - w_{k-1}) &= hc_0 - h\eta_k, \\ w_k &= \frac{hc_0}{a_k} - \frac{h\eta_k}{a_k} + w_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Да сумираме (4.24) по  $k$  от 1 до  $i$ . Получаваме

$$w_i = w_0 + c_0 \sum_{k=1}^i \frac{h}{a_k} - \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} = w_0 + c_0 A_i - \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} = c_0 A_i - \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k},$$

където  $A_i = \sum_{k=1}^i \frac{h}{a_k}$ . При  $i = N$ , като вземем предвид, че  $w_N = 0$ , намираме  $c_0$ :

$$c_0 = \frac{1}{A_N} \sum_{k=1}^N \frac{h\eta_k}{a_k}.$$

Тогава

$$w_i = \frac{A_i}{A_N} \sum_{k=1}^N \frac{h\eta_k}{a_k} - \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} = \left( \frac{A_i}{A_N} - 1 \right) \sum_{k=1}^i \frac{h\eta_k}{a_k} + \frac{A_i}{A_N} \sum_{k=i+1}^N \frac{h\eta_k}{a_k}.$$

Очевидно  $A_i \leq A_N$ . Тогава

$$|w_i| \leq \left( 1 - \frac{A_i}{A_N} \right) \sum_{k=1}^i \frac{h|\eta_k|}{a_k} + \frac{A_i}{A_N} \sum_{k=i+1}^N \frac{h|\eta_k|}{a_k} \leq \sum_{k=1}^N \frac{h|\eta_k|}{a_k} \leq \frac{1}{c_1} (1, |\eta|),$$

защото  $1 - \frac{A_i}{A_N} \leq 1$ . Следователно

$$\|w\|_C \leq \frac{1}{c_1}(1, |\eta|).$$

Да разгледаме сега задача (4.23). Имаме последователно

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[ a_{i+1} \frac{\bar{w}_{i+1} - \bar{w}_i}{h} - a_i \frac{\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1}}{h} \right] - d_i \bar{w}_i &= d_i w_i, \\ \left( \frac{a_{i+1}}{h^2} + \frac{a_i}{h^2} + d_i \right) \bar{w}_i - \frac{a_{i+1}}{h^2} \bar{w}_{i+1} - \frac{a_i}{h^2} \bar{w}_{i-1} &= -d_i w_i, \\ \frac{1}{h^2} (a_{i+1} + a_i + h^2 d_i) w_i &= \frac{a_{i+1}}{h^2} \bar{w}_{i+1} + \frac{a_i}{h^2} \bar{w}_{i-1} - d_i w_i. \end{aligned}$$

За нея ще използваме принципа за максимума и следствията от него. Имаме

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{1}{h^2} (a_{i+1} + a_i + h^2 d_i) > 0, \\ B(P, Q) &= \left\{ \frac{a_{i+1}}{h^2}, \frac{a_i}{h^2} \right\} > 0, \\ D(P) &= d_i \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. условията за положителност на коефициентите са изпълнени.

Ако  $d \equiv 0$  върху  $\omega_h$ , то и  $\bar{w} \equiv 0$  върху  $\bar{\omega}_h$  (хомогенната задача има само нулевото решение). Следователно

$$\|\bar{w}\|_C \leq \|w\|_C.$$

Ако  $d_i \neq 0$  поне в една точка  $x_i \in \omega_h$ , да разгледаме задачата

$$(4.25) \quad \begin{cases} LY_i = d_i |w_i|, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ Y_0 = Y_1 = 0. \end{cases}$$

Тъй като  $d_i |w_i| \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , и  $Y_0 = Y_N = 0$ , то от Следствие 1 от принципа за максимума имаме  $Y_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Нека  $Y_{i_0} = \max Y_i \geq 0$ . Тогава

$$(4.26) \quad d_{i_0} |w_{i_0}| = \frac{a_{i_0+1}}{h^2} (Y_{i_0} - Y_{i_0+1}) + \frac{a_{i_0}}{h^2} (Y_{i_0} - Y_{i_0+1}) + d_{i_0} Y_{i_0} \geq d_{i_0} Y_{i_0},$$

т. е.

$$d_{i_0} Y_{i_0} \leq d_{i_0} |w_{i_0}|.$$

Оттук при  $d_{i_0} \neq 0$  имаме  $Y_{i_0} \leq |w_{i_0}|$  и следователно

$$\|Y\|_C \leq \|w\|_C.$$

От теоремата за сравнение имаме

$$\|\bar{w}\|_C \leq \|Y\|_C \leq \|w\|_C$$

и следователно

$$\|\bar{w}\|_C \leq \|w\|_C.$$

Ако  $d_{i_0} = 0$ , от (4.26) получаваме

$$0 = \frac{a_{i_0} + 1}{h^2} (Y_{i_0} - Y_{i_0+1}) + \frac{a_{i_0}}{h^2} (Y_{i_0} - Y_{i_0-1})$$

или

$$(4.27) \quad a_{i_0+1} (Y_{i_0+1} - Y_{i_0}) = a_{i_0} (Y_{i_0} - Y_{i_0-1}).$$

Тъй като  $Y_{i_0+1} - Y_{i_0} \leq 0$ , а  $Y_{i_0} - Y_{i_0-1} \geq 0$ , то последното равенство е възможно само ако  $Y_{i_0} = Y_{i_0+1} = Y_{i_0-1}$ . Тогава, като повторим разсъжденията при  $i = i_0 + 1$  или  $i = i_0 - 1$ , отново ще достигнем или до оценка за  $\|\bar{w}\|_C$ , или до равенство, аналогично на (4.27). Тъй като поне едно  $d_i \neq 0$ , в края на краищата ще получим

$$\|\bar{w}\|_C \leq \|w\|_C.$$

От оценките за  $\|\bar{w}\|_C$  и  $\|w\|_C$  получаваме оценка за  $\|v\|_C$ , а именно

$$(4.28) \quad \|v\|_C = \|w + \bar{w}\|_C \leq \|w\|_C + \|\bar{w}\|_C \leq 2\|w\|_C \leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta|).$$

Сега ще докажем, че  $\psi_i^* = \mu_{x,i}$ . Наистина,

$$\mu_{x,i} = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h} = \frac{1}{h} \left( \sum_{k=1}^i h \psi_k^* - \sum_{k=1}^{i-1} h \psi_k^* \right) = \frac{1}{h} h \psi_i^* = \psi_i^*.$$

Тогава можем да запишем, че

$$\psi = (\eta + \mu)_x$$

и, като използваме оценка (4.28), получаваме

$$\begin{aligned} \|z\|_C &\leq \frac{2}{c_1} (1, |\eta + \mu|) = \frac{2}{c_1} \sum_{i=1}^N h |\eta_i + \mu_i| \leq \frac{2}{c_1} \left( \sum_{i=1}^N h (|\eta_i| + |\mu_i|) \right) \\ &\leq \frac{2}{c_1} ((1, |\eta|) + (1, |\mu|)). \end{aligned}$$

Сега вече можем да преминем към същността на доказателството. Имаме

$$(1, |\eta|] = \sum_{i=1}^N h|\eta_i| = h|\eta_{n+1}| + O(h^2).$$

Освен това,

$$\begin{aligned}\mu_i &= O(h^2) \text{ при } i \leq n, \\ \mu_{n+1} &= h\psi_i^* + O(h^2), \\ \mu_i &= h(\psi_n^* + \psi_{n+1}^*) + O(h^2) \text{ при } i > n+1.\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}(1, |\mu|] &= \sum_{i=1}^N h|\mu_i| = \sum_{i=1}^n h|\mu_i| + h|\mu_{n+1}| + \sum_{i=n+2}^N h|\mu_i| \\ &= O(h^2) + h|\mu_{n+1}| + \sum_{i=n+2}^N hh|\psi_n^* + \psi_{n+1}^*| \\ &= O(h^2) + h^2|\psi_n^*| + h|\psi_n^* + \psi_{n+1}^*| \sum_{i=n+2}^N h \\ &= O(h^2) + h^2|\psi_n^*| + h|\psi_n^* + \psi_{n+1}^*|(N - n - 2 + 1)h \\ &= O(h^2) + h^2|\psi_n^*| + h|\psi_n^* + \psi_{n+1}^*|(1 - x_{n+1}).\end{aligned}$$

Но  $\psi_n^* + \psi_{n+1}^* = O(1)$ , а в най-лошия случай  $\psi_n^* = O(1)$ . Тогава

$$\begin{aligned}\|z\|_C &\leq \|y - u\|_C \leq \frac{2}{c_1} ((1, |\eta|] + (1, |\mu|]) \\ &= \frac{2}{c_1} (h|\eta_{n+1}| + O(h^2) + h^2|\psi_n^*| + h|\psi_n^* + \psi_{n+1}^*|(1 - x_{n+1})) \\ &\leq \frac{2}{c_1} (hO(1) + O(h^2) + h^2O(1) + hO(1)(1 - \xi)) = O(h).\end{aligned}$$

За най-добрата схема имаме

$$\begin{aligned}|\mathring{\eta}_{n+1}| &= O(h), \quad |\mathring{\psi}_n^*| = O(h) \text{ при } \theta < \frac{1}{2}, \\ \mathring{\psi}_n^* + \mathring{\psi}_{n+1}^* &= O(h)\end{aligned}$$

и следователно

$$\|y - u\|_C \leq Ch^2.$$

В случая на гладки коефициенти

$$\eta_i = O(h^2), \quad \psi_i^* = O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

за всяка диференчна схема от разглежданото семейство. Следователно

$$(1, |\eta|) + (1, |\mu|) = O(h^2)$$

и

$$\|y - u\|_C \leq Ch.$$

#### 4.4 Хомогенни диференчни схеми върху неравномерни мрежи

Да разгледаме отново задача (4.1). В интервала  $[0, 1]$  въвеждаме неравномерна мрежа

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, i = 0, \dots, N, x_i = x_{i-1} + h_i, i = 1, \dots, N, x_0=0, x_N=1, h_i > 0\}.$$

Да интегрираме уравнението от задача (4.1) по  $x$  в интервала  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ . Получаваме уравнението на баланса на топлината

$$W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx,$$

$$W(x) = -k(x)u'(x).$$

Ако предположим, че  $u = u_i = \text{const}$  при  $x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}$ , то

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x) dx \approx u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx = u_i \bar{h}_i \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx = u_i \bar{h}_i \bar{d}_i,$$

където  $\bar{h}_i = 0,5(h_i + h_{i+1})$ , а

$$\bar{d}_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx.$$

Да интегрираме равенството  $-\frac{W(x)}{k(x)} = u'(x)$  в интервала  $(x_{i-1}, x_i)$  предполагайки, че  $W(x) \approx W_{i-\frac{1}{2}}$  в този интервал:

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx, \quad u_i - u_{i-1} \approx -W_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx,$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \approx -W_{i-\frac{1}{2}} \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx, \quad W_{i-\frac{1}{2}} \approx -\bar{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\bar{h}_i} = -\bar{a}_i u_{\bar{x},i},$$

където

$$\mathring{a}_i = \left[ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx \right]^{-1}.$$

Аналогично, както в случая на равномерна мрежа, получаваме

$$(4.29) \quad \frac{1}{h_i} \left[ \mathring{a}_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \mathring{a}_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] - \mathring{d}_i y_i = -\mathring{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

където

$$(4.30) \quad \mathring{a}_i = \left( \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx \right)^{-1}, \quad \mathring{d}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x) dx, \quad \mathring{\varphi}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx.$$

Схемата (4.29), (4.30) ще наричаме *най-добра схема*. Като използваме означенията

$$y_{\hat{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}},$$

схема (4.29), (4.30) може да се запише във вида

$$(4.31) \quad \begin{cases} (\mathring{a}y_{\bar{x}})_{\hat{x}} - \mathring{d}y = -\mathring{\varphi}, & x = x_i \in \hat{\omega}_h, \\ y(0) = \mu_1, \quad y(1) = \mu_2. \end{cases}$$

Да разгледаме сега триточковата диференчна схема, построена на неравномерна мрежа

$$(4.32) \quad \begin{cases} (ay_{\bar{x}})_{\hat{x}} - dy = -\varphi, & x = x_i = \hat{\omega}_h, \\ y(0) = \mu_1, \quad y(1) = \mu_2, & a(x) \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0. \end{cases}$$

Ако  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^0[0,1]$  и са известни точките на прекъсване, винаги може да се избере неравномерна мрежа, така че точките на прекъсване на коефициентите да са нейни възли. Такава мрежа, която зависи от конкретния избор на функциите  $k$ ,  $q$  и  $f$  ще означаваме с  $\hat{\omega}_h(K)$ . Най-простите изрази за  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\varphi_i$  върху  $\hat{\omega}_h(K)$  имат вида

$$(4.33) \quad a_i = k_{i-\frac{1}{2}}, \quad d_i = \frac{h_i q_i^- + h_{i+1} q_i^+}{2h_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2h_i},$$



където  $q_i^- = q(x_i - 0)$ ,  $q_i^+ = q(x_i + 0)$ . Могат да се използват и други формули, например

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{k_i^- + k_{i-1}^+}{2}, & a_i &= \frac{2k_{i-1}^+ k_i^-}{k_{i-1}^+ + k_i^-}, \\ d_i &= \frac{h_i q_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+1} q_{i+\frac{1}{2}}}{2\hbar_i}, & \varphi_i &= \frac{h_i f_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+1} f_{i+\frac{1}{2}}}{2\hbar_i}. \end{aligned}$$

Ако точките на прекъсване са полуцели възли на мрежата (т. е. съвпадат с потоковите точки  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$  върху  $\hat{\omega}_h$ ), то  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\varphi_i$  могат да се смятат по един от следните начини:

$$a_i = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i,$$

или

$$a_i = \frac{2k_{i-\frac{1}{2}}^+ k_{i+\frac{1}{2}}^-}{k_{i-\frac{1}{2}}^+ + k_{i+\frac{1}{2}}^-}, \quad d_i = \frac{h_{i+1} q_{i+\frac{1}{2}}^- + h_i q_{i-\frac{1}{2}}^+}{2\hbar_i}, \quad \varphi_i = \frac{h_{i+1} f_{i+\frac{1}{2}}^- + h_i f_{i-\frac{1}{2}}^+}{2\hbar_i}.$$

Ако  $k(x)$ ,  $q(x)$  и  $f(x)$  са непрекъснати, то коефициентите могат да се смятат например по един от следните начини:

$$\begin{aligned} (4.34) \quad a_i &= \frac{k_i + k_{i-1}}{2}, & a_i &= k_{i-\frac{1}{2}}, & a_i &= \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}, \\ d_i &= \frac{h_i q_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+1} q_{i+\frac{1}{2}}}{2\hbar_i}, & d_i &= q_i, \\ \varphi_i &= \frac{h_i f_{i-\frac{1}{2}} + h_{i+1} f_{i+\frac{1}{2}}}{2\hbar_i}, & \varphi_i &= f_i. \end{aligned}$$

За хомогенните консервативни диференчни схеми, построени върху равномерно мрежа, са в сила следните теореми:

**Теорема 6.** *В класа на непрекъснатите коефициенти  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$  произволна диференчна схема от вида (4.32) с коефициенти от вида (4.34) запазва втори ред на точност върху произволна последователност от неравномерни мрежи, т. е.*

$$\|y - u\|_c \leq M \|h\|^2, \quad \|h\|^2 = \sum_{i=1}^N h_i^2.$$

**Теорема 7.** *В класа на прекъснатите коефициенти  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}[0, 1]$  най-добрата схема запазва втори ред на точност върху произволна последователност от неравномерни мрежи.*

**Теорема 8.** *В класа на прекъснатите коефициенти  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x) \in Q^{(2)}[0, 1]$  схемата (4.32), (4.33) има втори ред на точност върху последователност от неравномерни мрежи  $\hat{\omega}_h(K)$ .*

**Теорема 9.** *Ако е прекъснат само коефициентът  $k(x) \in Q^{(2)}[0, 1]$ , а  $q(x)$  и  $f(x)$  са непрекъснати,  $q(x)$ ,  $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ , то произволна консервативна диференчна схема измежду изброените има втори ред на точност върху последователност от неравномерни мрежи  $\hat{\omega}_h(K)$ .*

Използването на неравномерни мрежи открива нови възможности за повишаване на реда на точност без увеличаване на броя на възлите. Имайки предварителна информация за поведението на решението на изходната задача, може да изберем мрежата така, че да осигурим достатъчна точност с използване на минимален брой възли, а следователно и на минимален брой аритметични действия. Например, в областта на бързо изменение на коефициентите на уравнението е естествено да се сгъсти мрежата. В частност, близко до точките на прекъсване на коефициентите мрежата се сгъстява така, че най-малката стъпка да се прави до точката на прекъсване и после, отдалечавайки се от нея, стъпката се увеличава, например, по закона за геометрична прогресия.

Ако липсва информация за поведението на решението, то може да се направят предварителни пресмятания върху груба мрежа, след което се избира нова мрежа така, че в областта на бързо изменение на решението стъпката на мрежата да е по-малка. После задачата се решава върху тази мрежа.

На практика неравномерните мрежи се прилагат доста често. Трябва да се признае обаче, че въпросът за точността на диференчните схеми в зависимост от изменението на реалните мрежи за уравнения с променливи коефициенти се нуждае от изследване за всяка конкретна задача.

## 4.5 Други задачи

### 4.5.1 Трета гранична задача

Да разгледаме задачата  
(4.35)

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & x \in (0, 1), \quad k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0, \\ k(0)u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1, & \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \\ -k(1)u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, & \beta_1 + \beta_2 > 0. \end{cases}$$

Да построим за нея диференчна схема с втори ред на апроксимация. Това можем да направим по метода на баланса, както за основното уравнение, така и за граничните условия. За основното уравнение както по-рано ще получим апроксимацията

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \quad a \geq c_1 > 0, \quad d \geq 0,$$

където  $a$ ,  $d$  и  $\varphi$  удовлетворяват условията за втори ред на апроксимация.

Да апроксимираме сега по метода на баланса първото от граничните условия. За целта интегрираме по  $x$  основното уравнение в интервала  $[0, \frac{h}{2}]$ . Получаваме равенството

$$(4.36) \quad (ku')_{\frac{1}{2}} - (ku')_0 - \int_0^{\frac{h}{2}} q(x)u(x) dx = - \int_0^{\frac{h}{2}} f(x) dx.$$

По условие  $(ku')_0 = \beta_1 u(0) - \mu_1$ . За  $(ku')_{\frac{1}{2}}$  имаме  $(ku')_{\frac{1}{2}} = -w_{\frac{1}{2}}$ . Интегрираме равенството  $u' = -w/k$  по  $x$  в граници от 0 до  $h$ , предполагайки, че  $w(x) \approx w_{\frac{1}{2}} = \text{const}$  за  $x \in (0, h)$ :

$$\int_0^h u'(x) dx = - \int_0^h \frac{w(x)}{k(x)} dx, \quad u_1 - u_0 \approx -w_{\frac{1}{2}} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{k(x)} dx.$$

Следователно

$$w_{\frac{1}{2}} \approx -\dot{a}_1 \frac{u_1 - u_0}{h},$$

където

$$\dot{a}_1 = \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{k(x)} dx \right]^{-1}.$$

За интегралите от равенството (4.36) имаме

$$\int_0^{\frac{h}{2}} q(x)u(x) dx \approx u_0 \int_0^{\frac{h}{2}} q(x) dx = u_0 \frac{h}{2} \dot{d}_0,$$

където

$$\mathring{d}_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} q(x) \, dx,$$

както и

$$\int_0^{\frac{h}{2}} f(x) \, dx \approx \frac{h}{2} \mathring{\varphi}_0,$$

където

$$\mathring{\varphi}_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} f(x) \, dx.$$

Заместваме в (4.36) и получаваме апроксимацията

$$\mathring{a}_1 \frac{y_1 - y_0}{h} - \beta_1 y_0 + \mu_1 - \mathring{d}_0 y_0 \frac{h}{2} = -\frac{h}{2} \mathring{\varphi}_0,$$

т. е.

$$\mathring{a}_1 y_{x,0} = \left( \beta_1 + \frac{h}{2} \mathring{d}_0 \right) y_0 - \left( \mu_1 + \frac{h}{2} \mathring{\varphi}_0 \right).$$

Да въведем означенията  $\bar{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{h}{2} \mathring{d}_0$ ,  $\bar{\mu}_1 = \mu_1 + \frac{h}{2} \mathring{\varphi}_0$ . Тогава получаваме окончателно следната апроксимация на първото гранично условие:

$$(4.37) \quad \mathring{a}_1 y_{x,0} = \bar{\beta}_1 y_0 - \bar{\mu}_1.$$

Аналогично може да се изведе диференчна апроксимация и на второто гранично условие. За нея се получава

$$(4.38) \quad -\mathring{a}_N y_{\bar{x},N} = \bar{\beta}_2 y_N - \bar{\mu}_2$$

където  $\bar{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{h}{2} \mathring{d}_N$ ,  $\bar{\mu}_2 = \mu_2 + \frac{h}{2} \mathring{\varphi}_N$ ,  $\mathring{d}_N = \frac{2}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 q(x) \, dx$ ,  $\mathring{\varphi}_N = \frac{2}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 f(x) \, dx$ .

Отново, вместо  $\mathring{a}_1$ ,  $\mathring{a}_N$ ,  $\mathring{d}_0$ ,  $\mathring{d}_N$ ,  $\mathring{\varphi}_0$ ,  $\mathring{\varphi}_N$  можем да разглеждаме коефициентите  $a_1$ ,  $a_N$ ,  $d_0$ ,  $d_N$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_N$ , които се пресмятат с помощта на някакви функционали от коефициентите на диференциалната задача (4.35), така че да са изпълнени всички условия, наложени върху изходното семейство хомогенни консервативни диференчни схеми.

### 4.5.2 Задача с условия за периодичност

Задачата с условия за периодичност се поставя така: Да се намери решение на уравнението

$$(4.39) \quad (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in (0, 1),$$

удовлетворяващо условието за периодичност с период 1

$$(4.40) \quad u(x+1) = u(x), \quad x \in [0, 1),$$

ако

- $k(x) \geq c_0 > 0$ ,  $q(x) \geq c_1 > 0$  (последното условие се поставя, за да има задачата единствено решение)
- $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  са периодични функции с период 1, т. е.

$$k(x+1) = k(x), \quad q(x+1) = q(x), \quad f(x+1) = f(x), \quad x \in [0, 1).$$

Условието (4.40), което се поставя във всяка точка на интервала  $[0, 1)$ , е еквивалентно на следните две:

$$(4.41) \quad \begin{cases} u(0) = u(1), \\ (ku')_0 = (ku')_1. \end{cases}$$

Да напишем диференчна схема, която апроксимира задача (4.39), (4.41) върху равномерна мрежа. За уравнението и първото гранично условие имаме

$$\begin{cases} (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, & x = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = y_N, \end{cases}$$

където коефициентите  $a$ ,  $d$ ,  $\varphi$  се избират, така че локалната грешка на апроксимация да бъде от втори ред и съответната диференчна задача да бъде разрешима.

Да изведем диференчна апроксимация на второто гранично условие. Можем да го представим във вида

$$(ku')_0 = (ku')_1 = \alpha,$$

да апроксимираме поотделно условията

$$(ku')_0 = \alpha,$$

$$(ku')_1 = \alpha,$$

след което да изключим неизвестното  $\alpha$ . Като използваме апроксимацията на трето гранично условие от 4.5.1, получаваме

$$\begin{aligned} a_1 y_{x,0} &= \frac{h}{2} d_0 y_0 - \frac{h}{2} \varphi_0 + \alpha \Rightarrow a_1 y_{x,0} - \frac{h}{2} (d_0 y_0 - \varphi_0) = \alpha, \\ -a_N y_{\bar{x},N} &= \frac{h}{2} d_N y_N - \frac{h}{2} \varphi_N - \alpha \Rightarrow a_N y_{\bar{x},0} + \frac{h}{2} (d_N y_N - \varphi_N) = \alpha, \end{aligned}$$

т. е.

$$(4.42) \quad a_1 y_{x,0} - \frac{h}{2} (d_0 y_0 - \varphi_0) = a_N y_{\bar{x},N} + \frac{h}{2} (d_N y_N - \varphi_N).$$

Ако поискаме  $a_1 = a_{N+1}$ ,  $y_1 = y_{N+1}$ ,  $d_0 = d_N$ ,  $\varphi_0 = \varphi_N$ , равенство (4.42) може да се запише във вида

$$a_{N+1} \frac{y_{N+1} - y_N}{h} - \frac{h}{2} (d_N y_N - \varphi_N) = a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} (d_N y_N - \varphi_N).$$

Като разделим на  $h$ , получаваме

$$\frac{1}{h} \left[ a_{N+1} \frac{y_{N+1} - y_N}{h} - a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} \right] - d_N y_N = -\varphi_N,$$

т. е.

$$(a y_{\bar{x}})_{x,N} - d_N y_N = -\varphi_N.$$

Окончателно получаваме следната периодична гранична задача:

$$(4.43) \quad \begin{cases} (a y_{\bar{x}})_x - d y = -\varphi, x = ih, i = 1, 2, \dots, N, a \geq c_0 > 0, d \geq c_1 > 0, \\ y_0 = y_N, y_1 = y_{N+1}. \end{cases}$$

За определяне на  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , се получава следната система уравнения

$$\begin{cases} a_i y_{i-1} - (a_i + a_{i+1} + h^2 d_i) y_i + a_{i+1} y_{i+1} = -\varphi_i h^2, i = 1, 2, \dots, N, \\ y_0 = y_N, y_{N+1} = y_1. \end{cases}$$

Решението на тази система може да бъде намерено по метода на цикличната прогонка, с който ще се запознаем в края на настоящия курс.

Ще отбележим, че диференчната схема (4.43) има втори ред на точност в  $C$ -норма, ако  $k(x) \in C^{(3)}(0, 1)$ , а  $f(x), q(x) \in C^{(2)}(0, 1)$ .

### 4.5.3 Стационарно уравнение на топлопроводността в цилиндрични координати

В случаите, когато се търси решение на стационарното уравнение на топлопроводността в прав кръгов цилиндър е естествено да го запишем в цилиндрична координатна система. Ако  $x$ ,  $y$  и  $z$  са декартовите координати на точка  $M(x, y, z)$ , а  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$  — цилиндричните координати на същата точка  $M(r, \varphi, z)$ , то връзката между тях се дава с формулите

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

Стационарното уравнение на топлопроводността в тримерното пространство в декартови координати има вида

$$(4.44) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) - qu = -f(x, y, z),$$

$$k = k(x, y, z).$$

Ако преминем към цилиндрични координати, уравнение (4.44) преминава в

$$(4.45) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) - qu = -f(r, \varphi, z).$$

Ако решението  $u$  не зависи от ъгъла  $\varphi$  и координатата  $z$ , получаваме едномерното уравнение на топлопроводността, записано в цилиндрична координатна система

$$(4.46) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rk \frac{du}{dr} \right) - qu = -f(r), \quad 0 < r < R, \quad q(r) \geq 0, \quad k(r) \geq c_1 > 0.$$

Уравнение (4.46) е ОДУ от втори ред и има две линейно независими решения. Едното от тях има логаритмична особеност в нулата (т. е. клони към безкрайност при  $r$  клонящо към нула както  $\ln r$ ), а другото е ограничено. Ние се интересуваме от ограниченото решение при  $r = 0$ . То удовлетворява условието

$$\lim_{r \rightarrow 0} rk(r) \frac{du}{dr} = 0,$$

което е еквивалентно на условието

$$(4.47) \quad u'(0) = 0.$$

При  $r = R$  се поставя гранично условие от първи, втори или трети род. Ние ще разглеждаме условието

$$(4.48) \quad u(R) = \mu.$$

Да изведем диференчна схема, апроксимираща задача (4.46)–(4.48). В интервала  $[0, R]$  въвеждаме равномерна мрежа

$$\bar{\omega}_h = \{r_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, hN = R\}.$$

Диференчната схема ще изведем по метода на баланса. За целта да представим уравнение (4.46) във вида

$$\frac{d}{dr} \left( rk(r) \frac{du}{dr} \right) - q(r)ru = -rf(r)$$

и да интегрираме последното уравнение по  $r$  в интервала  $[r_{i-1/2}, r_{i+1/2}]$ . Получаваме

$$\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \frac{d}{dr} \left( rk(r) \frac{du}{dr} \right) dr - \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} rqu dr = - \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} rf dr.$$

Означаваме  $W(r) = -rk(r) \frac{du}{dr}$ . Тогава имаме

$$(4.49) \quad W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} rqu dr = - \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} rf dr.$$

От израза за потока (чрез интегриране в интервала  $[r_{i-1}, r_i]$ ) получаваме:

$$\begin{aligned} -\frac{W(r)}{rk(r)} &= \frac{du}{dr}, & - \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{W(r)}{rk(r)} dr &= \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{du}{dr} dr, \\ -W_{i-1/2} \frac{1}{r_{i-1/2}} \frac{1}{h} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dr}{k(r)} &\approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, & W_{i-1/2} &\approx r_{i-1/2} \dot{a}_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \end{aligned}$$

където

$$\dot{a}_i = \left[ \frac{1}{h} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dr}{k(r)} \right]^{-1}.$$



Освен това имаме

$$\begin{aligned}\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} r q(r) u(r) \, dr &\approx h r_i u_i \frac{1}{h} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} q(r) \, dr = h r_i u_i \mathring{d}_i, \\ \mathring{d}_i &= \frac{1}{h} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} q(r) \, dr, \\ \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} r f(r) \, dr &\approx h r_i \frac{1}{h} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} f(r) \, dr = h r_i \mathring{\varphi}_i, \\ \mathring{\varphi}_i &= \frac{1}{h} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} f(r) \, dr.\end{aligned}$$

Тогава от уравнението на баланса (4.49) получаваме диференчното уравнение

$$\frac{1}{r_i} (r_{i-1/2} \mathring{a}_i y_{\bar{r},i})_{r,i} - \mathring{d}_i y_i = -\mathring{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Ако разглеждаме диференчното уравнение

$$\frac{1}{r_i} (r_{i-1/2} a_i y_{\bar{r},i})_{r,i} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

то коефициентите  $a_i$ ,  $d_i$  и  $\varphi_i$  ще избираме така, че да са удовлетворени условията

$$\begin{aligned}\frac{a_{i+1} - a_i}{h} &= k'_i + O(h^2), & d_i &= q_i + O(h^2), \\ \frac{a_{i+1} + a_i}{2} &= k_i + O(h^2), & \varphi_i &= f_i + O(h^2).\end{aligned}$$

В най-простия случай можем да вземем  $a_i = k_{i-1/2}$ ,  $d_i = q_i$ ,  $\varphi_i = f_i$ .

Сега ще покажем, че граничното условие (4.47) се апроксимира с грешка  $O(h^2)$  от диференчното уравнение

$$a_1 y_r(0) = \frac{h}{4} (q(0) y(0) - f(0)).$$

За локалната грешка на апроксимация получаваме

$$\begin{aligned}\nu &= a_1 u_r(0) - \frac{h}{4} [q(0) u(0) - f(0)] \\ &= \left( k_0 + \frac{h}{2} k'_0 + O(h^2) \right) \left( u'_0 + \frac{h}{2} u''_0 + O(h^2) \right) - \frac{h}{4} [q(0) u(0) - f(0)] \\ &= k_0 u'_0 + \frac{h}{2} (k_0 u''_0 + k'_0 u'_0) + O(h^2) - \frac{h}{4} (q_0 u_0 - f_0) \\ &= \frac{h}{2} (k u')'_0 - \frac{h}{4} (q_0 u_0 - f_0) + O(h^2).\end{aligned}$$

От уравнение (4.46) имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(ku' + r(ku')') - qu &= -f, & (ku')' &= qu - f - \frac{ku'}{r}, \\ (ku')'_0 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( qu - f - \frac{ku'}{r} \right) = q_0 u_0 - f_0 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{k(r)u'(r) - k(0)u'(0)}{r} \\ &= q_0 u_0 - f_0 - (ku')'_0, \end{aligned}$$

откъдето

$$(ku')'_0 = \frac{1}{2}(q_0 u_0 - f_0).$$

Тогава

$$\nu = \frac{h}{4}(q_0 u_0 - f_0) - \frac{h}{4}(q_0 u_0 - f_0) + O(h^2) = O(h^2).$$

И така, за задача (4.46)–(4.48) получаваме следната диференчна схема:

$$(4.50) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \left( (r - \frac{h}{2}) a y_{\bar{r}} \right)_r - dy = -\varphi, & r = ih \in (0, R), \\ \frac{a_1 y_r(0)}{h/4} - q_0 y_0 = -f_0, \\ y_N = \mu_2. \end{cases}$$

Може да се докаже, че диференчната схема (4.50) има втори ред на точност в класа на непрекъснатите коефициенти  $C^2[0, R]$ .

Сега ще разгледаме друга диференчна схема, построена върху т. нар. „потокова“ или „отместена“ мрежа. Условието  $u' = 0$  се апроксимира най-удобно, ако изберем специална мрежа — равномерна, отместена на стъпка  $h/2$  от координатното начало:

$$\omega_h = \left\{ r_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) h, \ i = 1, 2, \dots, N, \ h = \frac{2R}{2N-1}, \ r_N = R \right\}.$$

Да интегрираме уравнение (4.46) в интервала  $[0, h]$ . Получаваме

$$\begin{aligned} \int_0^h (rk(u)u')' dr - \int_0^h r(q(r)u - f(r)) dr &= 0, \\ W(0) - W(h) - r_1 u_1 \int_0^h q(r) dr &= -r_1 \int_0^h f(r) dr. \end{aligned}$$

Като отчетем, че  $W_0 = 0$  и разделим последното равенство на  $r_1 h$ , получаваме

$$-\frac{W(h)}{r_1 h} - u_1 \frac{1}{h} \int_0^h q(r) dr = -\frac{1}{h} \int_0^h f(r) dr.$$

Както обикновено, от равенството за потока получаваме последователно

$$\begin{aligned} W(r) &= -rk(r)u'(r), \quad -\frac{W(r)}{rk(r)} = -u'(r), \\ -\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} \frac{W(r)}{rk(r)} dr &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} u'(r) dr, \quad -\frac{W(h)}{r_{\frac{3}{2}}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{k(r)} dr \approx u_2 - u_1, \\ W(h) &\approx -r_{\frac{3}{2}} \dot{a}_2 \frac{u_2 - u_1}{h}, \quad \dot{a}_2 = \left[ \frac{1}{h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{k(r)} dr \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Тогава за диференчната апроксимация на граничното условие (4.47) получаваме

$$\frac{r_{\frac{3}{2}} \dot{a}_2 y_{r,1}}{r_1 h} - \dot{d}_1 y_1 = -\dot{\varphi}_1,$$

т. е.

$$\frac{2\dot{a}_2 y_{r,1}}{h} - \dot{d}_1 y_1 = -\dot{\varphi}_1.$$

Диференчната апроксимация на (4.46) във вътрешните точки на мрежата изглежда по същия начин, както апроксимацията при неотместена мрежа, но тук с  $r_i$  са означени „потоковите точки“. Съществена разлика между апроксимациите върху двете мрежи има в апроксимацията на граничното условие (4.47).

И така, върху „потоковата“ мрежа получаваме диференчната схема

$$(4.51) \quad \begin{cases} \frac{1}{r_i} (r_{i-\frac{1}{2}} a_i y_{\bar{r},i})_{r,i} - d_i y_i = -\varphi_i, & i = 2, 3, \dots, N-1, \\ \frac{2}{h} a_2 y_{r,1} - d_1 y_1 = -\varphi_i, & i = 1, \\ y_N = \mu_2, \end{cases}$$

където коефициентите се избират така, че да са удовлетворени условията

$$\begin{aligned} \frac{a_{i+1} - a_i}{h} &= k'_i + O(h^2), \quad d_i = q_i + O(h^2), \\ \frac{a_{i+1} + a_i}{2} &= k_i + O(h^2), \quad \varphi_i = f_i + O(h^2). \end{aligned}$$

За диференчната схема (4.51) отново може да се докаже, че има втори ред на точност, ако  $k(r)$ ,  $q(r)$ ,  $f(r) \in C^{(2)}[0, R]$ .

## Глава 5

# Диференчни схеми за елиптични частни диференциални уравнения

### 5.1 Диференчна задача на Дирихле за уравнението на Поасон в правоъгълник и в област със сложна форма

Уравненията на Лаплас и Поасон са типични представители на елиптическите ЧДУ. Задачата на Дирихле за уравнението на Поасон се формулира така:

Да се намери непрекъснатата в  $\overline{G} = G \cup \Gamma \subset R^p$  функция  $u(x)$ , удовлетворяваща уравнението на Поасон (Лаплас при  $f \equiv 0$ )

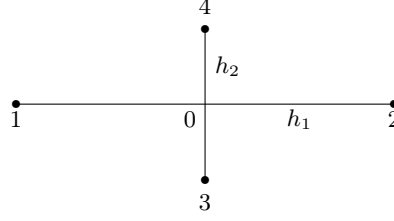
$$(5.1) \quad \Delta u = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} = -f(x), \quad x \in G,$$

и граничното условие

$$(5.2) \quad u|_{\Gamma} = \mu(x),$$

където  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ , а  $\overline{G}$  е  $p$ -мерна крайна област с граница  $\Gamma$ .

Преди да се занимаем с тази задача, ще разгледаме диференчни апроксимации на оператора на Лаплас  $\Delta u$  при  $p = 2$ . Най-простата апроксимация се получава върху шаблона „кръст“ от правоъгълна равномерна мрежа (фиг. 5.1). Върху този шаблон операторът на Лаплас може



Фиг. 5.1

да се апроксимира с диференчния оператор

$$(5.3) \quad (\Lambda v)_0 = (\Lambda_1 v)_0 + (\Lambda_2 v)_0 = v_{\bar{x}_1 x_1, 0} + v_{\bar{x}_2 x_2, 0},$$

или записано подробно

$$(\Lambda v)_0 = \frac{1}{h_1^2}(v_1 - 2v_0 + v_2) + \frac{1}{h_2^2}(v_3 - 2v_0 + v_4).$$

В частност, при квадратна мрежа  $h_1 = h_2 = h$  имаме

$$(\Lambda v)_0 = \frac{1}{h^2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0).$$

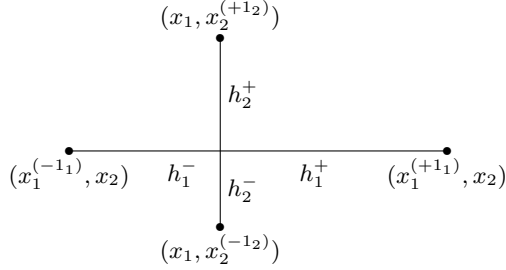
Да пресметнем локалната грешка на апроксимация за (5.3), където  $v$  е достатъчно гладка функция. Имаме

$$\begin{aligned} \psi_h = \Lambda v - \Delta v &= \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4) \right) - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_\alpha^2}{12} L_\alpha^2 v + O(h_1^4 + h_2^4) = O(\|h\|^2), \end{aligned}$$

където  $\|h\|^2 = h_1^2 + h_2^2$ ,  $L_\alpha v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2}$ ,  $L_\alpha^2 v = \frac{\partial^4 v}{\partial x_\alpha^4}$ . Може да се докаже, че върху този шаблон не може да се построи апроксимация от по-висок ред.

Да разгледаме сега апроксимация на оператора на Лаплас върху нерегулярния шаблон „кръст“ от неравномерна правоъгълна мрежа (фиг. 5.2). Върху този шаблон операторът на Лаплас се апроксимира с диференчния оператор

$$(5.4) \quad \Lambda^* v = \Lambda_1^* v + \Lambda_2^* v = v_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + v_{\bar{x}_2 \hat{x}_2},$$



Фиг. 5.2

или записано подробно

$$\Lambda^* v = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha}^* v = \sum_{\alpha=1}^2 v_{\bar{x}_{\alpha} \hat{x}_{\alpha}} \equiv \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left( \frac{v^{(+1_{\alpha})} - v}{h_{\alpha}^+} - \frac{v - v^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^-} \right),$$

където  $\bar{h}_{\alpha} = \frac{1}{2}(h_{\alpha}^+ + h_{\alpha}^-)$ , а  $v$  е стойността на функцията в центъра на шаблона. Да пресметнем локалната грешка на апроксимация за (5.4). Имаме

$$\begin{aligned} \psi_{h,\alpha} &= \Lambda_{\alpha}^* v - L_{\alpha} v = \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left( \frac{v^{(+1_{\alpha})} - v}{h_{\alpha}^+} - \frac{v - v^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^-} \right) - L_{\alpha} v \\ &= \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left[ \frac{1}{h_{\alpha}^+} \left( v + \frac{h_{\alpha}^+}{1!} \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} + \frac{(h_{\alpha}^+)^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{(h_{\alpha}^+)^3}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O((h_{\alpha}^+)^4) - v \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_{\alpha}^-} \left( v - v + \frac{h_{\alpha}^-}{1!} \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} - \frac{(h_{\alpha}^-)^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{(h_{\alpha}^-)^3}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O((h_{\alpha}^-)^4) \right) \right] - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} \\ &= \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left[ \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} + \frac{h_{\alpha}^+}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{(h_{\alpha}^+)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O((h_{\alpha}^+)^3) - \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} + \frac{h_{\alpha}^-}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(h_{\alpha}^-)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O((h_{\alpha}^-)^3) \right] - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} \\ &= \frac{1}{\bar{h}_{\alpha}} \left[ \frac{1}{2} (h_{\alpha}^+ + h_{\alpha}^-) \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} + \frac{1}{6} (h_{\alpha}^+ + h_{\alpha}^-) (h_{\alpha}^+ - h_{\alpha}^-) \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O((h_{\alpha}^+)^3 + (h_{\alpha}^-)^3) \right] \\ &\quad - \frac{\partial^2 v}{\partial x_{\alpha}^2} = \frac{h_{\alpha}^+ - h_{\alpha}^-}{3} \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O(\bar{h}_{\alpha}^2) = O(\bar{h}_{\alpha}). \end{aligned}$$

Тогава

$$\psi_h = \psi_{h,1} + \psi_{h,2} = O(\|h\|), \quad \|h\| = \bar{h}_1 + \bar{h}_2,$$

т. е. на нерегулярен шаблон диференчният оператор  $\Lambda^*$  апроксимира оператора на Лаплас с грешка от първи ред.

Да разгледаме сега втора апроксимация на оператора на Лаплас върху нерегулярния шаблон „кръст“ (фиг. 5.2). Тази втора апроксимация се нарича *консервативна*. Тя изглежда така:

$$(5.5) \quad \Lambda^{**}v = \sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha}^{**}v = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{v^{(+1_{\alpha})} - v}{h_{\alpha}^{+}} - \frac{v - v^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^{-}} \right), h_{\alpha} = \max(h_{\alpha}^{+}, h_{\alpha}^{-}),$$

т. е.

$$\Lambda_{\alpha}^{**}v = \frac{\hbar_{\alpha}}{h_{\alpha}} \Lambda_{\alpha}^{*}v.$$

Да пресметнем локалната грешка за апроксимацията (5.5). Имаме

$$\begin{aligned} \psi_{h,\alpha} &= \frac{\hbar_{\alpha}}{h_{\alpha}} \Lambda_{\alpha}^{*}v - L_{\alpha}v = \frac{\hbar_{\alpha}}{h_{\alpha}} \left[ L_{\alpha}v + \frac{1}{3}(h_{\alpha}^{+} - h_{\alpha}^{-}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O(\hbar_{\alpha}^2) \right] - L_{\alpha}v \\ &= \left( \frac{\hbar_{\alpha}}{h_{\alpha}} - 1 \right) L_{\alpha}v + \frac{\hbar_{\alpha}}{h_{\alpha}} \left[ \frac{1}{3}(h_{\alpha}^{+} - h_{\alpha}^{-}) \frac{\partial^3 v}{\partial x_{\alpha}^3} + O(\hbar_{\alpha}^2) \right] = O(1). \end{aligned}$$

Тогава

$$\psi_h = O(1).$$

### 5.1.1 Диференчна задача на Дирихле в правоъгълник

Нека  $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2), 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ . Разглеждаме задачата

$$(5.6) \quad \begin{cases} \Delta u = -f(x), & x \in G, \\ u_{\Gamma} = \mu(x). \end{cases}$$

Да въведем правоъгълна равномерна мрежа в областта  $\overline{G}$ . При въвеждането на мрежа в дадена област трябва да се отчита спецификата на границата, така че да се получи възможно най-проста апроксимация. В случая стъпките трябва да се съобразят с дължините на страните на правоъгълника. В противен случай мрежата или ще бъде неравномерна, или  $\gamma_h$  няма да бъде подмножество на  $\Gamma$  (мрежата ще бъде отместена).

И така, да построим в  $\overline{G}$  мрежа със стъпки по двете направления съответно  $h_1 = l_1/N_1$ ,  $h_2 = l_2/N_2$ , където  $N_1$  и  $N_2$  са положителни цели числа. Възлите от мрежата, които лежат във вътрешността на правоъгълника, се наричат *вътрешни*. Възлите, които лежат по границата на правоъгълника, се наричат *гранични*. Множеството на вътрешните възли ще означаваме с  $\omega_h$ , а на граничните — с  $\gamma_h$ . Мрежата  $\overline{\omega}_h$  се състои

от всички вътрешни и гранични възли:

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h.$$

Във вътрешните възли може да се използва апроксимацията (5.3), а граничното условие се апроксимира точно. В резултат получаваме диференчната задача на Дирихле, която се формулира по следния начин: Да се намери мрежова функция  $y(x)$ , дефинирана върху  $\bar{\omega}_h$ , удовлетворяваща във вътрешните възли уравнението

$$(5.7) \quad \Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h,$$

( $\varphi(x) = f(x)$ , ако  $f(x)$  е непрекъснатата) и приемаща по границата  $\gamma_h$  зададени стойности

$$(5.8) \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h.$$

В правоъгълника  $\bar{G}$  може да се въведе и неравномерна мрежа. Тогава съответната диференчна задача изглежда така:

$$(5.9) \quad \begin{cases} \Lambda^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y|_{\gamma_h} = \mu(x). \end{cases}$$

Схемата (5.7), (5.8) има локална грешка на апроксимация  $O(\|h\|^2)$ , а (5.9) —  $O(\|h\|)$ . Може да се използва и диференчна схема с нулев ред на локалната апроксимация, а именно схемата

$$(5.10) \quad \begin{cases} \Lambda^{**} y = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y|_{\gamma_h} = \mu(x). \end{cases}$$

Методи за числено решаване на системите линейни алгебрични уравнения (5.7), (5.8); (5.9); (5.10) ще разгледаме в края на настоящия курс.

### 5.1.2 Диференчна задача на Дирихле в област със сложна форма

Ако областта  $\bar{G}$ , в която се търси решение на задачата на Дирихле, е с криволинейна граница, то мрежата  $\omega_h(\bar{G})$ , изобщо казано, е неравномерна в близост до границата. Да разгледаме произволна крайна област  $G$  с граница  $\Gamma$ ,  $\bar{G} = G \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$  и предполагайки, че координатното начало лежи в  $G$ , да построим равномерна мрежа и по двете направления



с прави, успоредни на координатните оси. Нека стъпката по  $x_\alpha$  е  $h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Правите, с помощта на които се строи мрежата, са

$$x_1^{i_1} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad x_2^{i_2} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Възлите от мрежата ще разделим на няколко класа:

- *вътрешни* — това са възлите  $x^{(i)} = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ , лежащи в  $G$ . Да означим тяхното множество с  $\omega_h = \{x^{(i)} \in G\}$ .
- *гранични* — това са пресечните точки на правите с границата  $\Gamma$ . Пресечните точки на правите, успоредни на координатната ос  $Ox_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , с  $\Gamma$  се наричат *гранични по направление  $x_\alpha$* . Множеството на всички гранични по направление  $x_\alpha$  възли ще означаваме с  $\gamma_{h,\alpha}$  а с  $\gamma_h$  ще означим множеството на всички гранични възли, т. е.

$$\gamma_h = \gamma_{h,1} \cup \gamma_{h,2}.$$

Очевидно  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$  е мрежата в  $\bar{G}$ .

Да направим по детайлна класификация на вътрешните възли:

- *приграничен по направление  $x_\alpha$  възел* — това е най-близкият до граничния по направление  $x_\alpha$  възел. Ако неговото разстояние  $h_\alpha^+$  до граничния възел е различно от  $h_\alpha$ , то този възел ще наричаме *нерегулярен по направление  $x_\alpha$* . Да означим с  $\omega_{h,\alpha}^*$  множеството на всички пригранични възли по направление  $x_\alpha$ , а с  $\omega_{h,\alpha}^{**}$  — множеството на нерегулярните пригранични по  $x_\alpha$  възли. Очевидно  $\omega_{h,\alpha}^{**} \subseteq \omega_{h,\alpha}^*$ . Да означим с  $\omega_h^*$  множеството на всички пригранични възли, а с  $\omega_h^{**}$  — множеството от всички нерегулярни по някое направление пригранични възли.
- Нека  $\dot{\omega}_h$  е допълнението на  $\omega_h^*$  до  $\omega_h$ , т. е.  $\omega_h = \omega_h^* \cup \dot{\omega}_h$ . *Строго вътрешни възли* ще наричаме възлите, принадлежащи на  $\dot{\omega}_h$ . С  $\dot{\omega}_{h,\alpha}$  ще означаваме строго вътрешните по  $x_\alpha$  възли, т. е. за  $x \in \dot{\omega}_{h,\alpha}$  съседните по направление  $Ox_\alpha$  възли са вътрешни.

Нашата цел е да напишем диференчна схема за задачата на Дирихле (5.6) в областта  $\bar{G}$ . Във всеки строго вътрешен възел  $x \in \dot{\omega}_h$  и във всеки регулярен по  $x_\alpha$  приграничен възел диференчният оператор  $\Lambda_\alpha u = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$  апроксимира  $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$  с грешка  $O(h_\alpha^2)$ . Ако възелът

е нерегулярен по направление  $x_\alpha$ , ще използваме втората апроксимация за  $L_\alpha u$  върху неравномерен шаблон —  $\Lambda_\alpha^{**}y$ . Граничното условие се апроксимира точно:

$$y|_{\gamma_h} = \mu(x).$$

В резултат получаваме следната дискретна задача на Дирихле: Да се намери мрежова функция  $y(x)$ , дефинирана за  $x \in \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ , удовлетворяваща в строго вътрешните възли уравнението

$$(5.11) \quad \Lambda y = -\varphi(x), \quad x \in \mathring{\omega}_h,$$

в приграничните възли — уравнението

$$(5.12) \quad \tilde{\Lambda}^* y = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h^*,$$

( $\tilde{\Lambda}^*$  — съчетание от  $\Lambda_\alpha$  и  $\Lambda_\beta^{**}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ ) и приемаща в граничните възли  $x \in \gamma_h$  зададени стойности

$$(5.13) \quad y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h.$$

За грешката  $z = y - u_h$  на схемата (5.11)–(5.13) получаваме следната задача:

$$\begin{cases} \Lambda z = -\psi_h, & x \in \mathring{\omega}_h, \\ \tilde{\Lambda}^* z = -\psi_h^*, & x \in \omega_h^*, \\ z = 0, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

Грешката на апроксимация е

$$\begin{aligned} \psi_h &= \Lambda u - Lu, & x \in \mathring{\omega}_h, \\ \psi_h^* &= \tilde{\Lambda}^* u - Lu, & x \in \omega_h^*. \end{aligned}$$

Ако  $u \in C^4(\bar{G})$ , то

$$|\psi_h| \leq M_4 \frac{\|h\|^2}{12}, \quad |\psi_h^*| = O(1).$$

Аналогично може да се построи диференчна схема и в  $p$ -мерния случай.

**Забележка.** Много разпространена е апроксимацията върху неравномерен шаблон  $\Lambda^* y$ . В някои случаи обаче, построеният по такъв начин диференчен оператор губи ред важни свойства, присъщи на изходното диференциално уравнение — симетричност и знакоопределеност. Отсъствието на тези свойства затруднява прилагането на ефективни итерационни методи за решаване на съответните системи диференчни уравнения.

## 5.2 Устойчивост и сходимост

За изследване на сходимостта на диференчната схема (5.11)–(5.13) ще използваме принципа за максимума. Затова да запишем диференчните уравнения в каноничен вид. Формално ще считаме, че работим с възел  $x$ , който е нерегулярен по всички направления. Ако той е регулярен по някое от направленията, от тази апроксимация веднага следва апроксимацията в регулярен възел. Имаме

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha}^{**}y &= \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{y^{(+1_{\alpha})} - y}{h_{\alpha}^{+}} - \frac{y - y^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^{-}} \right) \\ &= \frac{1}{h_{\alpha}h_{\alpha}^{+}}y^{(+1_{\alpha})} + \frac{1}{h_{\alpha}h_{\alpha}^{-}}y^{(-1_{\alpha})} - \frac{2h_{\alpha}}{h_{\alpha}h_{\alpha}^{+}h_{\alpha}^{-}}y\end{aligned}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2h_{\alpha}}{h_{\alpha}h_{\alpha}^{+}h_{\alpha}^{-}}y = \sum_{\alpha=1}^p \left( \frac{1}{h_{\alpha}h_{\alpha}^{+}}y^{(+1_{\alpha})} + \frac{1}{h_{\alpha}h_{\alpha}^{-}}y^{(-1_{\alpha})} \right) + f(x).$$

Ако възелът  $x$  е регулярен по някое направление  $x_{\beta}$ , то в последната формула трябва формално да положим  $h_{\beta} = h_{\beta}^{+} = h_{\beta}^{-} = h_{\beta}$ . Ако  $x$  е регулярен по всички направления, получаваме

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2}{h_{\alpha}^2}y = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}^2} \left( y^{(+1_{\alpha})} + y^{(-1_{\alpha})} \right) + f(x).$$

Да разгледаме въпросите за устойчивост и сходимост на диференчната задача на Дирихле (5.11)–(5.13). Въвеждаме означението

$$\bar{\Lambda} = \begin{cases} \Lambda, & x \in \dot{\omega}_h, \\ \tilde{\Lambda}^*, & x \in \omega_h^*. \end{cases}$$

Тогава получаваме следната диференчна задача:

$$(5.14) \quad \begin{cases} \bar{\Lambda}y = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ y = \mu, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

В сила е следната

**Теорема.** За решението на диференчната задача на Дирихле (5.14) е в сила оценката

$$\|y\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_{\gamma}} + \frac{R^2}{2p} \|\varphi\|_{\dot{C}} + h^2 \|\varphi\|_{C^*}, \quad h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_{\alpha},$$

където  $R$  е радиусът на  $p$ -мерно кълбо, изцяло съдържащо  $\bar{G}$ , а

$$\begin{aligned}\|y\|_{\bar{C}} &= \max_{\bar{\omega}_h} |y|, & \|\mu\|_{C_\gamma} &= \max_{\gamma} |\mu|, \\ \|\varphi\|_{\dot{C}} &= \max_{\dot{\omega}_h} |\varphi|, & \|\varphi\|_{C^*} &= \max_{\omega_h^*} |\varphi|.\end{aligned}$$

**Забележка.** Аналогична теорема може да се докаже и ако в нерегулярните възли се вземе апроксимацията  $\Lambda^*$ .

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Да представим решението на задачата (5.14) във вида

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

където

$$(5.14a) \quad \begin{cases} \bar{\Lambda} \bar{y} = 0, & x \in \omega_h, \\ \bar{y} = \mu, & x \in \gamma_h, \end{cases}$$

$$(5.14b) \quad \begin{cases} \bar{\Lambda} \tilde{y} = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ \tilde{y} = 0, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

Тъй като за задача (5.14) са изпълнени условията на принципа за максимума, то за задача (5.14a) имаме

$$\|\bar{y}\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Да получим сега оценка за  $\tilde{y}$ . Дясната част  $\varphi$  ще представим във вида

$$\varphi = \dot{\varphi} + \varphi^*,$$

където

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} \varphi, & x \in \dot{\omega}_h, \\ 0, & x \in \omega_h^*, \end{cases} \quad \varphi^* = \begin{cases} 0, & x \in \dot{\omega}_h, \\ \varphi, & x \in \omega_h^*. \end{cases}$$

Нека  $\tilde{y} = v + w$ , където

$$\begin{cases} \bar{\Lambda} v = -\dot{\varphi}, & x \in \omega_h, \\ v = 0, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\Lambda} w = -\varphi^*, & x \in \omega_h, \\ w = 0, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

За оценка на  $v$  ще построим мажорантна функция  $Y(x)$ . Без ограничение на общността, както казахме в началото, можем да считаме, че координатното начало лежи в  $G$ . Да разгледаме функцията

$$Y(x) = K(R^2 - r^2), \quad r^2 = \sum_{\beta=1}^p x_\beta^2,$$

където  $R$  е радиусът на  $p$ -мерно кълбо с център в началото на координатната система, изцяло съдържащо областта  $G$ , а  $K$  е константа, която подлежи на определяне. Да пресметнем най-напред  $\Lambda_\alpha Y$ . Имаме

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha Y &= \Lambda_\alpha(KR^2) - \Lambda_\alpha(Kr^2) = -K\Lambda_\alpha \sum_{\beta=1}^p x_\beta^2 = -K \sum_{\beta=1}^p \Lambda_\alpha x_\beta^2 = -K\Lambda_\alpha x_\alpha \\ &= -\frac{K}{h_\alpha^2} [(x_\alpha + h_\alpha)^2 - 2x_\alpha^2 + (x_\alpha - h_\alpha)^2] = -2K,\end{aligned}$$

защото  $\Lambda_\alpha(KR^2) = 0$  и  $\Lambda_\alpha x_\beta^2 = 0$  при  $\beta \neq \alpha$ .

Да пресметнем сега  $\Lambda_\alpha^{**}Y$ :

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha^{**}Y &= -K\Lambda_\alpha^{**}x_\alpha^2 = -\frac{K}{h_\alpha} \left( \frac{(x_\alpha + h_\alpha^+)^2 - x_\alpha^2}{h_\alpha^+} - \frac{x_\alpha^2 - (x_\alpha - h_\alpha^-)^2}{h_\alpha^-} \right) \\ &= -\frac{K}{h_\alpha} \left( \frac{2x_\alpha h_\alpha^+ + (h_\alpha^+)^2}{h_\alpha^+} - \frac{2x_\alpha h_\alpha^- - (h_\alpha^-)^2}{h_\alpha^-} \right) \\ &= -\frac{K}{h_\alpha} \left( \frac{2x_\alpha h_\alpha^+ h_\alpha^-}{h_\alpha^+ h_\alpha^-} + \frac{(h_\alpha^+)^2 h_\alpha^- - 2x_\alpha h_\alpha^- h_\alpha^+ + (h_\alpha^-)^2 h_\alpha^+}{h_\alpha^+ h_\alpha^-} \right) \\ &= -\frac{K}{h_\alpha} \frac{h_\alpha^+ h_\alpha^- (h_\alpha^+ + h_\alpha^-)}{h_\alpha^+ h_\alpha^-} = -2\Theta_\alpha K, \quad \Theta_\alpha = \frac{(h_\alpha^+ + h_\alpha^-)}{2h_\alpha} = \frac{h_\alpha}{h_\alpha}.\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}\Lambda Y &= \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha Y = -2Kp, \quad x \in \dot{\omega}_h, \\ \Lambda^{**}Y &= -2pK\Theta, \quad x \in \omega_h^*, \quad \Theta = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p \Theta_\alpha,\end{aligned}$$

като  $\Theta_\alpha = 1$ , ако вземем  $x \in \omega_h^*$  е регулярен по направление  $x_\alpha$ . Следователно  $Y$  е решение на задачата

$$\begin{cases} \bar{\Lambda}Y = -\bar{F}(x), & x \in \omega_h, \\ Y|_{\gamma_h} = K(R^2 - r^2)|_{\gamma_h} \geq 0, \end{cases}$$

където

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 2pK, & x \in \dot{\omega}_h, \\ 2pK\Theta, & x \in \omega_h^*.\end{cases}$$

Искаме да изберем константата  $K$  така, че функцията  $Y$  да бъде мажоранта за  $v$ . От теоремата за сравнение виждаме, че трябва да изберем

константата  $K$  така, че да бъдат изпълнени неравенствата

$$|F| \leq \bar{F}, \quad |\mu| \leq \bar{\mu}.$$

Ако вземем  $K = \frac{1}{2p} \|\dot{\varphi}\|_C$ , то тъй като  $\mu = 0$ , а  $\bar{\mu} = K(R^2 - r^2)|_{\gamma_h} \geq 0$ , второто неравенство е изпълнено. Като отчетем, че

$$F(x) = \begin{cases} \dot{\varphi}, & x \in \dot{\omega}_h, \\ 0, & x \in \omega_h^*, \end{cases}$$

и вида на  $\bar{F}(x)$  виждаме, че и първото неравенство е изпълнено. Тогава

$$\|v\|_C \leq \|Y\|_C \leq \frac{1}{2p} \|\dot{\varphi}\|_C R^2 = \frac{R^2}{2p} \|\dot{\varphi}\|_C = \frac{R^2}{2p} \max_{\dot{\omega}} |\varphi| = \frac{R^2}{2p} \|\varphi\|_{\dot{C}}.$$

Да получим сега оценка за  $w$ . Ще покажем най-напред, че:

- $D(x) = 0$  за  $x \in \dot{\omega}_h$ ;
- $D(x) \geq 1/h^2$  за  $x \in \omega_h^*$ ,  $h = \max_{\alpha} h_{\alpha}$ .

Наистина, ако  $x \in \dot{\omega}_h$ , имаме  $\bar{\Lambda} = \Lambda$ . Тогава

$$\Lambda w = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} w = \sum_{\alpha=1}^p \frac{w^{(+1_{\alpha})} - 2w + w^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^2} = -\varphi^*,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha=1}^p \frac{2}{h_{\alpha}^2} w = \sum_{\alpha=1}^p \left( \frac{1}{h_{\alpha}^2} w^{(+1_{\alpha})} + \frac{1}{h_{\alpha}^2} w^{(-1_{\alpha})} \right) + \varphi^*,$$

откъдето  $D = 0$  върху  $\dot{\omega}$ .

Ако  $x \in \omega_h^*$  е приграничен и нерегулярен само по  $x_{\alpha}$  и точката  $x^{(+1_{\alpha})} \in \gamma_h$ , а  $x^{(-1_{\alpha})} \in \omega_h$ , то тогава имаме  $\bar{\Lambda} = \Lambda^{**}$  и

$$\Lambda^{**} w = \sum_{\beta=1}^p \Lambda_{\beta}^{**} w = \Lambda_{\alpha}^{**} w + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \Lambda_{\beta} w = -\varphi^*,$$

$$\Lambda_{\alpha}^{**} w = \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{w^{(+1_{\alpha})} - w}{h_{\alpha}^+} - \frac{w - w^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}} \right) = -\frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{w}{h_{\alpha}^+} + \frac{w - w^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}} \right),$$

защото  $w^{(+1_\alpha)} = 0$ . Тогава

$$A(x) = \frac{1}{h_\alpha h_\alpha^+} + \frac{1}{h_\alpha^2} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \frac{2}{h_\beta^2}, \quad \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi) = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^p \frac{2}{h_\beta^2} + \frac{1}{h_\alpha^2},$$

$$D(x) = \frac{1}{h_\alpha h_\alpha^+} \geq \frac{1}{h_\alpha^2} \geq \frac{1}{h^2}, \quad \text{където } h = \max_\alpha h_\alpha.$$

Ако вземем  $x$  е приграничен само по направление  $x_\alpha$ , но е регулярен, то

$$D(x) = \frac{1}{h_\alpha^2} \geq \frac{1}{h^2}.$$

Ако  $x$  е приграничен и по други направления, това само ще увеличи  $D(x)$ . Тогава от принципа за максимума следва, че

$$\|w\|_C \leq \left\| \frac{\varphi^*}{D} \right\|_{C^*} = h^2 \|\varphi^*\|_{C^*}.$$

Като вземем предвид, че

$$\|y\|_{\bar{C}} \leq \|\bar{y}\|_{\bar{C}} + \|v\|_C + \|w\|_C \leq \|\mu\|_{C_\gamma} + \frac{R^2}{2p} \|\varphi\|_{\dot{C}} + h^2 \|\varphi\|_{C^*},$$

получаваме твърдението на теоремата, което фактически означава устойчивост на диференчната задача на Дирихле по гранични данни и дясна част.

**Теорема.** Ако решението на задачата на Дирихле за уравнението на Поасон  $u(x) \in C^4(\bar{G})$ , то съответната диференчна схема е равномерно сходяща със скорост  $O(h^2)$ .

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Нека  $z = y - u_h$ . Мрежовата функция  $z$  удовлетворява задачата

$$\begin{cases} \bar{\Delta} z = -\psi, & x \in \omega, \\ z = 0, & x \in \gamma, \end{cases}$$

където  $\psi = \bar{\Delta} u + f$  е грешката на апроксимация. Видяхме, че

$$\psi = O(\|h\|^2) = O(h^2) \quad \text{в регулярните възли} \quad \left( h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha \right),$$

$$\psi = O(1) \quad \text{в нерегулярните възли.}$$

От предходната теорема следва, че

$$\|z\|_C = \|y - u\|_C = \frac{R^2}{2p} \|\psi\|_{\dot{C}} + h^2 \|\psi\|_{C^*} = O(h^2).$$

### 5.3 Уравнения с променливи коефициенти

Да разгледаме в областта  $\bar{G} = G + \Gamma$ , където

$$\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

елиптичната задача

$$(5.15) \quad \begin{cases} Lu = -f(x), & x \in G, \\ u = \mu(x), & v \in \Gamma, \end{cases}$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right).$$

Ще считаме, че  $k_\alpha(x)$  са достатъчно гладки функции и  $k_\alpha(x) \geq c_1 > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ . В изотропна среда  $k_1 = k_2$ ; в неизотропна —  $k_1 \neq k_2$ .

В областта  $\bar{G}$  въвеждаме правоъгълна равномерна мрежа със стъпки  $h_1$  и  $h_2$  по двете направления. Да направим апроксимацията  $\Lambda_\alpha \sim L_\alpha$ , където

$$\Lambda_\alpha u = (a_\alpha u_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha},$$

а коефициентите  $a_\alpha$  се избират така, че

$$\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O(h_\alpha^2),$$

т. е.  $\Lambda_\alpha$  има втори ред на локална апроксимация. Коефициентите  $a_\alpha$  могат да се избират по аналогия с едномерния случай, например

$$a_1(x_1, x_2) = k_1 \left( x_1 - \frac{h_1}{2}, x_2 \right),$$

$$a_2(x_1, x_2) = k_2 \left( x_1, x_2 - \frac{h_2}{2} \right).$$

Тогава на диференциалната задача (5.15) съпоставяме диференчната задача

$$\begin{cases} \Lambda y = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ y = \mu, & x \in \gamma_h, \end{cases}$$

където  $\Lambda y = (\Lambda_1 + \Lambda_2)y$ ,  $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$  с грешка на апроксимация  $\psi = \Lambda u + \varphi = O(\|h\|^2)$ .

Апроксимация от такъв вид се явява естествено обобщение за многомерния случай на хомогенните консервативни диференчни схеми, които разгледахме за едномерното уравнение.



## 5.4 Схема с повишен ред на точност за задачата на Дирихле за уравнението на Поасон в правоъгълник

Разглеждаме отново задачата

$$\begin{cases} Lu \equiv \Delta u = -f(x), & x \in G = \{(x_1, x_2) : 0 < x_i < l_i, i = 1, 2\}, \\ u = \mu(x), & x \in \gamma, \end{cases}$$

където

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Въвеждаме равномерна мрежа и по двете направления със стъпки  $h_1$  и  $h_2$  съответно. Да разгледаме диференчния оператор  $\Lambda$ :

$$\Lambda u = (\Lambda_1 + \Lambda_2)u, \quad \Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Нека  $u = u(x)$  е достатъчно гладка функция. Знаем, че

$$\Lambda u - \Delta u = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(\|h\|^4), \quad L_\alpha^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4}.$$

От уравнението

$$L_1 u + L_2 u = -f(x)$$

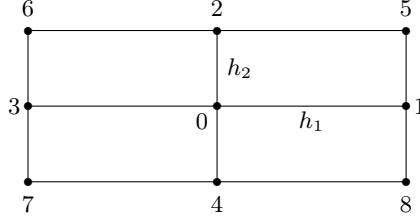
имаме

$$L_1^2 u = -L_1 L_2 u - L_1 f, \quad L_2^2 u = -L_2 L_1 u - L_2 f.$$

Щом областта е правоъгълник, операторите  $L_1$  и  $L_2$  са комутативни. Тогава

$$\begin{aligned} \Lambda u &= Lu - \frac{h_1^2}{12} (L_1 L_2 u + L_1 f) - \frac{h_2^2}{12} (L_2 L_1 u + L_2 f) + O(\|h\|^4) \\ &= -f - \frac{h_1^2}{12} L_1 f - \frac{h_2^2}{12} L_2 f - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} L_1 L_2 u + O(\|h\|^4). \end{aligned}$$

Да заменим оператора  $L_1 L_2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$  с диференчния оператор (вж. фиг. 5.3)



Фиг. 5.3

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 \Lambda_2 u|_0 &= u_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2, 0} = \frac{1}{h_2^2} [y_{\bar{x}_1 x_1, 2} - 2y_{\bar{x}_1 x_1, 0} + y_{\bar{x}_1 x_1, 4}] \\
 &= \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [y_6 - 2y_2 + y_5 - 2y_3 + 4y_0 - 2y_1 + y_7 - 2y_4 + y_8] \\
 &= \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [y_5 + y_6 + y_7 + y_8 - 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 4y_0]
 \end{aligned}$$

Да пресметнем локалната грешка на апроксимация

$$\psi = \Lambda_1 \Lambda_2 u - L_1 L_2 u.$$

При фиксирано  $x_1$  имаме

$$\Lambda_2 u = L_2 u(x_1, x_2) + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \xi_2), \quad \xi_2 = x_2 + \theta_2 h_2, \quad |\theta_2| \leq 1.$$

Да приложим към последното равенство оператора  $\Lambda_1$ . Получаваме

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = \Lambda_1 L_2 u(x_1, x_2) + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \xi_2).$$

От друга страна, при фиксирано  $x_2$  имаме

$$\Lambda_1 v = L_1 v(x_1, x_2) + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4}(\xi_1, x_2), \quad \xi_1 = x_1 + \theta_1 h_1, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Тогава, ако  $L_2 u = v$ , имаме

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 L_2 u(x_1, x_2) &= L_1 L_2 u(x_1, x_2) + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2}(\xi_1^*, x_2), \\
 \xi_1^* &= x_1 + \theta_1^* h_1, \quad |\theta_1^*| \leq 1.
 \end{aligned}$$

За второто събираемо имаме

$$\frac{h_2^2}{12} \Lambda_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1, \xi_2) = \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4}(\xi_1^{**}, \xi_2), \quad \xi_1^{**} = x_1 + \theta^{**} h_1, \quad |\theta^{**}| \leq 1.$$

Всички тези равенства са верни при предположение, че  $u(x)$  има непрекъснати шести производни в интервалите  $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$  и  $[x_2 - h_2, x_2 + h_2]$ . Тогава

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u = L_1 L_2 u + \frac{h_1^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^4 \partial x_2^2}(\xi_1^*, x_2) + \frac{h_2^2}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^4}(\xi_1^{**}, \xi_2),$$

т. е.

$$\Lambda_1 \Lambda_2 u - L_1 L_2 u = O(h_1^2) + O(h_2^2) = O(\|h\|^2).$$

Тогава уравнението

$$(5.16) \quad \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y = - \left( f + \frac{h_1^2}{12} L_1 f + \frac{h_2^2}{12} L_2 f \right)$$

има четвърти ред на апроксимация. Операторът  $\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y$  е дефиниран върху деветточковия шаблон от фиг. 5.3. От изчислителна гледна точка е по-удобно  $L_1 f$  и  $L_2 f$  да се заменят с  $\Lambda_1 f$  и  $\Lambda_2 f$ . При това дясната част на (5.16) се променя с  $O(\|h\|^4)$ , което няма да наруши реда на апроксимация. Може да се докаже, че схема (5.16) е равномерно сходяща със скорост  $O(\|h\|^4)$  при произволни  $h_1$  и  $h_2$ .

Ако мрежата е квадратна, т. е. ако  $h_1 = h_2 = h$ , схема (5.16) приема вида

$$\Lambda y + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 y = - \left( f + \frac{h^2}{12} \Lambda f \right).$$

Този подход би могъл да се използва и ако областта е  $p$ -мерен паралелепипед. Ако мрежата е квадратна, при подходящо апроксимиране на дясната част може да се построи диференчна схема с грешка  $O(\|h\|^6)$ .

## Глава 6

# Диференчни схеми за параболични частни диференциални уравнения

### 6.1 Едномерно уравнение на топлопроводността с постоянни коефициенти. Двуслойни схеми

Търси се непрекъснато в областта  $\overline{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  решение  $u(x, t)$  на задачата

$$(6.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T],$$

$$(6.2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$(6.3) \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad t \in [0, T],$$

$$(6.4) \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T],$$

ако са изпълнени условията за съгласуваност на началните и граничните данни

$$u_0(0) = \mu_1(0), \quad u_0(1) = \mu_2(0).$$

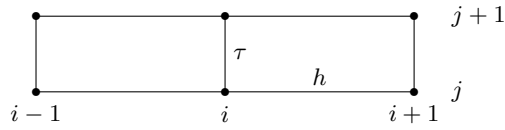
Да въведем равномерните мрежи

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N} \right\},$$
$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad \tau = \frac{T}{j_0} \right\}$$

и мрежа в  $\bar{D}$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\}.$$

Множеството от възлите, лежащи на правата  $t = t_j$ , се нарича *слой*. Ще разглеждаме двуслойни диференчни схеми за задача (6.1)–(6.4). Шаблонът, върху който ще строим тези диференчни схеми, е изобразен на фиг. 6.1.



Фиг. 6.1

Да означим с  $y_i^j$  стойността на мрежовата функция  $y$ , дефинирана върху мрежата  $\bar{\omega}_{h\tau}$ . Да разгледаме еднопараметричното семейство диференчни схеми

$$(6.5) \quad \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j) + \varphi_i^j,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, j_0-1,$$

$$(6.6) \quad y_i^0 = u_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$(6.7) \quad y_0^j = \mu_1^j, \quad y_N^j = \mu_2^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0,$$

където  $\Lambda y_i = y_{\bar{x}x,i}$ , а с  $\varphi_i^j$  сме означили мрежовата функция, апроксимираща функцията  $f(x)$ . Диференчната схема (6.5)–(6.7) ще наричам *схема с тегло*. Уравнение (6.5) се отнася за всички вътрешни възли. Началното и граничните условия се пишат в граничните възли на мрежата. Схемата (6.5)–(6.7) съдържа стойностите на търсената функция  $y$  на два последователни слоя и затова се нарича *двуслойна схема*.

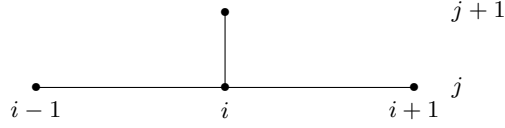
Да разгледаме схемите, които се получават при различни стойности на параметъра  $\sigma$ .

- При  $\sigma = 0$  се получава четириточковата схема, построена върху шаблона от фиг. 6.2:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^j + \varphi_i^j,$$

или

$$(6.8) \quad y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$



Фиг. 6.2

Стойността  $y_i^{j+1}$  във всяка точка от слоя  $t = t_{j+1}$  (новия слой) се изразява по явната формула (6.8) чрез стойностите на  $y$  на слоя  $t = t_j$  (стария слой). Тъй като при  $t = 0$  е зададена началната стойност  $y_i^0 = u_{0,i}$ , то формула (6.8) позволява последователно да се определят стойностите на  $y$  на всеки слой по времето. Схема (6.6)–(6.8) се нарича *явна*.

- Ако  $\sigma \neq 0$ , схема (6.5)–(6.7) се нарича *неявна двуслойна схема*. В този случай за определянето на  $y^{j+1}$  се получава системата линейни алгебрични уравнения

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j,$$

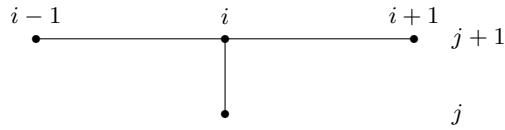
$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0^{j+1} = \mu_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = \mu_2^{j+1},$$

която може да се реши например по метода на прогонката.

- При  $\sigma = 1$  се получава т. нар. *чисто неявна схема*

$$(6.9) \quad \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j,$$

построена по шаблона от фиг. 6.3.



Фиг. 6.3

- При  $\sigma = \frac{1}{2}$  се получава шестточковата симетрична диференчна схема (*схема на Кранк–Никълсън*)

$$(6.10) \quad \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y_i^{j+1} + y_i^j) + \varphi_i^j.$$

6.1. Едномерно уравнение на топлопроводността. Двуслойни схеми 79

Да пресметнем грешката на апроксимация на схемата с тегло (6.5)–(6.7) при предположение, че функцията  $u(x, t)$  е достатъчно гладка. Ще преминем към безиндексни означения, полагайки

$$y_i^j = y, \quad y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}.$$

Тогава задача (6.5)–(6.7) може да се запише във вида

$$(6.11) \quad y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad (x, t) \in \bar{w}_{h\tau}, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x},$$

$$(6.12) \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{w}_h,$$

$$(6.13) \quad y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in \bar{w}_\tau.$$

Ще изследваме грешката на апроксимация  $\psi$  на схема (6.11)–(6.13) за решението  $u(x, t)$  на задача (6.1)–(6.4). Ще използваме следните означения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \dot{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u', \quad \bar{u} = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), \quad t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{\tau}{2} \equiv \bar{t}.$$

Ще прилагаме формулата на Тейлор в околност на точката  $(x_i, \bar{t})$ , която е център на симетрия за шаблона от фиг. 6.1. Очевидно

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \frac{1}{2}(\hat{u} - u) = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \frac{\tau}{2}u_t, \\ u &= \frac{1}{2}(\hat{u} + u) - \frac{1}{2}(\hat{u} - u) = \frac{1}{2}(\hat{u} + u) - \frac{\tau}{2}u_t. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} \sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u &= \sigma \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + \sigma \frac{\tau}{2}u_t + (1 - \sigma)\frac{1}{2}(\hat{u} + u) - (1 - \sigma)\frac{\tau}{2}u_t \\ &= \frac{1}{2}(\hat{u} + u) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau u_t, \end{aligned}$$

и за грешката на апроксимация  $\psi$  получаваме

$$\psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) - u_t + \varphi = \frac{1}{2}\Lambda(\hat{u} + u) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau \Lambda u_t - u_t + \varphi.$$

Освен това

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u} + u}{2} &= \bar{u} + O(\tau^2), & u_t &= \bar{u}_t + O(\tau^2), \\ \Lambda u &= Lu + \frac{h^2}{12}L^2u + O(h^4), & Lu &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Тогава за  $\psi$  получаваме

$$\begin{aligned}\psi &= \Lambda(\bar{u} + O(\tau^2)) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau\Lambda(\bar{u} + O(\tau^2)) - \bar{u} + O(\tau^2) + \varphi \\ &= L\bar{u} + \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(\tau^2 + h^4) + (\sigma - \frac{1}{2})\tau L\bar{u} - \bar{u} + \varphi.\end{aligned}$$

От уравнение (6.1) имаме

$$\bar{u} = L\bar{u} + \bar{f}, \quad L\bar{u} = L^2\bar{u} + Lf, \quad L^2\bar{u} = L\bar{u} - L\bar{f}$$

и тогава

$$\begin{aligned}\psi &= \varphi - \bar{f} + \frac{h^2}{12}(L\bar{u} - L\bar{f}) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{u} + O(\tau^2 + h^4) \\ &= (\varphi - \bar{f}) + \left[\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{h^2}{12}\right]L\bar{u} - \frac{h^2}{12}L\bar{f} + O(\tau^2 + h^4).\end{aligned}$$

Да означим с  $C_n^m(\bar{D})$  класа от функциите, които имат  $m$  производни по  $x$  и  $n$  производни по  $t$ , непрекъснати в  $\bar{D}$ . Тогава за грешката на апроксимация на схемата (6.11)–(6.13) получаваме:

- $\psi = O(\tau + h^2)$ , ако  $u \in C_2^4$ ,  $\sigma \neq \frac{1}{2}$ ,  $\varphi = \bar{f} + O(\tau + h^2)$ ;
- $\psi = O(\tau^2 + h^2)$ , ако  $u \in C_3^4$ ,  $\sigma = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi = \bar{f} + O(\tau^2 + h^2)$ ;
- $\psi = O(\tau^2 + h^4)$ , ако  $u \in C_3^6$ ,  $\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ ,  $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}Lf$  или  $\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}$ .

Схемата (6.11)–(6.13) при  $\sigma = \sigma^*$  се нарича *схема с повишен ред на точност*. Явната и чисто неявната диференчни схеми имат локална грешка на апроксимация  $O(\tau + h^2)$ , а схемата на Кранк–Никълсън —  $O(\tau^2 + h^2)$ .

За явната схема ( $\sigma = 0$ ) при  $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$  и  $\varphi = f + \frac{h^2}{12}Lf$  локалната грешка на апроксимация е  $O(\tau^2 + h^2)$ .

## 6.2 Собствени стойности и собствени функции на диференчен оператор

Задачата, която ще разгледаме сега, се поставя така: Да се намерят собствените стойности и собствените функции на оператора  $-\Lambda$  в множеството от мрежовите функции, които се анулират при  $x = 0$  и  $x = 1$ ,



т. е. да се намерят числата  $\lambda$  и функциите  $X$ , за които задачата

$$(6.14) \quad \begin{cases} \Lambda X(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x = nh < 1, \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

има нетривиално решение  $X(x) \not\equiv 0$ .

Записана подробно, задача (6.14) изглежда така:

$$\begin{cases} \frac{X_{n-1} - 2X_n + X_{n+1}}{h^2} + \lambda X_n = 0, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ X_0 = X_N = 0, \end{cases}$$

или още

$$(6.15) \quad \begin{cases} X_{n+1} - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right) X_n + X_{n-1} = 0, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ X_0 = X_N = 0. \end{cases}$$

Съответното характеристично уравнение има вида

$$t^2 - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)t + 1 = 0,$$

а дискриминантата му е  $D = \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)^2 - 1$ .

- Ако  $D = 0$ , т. е.  $\left|1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right| = 1$ , характеристичното уравнение има двоен корен

$$t_{1,2} = t = 1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \pm 1.$$

Тогава общото решение на диференчното уравнение от (6.15) се дава с формулата

$$X_n = C_1 t^n + C_2 n t^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

От  $X_0 = X_N = 0$  следва, че  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е. в този случай задача (6.15) няма ненулево решение.

- Ако  $D > 0$ , характеристичното уравнение има два различни реални корена  $t_1$  и  $t_2$ . Общото решение на хомогенното диференчно уравнение се дава с формулата

$$X_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

От  $X_0 = 0$  получаваме  $C_1 + C_2 = 0$ , т.е.  $C_1 = -C_2$ . При  $n = N$  имаме  $C_1 t_1^N + C_2 t_2^N = 0$ , т.е.  $C_1(t_1^N - t_2^N) = 0$ . Но  $t_1 \neq t_2$  и следователно  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , т.е. и в този случай задачата няма ненулево решение.

- Ако  $D < 0$ , характеристичното уравнение има двойка комплексно спрегнати корени. Въвеждаме означението

$$1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \cos \varphi.$$

Тогава корените на характеристичното уравнение са

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= 1 - \frac{\lambda h^2}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)^2 - 1} = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1} \\ &= \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \end{aligned}$$

а общото решение на хомогенното уравнение е

$$X_n = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi.$$

От  $X_0 = 0$  получаваме  $C_1 = 0$ , а от  $X_N = 0$  получаваме  $C_2 \sin N\varphi = 0$ . Ако  $C_2 = 0$ , отново няма да получим ненулево решение. Нека  $\sin N\varphi = 0$ . Тогава  $N\varphi = k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , т.е.

$$\varphi = \frac{k\pi}{N}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Оттук

$$X_n^{(k)} = C_2 \sin \frac{k n \pi}{N} \cdot \frac{h}{h} = C_2 \sin k \pi x_n, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

При  $k = 0$  не получаваме собствена функция, защото  $X_n = 0$  за  $n = 0, 1, \dots, N$ . Собствените функции са единствени с точност до константен множител, затова ще разглеждаме само положителните стойности на  $k$ . При  $k = N$  имаме

$$X_n^{(N)} = C_2 \sin \frac{N \pi n h}{N h} = 0.$$

Следователно при  $k = N$  не получаваме собствена функция. При  $k = N + 1$  имаме

$$\begin{aligned} X_n^{(N+1)} &= C_2 \sin \frac{n(N+1)\pi}{N} = C_2 \sin \left( \frac{nN\pi}{N} + \frac{n\pi}{N} \right) \\ &= C_2 \sin \frac{n\pi}{N} = X_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Поради периодичността на функцията  $\sin x$ , стойностите започват да се повтарят. Следователно имаме  $N - 1$  на брой различни собствени функции

$$X_n^{(k)} = C_2 \sin k\pi x_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ще искаме да нормираме собствените функции, т. е. ще искаме

$$\|X^{(k)}\|_{L_2(\omega_h)} = 1,$$

или

$$\|X^{(k)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} h \left( X_n^{(k)} \right)^2 = \sum_{n=1}^{N-1} h C_2^2 \sin^2 k\pi x_n = 1.$$

Имаме

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} h C_2^2 \sin^2 k\pi x_n &= \sum_{n=1}^{N-1} C_2^2 \frac{h}{2} (1 - \cos 2k\pi x_n) \\ &= C_2^2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{h}{2} (1 - \cos 2k\pi x_n). \end{aligned}$$

Въвеждаме означението  $w_k = \cos 2k\pi h + i \sin 2k\pi h$ . Оттук  $w_k^n = \cos 2k\pi n h + i \sin 2k\pi n h = \cos 2k\pi x_n + i \sin 2k\pi x_n$ . Освен това

$$w_k^N = \cos 2k\pi N h + i \sin 2k\pi N h = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} h \cos 2k\pi x_n &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N-1} w_k^n h = \operatorname{Re} \left( h w_k \frac{1 - w_k^{N-1}}{1 - w_k} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( h \frac{w_k - w_k^N}{1 - w_k} \right) = -h. \end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned} \|X^{(k)}\|_{L_2(\omega_h)}^2 &= C_2^2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{h}{2} - \frac{C_2^2}{2} \sum_{n=1}^{N-1} h \cos 2k\pi x_n = C_2^2 \left[ \frac{h}{2} (N - 1) + \frac{h}{2} \right] \\ &= C_2^2 \frac{hN}{2} = \frac{C_2^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

и следователно  $C_2 = \sqrt{2}$ . Тогава получаваме, че:

- Собствените функции на задача (6.14) са

$$X_n^{(k)} = \sqrt{2} \sin k\pi x_n, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

а собствените стойности получаваме от

$$\frac{\lambda h^2}{2} = 1 - \cos \varphi, \quad \lambda = \frac{2}{h^2}(1 - \cos \varphi), \quad \lambda = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

т. е.

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Като вземем предвид, че функцията  $\sin x$  е растяща, получаваме, че

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} < \lambda_2 < \dots < \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} \\ &< \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} < \frac{4}{h^2}. \end{aligned}$$

- Собствените функции, отговарящи на различни собствени стойности, са ортогонални. Наистина, от равенството

$$\begin{aligned} (y_{\bar{x}x}, w) &\equiv \sum_{i=1}^{N-1} y_{\bar{x}x,i} w_i = (y, w_{\bar{x}x}) \equiv \sum_{i=1}^{N-1} y_i w_{\bar{x}x,i}, \\ y_0 &= y_N = w_0 = w_N = 0, \end{aligned}$$

веднага следва, че операторът  $-\Lambda$  е симетричен в множеството от мрежовите функции, които приемат стойност 0 при  $n = 0$  и  $n = N$ . Тогава при  $k \neq m$  имаме последователно

$$\begin{aligned} -\Lambda X^{(k)} &= \lambda_k X^{(k)}, \\ -\Lambda X^{(m)} &= \lambda_m X^{(m)}, \\ -\left(\Lambda X^{(k)}, X^{(m)}\right) &= \lambda_k \left(X^{(k)}, X^{(m)}\right), \\ -\left(\Lambda X^{(m)}, X^{(k)}\right) &= \lambda_m \left(X^{(m)}, X^{(k)}\right), \\ (\lambda_k - \lambda_m)(X^{(k)}, X^{(m)}) &= 0. \end{aligned}$$

Но  $\lambda_k \neq \lambda_m$  и тогава  $(X^{(k)}, X^{(m)}) = 0$ . Следователно,

- собствените функции  $X^{(k)}$  образуват ортонормирана система, т. е.

$$(X^{(k)}, X^{(m)}) = \delta_{k,m}$$

и освен това, ако върху  $\bar{w}_h$  е зададена мрежовата функция  $f(x)$ , за която  $f_0 = f_N = 0$ , то тя може да се представи във вида

$$(6.16) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k X^{(k)}(x),$$

където  $f_k = (f, X^{(k)})$ . Освен това е в сила равенството на Парсевал

$$\|f\|_{L_2(\omega_h)}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2.$$

Наистина, изразът за коефициентите  $f_k$  може да се получи от (6.16) чрез скалярно умножаване с функцията  $X^{(k)}$ . Равенството на Парсевал следва от равенствата

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(\omega_h)}^2 &= \sum_{n=1}^{N-1} h f_n^2 = (f^2, 1) = (f, f) = \left( \sum_{k=1}^{N-1} f_k X^{(k)}, \sum_{m=1}^{N-1} f_m X^{(m)} \right) \\ &= \left( \sum_{k,m=1}^{N-1} f_k f_m X^{(k)} X^{(m)}, 1 \right) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k f_m (X^{(k)}, X^{(m)}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2. \end{aligned}$$

### 6.3 Метод на разделяне на променливите за изследване на устойчивостта по начални данни и дясна част

Разглеждаме задача (6.11)–(6.13) с хомогенни гранични условия, т. е. разглеждаме задачата

$$(6.17) \quad \begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h. \end{cases}$$

Като използваме равенствата

$$\hat{y} = y + \tau y_t, \quad \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y = y + \sigma \tau y_t,$$

задача (6.17) може да се запише във вида

$$(6.18) \quad \begin{cases} y_t - \sigma \tau \Lambda y_t = \Lambda y + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h. \end{cases}$$

Когато се търси решение  $u(x, t)$  на нестационарна задача, променливата  $t$  (времето) се отделя. Функцията  $u(x, t)$  като функция на аргумента  $x$  е елемент от някакво хилбертово пространство  $H$ , а  $y$  при фиксирано  $t$  е вектор от пространството  $H_h$  с норма  $\|\cdot\|_h$ . За оценка на  $y(x, t)$  върху  $\omega_{h\tau}$  обикновено се използва нормата

$$\|y\|_{h\tau} = \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \|y(t)\|_h$$

или някоя от нормите

$$\|y\|_{h\tau} = \sum_{t \in \bar{\omega}_\tau} \tau \|y(t)\|_h, \quad \|y\|_{h\tau} = \left[ \sum_{t \in \bar{\omega}_\tau} \tau \|y(t)\|_h^2 \right]^{1/2}.$$

**Определение.** Схемата (6.18) се нарича *устойчива по начални данни и дясна част*, ако за решението ѝ е в сила оценката

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} + M_2 \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_2, \quad t \in \omega_\tau,$$

където  $M_1 = \text{const} > 0$ ,  $M_2 = \text{const} > 0$  не зависят от  $h$  и  $\tau$ , а  $\|\cdot\|_{(1)}$  и  $\|\cdot\|_{(2)}$  са някакви норми на слоя (на мрежата  $\omega_h$ ).

Ако  $\varphi = 0$ , оценката

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)}, \quad t \in \omega_\tau,$$

изразява *устойчивостта* на задача (6.18) по начални данни.

Ако  $y(x, 0) = 0$ , то неравенството

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_2 \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_2$$

изразява *устойчивост* на схемата (6.18) по дясна част.

Да представим решението на задача (6.18) във вида  $y = \bar{y} + \tilde{y}$ , където  $\bar{y}$  и  $\tilde{y}$  са решения съответно на задачите

$$(6.18a) \quad \begin{cases} \bar{y}_t - \sigma\tau\Lambda\bar{y}_t = \Lambda\bar{y}, \\ \bar{y}(0, t) = \bar{y}(1, t) = 0, \\ \bar{y}(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

$$(6.18b) \quad \begin{cases} \tilde{y}_t - \sigma\tau\Lambda\tilde{y}_t = \Lambda\tilde{y} + \varphi, \\ \tilde{y}(0, t) = \tilde{y}(1, t) = 0, \\ \tilde{y}(x, 0) = 0, \end{cases}$$

### 6.3.1 Устойчивост по начални данни

Ще разгледаме задача (6.18a). Съответната оценка ще получим в мрежовата  $L_2(\omega_h)$  норма.

$$\|y\|_{(1)} = \|y\| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} hy_i^2}.$$

Решението на задача (6.18a) търсим във вида

$$\bar{y}(x, t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Заместваме в (6.18a) и получаваме последователно

$$\begin{aligned} XT_t - \sigma\tau T_t \Lambda X &= T \Lambda X, \quad XT_t = (T + \sigma\tau T_t) \Lambda X, \\ \frac{T_t}{T + \sigma\tau T_t} &= \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda, \quad \frac{\hat{T} - T}{\tau(T + \sigma(\hat{T} - T))} = \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda, \\ \frac{\hat{T} - T}{\tau(\sigma\hat{T} + (1 - \sigma)T)} &= \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda, \quad \hat{T} - T = -\tau\lambda\sigma\hat{T} + \tau\lambda(\sigma - 1)T, \\ \hat{T}(1 + \sigma\tau\lambda) &= (1 - (1 - \sigma)\tau\lambda)T, \end{aligned}$$

т. е.

$$\hat{T} = qT, \quad \text{където} \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda}{1 + \tau\sigma\lambda}.$$

За  $X(x)$  получаваме диференчна задача за намиране на собствени стойности и собствени функции за оператора  $-\Lambda$  (диференчна задача на

Щурм—Лиувил) (вж. 6.2). Следователно задача (6.18a) има нетривиални решения

$$y_{(k)} = T_k X^{(k)} \neq 0,$$

където  $T_k$  се определя от уравнението  $\hat{T}_k = q_k T_k$ , т. е.

$$T_k^{j+1} = q_k T_k^j = \dots = q_k^{j+1} T_k^0,$$

където  $T_k^0$  са някакви константи, а  $q_k$  се дава с формулата

$$q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}.$$

Решението  $y_k = T_k X^{(k)}$  при  $t = 0$  удовлетворява условието  $y_k(x, 0) = T_k(0)X^{(k)}$  и следователно е решение на задача (6.18a) с начално условие

$$u_0(x) = T_k^0 X^{(k)},$$

където  $T_k^0$  са произволни константи.

Всяко едно от решенията  $y_{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  се нарича *k-та хармоника*. Ние се интересуваме от условията, при които ще бъде устойчива всяка една хармоника. От

$$y_{(k)}^{j+1} = X^{(k)} T_k^{j+1} = q_k X^{(k)} T_k^j, \quad \text{т. е.} \quad y_{(k)}^{j+1} = q_k y_{(k)}^j,$$

се вижда, че ако  $|q_k| \geq (1 + \varepsilon)$ , където  $\varepsilon = \text{const} > 0$  не зависи от  $h$  и  $\tau$ , ще имаме:

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| = |q_k| \cdot \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \varepsilon) \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \varepsilon)^{j+1} \|y_{(k)}^0\| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0,$$

т. е. задачата е неустойчива. Ако  $|q_k| \leq 1$ , то  $\|y_{(k)}\|$  не расте, когато  $j$  расте ( $\tau \rightarrow 0$ ) при фиксирано  $t = j\tau$ :

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| \leq \|y_{(k)}^j\| \leq \|y_{(k)}^0\|$$

и хармониката е устойчива.

Ако всички  $|q_k| \leq 1$  и следователно  $\|y_{(k)}^j\| \leq \|y_{(k)}^0\|$ , ще казваме, че схемата е *устойчива по всяка хармоника*. Да видим сега при какви стойности на теглото  $\sigma$  е в сила неравенството  $|q_k| \leq 1$  или все едно

$$-1 \leq \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \leq 1.$$



Да разгледаме най-напред дясното неравенство. Ако  $1 + \sigma\tau\lambda_k > 0$ , т. е.  $\sigma > \frac{-1}{\tau\lambda_k}$ , то имаме  $1 - \tau\lambda_k + \sigma\tau\lambda_k \leq 1 + \sigma\tau\lambda_k$ , защото  $\lambda_k > 0$ ,  $\tau > 0$ . Ако допуснем, че  $1 + \sigma\tau\lambda_k < 0$ , то дясното неравенство ще бъде изпълнено при  $-\tau\lambda_k \geq 0$ , което е невъзможно. Следователно трябва  $1 + \sigma\tau\lambda_k > 0$ . Да разгледаме при това условие лявото неравенство. Искаме  $-1 - \sigma\tau\lambda_k \leq 1 - \tau\lambda_k + \sigma\tau\lambda_k$ , т. е.  $2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k \geq 0$ . Последното неравенство ще бъде изпълнено, ако  $2\sigma\tau\lambda_k \geq -2 + \tau\lambda_k$ , т. е.  $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}$ . Като вземем предвид, че  $\lambda_k \leq \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}$ , то  $\frac{1}{\tau\lambda_k} \geq \frac{1}{\tau\lambda_{N-1}} > \frac{h^2}{4\tau}$ , т. е.  $-\frac{1}{\tau\lambda_k} < -\frac{h^2}{4\tau}$  и следователно  $\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k} < \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$ . Тогава окончателно  $|q_k| \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , ако  $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} \equiv \sigma_0$ . По такъв начин всички хармоники са устойчиви при едно и също условие, а именно  $\sigma \geq \sigma_0$ .

Сега ще покажем, че от устойчивост на схема (6.18a) по всяка хармоника (т. е. при  $\sigma \geq \sigma_0$ ) следва устойчивост на схемата в мрежовата  $L_2$ -норма по начални данни  $y(x, 0) = u_0(x)$ , където  $u_0(x)$  е произволна мрежова функция, дефинирана при  $x \in [0, 1]$  и за която  $u_0(0) = u_0(1) = 0$ .

Общото решение на задача (6.18a) търсим във вид на сума от частни решения

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{y}_{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}.$$

От равенството на Парсевал имаме

$$\|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2.$$

Като вземем предвид, че  $\hat{T}_k = q_k T_k$ , получаваме

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)}, \quad \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^2 T_k^2 \leq \max_k q_k^2 \sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 = \max_k q_k^2 \|y\|^2.$$

Ако  $\sigma > \sigma_0$ , то  $\max_k |q_k| \leq 1$  и  $\|\hat{y}\| \leq \|y\|$ , т. е.

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y^0\| = \|u_0\|.$$

Следователно за задача (6.18a) е в сила оценката:

$$\|y^j\| \leq \|u_0\|, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{при } \sigma \geq \sigma_0,$$

т. е. схемата (6.18) е устойчива в  $L_2(\omega_h)$  по начални данни при  $\sigma \geq \sigma_0$ .

**Определение.** Диференчна схема, която е устойчива само при наличие на връзка между  $h$  и  $\tau$ , се нарича *условно устойчива*; ако е устойчива за всички стойности  $h$  и  $\tau$ , диференчната схема се нарича *абсолютно устойчива*. Диференчна схема, която е устойчива за всички достатъчно малки  $h$  и  $\tau$ ,  $h \leq h_0$ ,  $\tau \leq \tau_0$  ( $h_0$ ,  $\tau_0$  — константи), се нарича *безусловно устойчива*.

Да разгледаме сега устойчивостта на конкретни диференчни схеми.

- Явна схема ( $\sigma = 0$ ). Трябва

$$0 \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \quad \text{т. е.} \quad \tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Следователно явната схема е условно устойчива, ако е изпълнено условието

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}.$$

Може да се докаже, че това условие е не само достатъчно, но и необходимо.

- Всяка неявна схема при  $\tau \geq 1/2$  е абсолютно устойчива и следователно чисто неявната схема и схемата на Кранк—Никълсън са абсолютно устойчиви.
- Схемата с повишен порядък на апроксимация, т. е. схемата при  $\sigma = \sigma^* \equiv \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$  е абсолютно устойчива, защото

$$\sigma^* \equiv \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} \equiv \sigma_0.$$

По такъв начин, параметърът  $\sigma$  управлява не само реда на апроксимация, но и устойчивостта на схемата.

Ще отбележим, че при изследване на устойчивостта ние фактически работихме с два времеви слоя  $t_j$  и  $t_{j+1}$  и стъпката  $\tau = t_{j+1} - t_j$ . Всички разсъждения остават в сила и ако  $\omega_\tau$  е неравномерна.

### 6.3.2 Устойчивост по дясната част

Ще покажем, че условията

$$(6.19) \quad \sigma \geq \sigma_0 \equiv \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \quad \sigma \geq 0$$

са достатъчни за устойчивост на схема (6.18) и по дясна част.

Разглеждаме задача (6.186). Нейното решение търсим във вида

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)},$$

където коефициентите  $\hat{T}_k$  подлежат на определяне, т. е. търсим решението, разложено по собствените функции на оператора  $-\Lambda$ . Тогава

$$\|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2.$$

Да разложим и дясната част  $\varphi$  по системата от функции  $\{X^{(k)}\}_{k=1}^{N-1}$ :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)}, \quad \varphi_k = (\varphi, X^{(k)}), \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2.$$

За да можем да направим това представяне, трябва  $\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0$ .

Заместваме  $\hat{y}$  и  $\varphi$  в задача (6.186). Като вземем предвид, че  $\Lambda X^{(k)} = -\lambda_k X^{(k)}$ , получаваме

$$\sum_{k=1}^{N-1} (T_{kt}(1 + \sigma\tau\lambda_k) + \lambda_k T_k - \varphi_k) X^{(k)} = 0.$$

Тъй като собствените функции са ортогонални, те са линейно независими и следователно

$$T_{kt}(1 + \sigma\tau\lambda_k) + \lambda_k T_k - \varphi_k = 0,$$

т. е.

$$\hat{T}_k = \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} T_k + \frac{\tau\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} + T_k,$$

или

$$\hat{T}_k = T_k \frac{1 + (\sigma - 1)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} + \frac{\tau\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k},$$

откъдето окончателно получаваме, че

$$\hat{T}_k = T_k q_k + \frac{\tau\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}.$$

Тогава

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma \tau \lambda_k} X^{(k)}.$$

От неравенството на тригълника намираме, че

$$\begin{aligned} \|\hat{y}\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} \right\| + \left\| \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma \tau \lambda_k} X^{(k)} \right\| \\ &\leq \max_k |q_k| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{N-1} T_k X^{(k)} \right\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma \tau \lambda_k|} \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)} \right\| \\ &\leq \max_k |q_k| \cdot \|y\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma \tau \lambda_k|} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Нека са изпълнени условията (6.19). Тогава

$$|q_k| \leq 1, \quad 1 + \sigma \tau \lambda_k \geq 1$$

и следователно

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau \|\varphi\|$$

или

$$\|y^{j'+1}\| \leq \|y^{j'}\| + \tau \|\varphi^{j'}\|.$$

Да сумираме последното неравенство по  $j' = 1, 2, \dots, j$ . Получаваме

$$\|y^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|,$$

защото  $\|y^0\| = 0$  за задача (6.186).

Да се откажем сега от изискването  $\sigma \geq 0$  и вместо това да поискаме

$$(6.20) \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon \equiv \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad \varepsilon \neq \varepsilon(h, \tau).$$

Тогава тъй като  $\sigma_0 < \sigma_\varepsilon$ , то  $|q_k| \leq 1$  и

$$\begin{aligned} 1 + \sigma \tau \lambda_k &\geq 1 + \sigma_\varepsilon \tau \lambda_k = 1 + \frac{1}{2} \tau \lambda_k - \frac{(1-\varepsilon)\tau h^2 \lambda_k}{4\tau} > 1 - \frac{(1-\varepsilon)h^2 \lambda_{N-1}}{4} \\ &> 1 - \frac{(1-\varepsilon)h^2 4}{4h^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

От

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| \|y\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} \|\varphi\|$$

следва, че

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi\|,$$

или, като сумираме както по-рано, получаваме

$$\|y^{j+1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|.$$

Ако  $\sigma = \sigma_*$ , условието  $\sigma_* < 0$  означава  $\tau < h^2/6$ . В този случай можем да изберем  $\varepsilon = 2/3$ , тъй като  $\frac{1}{4}(1 - \varepsilon) = 1/12$  при  $\varepsilon = 2/3$ .

Обобщавайки, виждаме, че е в сила следната

**Теорема.** Ако са в сила условията (6.19), то схема (6.18) е устойчива по начални данни и дясна част и за решението ѝ е в сила оценката

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|.$$

Ако  $\sigma < 0$ , то за устойчивост на схема (6.18) по дясна част е достатъчно да бъде изпълнено условието (6.20). В този случай за решението на задача (6.18) е в сила оценката

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|.$$

За схемата с повишен ред на апроксимация  $\varepsilon = 2/3$ , а  $\sigma_* < 0$  при  $\tau < h^2/6$ .

В сила е и следната

**Теорема.** Ако схема (6.5)–(6.7) е устойчива по дясна част и апроксимира задача (6.1)–(6.4), то тя е сходяща като при това редът на точност съвпада с реда на апроксимация.

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Сходимостта на схема (6.5)–(6.7) следва от нейната устойчивост и апроксимация. Грешката  $z = y - u_h$  е решение на задачата

$$(6.21) \quad \begin{cases} z_t = \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - \sigma)z) + \psi, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0, \\ z(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Като използваме получената за задача (6.186) оценка, получаваме, че

$$\|z^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\| \quad \text{при} \quad \sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma \geq 0,$$

или

$$\|z^{j+1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\psi^{j'}\| \quad \text{при} \quad \sigma < 0.$$

Тогава, като вземем предвид каква е локалната грешка на апроксимация при някои конкретни стойности на  $\sigma$ , получаваме

$$\|z^j\| = \|y^j - u^j\| = \begin{cases} O(\tau^2 + h^2), & \sigma = 1/2, \quad u \in C_3^4, \\ O(\tau^2 + h^4), & \sigma = \sigma_*, \quad u \in C_3^6, \\ O(\tau + h^2), & \sigma \neq 1/2, \quad \sigma \neq \sigma_*, \quad u \in C_2^4. \end{cases}$$

## 6.4 Устойчивост и сходимост в $C$ -норма

За изследване на устойчивостта и сходимостта на схема (6.5)–(6.7) в  $C$ -норма ще използваме принципа за максимума. За целта да запишем уравнение (6.5) във вида

$$\sigma \gamma \hat{y}_{i-1} - (2\sigma \gamma + 1) \hat{y}_i + \sigma \gamma \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

където

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad F_i = (1 - \sigma) \gamma y_{i-1} + (1 - 2(1 - \sigma) \gamma) y_i + (1 - \sigma) \gamma y_{i+1} + \tau \varphi_i,$$

или още във вида

$$(2\sigma \gamma + 1) \hat{y}_i = \sigma \gamma \hat{y}_{i-1} + \sigma \gamma \hat{y}_{i+1} + F_i.$$

Нека  $\sigma > 0$ . Тогава  $A(P) = 2\sigma \gamma + 1 > 0$ ,  $B(P, Q) = \sigma \gamma > 0$ ,  $D = 1$ . Като използваме теоремата за оценка на решението в  $C$ -норма чрез дясната част и коефициентите на уравнението, получаваме

$$(6.22) \quad \|\hat{y}\|_C \leq \|F\|_C \quad \text{при} \quad \sigma > 0.$$

Ако  $\sigma = 0$ , то

$$\|\hat{y}\|_C = \|F\|_C.$$

Следователно

$$\|\hat{y}\|_C \leq \|F\|_C \text{ при } \sigma \geq 0.$$

Да оценим  $\|F\|_C$ . Имаме

$$(6.23) \quad \|F\|_C \leq |1 - \sigma|\gamma\|y\|_C + |1 - 2(1 - \sigma)\gamma|\|y\|_C + |1 - \sigma|\gamma\|y\|_C + \tau\|\varphi\|.$$

При  $\sigma \leq 1$  и  $1 - 2(1 - \sigma)\gamma \geq 0$  получаваме

$$\|F\|_C \leq \|y\|_C + \tau\|\varphi\|_C,$$

т. е.

$$\|y^{j'+1}\| \leq \|y^{j'}\|_C + \tau\|\varphi^{j'}\|_C \text{ при условие } \tau \leq \frac{h^2}{2(1 - \sigma)}, \quad 0 \leq \sigma < 1.$$

Отново сумираме по  $j' = 1, 2, \dots, j$  и получаваме неравенството

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau\|\varphi^{j'}\|_C,$$

което дава устойчивост по начални данни и дясна част на задача (6.5)–(6.7) при условия

$$(6.24) \quad \tau \leq \frac{h^2}{2(1 - \sigma)}, \quad 0 \leq \sigma < 1.$$

Прилагайки последната оценка към задачата за грешката (6.21), получаваме

$$\|z^{j+1}\|_C \leq \sum_{j'=0}^j \tau\|\varphi^{j'}\|_C.$$

Оттук следва, че схема (6.5)–(6.7) е равномерно сходяща със същата скорост, с която е сходяща и в мрежовата  $L_2(\bar{\omega}_h)$ -норма при условие, че са изпълнени неравенствата (6.24).

За конкретните схеми имаме:

- Явна схема ( $\sigma = 0$ ):  $\tau \leq h^2/2$ , т. е. схемата е условно устойчива при същото условие, при което е устойчива и в  $L_2(\bar{\omega}_h)$ ;
- Схема на Кранк–Никълсън ( $\sigma = 1/2$ ):  $\tau \leq \frac{h^2}{2(1 - 1/2)}$ , т. е.  $\tau \leq h^2$ . Следователно тази схема е условно устойчива в  $C$ -норма при предположение, че  $\tau \leq h^2$ .

- За чисто неявната схема ( $\sigma = 1$ ) оценката не може да се получи от изведената, но следва веднага от (6.22) и (6.23):

$$\|\hat{y}\|_C \leq \|F\|_C \leq \|y\|_C + \tau\|\varphi\|_C.$$

Следователно чисто неявната схема е абсолютно устойчива и в  $C$ -норма.

## 6.5 Трета гранична задача

Да разгледаме задачата

$$(6.25) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T],$$

$$(6.26) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$(6.27) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \beta_1 u(0, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 = \text{const} \geq 0,$$

$$(6.28) \quad -\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta_2 u(1, t) - \mu_2(t), \quad \beta_2 = \text{const} \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0.$$

Нашата цел ще бъде да приведем диференчни апроксимации на граничните условия (6.27) и (6.28), съответстващи на схемата с тегло, т. е. таква апроксимации, които при различните стойности на теглото  $\sigma$  имат същата грешка на апроксимация, както и апроксимацията на уравнение (6.25). Тези диференчни апроксимации могат да се построят по метода на баланса и изглеждат така:

$$(27') \quad \sigma(\hat{y}_x - \beta_1 \hat{y})_0 + (1 - \sigma)(y_x - \beta_1 y)_0 = \frac{h}{2} y_{t,0} - \tilde{\mu}_1, \quad \tilde{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 + \frac{h}{2} \bar{f}_0,$$

$$(28') \quad -[\sigma(\hat{y}_{\bar{x}} + \beta_2 \hat{y})_N + (1 - \sigma)(y_{\bar{x}} + \beta_2 y)_N] = \frac{h}{2} y_{t,N} - \tilde{\mu}_2, \quad \tilde{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 + \frac{h}{2} \bar{f}_N.$$

Ще докажем, че грешката на апроксимация на (27') е

$$\nu_h = \begin{cases} O(\tau + h^2), & \text{при } \sigma \neq 1/2, u \in C_2^4, \\ O(\tau^2 + h^2), & \text{при } \sigma = 1/2, u \in C_3^4. \end{cases}$$

За (28') доказателството е аналогично.



Имаме последователно

$$\begin{aligned}
\nu_h &= \sigma(\hat{u}_x - \beta_1 \hat{u})_0 + (1 - \sigma)(u_x - \beta_1 u)_0 - \frac{h}{2} u_{t,0} + \bar{\mu}_1 + \frac{h}{2} \bar{f}_0, \\
\hat{u}_0 &= \bar{u}_0 + \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}_0 + O(\tau^2), u_0 = \bar{u}_0 - \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}_0 + O(\tau^2), \\
u_{x,0} &= \frac{u_1 - u_0}{h} = u'_0 + \frac{h}{2} u''_0 + O(h^2), \\
\hat{u}_{x,0} &= (\hat{u}_0)_x = (\bar{u}_0 + \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}_0 + O(\tau^2))_x = \bar{u}'_0 + \frac{h}{2} \bar{u}''_0 + \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}'_0 + O(\tau^2 + h^2), \\
u_{x,0} &= (u_0)_x = \bar{u}'_0 + \frac{h}{2} \bar{u}''_0 - \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}'_0 + O(\tau^2 + h^2), \\
u_{t,0} &= \frac{\hat{u} - u}{\tau} = \bar{\ddot{u}}_0 + O(\tau^2).
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\nu_h &= \sigma \left( \bar{u}'_0 + \frac{h}{2} \bar{u}''_0 + \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}'_0 - \beta_1 \bar{u}_0 - \beta_1 \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}_0 \right) \\
&\quad + (1 - \sigma) \left( \bar{u}'_0 + \frac{h}{2} \bar{u}''_0 - \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}'_0 - \beta_1 \bar{u}_0 + \beta_1 \frac{\tau}{2} \bar{\ddot{u}}_0 \right) \\
&\quad - \frac{h}{2} \bar{\ddot{u}}_0 + \bar{\mu}_1 + \frac{h}{2} \bar{f}_0 + O(\tau^2 + h^2) \\
&= \sigma \tau (\bar{\ddot{u}}'_0 - \beta_1 \bar{\ddot{u}}_0) - \frac{\tau}{2} (\bar{\ddot{u}}'_0 - \beta_1 \bar{\ddot{u}}_0) + O(\tau^2 + h^2) \\
&= \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau (\bar{\ddot{u}}'_0 - \beta_1 \bar{\ddot{u}}_0) + O(\tau^2 + h^2).
\end{aligned}$$

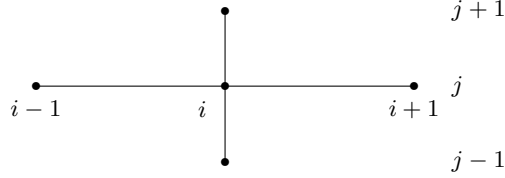
Оттук се вижда, че при  $\sigma \neq 1/2$  е налице  $\nu_h = O(\tau + h^2)$ , а при  $\sigma = 1/2$  —  $\nu_h = O(\tau^2 + h^2)$ . При подходящ избор на дясната част  $\tilde{\mu}_1$  може да се постигне грешка  $O(\tau^2 + h^4)$ .

## 6.6 Трислойни схеми за уравнението на топлопроводността

Трислойните диференчни схеми се използват значително по-рядко от двуслойните. Използват се обикновено когато е необходимо да се подобрят точността или устойчивостта.

### 6.6.1 Явна трислойна схема на Ричардсон

Тя е една от първите трислойни схеми, прилагани за численото решаване на уравнението на топлопроводността. Явната трислойна схема



Фиг. 6.4

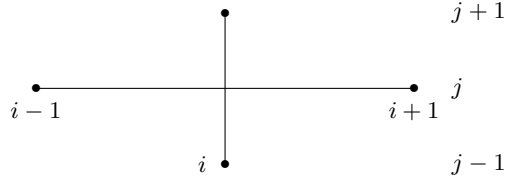
на Ричардсон се строи върху шаблона „кръст“ (вж. фиг. 6.4) и има вида

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j,$$

или още  $y_t^0 = \Lambda y + \varphi$ . Тя има грешка на апроксимация  $O(\tau^2 + h^2)$ , ако  $f - \varphi = O(\tau^2 + h^2)$ . Схемата на Ричардсон обаче е абсолютно неустойчива, т. е. неустойчива при произволен начин на приближаване на  $h$  и  $\tau$  към нула.

### 6.6.2 Явна трислойна схема на Дюфорт и Франкел (схема „ромб“)

Явната трислойна схема на Дюфорт и Франкел се строи върху шаблона



Фиг. 6.5

„ромб“ от фиг. 6.5. Тя има вида

$$(6.29) \quad \frac{y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1} + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j.$$

Схемата „ромб“ може да се запише и по друг начин. Като вземем предвид, че

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1}^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1} + y_{i-1}^j}{h^2} &= \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j + 2y_i^j - y_i^{j+1} - y_i^{j-1}}{h^2} \\ &= y_{xx,i}^j - \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt,i}^j, \end{aligned}$$

схема (6.29) може да се запише във вида

$$(6.30) \quad y_t^0 + \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt} = \Lambda y + \varphi.$$

Оттук се вижда, че схемата на Дюфорт и Франкел се различава от схемата на Ричардсон по това, че вляво е добавен изразът  $\frac{\tau^2}{h^2} y_{tt}$ . Да пресметнем сега локалната грешка на апроксимация на схема (6.30). Имаме

$$\begin{aligned} \psi_h &= \Lambda u - u_t^0 - \frac{\tau^2}{h^2} u_{tt} + \varphi = u'' + O(h^2) - \dot{u} + O(\tau^2) - \frac{\tau^2}{h^2} (\ddot{u} + O(\tau^2)) + \varphi \\ &= -\frac{\tau^2}{h^2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^2), \end{aligned}$$

ако  $\varphi = f + O(h^2 + \tau^2)$ . Ако  $\tau = O(h^2)$ , схемата „ромб“ притежава условна апроксимация  $\psi_h = O(h^2)$ .

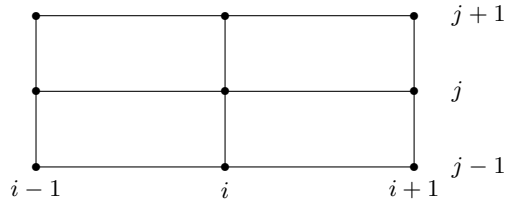
Може да се докаже, че схемата на Дюфорт и Франкел е абсолютно устойчива. Това е качествена разлика от двуслойните схеми. Докато при двуслойните схеми не може да се построи абсолютно устойчива явна схема, то при трислойните има явна абсолютно устойчива диференчна схема.

### 6.6.3 Неявна симетрична схема с тегло

От неявните схеми най-често се използва неявната симетрична схема с тегло

$$(6.31) \quad y_t^0 = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, \quad \sigma \neq 0,$$

където  $\hat{y} = y_i^{j+1}$ ,  $y = y_i^j$ ,  $\check{y} = y_i^{j-1}$ . При  $\sigma = 0$  се получава явната трислойна схема на Ричардсон. Схема (6.31) е построена върху 9-точковия шаблон от фиг. 6.6. Да пресметнем локалната грешка на апроксимация.



Фиг. 6.6

Имаме

$$\psi_h = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u}) + \varphi - u_t^0.$$

Но

$$\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u} = \sigma \hat{u} - 2\sigma u + \sigma \check{u} + u = u + \sigma \tau^2 u_{\bar{t}t} = u + O(\tau^2).$$

Следователно  $\psi_h = \Lambda(u + O(\tau^2)) + \varphi - u_t^0 = u'' + \varphi - \dot{u} + O(\tau^2 + h^2)$ . Ако  $\varphi = f + O(\tau^2 + h^2)$ , грешката на апроксимация на симетричната схема с тегло при произволно  $\sigma$  е  $O(\tau^2 + h^2)$ . Може да се докаже, че достатъчно условие за устойчивост на симетричната схема е  $\sigma > 1/4$ .

**Забележка.** За да започнем пресмятането по трислойна схема, трябва да знаем решението на първите два слоя. На нулевия решението е известно от началното условие; на първия може да се намери с помощта на двуслойна схема.

## 6.7 Диференчни схеми за уравнението на топлопроводността с няколко пространствени променливи

Нека  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \bar{G} = G \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^p$ ,  $G$  — паралелепипед,  $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ . Разглеждаме задачата

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + f(x, t), & x \in G, t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \\ u(x, t) = \mu(x, t), & x \in \Gamma, t \geq 0. \end{cases}$$

Да въведем равномерна мрежа по всяко от направленията  $x_\alpha$  с  $N_\alpha + 1$  на брой точки в интервала  $[0, l_\alpha]$  и стъпка  $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$ . Да въведем също и равномерна мрежа по променливата  $t$  със стъпка  $\tau$ . Да разгледаме някои двуслойни и трислойни схеми, които се явяват естествено обобщение на съответните схеми за едномерното уравнение на топлопроводността.

### 6.7.1 Явна двуслойна схема

Тази схема има вида

$$(6.32) \quad \begin{cases} \frac{\hat{y} - y}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y + \varphi, & \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \\ y^0 = u_0(x), \\ y|_{\gamma_h} = \mu. \end{cases}$$

Решението на горния слой се намира по явната формула

$$\hat{y} = y + \tau \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y + \tau \varphi.$$

Локалната грешка на апроксимация на схема (6.32) е  $O(\tau + \|h\|^2)$ , защото

$$\frac{\hat{u} - u}{\tau} = \dot{u} + O(\tau), \quad \Lambda_{\alpha} u = L_{\alpha} u + O(h_{\alpha}^2).$$

Условието за устойчивост на схема (6.32) в  $C$ -норма е

$$(6.33) \quad \tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_{\alpha}^2} \right]^{-1}.$$

Ако  $h = \min h_{\alpha}$ , то условие (6.33) приема вида

$$\tau \leq \frac{h^2}{2p},$$

което показва, че с увеличаване на броя на измеренията допустимата стъпка за явната схема намалява.

### 6.7.2 Явна трислойна схема на Ричардсон

Тази схема има вида

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = \Lambda y + \varphi, \quad \Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y,$$

абсолютно неустойчива е и има локална грешка на апроксимация  $O(\tau^2 + \|h\|^2)$ .

### 6.7.3 Явна трислойна схема на Дюфорт и Франкел (схема „ромб“)

Схемата „ромб“ има вида

$$y_i = \sum_{\alpha=1}^p \frac{y^{(+1_{\alpha})} - \hat{y} - \check{y} + y^{(-1_{\alpha})}}{h_{\alpha}^2} + \varphi,$$

или още

$$y_i = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y - \sum_{\alpha=1}^p \frac{\tau^2}{h_{\alpha}^2} y_{it} + \varphi.$$

Ако въведем означението  $\delta = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}$ , схемата на Дюфорт и Франкел може да се запише във вида

$$y_t + \tau^2 \delta y_{tt} = \Lambda y + \varphi.$$

Ако мрежата е кубична със стъпка  $h$ ,  $\delta = \frac{p}{h^2}$  и схемата „ромб“ приема вида

$$y_t + \frac{p\tau^2}{h^2} y_{tt} = \Lambda y + \varphi.$$

Схемата на Дюфорт и Франкел е абсолютно устойчива. За кубична мрежа, ако  $\tau = O(h^2)$ , то  $\psi = O(h^2)$ , т.е. схемата на Дюфорт и Франкел притежава условна апроксимация.

#### 6.7.4 Двуслойна схема с едно и също тегло по всяко направление

Тази схема има вида

$$(6.34) \quad \frac{\hat{y} - y}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha (\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, \quad \varphi = \bar{f}.$$

Нейната локална грешка на апроксимация е

$$\psi = \begin{cases} O(\tau + \|h\|^2), & \text{при } \sigma \neq 1/2, \\ O(\tau^2 + \|h\|^2), & \text{при } \sigma = 1/2. \end{cases}$$

Условието за устойчивост на схема (6.34) в  $C$ -норма е

$$\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2(1 - \sigma)} \left( \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \right)^{-1}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Чисто неявната схема ( $\sigma = 1$ ) е абсолютно устойчива.

#### 6.7.5 Двуслойна схема с различно тегло по всяко направление

Тази схема има вида

$$y_t = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha (\sigma_\alpha \hat{y} + (1 - \sigma_\alpha)y) + \varphi,$$

а условието за нейната устойчивост в  $C$ -норма е

$$\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\alpha=1}^p \frac{1 - \sigma_\alpha}{h_\alpha^2} \right]^{-1}.$$

### 6.8 Хомогенни диференчни схеми за уравнението на топлопроводността с променливи коефициенти

Задачата, която ще разглеждаме, се поставя така: Да се намери непрекъснато в правоъгълника  $\bar{D} = \{(x, t) : x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$  решение на уравнението

$$(6.35) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T],$$

удовлетворяващо началното условие

$$(6.36) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1]$$

и граничните условия

$$(6.37) \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq x \leq T,$$

където  $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$ ,  $(x, t) \in \bar{D}$ .

Ще считаме, че задача (6.35)–(6.37) има единствено решение, което е достатъчно гладко за разглежданията, които ще проведем.

Хомогенна консервативна диференчна схема ще построим по метода на баланса. Ще построим равномерна мрежа в правоъгълника  $\bar{D}$  със стъпка  $h$  по направление  $x$  и стъпка  $\tau$  по  $t$ .

Нека най-напред коефициентът  $k$  не зависи от времето, т.е.  $k = k(x)$ . Да напишем уравнението на баланса в правоъгълника  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ ,  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ , т.е. да интегрираме уравнение (6.35) в този правоъгълник. Имаме

$$(6.38) \quad \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx \\ = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) dx dt.$$

Ако с  $W(x, t)$  означим потока в точката  $x$  в момента  $t$ , т. е.

$$W(x, t) = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x},$$

то от (6.38) получаваме

$$\begin{aligned} (6.39) \quad & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)] \, dx \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} [W(x_{i-1/2}, t) - W(x_{i+1/2}, t)] \, dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

За първия интеграл в уравнението на баланса (6.39) имаме

$$(6.40) \quad \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)] \, dx \approx h [u_i^{j+1} - u_i^j].$$

За потока  $W_{i-1/2}$  имаме приближението

$$(6.41) \quad W_{i-1/2} \approx -a_i u_{\bar{x}, i},$$

където коефициентът  $a_i$  се пресмята чрез коефициента  $k(x)$  по някоя от формулите, които приведохме по-рано. Тъй като искаме да построим схема с тегло, за втория интеграл в (6.39) правим следното приближение:

$$\begin{aligned} (6.42) \quad & \int_{t_j}^{t_{j+1}} [W_{i-1/2}(t) - W_{i+1/2}(t)] \, dt \\ & \approx \tau \left[ \sigma \left( W_{i-1/2}^{i+1/2} - W_{i+1/2}^{j+1/2} \right) + (1 - \sigma) \left( W_{i-1/2}^j - W_{i+1/2}^j \right) \right]. \end{aligned}$$

Означаваме с

$$(6.43) \quad \varphi_i^j = \frac{1}{h\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t) \, dx \, dt.$$

Заместваме (6.40)–(6.43) в уравнението на баланса (6.39), означаваме търсената функция с  $y$  и получаваме

$$\begin{aligned} & h [y_i^{j+1} - y_i^j] \\ &= \tau \left[ \sigma \left( -a_i y_{\bar{x}_i}^{j+1} + a_{i+1} y_{\bar{x}_{i+1}}^{j+1} \right) + (1 - \sigma) \left( -a_i y_{\bar{x}_i}^j + a_{i+1} y_{\bar{x}_{i+1}}^j \right) \right] + h\tau \varphi_i^j. \end{aligned}$$



Разделяме двете страни на  $h\tau$  и получаваме

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda \left( \sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j \right) + \varphi_i^j, \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x.$$

За  $\varphi_i^j$  и  $a_i$  могат да се използват, например, формулите

$$\begin{aligned} a_i &= k_{i-1/2}, & a_i &= \frac{1}{2}(k_{i-1} + k_i), \\ \varphi_i^j &= f_i^{j+1/2}, & \varphi_i^j &= \frac{1}{2}(f_i^j + f_i^{j+1}). \end{aligned}$$

И така, като преминем към безиндексни означения, получаваме следната диференчна схема, която апроксимира задача (6.35)–(6.37):

$$(6.44) \quad \begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & x \in \omega_h, \quad t = j\tau \geq 0, \quad \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), & t \in \bar{\omega}_t, \end{cases}$$

Най-често използваните диференчни схеми и в този случай са явната ( $\sigma = 0$ ), чисто неявната ( $\sigma = 1$ ) и схемата на Кранк—Никълсън ( $\sigma = 1/2$ ).

Ако коефициентът  $a$  е подбран така, че изразът  $(ay_{\bar{x}})_x$  да апроксимира израза  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  с грешка  $O(h^2)$ , то може да се докаже, че локалната грешка на апроксимация на схема (6.44) е

$$\psi = \begin{cases} O(\tau + h^2), & \text{при } \sigma \neq 1/2, \quad \varphi = \bar{f} + O(\tau + h^2), \\ O(\tau^2 + h^2), & \text{при } \sigma = 1/2, \quad \varphi = \bar{f} + O(\tau^2 + h^2). \end{cases}$$

Както в случая на постоянни коефициенти, така и тук, като се използва принципът за максимума, може да се получи оценката

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_C$$

при условията  $0 \leq \sigma \leq 1$ ,  $\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)c_2}$ . Условията за устойчивост на конкретните схеми са:

- $\tau \leq h^2/2c_2$  за явната;
- $\tau \leq h^2/c_2$  за симетричната (на Кранк—Никълсън);

- чисто неявната схема е абсолютно устойчива.

Относно сходимостта може да се докаже аналогична на случая с постоянни коефициенти теорема.

Да разгледаме сега случая, когато  $k = k(x, t)$ , т.е.  $k$  зависи и от променливата  $t$ . Нека

$$y^\sigma = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y.$$

Въвеждаме означението

$$\Lambda(\bar{t})v = (a(x, \bar{t})v_{\bar{x}})_x, \quad \bar{t} = t_{j+1/2}.$$

Нека коефициентът  $a$  при всяко фиксирано  $t$  се определя така, че  $(a(x, t)v_{\bar{x}})_x$  да апроксимира  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  с грешка  $O(h^2)$ . Тогава задача (6.35)–(6.37) обикновено се апроксимира с диференчната схема

$$(6.45) \quad \begin{cases} y_t = \Lambda(\bar{t})y^\sigma + \varphi(x, \bar{t}), \\ y(x, 0) = u_0(x), \\ y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Разписано подробно, уравнението от схема (6.45) има вида

$$y_t = \sigma \frac{1}{h} \left[ \bar{a}_{i+1} \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - \bar{a}_i \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + (1 - \sigma) \frac{1}{h} \left[ \bar{a}_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \bar{a}_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] + \varphi(x, \bar{t}),$$

т.е. ако  $k = k(x, t)$  зависи от  $t$ , коефициентите на диференчната схема се вземат на полуслоя  $\bar{t} = t_{j+1/2}$ , а по  $x$  се изчисляват, както беше казано по-горе. Може да се докаже, че грешката на апроксимация е  $O(\tau + h^2)$  при  $\sigma \neq 1/2$  и  $O(\tau^2 + h^2)$  при  $\sigma = 1/2$ .

Ще отбележим, че по принцип коефициентите могат да се вземат в произволен момент от времето  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ , но само за  $t = t_{j+1/2}$  при  $\sigma = 1/2$  грешката ще бъде  $O(\tau^2 + h^2)$ , иначе е  $O(\tau + h^2)$ .

В най-общия случай уравнението на топлопроводността има вида

$$c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

където  $c(x, t) \geq c_0 > 0$ ,  $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$ . За това уравнение най-често се използва диференчната апроксимация

$$\rho(x, \bar{t})y_t = \Lambda(\bar{t})y^\sigma + \varphi(x, \bar{t}),$$

като  $\rho$  и  $\varphi$  се изчисляват по едни и същи формули от съответните коефициенти на диференциалното уравнение. Ако например коефициентът  $c$  е непрекъснат в точката  $x_i$ , то коефициентът  $\rho$  може да се пресметне по формулата

$$\rho(x_i, \bar{t}) = c(x_i, \bar{t});$$

ако  $c$  има прекъсване от първи род при  $x = x_i$ , то  $\rho$  може да се пресметне по формулата

$$\rho(x_i, \bar{t}) = \frac{1}{2}[c(x_i + 0, \bar{t}) + c(x_i - 0, \bar{t})].$$

## 6.9 Диференчни схеми за квазилинейното уравнение на топлопроводността

Най-общо, квазилинейното уравнение на топлопроводността се записва във вида

$$c(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t, u),$$

където  $c(x, t, u) > 0$ ,  $k(x, t, u) > 0$ . Типичен се явява случаят, когато функциите  $c$ ,  $k$  и  $f$  зависят само от  $u$ , т. е. когато уравнението има вида

$$(6.46) \quad c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u).$$

Ако положим  $v = \int_0^u c(\xi) d\xi$ , то  $\frac{\partial v}{\partial t} = c(u) \frac{\partial u}{\partial t}$ . Като изразим  $u$  чрез  $v$ ,  $u = u(v)$ , от уравнение (6.46) ще получим уравнението

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tilde{f}(v),$$

като  $\int_0^u k(\xi) d\xi = \int_0^v \varkappa(\eta) d\eta$ . Да сменим означенията  $v \rightarrow u$ ,  $\varkappa \rightarrow k$  и да разгледаме задачата

$$(6.47) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad k(u) > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

За задача (6.47) ще разгледаме два типа чисто неявни диференчни схеми:

$$(6.48a) \quad \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(y) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(y) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(y),$$

$$(6.48b) \quad \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(\hat{y}) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(\hat{y}) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right] + f(\hat{y}),$$

където  $a_i$  се пресмятат по един от разглежданите досега начини, например

$$a_i(y) = k(y_{i-1/2}).$$

Да сравним схеми (6.48a) и (6.48b).

- И двете схеми имат локална грешка на апроксимация  $O(\tau + h^2)$ .
- И двете схеми са абсолютно устойчиви.
- Схема (6.48a) е линейна относно  $\hat{y} = y^{j+1}$  и стойностите  $y^{j+1}$  се намират чрез стойностите на  $y = y^j$ , например, с помощта на метода на прогонката. Тъй като схема (6.48a) е абсолютно устойчива, стъпката  $\tau$  се избира само от съображения за точност.

Схема (6.48b) е нелинейна относно  $y^{j+1}$  и за намиране на решението ѝ се използва итерационен метод. Итерационният процес се строи по следния начин:

$$(6.49) \quad \frac{y_i^{(s+1)} - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ a_{i+1}(y^{(s)}) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i(y^{(s)}) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + f(y^{(s)}).$$

Относно  $y^{(s+1)}$  диференчното уравнение (6.49) е линейно. В качеството на нулева итерация се взема

$$y^{(0)} = y^j.$$

Итерационният процес (6.49) е сходящ за повечето срещани се на практика коефициенти  $k(u)$  и  $f(u)$ . Оказва се, че за достигане на необходимата точност е достатъчно да се направят 2–3 итерации. Даже в случаите, когато итерационният процес е разходящ, за повишаване на точността на схемата се оказва полезно да се направят няколко итерации. Недостатък на итерационната схема е удвояването на количеството заемана памет.

И така, за намиране на  $y^{j+1}$  при итерационната схема трябва да се направят няколко итерации, а при пресмятане по схема (6.48a)  $y^{j+1}$  се намира веднага. Тъй като и двете схеми са абсолютно устойчиви и имат един и същ ред на апроксимация, то на пръв поглед изглежда, че схема (6.48a) е по-добра от (6.48б). На практика обаче се оказва, че за получаване на една и съща точност по двете схеми при схема (6.48б) може да се използва толкова голяма стъпка по времето, че независимо от необходимостта да се правят итерации, в края на краищата схема (6.48б) води до по-малък обем на изчисленията, отколкото схема (6.48a).

## Глава 7

# Диференчни схеми за хиперболични частни диференциални уравнения

### 7.1 Едномерно уравнение на струната с постоянни коефициенти

Разглеждаме задачата

$$(7.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$(7.2) \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

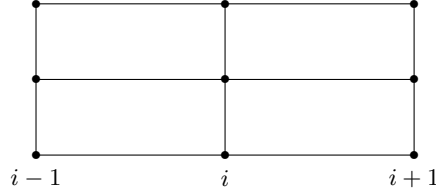
$$(7.3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, 1].$$

Да въведем в областта  $\overline{D} = \{(x, t) : x \in [0, 1], t \in [0, T]\}$  правоъгълна равномерна мрежа  $\overline{\omega}_{h\tau}$ . Тъй като уравнение (7.1) съдържа втора производна по  $t$ , то броят на слоевете, които ще използваме при построяването на диференчна апроксимация за задача (7.1)–(7.3), не може да бъде по-малък от три. Да разгледаме семейството диференчни схеми, построени върху шаблона от фиг. 7.1

$$(7.4) \quad y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, \quad \varphi = f(x, t),$$

$$(7.5) \quad y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad t = j\tau,$$

$$(7.6) \quad y(x, 0) = u_0, \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x),$$



Фиг. 7.1

където  $\tilde{u}_1(x)$  ще определим така, че локалната грешка на апроксимация на второто начално условие да бъде  $O(\tau^2)$ . Имаме

$$\begin{aligned} \nu_h &= \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} - \tilde{u}_{1,i} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^0 + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i^0 + O(\tau^2) - \tilde{u}_{1,i} \\ &= u_{1i} + \frac{\tau}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^0 + f(x_i, 0) \right] - \tilde{u}_{1,i} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Следователно, ако  $\tilde{u}_{1,i} = u_{1,i} + \frac{\tau}{2}(u_{0,i}'' + f_i^0)$ , грешката на апроксимация на второто начално условие е  $O(\tau^2)$ .

Да пресметнем сега локалната грешка на апроксимация за диференчното уравнение (7.4). Имаме

$$\begin{aligned} \psi_h &= \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u}) + \varphi - u_{\bar{t}t} = \Lambda(u + \sigma \tau^2 u_{\bar{t}t}) + \varphi - u_{\bar{t}t} \\ &= u'' + O(h^2) + f - \ddot{u} + O(\tau^2) + \sigma \tau^2 \ddot{u} = O(\tau^2 + h^2) \end{aligned}$$

при произволно тегло  $\sigma$ .

Ще отбележим, че ако  $\sigma$  и  $\tau$  се изберат по специален начин, то може да се построи диференчна схема с грешка на апроксимацията  $O(\tau^2 + h^4)$  (схема с повишен ред на апроксимация).

Определянето на  $y^{j+1}$  от диференчната схема (7.4)–(7.6) може да стане по следния начин:

1) на нулевия и първия слой — от двете начални условия;

2) за  $y^{j+1}$  при  $j > 1$  се получава тридиагоналната система (7.7)

$$\begin{cases} \sigma \gamma^2 (y_{i+1}^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}) - (1 + 2\sigma \gamma^2) y_i^{j+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \mu_1, & y_N = \mu_2, \end{cases}$$

където  $\gamma = \tau/h$ ,  $F_i = (2y_i^j - y_i^{j-1}) + \tau^2(1 - 2\sigma)\Lambda y_i^j + \sigma \tau^2 \Lambda y_i^{j-1} + \tau^2 \varphi$ . Системата (7.7) може да се реши с метода на прогонката. Методът на прогонката е устойчив при  $\sigma > 0$ .

## 7.2 Метод на енергетичните неравенства за изследване на устойчивостта

Ще се ограничим с изследване на устойчивостта по начални данни. Затова ще разглеждаме задачата

$$(7.8) \quad \begin{cases} y_{tt} = \Lambda(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}), \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases}$$

Уравнението от (7.8) представяме във вида

$$y_{tt} - \sigma\tau^2\Lambda y_{tt} = \Lambda y.$$

Да умножим двете страни на последното равенство скалярно по  $y_i$ . Това означава да умножим с  $hy_{i,i}$  и да сумираме по  $i$  от 1 до  $N-1$ . Получаваме

$$(7.9) \quad (y_{tt}, y_i) - \sigma\tau^2(\Lambda y_{tt}, y_i) = (\Lambda y, y_i).$$

Да преобразуваме поотделно всеки един от изразите в равенство (7.9). За първия имаме последователно:

$$\begin{aligned} y_{tt} &= \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{y - \check{y}}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau}(y_t - y_{\bar{t}}), \\ y_i &= \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = \frac{\hat{y} - y + y - \check{y}}{2\tau} = \frac{1}{2}(y_t + y_{\bar{t}}), \\ (y_{tt}, y_i) &= \frac{1}{2\tau}(y_t - y_{\bar{t}}, y_t + y_{\bar{t}}) = \frac{1}{2\tau}[(y_t, y_t) + (y_t, y_{\bar{t}}) - (y_{\bar{t}}, y_t) - (y_{\bar{t}}, y_{\bar{t}})] \\ &= \frac{1}{2\tau}[\|y_t\|^2 - \|y_{\bar{t}}\|^2] = \frac{1}{2}(\|y_{\bar{t}}\|^2)_t. \end{aligned}$$

За втория ще използваме формулата на Грин за функции, които се анулират при  $x = 0$  и  $x = 1$ :

$$(\Lambda y, v) = (y_{\bar{x}x}, v) = -(y_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}], \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N hu_i v_i.$$

Тогава

$$(\Lambda y_{tt}, y_i) = -(y_{tt\bar{x}}, y_{i\bar{x}}] = -((y_{\bar{x}})_{tt}, (y_{\bar{x}})_i] = -\frac{1}{2}(\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2)_t.$$



За преобразуването на третия член ще бъде необходимо тъждеството

$$(7.10) \quad \frac{1}{8}[(v + \check{v})^2 - (v - \check{v})^2]_t = vv_t.$$

Да докажем най-напред (7.10). Имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}[(v + \check{v})^2 - (v - \check{v})^2]_t &= \frac{1}{8}[(v + \check{v} + v - \check{v})(v + \check{v} - v + \check{v})]_t \\ &= \frac{1}{8}(2v \cdot 2\check{v})_t = \frac{1}{2}(v\check{v})_t = \frac{1}{2} \frac{\hat{v}v - v\hat{v}}{\tau} = \frac{1}{2\tau}v(\hat{v} - \check{v}) \\ &= vv_t. \end{aligned}$$

Тогава за дясната страна имаме

$$(\Lambda y, y_t) = (y_{\bar{x}x}, y_t) = -(y_{\bar{x}}, y_{t\bar{x}}] = -(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}].$$

Като приложим (7.10) при  $v = y_{\bar{x}}$  към последното равенство получаваме

$$\begin{aligned} (\Lambda y, y_t) &= -(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}] = -\frac{1}{8}(\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2)_t + \frac{\tau^2}{8}(\|y_{\bar{x}t}\|^2)_t \\ &= \left( \frac{\tau^2}{8}\|y_{\bar{x}t}\|^2 - \frac{1}{8}\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2 \right)_t. \end{aligned}$$

Като заместим в (7.9) с преобразуваните изрази, получаваме основното енергетично тъждество

$$\left( \|y_t\|^2 + \sigma\tau^2\|y_{\bar{x}t}\|^2 - \frac{\tau^2}{4}\|y_{\bar{x}t}\|^2 + \frac{1}{4}\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2 \right)_t = 0,$$

или още

$$(7.11) \quad \left( \|y_t\|^2 + \left( \sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2\|y_{\bar{x}t}\|^2 + \frac{1}{4}\|y_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}\|^2 \right)_t = 0.$$

Въвеждаме означението

$$\mathcal{E}^j = \|y_t^j\|^2 + \left( \sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2\|y_{\bar{x}t}^j\|^2 + \frac{1}{4}\|y_{\bar{x}}^j + y_{\bar{x}}^{j-1}\|^2.$$

Тогава (7.11) може да се запише във вида

$$\mathcal{E}^{j+1} = \mathcal{E}^j.$$

Да определим стойностите на  $\sigma$ , за които  $\mathcal{E}^j \geq 0$  при произволни  $y^j$  и  $y^{j-1}$ . За целта ще ни е необходима следната

**Теорема (за влагане).** Ако  $y(0) = y(1) = 0$ , то

$$\|y\|^2 \geq \frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2,$$

където

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2,$$

а

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^N h y_i^2.$$

Като използваме тази теорема, получаваме

$$\|y_{\bar{t}}\| \geq \frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2.$$

Тогава

$$\|y_{\bar{t}}\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 \geq \left(\frac{h^2}{4} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2\right) \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2.$$

Следователно, ако  $\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}$ , то  $\mathcal{E}^j \geq 0$  при произволни  $y^j$  и  $y^{j-1}$ .

Въвеждаме означението

$$\|y^j\|_*^2 = \|y_t^j\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{4} \|y_{\bar{x}}^j + y_{\bar{x}}^{j+1}\|^2,$$

т.е.  $\|y^j\|_* = (\mathcal{E}^j)^{\frac{1}{2}}$ . Можем да считаме, че  $\|y^j\|_*$  е норма (по-точно полунорма, защото от  $\|y^j\|_* = 0$  може и да не следва, че  $y^j \equiv 0$ ). Ще отбележим, че такива „комбинирани норми“, зависещи от стойностите на  $y$  на няколко слоя, са характерни за многослойните (в частност за трислойните) схеми.

Тогава основното енергетично тъждество приема вида

$$\|y^{j+1}\|_* = \|y^0\|_*, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

което фактически означава устойчивост по начални данни в  $\|\cdot\|_*$ .

И така условието  $\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}$  е достатъчно за устойчивост на диференчната схема (7.4)–(7.6) по начални данни в  $\|\cdot\|_*$ . В частност, при  $\sigma = 0$  схемата е устойчива по начални данни при условие  $\tau \leq h$ , известно като *условие на Курант*. Ако имаме уравнението

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

то условието на Курант има вида  $\tau \leq h/a$ .

### 7.3 Хомогенни диференчни схеми за уравнението на струната с променливи коефициенти

Разглеждаме задачата

$$(7.12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$(7.13) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$(7.14) \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t),$$

където  $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$ . Ще предполагаме, че тази задача има единствено решение, което е непрекъснато в областта  $\bar{D}_T = [0 \leq x \leq 1] \times [0 \leq t \leq T]$  и притежава необходимите за изследването производни. Допуска се коефициентите  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  да имат прекъсвания от първи род върху краен брой прави, успоредни на оста  $Ot$ , като по всяка линия на прекъсване  $x = \xi_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, s_0$ , се предполага, че са изпълнени условията за спрягане

$$[u]_{\xi_s} = 0, \quad \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\xi_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, s_0.$$

Ако коефициентите са непрекъснати, да въведем равномерна мрежа в областта  $\bar{D}_T$  и да апроксимираме уравнение (7.12) с помощта на следната хомогенна диференчна схема

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda(t_j)y^\sigma + \varphi,$$

където  $y^\sigma = \sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}$ , а  $\Lambda(t_j)y = (a(x, t_j)y_{\bar{x}})_x$ . Коефициентите  $a(x, t_j)$ , които се вземат на  $j$ -тия слой по времето, се определят така, че изразът  $(a(x, t)y_{\bar{x}})_x$  да апроксимира  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  с грешка  $O(h^2)$  за всяко  $t$ . Граничните условия (7.14) и първото от началните условия (7.13) се апроксимират точно. Второто начално условие се апроксимира аналогично на (7.3):

$$y_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \quad \tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(Lu_0 + f)|_{t=0}.$$

Получената система линейни алгебрични уравнения отново може да се реши по метода на прогонката.

Ако коефициентите  $k(x, t)$  и  $f(x, t)$  са прекъснати, обикновено се избира неравномерна мрежа, така че линиите на прекъсване (правите на

прекъсване) да бъдат прави от мрежата, т. е. строи се мрежата  $\hat{\omega}_h(K)$ . В този случай най-простите формули за пресмятане на  $a_i$  и  $\varphi_i$  изглеждат така:

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad \varphi_i = \frac{h_i f_i^- + h_{i+1} f_i^+}{2\hbar_i}.$$

Може да се докаже, че при определена гладкост на коефициентите (извън линиите на прекъсване) върху специална последователност от неравномерни мрежи  $\hat{\omega}_h(K)$  имаме

$$\|z\|_C = \|y^j - w^j\|_C \leq M(\tau^2 + h_0^2),$$

където  $h_0 = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ , т. е. че имаме сходимост от втори ред както по  $h$ , така и по  $\tau$ .

## Глава 8

# Икономични диференчни схеми за многомерни задачи на математическата физика

Едно от важните достижения на изчислителната математика е разработването на икономични диференчни методи за решаване на многомерни (с няколко пространствени променливи) частни диференциални уравнения. От тези методи ще разгледаме метода на променливите направления и локално-едномерна схема за многомерното уравнение на топлопроводността.

Създаването на икономични числени алгоритми, изискващи минимално машинно време за получаване на приближено решение с произволна зададена точност  $\varepsilon$ , е един от основните проблеми в теорията на числените методи. Времето за пресмятане зависи не само от качеството на алгоритъма, но и от качеството на програмата и типа на изчислителната машина. Тъй като последните две характеристики трудно се отчитат, то основен показател обикновено е броят на аритметичните операции  $Q(\varepsilon)$ , необходими за получаване на решението със зададена точност  $\varepsilon > 0$ .

Най-напред да изясним върху един пример предпоставките за създаване на икономични диференчни схеми.

Да разгледаме задачата

$$(8.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + f(x, t), \\ x \in G = \{0 < x_{\alpha} < 1, \alpha = 1, 2, \dots, p\}, \quad t \in (0, T], \\ u|_{\Gamma} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < k_{\alpha}(x, t) \leq c_2, \alpha = 1, 2, \dots, p, x \in \bar{G}, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Да построим в  $\bar{G}$  кубична мрежа със стъпка  $h$  по всяко направление  $x_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , и равномерна мрежа със стъпка  $\tau = T/M$  в интервала  $[0, T]$ . Да напишем двуслойна диференчна схема с тегло за задача (8.1):

$$(8.2) \quad \begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & x \in \omega_h, \quad 0 \leq t = n\tau < T, \\ y|_{\gamma_h} = 0, \\ y(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

където  $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$ . Явната схема ( $\sigma = 0$ ) е устойчива при  $\tau \leq \frac{h^2}{2pc_2}$ . Оттук се вижда, че стъпката  $\tau$  за явната схема трябва да се намалява, когато  $p$  и  $c_2$  растат. Това изискване може да се окаже особено силно в случая на бързоизменящи се коефициенти. По тази причина използването на явни схеми за решаването не само на многомерни, но и на едномерни задачи често се оказва нецелесъобразно. От друга страна, явната схема има това достоинство, че решението  $\hat{y} = y^{n+1}$  на новия слой се намира по явни формули и при това във всеки възел на мрежата  $\bar{\omega}_h$  се извършват краен брой операции, като общият брой на аритметичните операции при прехода от слой към слой е пропорционален на броя на възлите от  $\bar{\omega}_h$ , т. е.  $Q = O(1/h^p)$ .

Чисто неявната схема ( $\sigma = 1$ ) е устойчива при произволни  $h$  и  $\tau$ . За определяне на  $\hat{y} = y^{n+1}$  се получава система от  $(1/h)^p$  уравнения, за решаването на която са необходими  $O(1/h^{3p-2})$  аритметични действия, ако се използва методът на Гаус и се отчита специалният вид на матрицата на системата.

И така, явната схема изисква неголям брой операции, но е устойчива при достатъчно малко  $\tau$ ; неявната схема е абсолютно устойчива, но изисква голям брой аритметични операции.

Възниква въпросът: може ли да се построи диференчна схема, съчетаваща добрите качества на явната и на неявната схема, която

- да е абсолютно или безусловно устойчива;

- за прехода от слой към слой да изисква аритметични операции, чийто брой е пропорционален на броя на възлите от мрежата  $\bar{\omega}_h$ , т.е.  $Q = O(1/h^p)$ .

Схемите, които удовлетворяват горните две изисквания, се наричат *икономични*.

## 8.1 Метод на променливите направления за уравнението на топлопроводността

Да разгледаме задачата

$$(8.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x), & x \in G_2 = \{(x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}, t \in (0, T], \\ u|_\Gamma = \mu(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{G}_2 = G_2 \cup \Gamma, \end{cases}$$

където

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}.$$

Да построим в  $\bar{G}_2$  равномерна и по двете направления мрежа със стъпки  $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Нека  $\gamma_h$  е границата на мрежовата област  $\omega_h$ , състояща се от всички възли по страните на правоъгълника.

Нека  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ . Да заменим диференциалния оператор  $L_\alpha$  с диференциалния оператор  $\Lambda_\alpha$ :

$$\Lambda_\alpha u = u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

Да припомним, че за едномерното уравнение на топлопроводността неявната схема води на всеки слой по времето до система с тридиагонална матрица, която се решава по метода на прогонката, а броят на аритметичните операции е пропорционален на броя на възлите  $Q = O(N) = O(1/h)$ .

Да се върнем сега към двумерната задача (8.3). Мрежата  $\bar{\omega}_h$  може да се разглежда като съвкупност от възли, разположени по редове,  $i_2 = 0, 1, \dots, N_2$ , или като съвкупност от възли, разположени по стълбове,  $i_1 = 0, 1, \dots, N_1$ . Ако по всеки ред (респективно стълб) решаваме система с тридиагонална матрица, то за намиране на решението по всички редове (стълбове), т.е. във всички възли на мрежата, са необходими  $O(N_1 N_2)$

аритметични операции, т. е. броят на аритметичните операции ще бъде пропорционален на броя на възлите в двумерната област.

Основната идея на повечето икономични методи се състои в свеждането на прехода от слой към слой до последователното решаване на едномерни задачи по редове и стълбове. Най-ясно тази алгоритмична идея се вижда при неявната схема на променливите направления (схема на Писмен—Рекфорд).

Ако с  $\bar{y} = y^{n+1/2}$  означим стойността на  $y$  на слоя  $t = t_n + \frac{\tau}{2}$ , то преходът от  $n$ -тия към  $(n+1)$ -вия слой се извършва на два етапа със стъпка  $\frac{\tau}{2}$ :

$$(8.4) \quad \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^n + \varphi^n, \quad \varphi^n = \bar{f},$$

$$(8.5) \quad \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi^n.$$

Уравнения (8.4) и (8.5) се пишат във всички вътрешни възли  $x = x_i$  на мрежата  $\bar{\omega}_h$  и за всички  $t = t_n > 0$ . Уравнение (8.4) е неявно по  $x_1$  и явно по  $x_2$ ; уравнение (8.5) е явно по  $x_1$  и неявно по  $x_2$ . Към тези две уравнения се добавя началното условие

$$(8.6) \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h$$

и диференчните гранични условия

$$(8.7) \quad y^{n+1} = \mu^{n+1}, \quad i_2 = 0, i_2 = N_2,$$

$$(8.8) \quad y^{n+1/2} = \bar{\mu}, \quad i_1 = 0, i_1 = N_1,$$

където

$$(8.9) \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2}(\mu^{n+1} + \mu^n) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(y^{n+1} - \mu^n).$$

Смисълът на първото гранично условие е ясен, а на второто ще обясним по-късно.

По такъв начин диференчната задача (8.4)–(8.9), съответстваща на диференциалната задача (8.3) е поставена. Да се спрем най-напред на метода за решаване на задача (8.4)–(8.9). Да препишем (8.4) и (8.5) във вида

$$(8.10) \quad \frac{2}{\tau}\bar{y} - \Lambda_1\bar{y} = F, \quad F = \frac{2}{\tau}y + \Lambda_2y + \varphi,$$

$$(8.11) \quad \frac{2}{\tau}\hat{y} - \Lambda_2\hat{y} = \bar{F}, \quad \bar{F} = \frac{2}{\tau}\bar{y} + \Lambda_1\bar{y} + \varphi.$$



Нека е известно  $y = y^n$ . Пресмятаме  $F$  и след това по метода на прогонката по всички редове  $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  решаваме задача (8.10) с гранично условие (8.8). Така определяме  $\bar{y}$ . После пресмятаме  $\bar{F}$  и решаваме задача (8.11) с гранично условие (8.7) по метода на прогонката по всички стълбове  $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ . Така определяме  $\hat{y}$ . При прехода от  $(n + 1)$ -вия към  $(n + 2)$ -рия слой процедурата се повтаря, т. е. през цялото време става редуване на направленията. Тъй като прогонката изисква за един възел брой аритметични операции, независещ от броя на възлите, то описаният алгоритъм ще бъде икономичен, ако е абсолютно устойчив.

За изследване на устойчивостта е необходимо да се изключи междинната стойност  $\bar{y}$ . За целта от (8.4) изваждаме (8.5) и изразяваме  $\bar{y} = y^{n+1/2}$  чрез  $y = y^n$  и  $\hat{y} = y^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\frac{\tau}{2}} - \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\frac{\tau}{2}} &= \Lambda_2(y^n - y^{n+1}), \\ y^{n+1/2} - y^n - y^{n+1} + y^{n+1/2} &= \frac{\tau}{2}\Lambda_2(y^n - y^{n+1}), \\ (8.12) \quad \bar{y} &= \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\hat{y} - y). \end{aligned}$$

Уравнение (8.4) може да се запише във вида

$$\frac{\bar{y} - y}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1\bar{y} + \Lambda_2y + \varphi.$$

Заместваме в последното уравнение  $\bar{y}$  от (8.12) и последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\hat{y} - y) - y}{\frac{\tau}{2}} &= \frac{1}{2}\Lambda_1(\hat{y} + y) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(\hat{y} - y) + \Lambda_2y + \varphi, \\ y_t - \frac{\tau}{2}\Lambda_2y_t &= \frac{1}{2}\Lambda_1(\hat{y} - y + 2y) - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2y_t + \Lambda_2y + \varphi, \\ y_t - \frac{\tau}{2}\Lambda_2y_t &= \frac{\tau}{2}\Lambda_1y_t + \Lambda_1y - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2y_t + \Lambda_2y + \varphi, \\ \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y_t &= \frac{\tau}{2}\Lambda_1\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y_t + \Lambda_1y + \varphi, \\ \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y_t &= \Lambda_1y + \varphi. \end{aligned}$$

Тогава задача (8.4)–(8.9) приема вида:

$$(8.13) \quad \begin{cases} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) y_t = \Lambda y + \varphi, \\ y|_{\gamma_h} = \mu, \quad \hat{y}|_{\gamma_h} = \hat{\mu}, \\ y(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Да разясним сега условие (8.8), (8.9). Равенството (8.12) трябва да бъде в сила и при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = l_1$ , защото в противен случай  $\Lambda_1 \bar{y}$  в (8.4) и (8.5) няма да е определено при  $i_1 = 1$  и  $i_2 = N_1 - 1$ . Тъй като  $\hat{y} = \hat{\mu}$  и  $y = \mu$  при  $i_1 = 0$  и  $i_2 = N_1$ , то от (8.12) имаме

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(\hat{\mu} + \mu) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\hat{\mu} - \mu),$$

т. е.  $\bar{y} = \bar{\mu}$ , където  $\bar{\mu}$  се задава чрез (8.9).

Следователно решението на задача (8.4)–(8.9) е решение на задача (8.13).

Обратно, ако  $y$  е решение на задача (8.13) и въведем  $\bar{y}$  по формула (8.12), ще получим задача (8.4)–(8.9). Наистина, от (8.12) имаме последователно

$$(8.14) \quad \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}y - \frac{\tau}{4}\Lambda_2\hat{y} + \frac{\tau}{4}\Lambda_2y, \\ \bar{y} &= \frac{1}{2}\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\hat{y} + \frac{1}{2}\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)y, \\ (E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)\hat{y} &= 2\bar{y} - (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)y. \end{aligned}$$

Последното равенство заместваем в (8.13) и получаваме

$$\begin{aligned} &\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) \frac{\hat{y} - y}{\tau} = \Lambda y + \varphi, \\ &\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \frac{1}{\tau} \left(2\bar{y} - (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)y\right) - \frac{1}{\tau} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) y \\ &\hspace{15em} = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \varphi, \\ &\frac{1}{\tau} \left(2\bar{y} - y - \frac{\tau}{2}\Lambda_2 y - \frac{\tau}{2}2\Lambda_1 \bar{y} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1 y + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1 \Lambda_2 y\right) \\ &\hspace{10em} - \frac{1}{\tau} \left(y - \frac{\tau}{2}\Lambda_2 y - \frac{\tau}{2}\Lambda_1 y + \frac{\tau^4}{4}\Lambda_1 \Lambda_2 y\right) = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \varphi, \\ &\frac{2}{\tau}(\bar{y} - y) - \Lambda_1 \bar{y} = \Lambda_2 y + \varphi, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\bar{y} - y}{\frac{\tau}{2}} = \Lambda_1 \bar{y} + \Lambda_2 y + \varphi,$$

което всъщност е (8.4). Оттук имаме

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \bar{y} = \left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) y + \frac{\tau}{2}\varphi,$$

или още

$$\left(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) y = \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \bar{y} + \frac{\tau}{2}\varphi.$$

Като заместим в (8.14), имаме последователно

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) \hat{y} &= 2\bar{y} - \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \bar{y} + \frac{\tau}{2}\varphi, \\ \hat{y} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\hat{y} &= \bar{y} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\bar{y} + \frac{\tau}{2}\varphi, \\ \frac{\hat{y} - y}{\frac{\tau}{2}} &= \Lambda_1\bar{y} + \Lambda_2\hat{y} + \varphi, \end{aligned}$$

което всъщност е (8.5). По такъв начин установихме еквивалентността на задачи (8.4)–(8.9) и (8.13). Тази еквивалентност е в сила само при съгласуване на граничните условия, т. е. ако са изпълнени (8.8) и (8.9).

За задача (8.13) може да се докаже следната

**Теорема 10.** *Схема (8.13) е устойчива по начални данни и дясна част и за решението ѝ е в сила априорната оценка*

$$\|y(t + \tau)\|_A^2 \leq \|y(0)\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2,$$

където

$$\|y\|_A^2 = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1})_{i_1 i_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_2})_{i_1 i_2}^2 h_1 h_2,$$

е енергетичната норма.

Да разгледаме сега въпросите за сходимост и точност на схема (8.4)–(8.9). Това отново ще направим като изследваме задача (8.13). За греш-

ката на апроксимация имаме

$$\begin{aligned}
\psi_h &= \varphi + \Lambda u - \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) u_t \\
&= \varphi - \Lambda u - \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2 - \frac{\tau}{2}\Lambda_1 + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2\right) u_t \\
&= \varphi + \Lambda u - u_t + \frac{\tau}{2}\Lambda u_t - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 u_t \\
&= \varphi - u_t - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 u_t + \Lambda u + \frac{\tau}{2}\Lambda \frac{(\hat{u} - u)}{\tau} \\
&= \varphi - u_t + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 u_t + \frac{1}{2}\Lambda(\hat{u} + u).
\end{aligned}$$

Тъй като

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\hat{u} + u) &= \bar{u} + O(\tau^2), \\
\Lambda \bar{u} &= L\bar{u} + O(h^2), \\
u_t &= \bar{u}_t + O(\tau^2),
\end{aligned}$$

то

$$\psi_h = \bar{f} - \bar{u} + O(\tau^2) + L\bar{u} + O(\|h\|^2) = O(\tau^2 + \|h\|^2),$$

ако решението  $u(x, t)$  притежава следните производни, които са ограни-

$$\text{чени: } \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x_1^2 \partial x_2^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}.$$

За грешката  $z = y - u_h$  получаваме задачата

$$(8.15) \quad \begin{cases} (E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)z_t = \Lambda z + \psi, \\ z|_{\gamma_h} = z(x, 0) = 0. \end{cases}$$

За задача (8.15) е в сила оценката от формулираната по-горе теорема. Следователно е в сила и следната

**Теорема 11.** *Схема (8.13) е сходяща в мрежовата норма  $\|y\|_A$  със скорост  $O(\tau^2 + \|h\|^2)$ .*

Схемата на Писмен—Рекфорд не може формално да бъде обобщена в тримерния случай, тъй като се получава неустойчива схема.

В случая на променливи коефициенти устойчивостта в енергетичната норма  $\|\cdot\|_A$  може да се докаже само при достатъчно малки  $\tau$ . Изобщо методът на променливите направления е приложим за двумерни правоъгълни области или за области, съставени от правоъгълници, чиито страни са успоредни на координатните оси.

## 8.2 Метод на сумарната апроксимация.

### Локално-едномерна схема за уравнението на топлопроводността в произволна област

За разлика от метода на променливите направления методът на сумарната апроксимация, който ще изложим по-долу, е приложим за произволни области с произволен брой измерения за уравнения с променливи и дори прекъснати коефициенти, както и за квазилинейни нестационарни уравнения.

Фундаментално свойство на диференчната схема е свойството апроксимация за решението на изходната диференциална задача. Отказът от класическото понятие апроксимация и заменянето му с по-слабо условие, наречено *сумарна апроксимация*, съществено разширява класа на задачите, които могат да бъдат решени, и води до понятието *адитивни схеми*. Тези схеми имат две основни характеристики:

- преходът от  $j$ -тия към  $(j+1)$ -вия слой се осъществява с помощта на последователност от обикновени (двуслойни или трислойни) схеми;
- грешката на апроксимация на адитивната схема се дефинира като сума от грешките на апроксимация за всички междинни схеми (адитивната схема притежава сумарна апроксимация). При това всяка една от междинните схеми може да не апроксимира изходната задача. Апроксимацията се достига за сметка на сумиране на грешките на апроксимация за всички междинни схеми.

Нека е дадена многомерната задача

$$(8.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), & x \in G \subset \mathbb{R}^p, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u|_{\Gamma} = \mu, \end{cases}$$

където  $L$  е линеен диференциален оператор, действащ на функцията  $u(x, t)$  като функция на аргумента  $x \in G \subset \mathbb{R}^p$ .

При построяването на икономични методи основна роля играе възможността операторът  $L$  да може да се представи като сума от  $p$  на брой оператора с по-проста структура:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_p.$$

Ако, например,  $Lu = \Delta u$ , то  $L_\alpha = \partial^2 / \partial x_\alpha^2$ .

Да съпоставим на задача (8.16) поредица от едномерни уравнения. Диференциалното уравнение ще запишем във вида

$$Pu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f(x, t) = 0.$$

Нека  $P_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha$ , където  $f_\alpha(x, t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , са произволни функции, имащи същата гладкост както  $f(x, t)$ , и удовлетворяващи условието

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

Тогава уравнение (8.16) може да се запише във вида

$$\sum_{\alpha=1}^p P_\alpha u = 0.$$

Да въведем в интервала  $[0, T]$  равномерна мрежа със стъпка  $\tau$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}.$$

Всеки интервал  $[t_j, t_{j+1}]$  да разделим на  $p$  равни части, въвеждайки точките

$$t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Да означим с  $\Delta_\alpha$  подинтервала  $t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}$ . Започвайки с  $\alpha = 1$ , последователно решаваме уравненията

$$(8.17) \quad P_\alpha v_{(\alpha)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

като при това полагаме

$$(8.18) \quad v_{(1)}(x, 0) = u_0(x),$$

$$(8.19) \quad v_{(\alpha)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2, \dots, p.$$

Ще считаме, че граничното условие е от първи род и ще го задаваме само по границата в направление  $x_\alpha$ .

Решение на задача (8.17)–(8.19) ще наречем функцията

$$(8.20) \quad v(x, t_j) = v_p(x, t_j), \quad j = 0, 1, \dots, j_0.$$

Ще отбележим, че  $u$  е решение на задача (8.16), а  $v$  — на (8.17)–(8.19). Отникъде не следва, че  $u \equiv v$ .

Да се заемем с решаването на задача (8.17)–(8.19). Всяко от уравненията (8.17) ще заменим с диференчна схема, апроксимирайки  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $L_\alpha u$  с диференчни изрази върху мрежата  $\omega_{h\tau}$ , въведена в областта  $G \times \Delta_\alpha$

$$(8.21) \quad \Pi_\alpha y_{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

В най-простия случай това ще бъде двуслойна схема, свързваща стойностите

$$y_{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} \quad \text{и} \quad y_{(\alpha-1)} = y^{j+\frac{\alpha-1}{p}},$$

например схемата с тегло

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha \left( \sigma_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + (1 - \sigma_\alpha) y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right) + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}},$$

където  $\sigma_\alpha \in [0, 1]$  е параметър, а  $\Lambda_\alpha \sim L_\alpha$ .

Схемата (8.21) апроксимира уравнение (8.17) в обичаен смисъл, т. е.

$$(8.22) \quad \Psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad h_\alpha \rightarrow 0$$

в някаква норма. Сега ще покажем, че системата диференчни уравнения (8.21) е адитивна схема. Нека

$$(8.23) \quad \psi_\alpha = \Pi_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}}$$

е грешката на една схема с номер  $\alpha$ . Тогава от (8.22) и (8.23)

$$\psi_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau) + \Psi_\alpha = \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*,$$

където

$$\dot{\psi}_\alpha = (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}}, \quad \psi_\alpha^* = \Psi_\alpha + O(\tau), \quad \|\psi_\alpha^*\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0, \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Тогава

$$\|\psi\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* \right\| \leq \left\| \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* \right\| \rightarrow 0$$

при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\|h\| \rightarrow 0$ , тъй като  $\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p (P_\alpha u)^{j+\frac{1}{2}} = 0$ , т. е. схема (8.21) притежава сумарна апроксимация, ако всяка от схемите (8.21) с номер  $\alpha$  апроксимира в обичаен смисъл съответното уравнение (8.17).

Ако операторът  $L_\alpha$  съдържа производни само по  $x_\alpha$ , то той се нарича *едномерен*, а уравнението  $P_\alpha v_\alpha = 0$  — *едномерно уравнение*. Съответната адитивна схема в този случай се нарича *локално-едномерна схема* (ЛЕС).

Сега ще разгледаме ЛЕС за многомерното уравнение на топлопроводността в произволна област. И така, да разгледаме задачата

$$(8.24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha, \quad L_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0, T], \quad \overline{G} = G \cup \Gamma \cup \mathbb{R}^p,$$

$$(8.25) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G},$$

$$(8.26) \quad u|_\Gamma = \mu(x, t), \quad t \geq 0.$$

Ще предполагаме, че решението на задача (8.24)–(8.26) съществува, единствено е и притежава необходимите за изследването производни. За областта  $G$  ще предполагаме, че сечението ѝ с произволна права  $C_\alpha$ , успоредна на  $Ox_\alpha$ , се състои от краен брой интервали (по-долу ще считаме, че този интервал е един —  $\Delta_\alpha$ ) и че в  $\overline{G}$  може да се построи свързана мрежа.

Да преминем сега към построяването на ЛЕС. В интервала  $0 \leq t \leq T$  въвеждаме равномерна мрежа

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{ t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad \tau = \frac{T}{j_0} \right\}.$$

Нека  $f_\alpha$  са произволни функции, такива че  $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$ . Да заменим многомерното уравнение (8.24) с последователност от едномерни

$$(8.27) \quad \begin{cases} \frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, & x \in G, \quad t_{j+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(\alpha)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \\ v_{(\alpha)}(x, t)|_{x=G_\alpha} = \mu(x, t). \end{cases}$$

Очевидно е достатъчно граничните условия за  $v_\alpha$  да се задават не по цялата граница  $\Gamma$ , а само по  $\Gamma_\alpha$ , състояща се от пресечните точки на  $\Gamma$  с всевъзможните прави  $C_\alpha$ , успоредни на  $Ox_\alpha$  и минаващи през всички точки на  $G$ . Ако  $\overline{G}$  е паралелепипедът  $\overline{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha\}$ , то  $\Gamma_\alpha$  се състои от стените  $x_\alpha = 0$  и  $x_\alpha = l_\alpha$ .



Като апроксимираме всяко едно от уравненията (8.27) (с номер  $\alpha$ ) чрез съответната диференчна схема, ще получим ЛЕС. Тук ще се ограничим с разглеждането само на чисто неявната ЛЕС:

$$(8.28) \quad \begin{cases} \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, & \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \omega_h, \\ y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \tilde{\mu}^{j+\frac{\alpha}{p}}, & x \in \gamma_{h_\alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ y(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

За определеност ще считаме, че

$$\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha \left( x, t_{j+\frac{1}{2}} \right), \quad \tilde{\mu}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mu \left( x, t_{j+\frac{\alpha}{p}} \right).$$

По-късно ще видим, че десните страни  $\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}$  и  $\tilde{\mu}^{j+\frac{\alpha}{p}}$  могат да се изразят чрез  $f_\alpha(x, t)$  и  $\mu(x, t)$ , взети в произволни моменти от времето от интервала  $[t_j, t_{j+1}]$ . Това няма да се отрази на реда на точност.

За  $\Lambda_\alpha$  имаме

$$\Lambda_\alpha y = \begin{cases} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, & \text{в регулярните възли,} \\ y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha}, & \text{в нерегулярните възли,} \end{cases}$$

а за грешката на апроксимацията

$$\psi_h = \begin{cases} O(h_\alpha^2), & \text{в регулярните възли,} \\ O(1), & \text{в нерегулярните възли.} \end{cases}$$

Нека  $y^j$  е известно. За намиране на  $y^{j+1}$  трябва да решим  $p$  на брой задачи от вида (8.28), последователно полагайки  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . За определяне на  $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$  се получава задача от вида

$$(8.29) \quad \begin{cases} A_{i_\alpha} y_{i_\alpha-1}^{j+\frac{\alpha}{p}} - C_{i_\alpha} y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + A_{i_\alpha+1} y_{i_\alpha+1}^{j+\frac{\alpha}{p}} = -F_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, & x \in \omega_h, \\ y_{i_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \tilde{\mu}^{j+\frac{\alpha}{p}}, & x \in \gamma_{h_\alpha}, \end{cases}$$

$\alpha = 1, 2, \dots, p$ , като сме указали само индексите, които се менят. Диференчните уравнения (8.29) се пишат по отсечката  $\Delta_\alpha$  от правата  $S_\alpha$ . Краищата на тази отсечка лежат върху  $\gamma_{h,\alpha}$ . Уравнения (8.29) се решават по метода на прогонката по всички отсечки  $\Delta_\alpha$  при фиксирано  $\alpha$ . При това са необходими аритметични операции, чийто брой е пропорционален на броя на възлите от мрежата  $\omega_h$ . Полагайки последователно

$\alpha = 1, 2, \dots, p$  и менейки направленията, ще определим  $y^{j+\frac{1}{p}}, y^{j+\frac{2}{p}}, \dots, y^{j+\frac{\alpha}{p}}, \dots, y^{j+1}$ , като при това за всеки възел ще бъдат необходими  $O(1)$  аритметични операции, т. е. ЛЕС ще удовлетворява едното от изискванията, за да бъде икономична.

Да изследваме сега грешката на апроксимация на ЛЕС. Нека  $u(x, t)$  е решение на задача (8.24)–(8.26), а  $y^{j+\frac{\alpha}{p}}, \alpha = 1, 2, \dots, p$ , е решение на (8.28). Характеристика за точността на ЛЕС е  $z^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}$ . Междинните стойности  $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$  ще сравняваме с  $u^{j+\frac{\alpha}{p}} = u(x, t_{j+\frac{\alpha}{p}})$ . За грешката  $z^{j+1}$  получаваме задачата

$$\begin{cases} \frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, & j = 0, 1, \dots, j_0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \\ z^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0, & x \in \gamma_{h,\alpha}, \\ z(x, 0) = 0, \end{cases}$$

където

$$\psi_\alpha = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}.$$

Да означим с

$$\dot{\psi}_\alpha = \left( L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тъй като  $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$ , то  $\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0$ . Тогава

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^* \equiv \psi_\alpha - \dot{\psi}_\alpha &= \left( \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left( \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \left( \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Знаем, че

$$\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} = \begin{cases} O(h_\alpha^2), & \text{в регулярните възли,} \\ O(1), & \text{в нерегулярните възли.} \end{cases}$$

Освен това

$$\begin{aligned} \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\tau} \left[ u^{j+\frac{1}{2}} + \left( \frac{\alpha}{p} - \frac{1}{2} \right) \frac{\tau}{1!} \frac{\partial u}{\partial t} \right]^{j+\frac{1}{2}} \\ &+ \left( \frac{\alpha}{p} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau^3) - u^{j+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\alpha-1}{p} - \frac{1}{2} \right) \frac{\tau}{1!} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|^{j+\frac{1}{2}} \\ &- \left( \frac{\alpha-1}{p} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3) \Big] - \frac{1}{p} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|^{j+\frac{1}{2}} + O(\tau) - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|^{j+\frac{1}{2}} = O(\tau). \end{aligned}$$

Следователно

$$\psi_\alpha^* = \begin{cases} O(h_\alpha^2 + \tau), & \text{в регулярните възли} \\ O(1), & \text{в нерегулярните възли.} \end{cases}$$

Тогава от  $\psi_\alpha = \psi_\alpha^* + \dot{\psi}_\alpha$  имаме

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* + \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* \\ &= \begin{cases} O(\tau + \|h\|^2), & \text{в регулярните възли,} \\ O(1), & \text{в нерегулярните възли.} \end{cases} \end{aligned}$$

Следователно ЛЕС притежава сумарна апроксимация  $O(\tau + \|h\|^2)$  в регулярните възли и  $O(1)$  в нерегулярните.

В сила е следната теорема, която дава устойчивост на ЛЕС.

**Теорема.** Локално-едномерната схема (8.28) е устойчива по начални и гранични данни и по дясна част в  $C$ -норма и за решението ѝ при произволни  $h$  и  $\tau$  е в сила оценката

$$\begin{aligned} \|y^i\|_C &\leq \|u_0\|_C + \max_{0 < t' \leq j\tau} \|\mu(x, t')\|_{C_\gamma} + \max_{0 \leq t' \leq j\tau} h^2 \|\varphi(x, t')\|_{C^*} \\ &+ \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \sum_{\alpha=1}^0 \|\varphi_\alpha^{j'+\alpha/p}\|_{\dot{C}}, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} t' &= t_{j'+\alpha/p}, \quad \varphi(x, t') = \varphi^{j'+\alpha/p}, \quad h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha, \\ \|\varphi\|_{C^*} &= \max_{x \in \omega_h^*} |\varphi|, \quad \|\varphi\|_{\dot{C}} = \max_{x \in \dot{\omega}_h} |\varphi|, \end{aligned}$$

$\mathring{\omega}_h$  е множеството на строго вътрешните възли на мрежата  $\omega_h$ , а  $\omega_h^*$  — на приграничните.

Може да се докаже, че от сумарна апроксимация следва равномерна сходимост със скорост  $O(\tau + h^2)$  при определени изисквания за гладкост на дясната част  $f$  и решението  $u$ , т. е.

$$\|y^j - u^j\|_C \leq M(h^2 + \tau), \quad j = 1, 2, \dots,$$

където

$$h = \max_{1 \leq \alpha \leq p} h_\alpha, \quad M = \text{const} > 0, \quad M \neq M(h_\alpha, \tau).$$

Ще отбележим, че от устойчивост по гранични условия и дясна част следва, че  $\varphi$  и  $\tilde{\mu}$  могат да се пресмятат в произволни точки от интервала  $[t_j, t_{j+1}]$  без да се нарушава редът на точност.

## Глава 9

# Методи за решаване на мрежови уравнения

### 9.1 Методи на прогонката

Методите на прогонката са модификации на метода на Гаус, отчитащи лентовата структура на матрицата на системата.

#### 9.1.1 Метод на дясната прогонка

Търси се решение на системата

$$(9.1) \quad \begin{cases} -C_0y_0 + B_0y_1 & = -F_0, & i = 0, \\ A_iy_{i-1} - C_iy_i + B_iy_{i+1} & = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ A_Ny_{N-1} - C_Ny_N & = -F_N, & i = N. \end{cases}$$

Както вече видяхме, такива системи възникват при апроксимация на гранични задачи за ОДУ от II ред, а също и при реализация на диференчни схеми за уравнения от параболичен и хиперболичен вид. В последните два случая обикновено трябва да се реши не една задача от типа (9.1), а серия задачи с различни десни части, като при това броят на задачите в серията може да бъде няколко стотици при брой на неизвестните във всяка задача от порядъка на 100. Затова е необходимо да се разработят икономични числени методи за решаване на системи от вида (9.1), като броят на аритметичните операции е пропорционален на броя на неизвестните.

Да изведем формулите на *дясната прогонка*. Да представим първото уравнение на системата (9.1) във вида

$$y_0 = \frac{B_0}{C_0}y_1 + \frac{F_0}{C_0}.$$

Да въведем означенията

$$\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}, \quad \beta_1 = \frac{F_0}{C_0}.$$

Тогава получаваме представянето

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1.$$

Решението на системата (9.1) ще търсим във вида

$$(9.2) \quad y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогава  $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$  и като заместим в  $i$ -тото уравнение, получаваме последователно

$$\begin{aligned} A_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_i &= \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} y_{i+1} + \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}. \end{aligned}$$

Като сравним последното равенство с (9.2), получаваме

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

От последното уравнение на системата (9.1) и представянето (9.2) при  $i = N-1$  имаме

$$\begin{cases} A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N, \\ y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N, \end{cases}$$

откъдето

$$y_N = \frac{A_N \beta_N + F_N}{C_N - A_N \alpha_N} = \beta_{N+1}.$$

И така, алгоритъмът на *дясната прогонка* е следният:

1. Пресмятаме  $\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}, \quad \beta_1 = \frac{F_0}{C_0};$

$$2. \text{ Пресмятаме } \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N;$$

$$3. \text{ Полагаме } y_N = \beta_{N+1};$$

$$4. \text{ Пресмятаме } y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0.$$

Ще отбележим, че броят на аритметичните операции при метода на прогонката е от порядъка на  $8N$ , докато при метода на Гаус е от порядъка на  $N^3$ .

Методът носи името *дясна прогонка*, защото решението  $y$  се намира отдясно наляво.

Да обърнем внимание, че коефициентът  $\alpha_i$  не зависи от дясната част на системата (9.1). Затова, ако трябва да се решава серия от задачи от вида (9.1) с различни десни части, но с една и съща матрица на системата, то прогонъчните коефициенти  $\alpha_i$  се пресмятат при решаването само на първата задача от серията.

Дотук формулите на прогонката са получени формално, без каквито и да било предположения за коефициентите на системата (9.1). Сега ще разгледаме условията, на които трябва да отговарят коефициентите, за да бъде методът на прогонката реализуем и да позволява получаването на решението на задачата с достатъчна точност. За какво точно става въпрос?

- 1) Трябва да гарантираме изпълнението на условието  $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , което ще осигури коректност на формулите.
- 2) Решението  $y_i$  се намира по формулата  $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ . Тази формула може да породии натрупване на грешки от закръгляванията. Наистина, ако  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  са пресметнати точно, а при пресмятането на  $y_N$  е допусната грешка  $\varepsilon_N$ ,  $\tilde{y}_N = y_N + \varepsilon_N$ , то тъй като за  $\tilde{y}_i$  имаме  $\tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1}$ ,  $i = N-1, N-2, \dots, 0$ , то грешката  $\varepsilon_i = \tilde{y}_i - y_i$  ще удовлетворява хомогенното уравнение  $\varepsilon_i = \alpha_{i+1} \varepsilon_{i+1}$ ,  $i = N-1, N-2, \dots, 0$ ,  $\varepsilon_N$  е дадено. Оттук следва, че ако  $|\alpha_i| \leq 1$ , грешката няма да нараства.

Следващата теорема дава достатъчни условия за коректност и устойчивост на алгоритъма на дясната прогонка.

**Теорема.** Нека коефициентите на системата (9.1) са реални числа и удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} C_0 &\neq 0, \quad C_N \neq 0, \\ A_i &\neq 0, \quad B_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ (9.3) \quad |C_i| &\geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

$$(9.4) \quad |C_0| \geq |B_0|, \quad |C_N| \geq |A_N|,$$

като поне едно от неравенствата (9.3) и (9.4) е строго, т. е. матрицата  $A$  има диагонално преобладаване. Тогава за алгоритъма на дясната прогонка са в сила съотношенията  $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$ ,  $|\alpha_i| \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , гарантиращи коректност и устойчивост на метода.

**ДОКАЗАТЕЛСТВО.** Доказателството ще проведем по индукция. За  $|\alpha_1|$  имаме

$$|\alpha_1| = \frac{|B_0|}{|C_0|} \leq 1.$$

Да допуснем, че  $|\alpha_i| \leq 1$  за някое  $i \leq N-1$ . Ще докажем, че от това неравенство и от условията на теоремата следват неравенствата

$$|\alpha_{i+1}| \leq 1, \quad C_i - A_i \alpha_i \neq 0, \quad i \leq N-1.$$

Щом  $|\alpha_i| \leq 1$ , то

$$\begin{aligned} |C_i - A_i \alpha_i| &\geq |C_i| - |A_i| |\alpha_i| \geq |A_i| + |B_i| - |A_i| |\alpha_i| = |B_i| + |A_i| (1 - |\alpha_i|) \\ &\geq |B_i| > 0. \end{aligned}$$

Следователно,  $C_i - A_i \alpha_i \neq 0$  при  $i \leq N-1$ . Освен това

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - A_i \alpha_i|} \leq \frac{|B_i|}{|B_i|} = 1, \quad i \leq N-1.$$

За да покажем, че  $C_N - A_N \alpha_N \neq 0$ , ще използваме изискването поне едно от неравенствата (9.3), (9.4) да бъде строго.

а) Ако  $|C_N| > |A_N|$ , то

$$\begin{aligned} |C_N - A_N \alpha_N| &\geq |C_N| - |A_N| |\alpha_N| > |A_N| - |A_N| |\alpha_N| \\ &= |A_N| (1 - |\alpha_N|) \geq 0, \end{aligned}$$

т. е.  $|C_N - A_N \alpha_N| > 0$  и следователно  $C_N - A_N \alpha_N \neq 0$ .



б) Ако  $|C_0| > |B_0|$ , то  $|\alpha_1| < 1$  и тогава последователно получаваме

$$|\alpha_i| < 1, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad |C_N - A_N \alpha_N| \geq (1 - |\alpha_N|)|A_N| > 0,$$

ако  $A_N \neq 0$ . Ако  $A_N = 0$ , то  $|C_N| > 0$  и тогава попадаме в случая а).

в) Ако за някое  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq N-1$  е в сила  $|C_{i_0}| > |A_{i_0}| + |B_{i_0}|$ , то както и по-горе ще получим  $|C_{i_0} - A_{i_0} \alpha_{i_0}| > |B_{i_0}|$ , откъдето ще следва, че  $|\alpha_{i_0+1}| < 1$ . По-нататък по индукция  $|\alpha_i| < 1$  за  $i > i_0 + 1$  и следователно  $|\alpha_N| < 1$ , а оттук  $C_N - A_N \alpha_N \neq 0$ .

### 9.1.2 Метод на лявата прогонка

Аналогично на метода на дясната прогонка могат да се изведат и формулите на *лявата прогонка*, при която коефициентите  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  се намират отлясно наляво, а стойностите на решението — отляво надясно. Формулите на лявата прогонка изглеждат така:

1.  $\alpha_N = \frac{A_N}{C_N}, \beta_N = \frac{F_N}{C_N};$
2.  $\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, i = N-1, \dots, 1,$   
 $\beta_i = \frac{B_i \beta_{i+1} + F_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, i = N-1, \dots, 0;$
3.  $y_0 = \beta_0;$
4.  $y_i = \alpha_i y_{i-1} + \beta_i, i = 1, 2, \dots, N.$

Условията на доказаната в 9.1.1 теорема за устойчивост и коректност на метода на дясната прогонка са достатъчни за устойчивост и реализруемост и на метода на лявата прогонка.

Понякога се оказва удобно да се комбинират формулите на лявата и дясната прогонка. Тогава се получава методът на *насрещните прогонки*.

### 9.1.3 Метод на цикличната прогонка

Да разгледаме системата

$$(9.5) \quad \begin{cases} A_0 y_{N-1} - C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0, & i = 0, \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_N = y_0, & i = N, \end{cases}$$

където коефициентите и дясната част са периодични с период  $N$ , т. е.

$$(9.6) \quad A_i = A_{i+N}, \quad B_i = B_{i+N}, \quad C_i = C_{i+N}, \quad F_i = F_{i+N}.$$

До такава система достигнахме при задачата за ОДУ от II ред с периодични гранични условия.

При условията (9.6) решението на система (9.5), ако съществува, ще бъде периодично с период  $N$ , т. е.

$$(9.7) \quad y_i = y_{i+N}.$$

Система (9.5) не може да се реши с методите на лявата и дясната прогонка. Тя може да бъде решена с помощта на метода на *цикличната прогонка*.

И така, решението на система (9.5) ще търсим във вида

$$(9.8) \quad y_i = u_i + y_0 v_i, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

където  $u_i$  е решение на системата

$$(9.9) \quad \begin{cases} A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = 0, & u_N = 0, \end{cases}$$

а  $v_i$  е решение на системата

$$(9.10) \quad \begin{cases} A_i v_{i-1} - C_i v_i + B_i v_{i+1} = 0, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ v_0 = 1, & v_N = 1. \end{cases}$$

Тъй като  $y_i$  от (9.8) трябва да удовлетворява системата (9.5), то от първото уравнение получаваме

$$A_0(u_{N-1} + y_0 v_{N-1}) - C_0(u_0 + y_0 v_0) + B_0(u_1 + y_0 v_1) = -F_0,$$

или

$$A_0 u_{N-1} + B_0 u_1 + y_0(A_0 v_{N-1} - C_0 + B_0 v_1) = -F_0,$$

защото  $u_0 = 0$ , а  $v_0 = 1$ . Тогава за  $y_0$  получаваме

$$(9.11) \quad y_0 = -\frac{F_0 + A_0 u_{N-1} + B_0 u_1}{A_0 v_{N-1} + B_0 v_1 - C_0}.$$

За  $i = 1, 2, \dots, N-1$  от (9.5) и (9.8) имаме равенството

$$A_i(u_{i-1} + y_0 v_{i-1}) - C_i(u_i + y_0 v_i) + B_i(u_{i+1} + y_0 v_{i+1}) = -F_i,$$

или още

$$A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} + y_0 (A_i v_{i-1} - C_i v_i + B_i v_{i+1}) = -F_i.$$

Като вземем предвид, че мрежовата функция  $u$  удовлетворява (9.9), а  $v$  — (9.10), то последното равенство е вярно.

За последното уравнение от (9.5), като използваме (9.8), имаме

$$u_N + y_0 v_N = u_0 + y_0 v_0.$$

Тогава, като вземем предвид граничните условия от (9.9) и (9.10), виждаме, че и това равенство е вярно.

И така, ако  $y_0$  се избере според формула (9.11), решението на задача (9.5) може да се намери по формула (9.8), където  $u$  и  $v$  удовлетворяват системите (9.9) и (9.10).

Системите (9.9) и (9.10) могат да се решат например по метода на дясната прогонка:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, & i &= N-1, N-2, \dots, 1, & u_N &= 0, \\ v_i &= \alpha_{i+1} v_{i+1} + \gamma_{i+1}, & i &= N-1, N-2, \dots, 1, & v_N &= 1, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, & i &= 1, 2, \dots, N-1, & \alpha_1 &= 0, \\ \beta_{i+1} &= \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i}, & i &= 1, 2, \dots, N-1, & \beta_1 &= 0, \\ \gamma_{i+1} &= \frac{A_i \gamma_i}{C_i - A_i \alpha_i}, & i &= 1, 2, \dots, N-1, & \gamma_1 &= 1. \end{aligned}$$

Имаме  $u_{N-1} = \alpha_N u_N + \beta_N = \beta_N$  и  $v_{N-1} = \alpha_N v_N + \gamma_N = \alpha_N + \gamma_N$ . Тогава  $y_0$  може да се представи във вида

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{F_0 + A_0 u_{N-1} + B_0 u_1}{A_0 v_{N-1} + B_0 v_1 - C_0} = -\frac{F_N + A_N \beta_N + B_N u_1}{A_N \alpha_N + A_N \gamma_N + B_N v_1 - C_N} \\ &= \frac{B_{N+1} + \alpha_{N+1} u_1}{1 - \gamma_{N+1} - \alpha_{N+1} v_1}. \end{aligned}$$

И така, алгоритъмът на цикличната прогонка е следният:

$$1. \quad \alpha_2 = \frac{B_1}{C_1}, \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}, \gamma_2 = \frac{A_1}{C_1};$$

2.  $\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i\beta_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \gamma_{i+1} = \frac{A_i\gamma_i}{C_i - A_i\alpha_i},$   
 $i = 2, 3, \dots, N-1;$
3.  $u_{N-1} = \beta_N, v_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N;$
4.  $u_i = \alpha_{i+1}u_{i+1} + \beta_{i+1}, v_i = \alpha_{i+1}v_{i+1} + \gamma_{i+1}, i = N-2, N-3, \dots, 1;$
5.  $y_0 = \frac{B_{N+1} + \alpha_{N+1}u_1}{1 - \gamma_{N+1} - \alpha_{N+1}v_1}, y_i = u_i + y_0v_i, i = 1, 2, \dots, N-1.$

В сила е следната

**Теорема.** Ако  $A_i \neq 0, B_i \neq 0, |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, i = 1, 2, \dots, N,$  и за поне едно  $i_0, 1 \leq i_0 \leq N, |C_{i_0}| > |A_{i_0}| + |B_{i_0}|,$  то  $C_i - A_i\alpha_i \neq 0, |\alpha_i| \leq 1, |\alpha_i| + |\gamma_i| \leq 1, i = 2, 3, \dots, N, 1 - \gamma_{N-1} - \alpha_{N-1}v_1 \neq 0.$

## 9.2 Директни и итерационни методи

С помощта на метода на крайните разлики граничните задачи за уравнението на Поасон  $\Delta u = -f,$  а и по-общите елиптични уравнения, се свеждат към системи линейни алгебрични уравнения. Редът на всяка една система е равен на броя на възлите от мрежата и се увеличава с намаляване на стъпката. Освен това, матрицата на системата има много нулеви елементи, специфична лентова структура и не на последно място е лошо обусловена. Нецелесъобразно е, а често и невъзможно, тези системи да се решават със стандартните методи на линейната алгебра. Необходими са специални икономични алгоритми за числено решаване на многомерни диференчни гранични задачи. Ние ще разглеждаме само двумерни гранични задачи.

Както и в общия случай на система линейни алгебрични уравнения, методите за решаване на диференчни задачи се делят на две групи — *директни* и *итерационни*.

*Итерационните методи* са по-прости от директните и в по-слаба степен използват структурата на матрицата. Затова за решаване на многомерни задачи първоначално са се използвали предимно итерационни методи. Сходимостта на някои от тях, обаче, е много бавна. Сега интензивно се развиват директни методи за решаване на такива задачи. Те са приложими, като правило, към уравнения с разделящи се променливи, когато областта на изменение на независимите променливи е паралелепипед. Трябва да отбележим и все по-нарастващата роля на неявните

итерационни методи, при които решението на новата итерация се намира по някакъв директен метод. Макар че тези методи алгоритмически са по-сложни от явните, тяхното несъмнено преимущество е съществено по-бързата им сходимост.

Методите за решаване на двумерни диференчни гранични задачи ще илюстрираме върху задачата на Дирихле за уравнението на Поасон

$$(9.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G = (0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2), \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma, \quad \bar{G} = G + \Gamma. \end{cases}$$

Да въведем в  $\bar{G}$  правоъгълна равномерна мрежа със стъпки  $h_1$  и  $h_2$ . Нека  $\gamma_h = (x_{ij} \in \Gamma)$  е границата на мрежата. Да заменим изходната диференциална задача с диференчната задача

$$(9.13) \quad \begin{cases} \Lambda y = -f(x), & x \in \omega_h, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\ y|_{\gamma_h} = 0. \end{cases}$$

Задача (9.13) ще разглеждаме като моделна при изучаването на методите за решаване на мрежови уравнения. От директните методи ще разгледаме метода на матричната прогонка.

### 9.2.1 Метод на матричната прогонка

Методът на матричната прогонка се прилага към уравнения, които могат да се запишат във вида

$$(9.14) \quad \begin{cases} -C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0, & i = 0, \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N, & i = N, \end{cases}$$

където  $y_i$  са търсените вектор-стълбове с размерност  $M$ ,  $F_i$  — зададени вектор-стълбове с размерност  $M$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  — зададени квадратни матрици от ред  $M$ .

Матричната прогонка представлява обобщение на обикновената прогонка за случая на система векторни уравнения. Сравнена с другите директни методи за решаване на диференчни уравнения, матричната прогонка е по-универсална, защото позволява да се решават уравнения с променливи коефициенти и не налага силни ограничения на вида на

граничните условия. Тя обаче притежава два недостатъка: неикономичност (изисква много машинно време) и главно големи ресурси машинна памет.

Формулите на матричната прогонка могат да се получат по същия начин, както формулите на дясната прогонка, само че при извода им трябва да се отчита, че коефициентите на (9.14) са матрици и не са комутативни. Решението на (9.14) търсим във вида

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

където  $\alpha_{i+1}$  са квадратни матрици от ред  $M$ , а  $\beta_{i+1}$  — вектори с размерност  $M$ . Формулите на матричната прогонка изглеждат по следния начин:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= (C_i - A_i\alpha_i)^{-1}B_i, & i &= 1, 2, \dots, N-1, & \alpha_1 &= C_0^{-1}B_0, \\ \beta_{i+1} &= (C_i - A_i\alpha_i)^{-1}(A_i\beta_i + F_i), & i &= 1, 2, \dots, N, & \beta_1 &= C_0^{-1}F_0, \\ y_i &= \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, & i &= N-1, N-2, \dots, 1, 0, & y_N &= \beta_{N+1}. \end{aligned}$$

В сила е следната

**Теорема.** Ако  $A_i$  и  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  са ненулеви матрици и съществуват матриците  $C_i^{-1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , то за устойчивост на матричната прогонка е достатъчно да са изпълнени неравенствата

$$\begin{aligned} \|C_i^{-1}A_i\| + \|C_i^{-1}B_i\| &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \|C_0^{-1}B_0\| &\leq 1, \quad \|C_N^{-1}A_N\| \leq 1, \end{aligned}$$

като поне в едно от тези условия неравенството е строго.

**Забележка.** Във формулираната теорема

$$\|M\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Да покажем сега как двумерната диференчна задача за уравнението на Поасон може да се сведе до вида (9.14).

Имаме

$$\begin{aligned} (9.15) \quad & \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h_2^2} = -f_{i,j}, \\ & i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \end{aligned}$$

$$(9.16) \quad y_{0,j} = 0, \quad y_{N_1,j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

$$(9.17) \quad y_{i,0} = 0, \quad y_{i,N_2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1.$$

При решаване на задача (9.15)–(9.17) матричната прогонка може да се приложи както по индекса  $i$ , така и по индекса  $j$ . Ще покажем как матричната прогонка може да се приложи по индекса  $i$ . Това се прави когато  $N_1 \gg N_2$ . Да препишем (9.15) във вида

$$\frac{y_{i-1,j}}{h_1^2} - \left( \frac{2y_{i,j}}{h_1^2} - \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h_2^2} \right) + \frac{y_{i+1,j}}{h_1^2} = -f_{i,j},$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Да означим с  $E_2$  единичната матрица от ред  $N_2 - 1$ , а с  $\Lambda_2$  — следната тридиагонална матрица от същия ред

$$\Lambda_2 = \frac{1}{h_2^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ясно е, че матрицата  $\Lambda_2$  е матрицата на  $\Lambda_2 y$ . За  $i = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$  да въведем векторите

$$y_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \dots, y_{i,N_2-1})^T,$$

$$F_i = (f_{i,1}, f_{i,2}, f_{i,3}, \dots, f_{i,N_2-1})^T.$$

Тогава системата уравнения може да се запише във векторен вид така

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2} E_2 y_{i-1} - \left( \frac{2}{h_1^2} E_2 - \Lambda_2 \right) y_i + \frac{1}{h_1^2} E_2 y_{i+1} = -F_i, & i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ y_0 = 0, & y_{N_1} = 0. \end{cases}$$

Ако се окаже, че  $N_2 \gg N_1$ , то тогава по-изгодно е да се използва прогонка по индекса  $j$ , тъй като съответните матрични коефициенти ще бъдат от ред  $N_1 - 1$ , което е много по-малко от  $N_2 - 1$ .

Може да се провери, че за диференчната задача на Дирихле за уравнението на Поасон матричната прогонка е устойчива.

### 9.2.2 Итерационни методи

Нека е дадено уравнението

$$(9.18) \quad Au = f,$$

където  $A$  е линеен оператор,  $A : H \rightarrow H$ , а  $H$  е евклидово пространство с размерност  $N$ , скалярно произведение  $(\cdot, \cdot)$  и норма, породена от него  $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Нека  $A$  е симетричен и положителен, т.е.  $A = A^* > 0$ , а  $f \in H$  е произволен елемент.

Да се спрем най-напред на общата характеристика на итерационните методи. Итерационните методи позволяват, тръгвайки от някакво начално приближение  $y_0 \in H$ , последователно да намираме приближени решения  $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots$  на (9.18), наречени *итерации*. Ако при пресмятането на  $y_{k+1}$  се използва само  $y_k$ , казва се, че итерационният метод е *едностъпков*, ако се използват  $y_k$  и  $y_{k-1}$  — *двустъпков* и т.н. Важна роля играе записът на итерационните методи в единна форма, наречена *канонична*. Всеки едностъпков итерационен метод може да се запише в следната *канонична* форма

$$(9.19) \quad B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in H, \quad y_0 \text{ — произволен,}$$

където  $B : H \rightarrow H$  е линеен оператор, който има обратен  $B^{-1}$ , а  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1} > 0$  са итерационни параметри.

Ако  $B = E$ , методът има вида

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in H, \quad y_0 \text{ — произволен,}$$

и се нарича *явен*, защото  $y_{k+1}$  се намира по явната формула

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f).$$

При  $B \neq E$  методът се нарича *неявен итерационен метод*, защото за определяне на  $y_{k+1}$  трябва да се реши уравнението

$$By_{k+1} = By_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f) \equiv F_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Естествено е да искаме обемът на изчисленията за решаване на системата  $By_{k+1} = F_k$  да бъде по-малък, отколкото обема на изчисленията за решаване на системата (9.18). Ако  $\tau_k = \tau_0$  за всяко  $k$ , итерационният процес се нарича *стационарен*.



Точността на итерационния метод (9.19) се характеризира с грешката  $z_k = y_k - u$ . Казва се, че итерационният метод (9.19) е сходящ, ако  $\|z_k\|_{(1)} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , където  $\|\cdot\|_{(1)}$  е норма в  $H$ . Обикновено се задава някаква точност  $\varepsilon > 0$ , с която трябва да се намери приближеното решение на задача (9.18). Изчисленията се прекратяват, ако

$$\|y_n - u\| \leq \varepsilon \|y_0 - u\|.$$

Това условие е неудобно за практическа проверка, защото  $u$  е неизвестен вектор и може да бъде заменено с изискването

$$\|Ay_n - f\| \leq \varepsilon \|Ay_0 - f\|.$$

Да означим с  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  най-малкото  $n$ , за което е изпълнено последното неравенство. Тогава общия брой аритметични действия, които са необходими за намиране на приближено решение на (9.18), е

$$Q_n(\varepsilon) = n_0(\varepsilon)p_0,$$

където  $p_0$  е броят на аритметичните операции, необходими за намиране на една итерация. Основната задача, която се поставя при итерационните методи, се състои в минимизирането на  $Q_n(\varepsilon)$ , като се изберат подходящо линейният оператор  $B$  и параметрите  $\tau_k$ .

От итерационните методи ще разгледаме *метода на релаксацията*. Да представим матрицата  $A$  във вида

$$A = A^- + D + A^+,$$

където

$$D = (a_{ii}\delta_{ij})_{N \times N}, \quad A^- = (a_{ij}^-)_{N \times N}, \quad A^+ = (a_{ij}^+)_{N \times N},$$

$$a_{ij}^- = \begin{cases} 0, & j \geq i \\ a_{ij}, & j < i \end{cases}, \quad a_{ij}^+ = \begin{cases} 0, & j \leq i \\ a_{ij}, & j > i \end{cases}.$$

Методът на релаксацията изглежда по следния начин

$$\left(A^- + \frac{1}{\omega}D\right)(y_{k+1} - y_k) + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in H, \quad y_0 - \text{дадено},$$

където  $\omega > 0$  е параметър на релаксацията. Сравнен с общата схема на итерационните методи (9.19), за метода на релаксацията имаме

$$B = A^- + \frac{1}{\omega}D, \quad \tau_{k+1} = \tau = 1 \text{ за всяко } k,$$

т.е. методът на релаксацията е неявен стационарен итерационен метод. За стационарните итерационни методи е в сила следната

**Теорема.** Ако  $A = A^* > 0$ ,  $B > \frac{\tau}{2}A$ , то итерационният метод

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 \in H,$$

където  $B$  е линеен оператор, който има обратен  $B^{-1}$ , е сходящ със скорост на геометрична прогресия, т. е.

$$\|y_{k+1} - u\|_A \leq q \|y_k - u\|_A, \quad k = 0, 1, \dots, \quad q < 1,$$

където  $\|y\|_A^2 = (Ay, y)$ .

За метода на релаксацията имаме

$$B - \frac{\tau}{2}A = A^- + \frac{1}{\omega}D - \frac{1}{2}(A^- + A^+ + D) = \frac{1}{2}(A^- - A^+) + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}\right)D.$$

Тогава

$$\left((B - \frac{\tau}{2}A)y, y\right) = \frac{1}{2}((A^- - A^+)y, y) + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}\right)(Dy, y).$$

Тъй като

$$((A^- - A^+)y, y) = (A^-y, y) - (A^+y, y) = (A^-y, y) - (y, (A^+)^Ty) = 0,$$

то

$$\left(\left(B - \frac{\tau}{2}A\right)y, y\right) = \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}\right)(Dy, y) > 0$$

при  $\frac{1}{\omega} > \frac{1}{2}$ , т. е. при  $\omega < 2$ , защото ако  $A > 0$ , то и  $D > 0$ . Наистина, ако вземем  $\xi = (\xi_1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\xi_1 \neq 0$ , то  $(A\xi, \xi) = a_{11}\xi_1^2 > 0$ , откъдето следва, че  $a_{11} > 0$ . Аналогично се доказва, че  $a_{ii} > 0$ . Тогава  $(D\xi, \xi) > 0$  за произволен вектор  $\xi \neq (0, 0, \dots, 0)$ , защото

$$D\xi = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 \\ a_{22}\xi_2 \\ \vdots \\ a_{nn}\xi_n \end{pmatrix}$$

и следователно

$$(D\xi, \xi) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \xi_i^2 > 0,$$

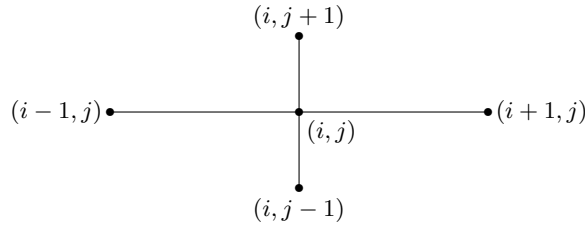
т. е.  $D > 0$ .

Следователно, ако  $A = A^* > 0$ , методът на релаксацията е сходящ със скорост на геометрична прогресия при произволно  $\omega \in (0, 2)$ . При  $\omega > 1$  методът се нарича *горна релаксация*, а при  $\omega < 1$  — *долна релаксация*. При  $\omega = 1$  се получава методът на Зайдел или още *пълна релаксация*. При метода на Зайдел броят на итерациите, необходими за достигане на зададена точност  $\varepsilon$ , е от порядъка на  $N^2$ . При метода на релаксацията параметърът  $\omega$  може да се избере така, че този брой да бъде  $O(N)$ . Това става при стойност на  $\omega > 1$ , т. е. при метода на горната релаксация. Това е основното преимущество на метода на горната релаксация пред метода на Зайдел.

Да видим сега как се прилага методът на релаксацията към диференчната задача на Дирихле за уравнението на Поасон, ако областта е квадрат и мрежата е квадратна. В този случай за диференчната апроксимация на уравнението на Поасон имаме

$$y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1} = -h^2 f_{i,j}.$$

Да подредим неизвестните по редовете на мрежата  $\bar{\omega}_h$ , започвайки от най-долния. При това подреждане неизвестните  $y_{i,j-1}$  и  $y_{i-1,j}$  ще предшестват  $y_{i,j}$ ,  $y_{i+1,j}$  и  $y_{i,j+1}$  ще следват след  $y_{i,j}$  (вж. фиг. 9.1). Тъй като



Фиг. 9.1

във всяко уравнение са свързани не повече от 5 неизвестни, то във всеки ред на матрицата  $A$  ще има най-много 5 различни от нула елемента. Да запишем диференчната задача на Дирихле за уравнението на Поасон във вида

$$(9.20) \quad y_{i-1,j} + y_{i,j-1} - 4y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} = -h^2 f_{i,j}, \quad x \in \omega_h,$$

$$(9.21) \quad y_{i,j} = 0, \quad x \in \gamma_h.$$

Методът на релаксацията може да се запише по следния начин

$$\left( A^- + \frac{1}{\omega} D \right) (y_{k+1} - y_k) + (A^+ + D + A^-) y_k = f,$$

или още

$$\left(A^- + \frac{1}{\omega}D\right)y_{k+1} = -A^+y_k + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)Dy_k + f.$$

Тогава методът на релаксацията за уравнение (9.20) изглежда така

$$y_{i,j-1}^{k+1} + y_{i-1,j}^{k+1} - \frac{4}{\omega}y_{i,j}^{k+1} = -y_{i+1,j}^k - y_{i,j+1}^k - \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)4y_{i,j}^k - h^2f_{i,j}.$$

Оптималният избор на  $\omega$  при  $N_1 = N_2 = N$  е

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{1 + \sin \frac{\pi}{N}}.$$

Пресмятането на  $y_{i,j}^{k+1}$  започва от долния ляв ъгъл на областта, т. е. неизвестните се пресмятат по явни формули (независимо от това, че методът е неявен!) в следния ред

$$\begin{array}{ccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,N-1) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (N-1,1) & (N-1,2) & (N-1,3) & \dots & (N-1,N-1) \end{array}$$

Тук пресмятанията се извършват по редове. Ще отбележим, че те могат да се извършват и по стълбове.