

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И
ИНФОРМАТИКА**



**ТЕОРЕТИЧЕН И ЧИСЛЕН АНАЛИЗ
НА ДИФЕРЕНЧНИ СХЕМИ ЗА
УРАВНЕНИЯ НА БУСИНЕСК**

Веселина Иванова Вучева

Проект на АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна
и научна степен "Доктор"
професионално направление "Математика"
докторска програма "Математическо моделиране и
приложение на математиката"

Научен ръководител: проф. д-р Наталия Кольковска

София, 2019

Съдържание

1	Увод	3
2	Преглед на литературата	9
3	Цели на дисертационната работа	11
4	Съдържание на дисертацията	12
5	Апробация на дисертационната работа	24
6	Публикации	25
7	Благодарност и посвещение	26
8	Основни научни приноси	27
9	Декларация	28

1 Увод

В дисертацията е разгледана задача на Коши за едномерните уравнения на Бусинеск:

- *Двойно дисперсно уравнение (ДДУ)* или Парадигматично уравнение на Бусинеск

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \Delta f(u); \quad (1.1)$$

- *Уравнение на Бусинеск от шести ред (УБШР)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2 \Delta^2 u + \beta_3 \Delta^3 u - \Delta f(u); \quad (1.2)$$

в която търсеното решение $u = u(x, t)$ е дефинирано при $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \in [0, T]$.

Началните условия на задачата са

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x).$$

За Двойно дисперсното уравнение се предполага, че

$$u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L_2(\mathbb{R}),$$

а за уравнението на Бусинеск от шести ред

$$u_0 \in W_2^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in L_2(\mathbb{R}), \quad (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} u_1 \in L_2(\mathbb{R}).$$

Тук с W_2^k са означени класовете на Соболев с k -ти производни от $L_2(\mathbb{R})$, а Δ е едномерният оператор на Лаплас, т.е. $\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$. Освен това $(-\Delta)^{-s} u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2s} \mathcal{F}(u))$ за $s > 0$, където $\mathcal{F}(u)$ и $\mathcal{F}^{-1}(u)$ са съответно *Трансформация на Фурие* и *Обратна трансформация на Фурие*.

Уравненията на Бусинеск са хиперболични частни диференциални уравнения с един, два или три дисперсни члена и

нелинейност от полиномиален тип. В разгледаните в дисертацията задачи нелинейният член има вида

$$f(u) = \alpha u^p, \quad p = 2, 3, \dots, \quad p \in N.$$

Коефициентите β_1 , β_2 и β_3 са дисперсни параметри, а α е параметър на амплитудата.

Тези уравнения участват в редица математически модели, описващи реални процеси. Уравнението (1.1) се среща при моделиране на надлъжните трептения в нелинейни атомни вериги и при двупосочното разпространение на малка амплитудна вълна на повърхността на плитка вода [12]. ДДУ се появява в редица математически модели на физични процеси, например в дислокационната теория на кристалите, в оптиката и т.н.

Уравнението на Бусинеск от шести ред участва в някои микро-структурни задачи [4] и в динамиката на повърхностна вълна с малка амплитуда в плитка вода [16, 17].

Извеждането на уравнение (1.1) от пълния модел на Бусинеск е описано в [12].

Решения на уравненията на Бусинеск

Решенията на уравненията на Бусинеск съществуват за безкраен период от време или "избухват" за крайно време.

Добре известен факт е, че ДДУ (1.1) притежава точно решение във вид на движеща се вълна, т.е. $u(x, t) = \phi(x - ct)$, където c е скоростта на вълната. Тези решения се наричат *солитони*. Под солитон се разбира вълна, която при движение с постоянна скорост запазва формата си. След заместване на $u(x, t)$ с $\phi(x - ct)$ и интегриране по x , ДДУ (1.1) може да се сведе до следното нелинейно диференциално уравнение от втори ред за функцията ϕ :

$$(\beta_2 - \beta_1 c^2) \phi^{II} + (c^2 - 1) \phi - \alpha \phi^p = 0.$$

Точното решение на Двойно дисперсното уравнение (1.1) се задава с формулата

$$\tilde{u}(x, t) = \left[\frac{(c^2 - 1)(p + 1)}{2\alpha} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1 - p}{2} \sqrt{\frac{c^2 - 1}{\beta_1 c^2 - \beta_2}} (x - ct) \right) \right]^{\frac{1}{p-1}}. \quad (1.3)$$

От (1.3) се получават следните ограничения за скоростта c :

$$c^2 > \max \left(1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \quad \text{или} \quad c^2 < \min \left(1, \frac{\beta_2}{\beta_1} \right).$$

За солитонните решения на уравнението на Бусинеск от шести ред (1.2) не съществува точна формула при произволни стойности на коефициентите β_1 , β_2 , β_3 , α и c . Решенията на (1.2) от тип бягаща вълна са решения на следното уравнение от четвърти ред:

$$\beta_3 \phi^{IV} - (\beta_2 - \beta_1 c^2) \phi^{II} + (1 - c^2) \phi - \alpha \phi^p = 0, \quad (1.4)$$

с гранични условия $|\phi(x)| \rightarrow 0$ и $|\phi'(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Следвайки [18], за конкретни стойности на коефициентите се получава:

- точно решение $\tilde{u}(x, t; c)$ на (1.4) с коефициенти $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1 + \frac{61}{169}\beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $c = \sqrt{\frac{61}{169}}$ при квадратична нелинейност ($p = 2$), което има вида

$$\tilde{u}(x, t; c) = \frac{315}{169} \operatorname{sech}^4 \left(\sqrt{\frac{3}{52}} (x - ct) \right); \quad (1.5)$$

- точно решение $\tilde{u}(x, t; c)$ на (1.4) с коефициенти $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1 + \frac{9}{25}\beta_1$, $\beta_3 = \frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{5}$ и $\alpha = \frac{1}{3}$ при кубична нелинейност ($p = 3$), което има вида

$$\tilde{u}(x, t; c) = \sqrt{\frac{18}{5}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{1}{5}} (x - ct) \right). \quad (1.6)$$

При проведените числени експерименти тези решения са използвани за начални данни за хиперболичната задача (1.2) и за определяне на грешката, и реда на сходимост на приближеното решение към точното.

За численото намиране на решението на (1.4) е използван **метод на Петвиашвили**.

Към уравнение (1.4) е приложено *дискретно преобразован* *ие на Фурие*:

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{\widetilde{\alpha\phi^p(k)}}{\beta_3 k^4 + (\beta_2 - \beta_1 c^2) k^2 + (1 - c^2)}.$$

Решението $\tilde{\phi}(k)$ се намира с помощта на следния итерационен метод:

$$\tilde{\phi}(k)^{[s+1]} = M^{[s]\frac{p}{p-1}} \frac{\widetilde{\alpha\phi^p(k)}^{[s]}}{\beta_3 k^4 + (\beta_2 - \beta_1 c^2) k^2 + (1 - c^2)},$$

където за нулева итерация $\phi^{[0]}$ е използвана камбановидна функция $\phi^{[0]} := e^{-x^2 C}$, $C = \text{const}$.

При метода на Петвиашвили използваме т. нар. стабилизиращ множител $M^{\frac{p}{p-1}}$, където

$$M^{[s]} = \frac{\int_R [\beta_3 k^4 + (\beta_2 - \beta_1 c^2) k^2 + (1 - c^2)] \tilde{\phi}^2(k)^{[s]} dk}{\int_R \tilde{\phi}(k)^{[s]} \cdot \widetilde{\phi^p(k)}^{[s]} dk}.$$

Степенният показател $\frac{p}{p-1}$ на M е оптимален за сходимостта на итерациите (виж [37] и [38]).

Основни свойства на уравненията на Бусинеск

Уравненията на Бусинеск могат да се представят във вид на система от диференциални уравнения, съдържащи производни от по-нисък ред.

Нека $w(x, t)$ е помощна функция, дефинирана в $\mathbb{R} \times [0, T]$. Уравнението на Бусинеск от шести ред е еквивалентно на следната система

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = u - \beta_2 \Delta u + \beta_3 \Delta^2 u - f(u), \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \beta_1 \Delta \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta w \end{cases} \quad (1.7)$$

с начални условия

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$w(x, 0) = (-\Delta)^{-1}(\beta_1 \Delta u_1(x) - u_1(x)).$$

В Раздел 3.2 и Раздел 3.3 са изследвани две диференчни схеми, получени при дискретизацията на система (1.7).

Освен във вида (1.7) е разгледано представяне на уравненията на Бусинеск във вид на обобщена хамилтонова система. Двойно дисперсното уравнение (1.1) е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (1.8)$$

с хамилтониан

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\alpha \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx. \quad (1.9)$$

Подобно на Двойно дисперсното уравнение, скаларното уравнение на Бусинеск от шести ред е еквивалентно на следната система

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = (I_d - \beta_1 \Delta)^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} - \alpha \frac{\partial u^p}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (1.10)$$

с хамилтониан

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(v^2 + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + u^2 + \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \beta_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 2\alpha \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx. \quad (1.11)$$

Началните условия на системите (1.8) и (1.10) са

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad \text{където} \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} = u_1(x).$$

Тъй като числените методи трябва да запазват свойства на непрекъснатата задача, в Раздел 3.4 и Раздел 3.5 от дисертацията са разгледани схеми, които запазват симплектичността на дискретно ниво. Такива схеми са известни в литературата като *симплектични схеми* [23], [40]. Тези схеми са конструирани след представяне на съответното уравнение на Бусинеск във вид на обобщена хамилтонова система.

Теорема 1. *Хамилтонианът $H(u, v)$, дефиниран чрез (1.9) и (1.11), може да се запише само в термините на функцията $u(x, t)$ по следния начин:*

i) *За Двойно дисперсното уравнение*

$$E(u) = \frac{1}{2} \left\| (-\Delta)^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{\beta_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \|u(x, t)\|^2 + \\ + \frac{\beta_2}{2} \|\nabla u(x, t)\|^2 + \int_{\mathbb{R}} \int_0^u f(s) ds dx;$$

ii) *За уравнението на Бусинеск от шести ред*

$$E(u) = \frac{1}{2} \left\| (-\Delta)^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{\beta_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \|u(x, t)\|^2 + \\ + \frac{\beta_2}{2} \|\nabla u(x, t)\|^2 + \frac{\beta_3}{2} \|\Delta u(x, t)\|^2 - \int_{\mathbb{R}} \int_0^u f(s) ds dx.$$

Важно свойство на разглежданите уравнения (1.1) и (1.2) е, че те имат три инварианти: енергия, маса и момент. Нека $u(x, t)$ и $v(x, t)$ е решението на системи (1.8) и (1.10). Масата $I(u(x, t))$ и момент $M(u(x, t), v(x, t))$ се дефинират по следния начин

$$I(u(x, t)) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx, \quad (1.12)$$

$$M(u(x, t), v(x, t)) = \int_{\mathbb{R}} (u(x, t)v(x, t) + \beta_1 u_x(x, t)v_x(x, t)) dx. \quad (1.13)$$

Теорема 2. (Закопи за запазване) *За всяко $t \geq 0$ решението (u, v) на задача (1.8) и (1.10) удовлетворява следните равенства:*

$$H(u(x, t), v(x, t)) = H(u(x, 0), v(x, 0));$$

$$I(u(x, t)) = I(u(x, 0));$$

$$M(u(x, t)) = M(u(x, 0)).$$

2 Преглед на литературата

Уравнението (1.1) с $\beta_1 = 0$ е известно в литературата като "Добро" уравнение на Бусинеск. При намиране на численото му решение са използвани следните методи:

- метод на Гальоркин е изследван в [9] и [36];
- метод на крайните разлики е приложен в [15];
- спектрални и псевдоспектрални методи са използвани в [6, 22, 35, 45];
- предикторно-коректорен метод е приложен в [2];
- симплектични методи са публикувани в [1, 3, 5, 25, 44];

- безмрежов метод в [34].

Двойно дисперсното уравнение с $\beta_1 > 0$ не е толкова подробно изследвано числено. За намиране на решението на едномерната задача е използван метод на крайните разлики в [7, 12, 13, 26, 28]. Конструираните диференчни схеми са консервативни. Точното запазване на глобалната дискретна енергия и сходимостта на числения метод са доказани в [27, 28, 30].

Решението на двумерното уравнение на Бусинеск (1.1) е намерено чрез диференчен метод в [14] и [19]. В [14] е конструирана диференчна схема с втори ред на точност по пространството и времето. Използваната мрежа е неравномерна и при конструиранието на схемата са използвани две различни асимптотични гранични условия. Първото гранично условие е тривиално, а другото съвпада с очакваното асимптотично поведение в безкрайността.

Три диференчни схеми с втори ред на точност са предложени, изследвани и сравнени в [19]. Схемите се различават по апроксимацията на нелинейния член.

Икономична диференчна схема за двумерното ДДУ е конструирана и изследвана в [29]. Доказано е, че численото решение на линейното двумерно ДДУ удовлетворява дискретно енергетично твърдение и е установена сходимостта на метода в енергетична норма.

Числени решения на уравнението на Бусинеск от шести ред с $\beta_1 = 0$ са получени чрез спектрален и псевдоспектрален метод в [8, 10, 11, 17]. По-конкретно в [11] е използвана пълна ортонормирана система от функции, а в [17] е приложена комбинация от рационални функции на Чебишев и радиални базисни функции, за да се получи правилното поведение на вълната както в началото, така и в безкрайността.

За численото решение на уравнението на Бусинеск от шести ред с $\beta_1 = 0$ в [16] и [21] са получени и изследвани диференчни схеми с различни апроксимации на нелинейността. Схемата в [16] запазва дискретната енергия, а схемата в [21]- дискретната

маса.

Решенията на УБШР от тип бягаща вълна $u(x, t) = \phi(x - ct)$ са решения на следното уравнение от четвърти ред

$$\beta_3 \phi^{IV} - (\beta_2 - \beta_1 c^2) \phi^{II} + (1 - c^2) \phi - \alpha \phi^p = 0, \quad (2.1)$$

с гранични условия $\left| \frac{d^s \phi}{dx^s} \right| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ за $s = 0, 1$.

Тези решения при $\beta_1 = 0$ са изследвани в [16]. Точното решение на това обикновено диференциално уравнение (ОДУ) е намерено чрез елиптични функции на Вайерщрас в [4].

При подходящи стойности на параметрите са получени точни решения на (2.1) в [17], виж (1.5) и (1.6).

Единичните вълни и тяхното взаимодействие са изследвани числено в [16] и [21]. В зависимост от знака на дисперсията параметър β_2 съществуват два типа солитонни решения на (2.1): с монотонна форма при $\beta_2 > 0$ и решения с осцилиращо поведение при $\beta_2 < 0$ и $x \rightarrow \pm\infty$. Решенията на (2.1) с осцилиращо поведение се наричат решения от тип на Кавахара [16].

3 Цели на дисертационната работа

Неписано правило при избора на числен метод е той да запазва колкото е възможно повече от свойствата на непрекъснатата задача. Поради тази причина основните цели на настоящата дисертация са следните:

- Построяване на диференчни схеми за уравненията на Бусинеск от четвърти и шести ред, запазващи дискретни аналози за масата, момента, енергията и симплектичността на дискретно ниво.
- Теоретично изследване на построените диференчни схеми, което включва:
 - определяне на грешката на апроксимация и условието за устойчивост;

- изследване на сходимостта на дискретното решение към точното;
- формулиране и доказване на дискретни закони за запазване; получаване на оценки за приближено запазване на енергията, масата и момента;
- Провеждане на редица числени експерименти с цел потвърждаване на теоретичните резултати, по-точно:
 - втори ред на точност за конструираните диференчни схеми;
 - втори ред на сходимост на дискретните инварианти към точните;
- Сравняване на качествените характеристики на разглежданите схеми.

4 Съдържание на дисертацията

Глава 2

Във втора глава на дисертацията са формулирани условия за съществуване на решението на уравненията на Бусинеск във вид на солитон. Представени са формула (1.3) на точното решение на ДДУ и аналитични решения на УБШР при конкретни стойности на параметрите. Разгледан е метод на Петвиашвили за числено намиране на решение на уравнението от шести ред във вид на бягаща вълна, което е решение на нелинейното ОДУ от четвърти ред (2.1).

В Глава 2 е доказано хамилтоновото представяне на уравненията на Бусинеск. Показана е еквивалентност на непрекъснатата енергия $E(u(x, t))$, записана в термините само на решението $u(x, t)$ и непрекъснатия хамилтониан $H(u(x, t), v(x, t))$.

Въведени са означения и формули, използвани в следващите две глави.

За удобство на читателите са формулирани и доказани някои важни теореми от [39], които са използвани при теоретич-

ните изследвания в дисертацията.

Глава 3

В третата глава на дисертацията са конструирани четири диференчни схеми за намиране на решението на уравнението на Бусинеск от шести ред. В Раздел 3.2 е разгледана следната диференчна схема:

$$\begin{cases} \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_i^k - \beta_2 \Delta_h y_i^k + \beta_3 \Delta_h^2 y_i^k - \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \\ y_{t,i}^k - \beta_1 \Delta_h y_{t,i}^k = \Delta_h w_i^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Достатъчното ѝ условие за устойчивост $\tau = O(h^2)$ е формулирано и доказано в следната теорема:

Теорема 3. *Линейната диференчна схема, съответстваща на (4.1), (еквивалентно схемата (4.1) с $f_1(y) = 0$) е условно устойчива по начални данни, със следното условие на устойчивост*

$$\tau \leq \sqrt{\frac{\beta_1}{(1+\epsilon)(h^4 + 4\beta_2 h^2 + 16\beta_3)}} h^2,$$

където ϵ е малко положително число, независимо от h и τ .

Това условие е рестриктивно и за намиране на решението при $T \gg 0$ трябва да се извършат значителен брой стъпки по времето. Поради тази причина в Раздел 3.3 е построена нова схема, при която за апроксимация на производната от шести ред е използвана линейна комбинация от стойностите на решението на три времеви слоя с параметър σ . Чрез метод на регуляризацията е получена следната диференчна схема

$$\begin{cases} \left(I_d + \frac{\beta_3}{\beta_1} \sigma \tau^2 \Delta_h^2 \right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_i^k - \beta_2 \Delta_h y_i^k + \beta_3 \Delta_h^2 y_i^k - \frac{\alpha}{p+1} \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \\ (I_d - \beta_1 \Delta_h) y_{t,i}^k = \Delta_h w_i^{k+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (4.2)$$

която наричаме *Факторизирана диференчна схема (ФДС)*. Тази схема има достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h)$:

Теорема 4. *Нека съществува малко положително число ϵ , такова че са изпълнени следните условия:*

$$1. \text{ ако } \sigma \geq \max \left\{ \frac{1+\epsilon}{4}, \frac{\beta_1\beta_2(1+\epsilon)}{4\beta_3} \right\}, \text{ то } \tau^2 \leq \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}; \quad (4.3)$$

$$2. \text{ ако } \sigma \in \left[\frac{1+\epsilon}{4}, \frac{\beta_1\beta_2(1+\epsilon)}{4\beta_3} \right), \text{ то}$$

$$\tau^2 \leq \min \left\{ \frac{4\beta_1}{1+\epsilon}, h^2 \frac{4\beta_1^2}{\beta_1(1+\epsilon)(h^2 + 4\beta_2) - 16\sigma\beta_3} \right\}. \quad (4.4)$$

Тогава схема (4.2) е устойчива по начални данни и дясна част.

Схемата (4.1) се получава от ФДС при $\sigma = 0$.

Дискретната енергия на ФДС е дефинирана чрез израза

$$E_h(y^k) := E_{h,L}(y^k) - \frac{\alpha}{2(p+1)}((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1), \quad (4.5)$$

където линейната част $E_{h,L}(y^k)$ е зададена с равенството

$$E_{h,L}(y^k) := \frac{1}{2} \left((-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} y_t^k, (-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} y_t^k \right) + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8} \right) (y_t^k, y_t^k) +$$

$$+ \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\beta_3\sigma}{\beta_1} - \frac{\beta_2}{4} \right) (\Delta_h y_t^k, y_t^k) + \frac{\tau^2\beta_3}{2} \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) (\Delta_h y_t^k, \Delta_h y_t^k) +$$

$$+ \frac{1}{8} \left((I_d - \beta_2\Delta_h + \beta_3\Delta_h^2) (y^{k+1} + y^k), y^{k+1} + y^k \right).$$

Решението на двете схеми удовлетворява следния дискретен закон за запазване на енергията $E_h(y^k)$:

Теорема 5. *Диференчните схеми (4.1) и (4.2) са консервативни, т.е. на всеки слой $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила:*

$$E_h(y^k) = E_h(y^0),$$

където дискретната енергия $E_h(y^k)$ се задава с израза (4.5).

За ФДС са доказани следните теореми за сходимост в $W_{2,h}^2$ норма и в C_h норма:

Теорема 6. (Сходимост на метода) Нека $u(x, t) \in C^{8,4}(R \times [0, T])$ и дискретното решение y^k на ФДС е ограничено. Нека е удовлетворено условието за устойчивост (4.3)-(4.4). Тогава за всички достатъчно малки стъпки τ дискретното решение y^k клони към точното решение u^k при $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ и за грешката $z^k = u^k - y^k$ е в сила следната оценка

$$\beta_1 \|z_t^K\|^2 + \|z^{K+1}\|^2 + \beta_2 \|z_{\bar{x}}^{K+1}\|^2 + \beta_3 \|z_{\bar{x}\bar{x}}^{K+1}\|^2 \leq C(h^2 + \tau^2)^2.$$

Следствие 4.1. Нека са изпълнени условията на Теорема 6. Тогава са в сила следните оценки за грешката $z^k = u^k - y^k$ в равномерна норма:

$$\|z^k\|_{C_h} = \max_i |z_i^k| \leq M_1(h^2 + \tau^2),$$

$$\|z_{\bar{x}}^k\|_{C_h} = \max_i |z_{\bar{x},i}^k| \leq M_2(h^2 + \tau^2),$$

където M_1 и M_2 са положителни константи, независещи от h и τ .

Сравнението на резултатите от проведените числени експерименти показва предимство на ФДС пред схемата с тегло $\sigma = 0$ по отношение на изчислителното време и запазването на дискретната енергия.

Останалите две схеми в трета глава са конструирани след представяне на уравнението на Бусинеск като обобщена хамилтонова система (1.10). Използвани са крайни разлики с втори ред на апроксимация и стъпки $2h$, а след дискретизация по пространството към получената система ОДУ е приложен методът на Щърмер-Верле. В резултат на това в Раздел 3.5 е разгледана схемата

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - \\ \quad - \alpha \frac{(y_{i+1}^k)^p - (y_{i-1}^k)^p}{2h}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.6)$$

За нея е характерно следното важно свойство:

Теорема 7. *Схемата (4.6) е симплектична, т.е. тя запазва дискретната симплектична структура $\omega^k = dz^k \wedge J_h dz^{k-1}$, $z^k = (u^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ на всеки слой по времето*

$$\omega^k = \omega^{k-1} = \dots = \omega^0,$$

където антисиметричната матрица J_h има вида

$$J_h = \begin{bmatrix} 0 & (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} \\ (I_d - \beta_1 \hat{\Delta})^{-1} \partial_{\hat{x}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

В Теорема 38 от дисертацията е доказано, че симплектичната схема (4.6) запазва дискретната енергия $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$ приближено с грешка $O(\tau^2)$, т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \tau^2 TC.$$

В Раздел 3.4 е получена следната диференчна схема

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \beta_3 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k - \\ \quad - \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_{i+1}^{k+1})^{p+1} - (y_{i-1}^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{w_{i+1}^{k+\frac{1}{2}} - w_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}}{2h}. \end{cases} \quad (4.8)$$

В Теорема 34 е доказано, че решението на схема (4.8) удовлетворява дискретен закон за запазване на енергията

$$H_h(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_h(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \text{ за } k = 1, \dots, K.$$

Диференчните схеми (4.6) и (4.8) апроксимират хамилтоновата система (1.10) с грешка $O(h^2 + \tau^2)$. Тъй като двете схеми се различават само по апроксимацията на нелинейния член, те имат едно и също условие за устойчивост $\tau = O(h^2)$, формулирано в Теорема 36. Освен това е в сила следната теорема:

Теорема 8. *Решението на диференчните схеми (4.6) и (4.8) запазва дискретната маса $I_h(t_k)$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила следното равенство $I_h(t_k) = I_h(t_0)$, където $I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k$.*

В Раздел 3.2.1, Раздел 3.3.1, Раздел 3.4.1 и Раздел 3.5.1 са представени резултати от проведените числени експерименти при два вида нелинейности: квадратична ($p = 2$) и кубична ($p = 3$). За начални данни е използвано както аналитично решение на задачата, така и числено решение, получено по метода на Петвиашвили.

Разгледани са редица примери за разпространение на единична вълна и за взаимодействие на две вълни, движещи се в една и съща посока и в противоположни посоки, с една и съща скорост и с различни скорости. Числените резултати са илюстрирани в редица таблици и графики. Направено е сравнение между отделните качествени характеристики на схемите: грешка, ред на сходимост, сходимост на дискретната енергия към точната, относителна грешка на енергията, относителна грешка на масата и др.

Получените числени резултати потвърждават доказаните теоретични резултати.

Изследването на диференчните схеми, които са представени в Глава 3, е публикувано в следните статии с импакт ранг [31], [32], [41] и [42].

Глава 4

В четвъртата глава от дисертацията са конструирани три диференчни схеми за намиране на решението на ДДУ. За всяка от схемите са дефинирани:

– **дискретен момент**

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) := \sum_{i=1}^N h(y_i^k w_i^{k-\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{\hat{x},i}^k w_{\hat{x},i}^{k-\frac{1}{2}}); \quad (4.9)$$

– **дискретен хамилтониан**

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) := H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\alpha}{2(p+1)}((y^{k+1})^{p+1} + (y^k)^{p+1}, 1), \quad (4.10)$$

където

$$\begin{aligned} H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) := & \frac{1}{2} \|w^{k+\frac{1}{2}}\|^2 + \left(\frac{\beta_1}{2} - \frac{\tau^2}{8}\right) \|w_{\hat{x}}^{k+\frac{1}{2}}\|^2 - \\ & - \frac{\beta_2 \tau^2}{8} \|w_{\hat{x}\hat{x}}^{k+1/2}\|^2 + \frac{1}{8} \|y^{k+1} + y^k\|^2 + \frac{\beta_2}{8} \|y_{\hat{x}}^{k+1} + y_{\hat{x}}^k\|^2; \end{aligned} \quad (4.11)$$

– **дискретната маса**

$$I_h(t_k) = \sum_{i=1}^N h y_i^k.$$

В Раздел 4.2.2 е изследвана следната диференчна схема:

$$\begin{cases} \left(I_d - \beta_1 \hat{\Delta}\right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \alpha ((y_i^k)^p)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Теорема 9. *Схемата (4.12) е симплектична, т.е. тя запазва дискретната симплектична структура $\omega^k = dy^k \wedge J_h dw^{k-\frac{1}{2}}$ на всеки слой по времето*

$$\omega^k = \omega^{k-1} = \dots = \omega^0,$$

където антисиметричната матрица J_h се задава с (4.7).

В следващата теорема е доказано, че симплектичната схема (4.12) запазва приближено дискретния момент $M_h^1(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ с грешка $O(h^2)$:

Теорема 10. *Решението на симплектичната схема (4.12) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K-1$ следното дискретно равенство*

$$M_h^{k+1}(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}}) - M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = -\tau\alpha \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k (y_i^k)^p,$$

където дискретният момент $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (4.9).

Освен това е в сила оценката

$$\left| M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq Ch^2T,$$

с константа C , независеща от h и τ .

Симплектичната схема не удовлетворява точно дискретен закон за запазване на енергията $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$.

Теорема 11. *Решението на симплектичната схема (4.12) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K$ следните равенства:*

$$H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_{h,L}^{k-1}(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}}) - \frac{\alpha}{2}((y^k)^p, y^{k+1} - y^{k-1}),$$

където $H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (4.11).

Освен това, решението запазва приблизително с глобална грешка $O(\tau^2)$ дискретния хамилтониан $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$, дефиниран с (4.10), т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq \tau^2TC,$$

с константа C , независеща от h и τ .

В Раздел 4.2.1 е изследвана диференчна схема за ДДУ, която има вида

$$\begin{cases} \left(I_d - \beta_1 \hat{\Delta} \right) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x}\hat{x},i}^k + \\ \quad + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} \right)_{\hat{x},i}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Основното свойство на схема (4.13) е формулирано в следната теорема:

Теорема 12. *Решението на схема (4.13) запазва дискретния момент $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството*

$$M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}),$$

където $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ се дефинира с (4.9).

В следващата теорема е получена оценка за запазването на дискретният хамилтониан $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$ от схема (4.13).

Теорема 13. *Решението на диференчната схема (4.13), удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K$ следните равенства:*

$$\begin{aligned} H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) &= H_{h,L}^{k-1}(y^{k-1}, w^{k-\frac{1}{2}}) - \\ &- \frac{\alpha}{2(p+1)} \sum_{i=1}^N h \frac{(y_{i+1}^k)^{p+1} - (y_{i-1}^k)^{p+1}}{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k} (y_i^{k+1} - y_i^{k-1}), \end{aligned}$$

където $H_{h,L}^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (4.11).

Освен това, решението запазва приблизително с глобална грешка $O(h^2 + \tau^2)$ дискретният хамилтониан $H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}})$, дефиниран с (4.10), т.е. в сила е оценката

$$\left| H_h^K(y^K, w^{K+\frac{1}{2}}) - H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq (h^2 + \tau^2)TC,$$

с константа C , независеща от h и τ .

В Раздел 4.2.6 е изследвана диференчната схема

$$\begin{cases} (I_d - \beta_1 \hat{\Delta}) \frac{w_i^{k+\frac{1}{2}} - w_i^{k-\frac{1}{2}}}{\tau} = y_{\hat{x},i}^k - \beta_2 y_{\hat{x}\hat{x},i}^k + \\ \quad + \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}} \right)_{\hat{x}}, \\ \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = w_{\hat{x},i}^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Важно нейно свойство е формулирано и доказано в следващата теорема:

Теорема 14. *Схема (4.14) е консервативна, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ решението ѝ удовлетворява следното равенство*

$$H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}}) = H_h^0(y^0, w^{\frac{1}{2}}),$$

където дискретният хамилтониан $H_h^k(y^k, w^{k+\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (4.10).

Друго свойство на схема (4.14) е че решението ѝ запазва началния дискретен момент $M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}})$ с точност $O(h^2 + \tau^2)$, т. е. в сила е следната теорема:

Теорема 15. *Решението на консервативната схема (4.14) удовлетворява на всеки слой по времето $k = 1, 2, \dots, K-1$ следното дискретно равенство*

$$\begin{aligned} & M_h^{k+1}(y^{k+1}, w^{k+\frac{1}{2}}) - M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}}) = \\ & -\tau \frac{\alpha}{p+1} \sum_{i=1}^N h y_{\hat{x},i}^k \frac{(y_i^{k+1})^{p+1} - (y_i^{k-1})^{p+1}}{y_i^{k+1} - y_i^{k-1}}, \end{aligned}$$

където дискретният момент $M_h^k(y^k, w^{k-\frac{1}{2}})$ е дефиниран с (4.9).

Освен това е в сила оценката

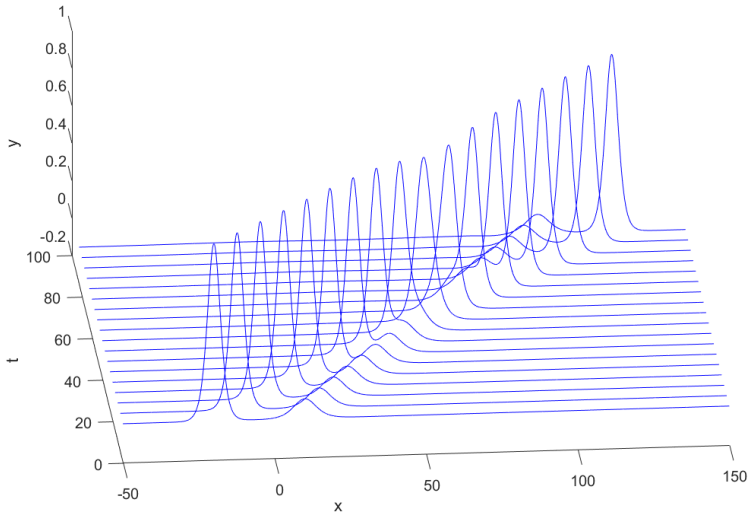
$$\left| M_h^K(y^K, w^{K-\frac{1}{2}}) - M_h^1(y^1, w^{\frac{1}{2}}) \right| \leq C(h^2 + \tau^2)T,$$

с константа C , независеща от h и τ .

Тъй като трите схеми (4.12), (4.13) и (4.14) се различават само по апроксимацията на нелинейния член, те имат едно и също достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h)$. Друго общо за трите схеми свойство е свързано със запазването на дискретната маса:

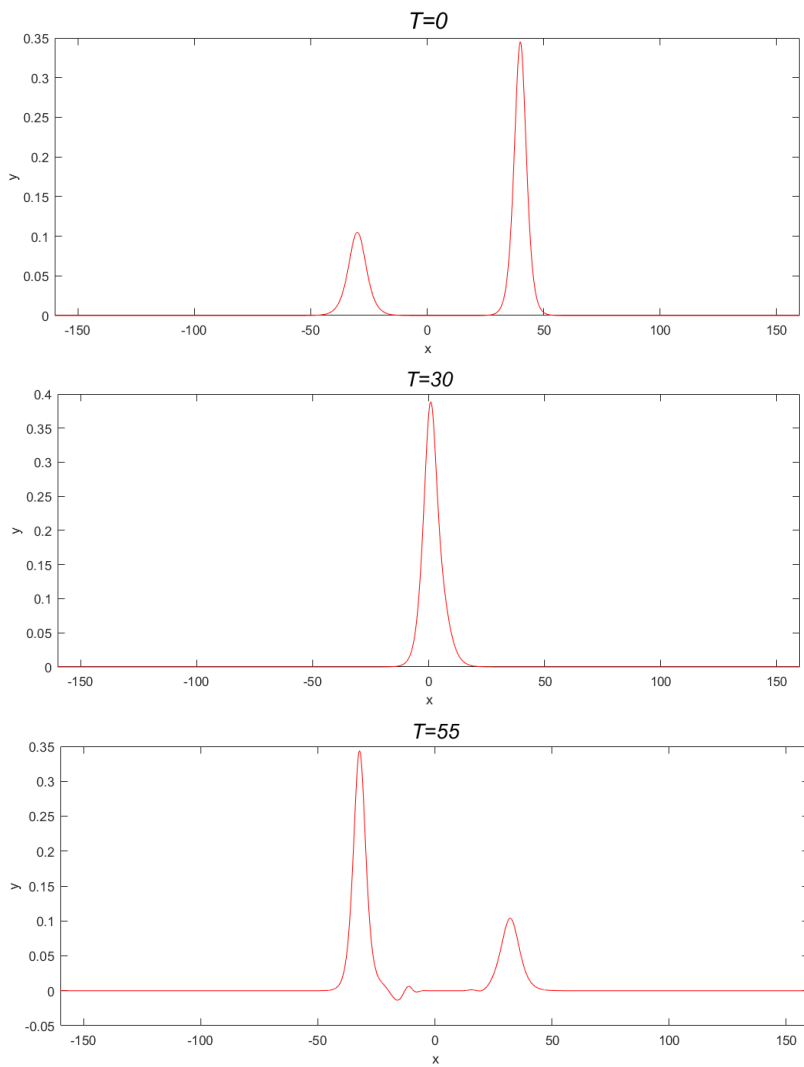
Теорема 16. *Схемите (4.12), (4.13) и (4.14) запазват дискретната маса във времето, т.е. за всяко $k = 1, 2, \dots, K$ е в сила равенството $I_h(t_k) = I_h(t_0)$, където $I_h(t_k)$ се дефинира с (4.12) .*

В Раздел 4.2.4, Раздел 4.2.5 и Раздел 4.2.7 са представени числени резултати за трите схеми, конструирани за намиране на решението на ДДУ. Разгледани са примери за движение на единична вълна и за взаимодействие на две вълни при квадратична и кубична нелинейност с точно начално условие.



Фигура 1: Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.7$ и $c_2 = 1.1$ в една и съща посока, получени чрез схемата, запазваща момента за ДДУ

Фигура 2: Взаимодействие на вълни, движещи се със скорости $c_1 = 1.1$ и $c_2 = -1.3$, получени чрез на схемата, запазваща момента за ДДУ



Получените числени резултати потвърждават теоретичните резултати.

Изследването на диференчните схеми от Глава 4 е публикувано в списание с импакт фактор [33].

5 Аprobация на дисертационната работа

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните международни конференции и семинари:

- Ninth International Conference on Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, Bulgaria, 2017;
- Mathematics Days in Sofia, Bulgaria, 2017;
- Fifteenth International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Solun, Greece, 2017;
- Sixth CMAPT Workshop Computational Mathematics and Approximation Theory, Linz, Austria, 2017;
- Tenth Jubilee Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, Bulgaria, 2018;
- Ninth Numerical Method and Application, Borovets Bulgaria, 2018;
- Seventh CMAPT Workshop Computational Mathematics and Approximation Theory, Sozopol, Bulgaria, 2018;
- Thirteenth Annual Meeting of the Bulgarian Section of Siam, Sofia, Bulgaria, 2018.

6 Публикации

Резултатите от дисертацията са публикувани както следва:

- В международни научни списания с импакт фактор:
 - N. Kolkovska, V. Vucheva, “Invariant preserving scheme for double dispersion equation”, *Advances in Difference Equations* (2019) 2019:216, 1-16 ;IF 1.510(2018),
<https://doi.org/10.1186/s13662-019-2152-y>, IF 1.510 ;
- В сборници с доклади от международни конференции с SJR:
 - N. Kolkovska, V. Vucheva, “Numerical investigation of sixth order Boussinesq equation,” in *AMiTaNS’17*, AIP CP 1895 (American Institute of Physics, Melville, NY, 2017), paper 110003-1-110003-8. SJR 0.165.
 - V. Vucheva, N. Kolkovska, “Convergence analysis of finite difference scheme for sixth order Boussinesq equation”, *AIP Conference Proceedings*, 1978 (1):470033; 2018, SJR:0.182;
 - N. Kolkovska, V. Vucheva, “Energy preserving finite difference scheme for sixth order Boussinesq Equation”, *Procedia Engineering*, 199 (2017) 1539–1543, SJR 0.282;
 - V. Vucheva, N. Kolkovska, “A symplectic numerical method for the sixth order Boussinesq equation”, accepted for publication (2019).

7 Благодарност и посвещение

*Сърдечно благодаря на научния си ръководител
проф. д-р Наталия Кольковска за времето,
което ми отдели, като превърна всяка
споделена минута в повод да разширя и обогатя
познанията си!*

*Безкрайно съм ѝ благодарна за търпението,
прецизността, подкрепата и разбирането,
които са изключителен дар в нашия забързан
живот!*

*Посвещавам дисертацията на моето
семејство!*

8 Основни научни приноси

Основните научни приноси на дисертационния труд са:

1. Построяване на диференчна схема ФДС за уравнението на Бусинеск от шести ред (УБШР) с достатъчно условие за устойчивост $\tau = O(h)$. Тази схема има втори ред на точност и запазва точно дискретната енергия.
2. Доказана е сходимостта на приближеното решение на ФДС към точното решение на непрекъснатата задача в дискретни $W_{2,h}^2$ и C_h норми с точност $O(h^2 + \tau^2)$.
3. За уравнението на Бусинеск от шести ред е конструирана и изследвана диференчна схема, чието решение запазва симплектичната структура на дискретно ниво и дискретната маса. При тази схема началната енергия се запазва с грешка $O(\tau^2)$.
4. Конструирани са две диференчни схеми за уравнението на Бусинеск от четвърти ред. Схемите са с втори ред на апроксимация, а условието за устойчивост е $\tau = O(h)$. Едната схема запазва точно симплектичната структура на дискретното решение и дискретната маса, и приближено с глобална грешка $O(h^2)$ дискретния момент. Втората схема запазва точно дискретния момент и дискретната маса, и приближено с грешка $O(h^2 + \tau^2)$ началната дискретна енергия.
5. Всички теоретични резултати са потвърдени при провеждането на редица числени експерименти. Направено е сравнение на качествените характеристики на разглежданите схеми.

9 Декларация

Декларирам, че представената дисертация на тема "Теоретичен и числен анализ на диференчни схеми за уравнения на Бусинеск" е мой труд. В нейното разработване не са ползвани разработки и чужди публикации в нарушение на авторските им права.

Всички цитиранията на източници на информация, текст и други са обозначени според стандартите.

Резултатите от дисертационното изследване са оригинални и не са взимствани от източници, в които нямам участие.

Подпис:

Литература

- [1] Aydin, A., Karasözen, B.: Symplectic and multisymplectic Lobato methods for the 'good' Boussinesq Equation, *Journal of Mathematical Physics*, (2008).
- [2] Bratsos, A.: A second order numerical scheme for the solution of the one-dimensional Boussinesq equation, *Springer Science*, (2007).
- [3] Brugnano, L., Gurioli, G., Zhang, C: Spectrally accurate energy-preserving methods for the numerical solution of the "good" Boussinesq equation, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, **35** (2019), 1343-1362.
- [4] Casasso, A., Pastrone, F., Samsonov, A.: Travelling waves in microstructure as exact solutions to the 6th order nonlinear equation, *Acoustical Physics* **56** (2010), 871-876.
- [5] Chen, M., Kong, L., Hong, Y.: Efficient structure-preserving scheme for 'good' Boussinesq equation, *Math. Methods Appl. Sci.*, **41** (2018), 1743-1752.
- [6] Cheng, K., Feng, W., Gottlieb, S., Wang, C.: A Fourier pseudospectral method for the 'Good' Boussinesq Equation with second order temporal accuracy, *Numerical Methods for PDE* **31** (2014), 20-224.
- [7] Chertock, A., Christov, C., Kurganov, A.: Central-upwind schemes for the Boussinesq paradigm equation. *Computational Science and High Performance Computing IV*, NNFm, 113 (2011), 267–281.
- [8] Christou, M.: Christov-Galerkin expansion for localized solutions in model equations with higher order dispersion, *AIP CP* **946** (2007), 91-98.

- [9] Christou, M., Christov, C.: Fourier-Galerkin method for 2D solitons of Boussinesq equation, *Mathematics and Computers in Simulation* **74** (2007), 82-92.
- [10] Christou, M., Christov, C.: Fourier-Galerkin method for localized solutions of the sixth-order generalized Boussinesq equation, *Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, May 18-22 2000, Atlanta, 121-130.
- [11] Christou, M., Papanicolaou, N.: Kawahara solitons in Boussinesq equations using a robust Christov-Galerkin spectral method, *Applied Mathematics and Computation* **243** (2014), 245-257.
- [12] Christov, C.: An energy-consistent dispersive shallow-water model, *Wave motion* **34** (2001), 161-174.
- [13] Christov, C.: Conservative difference scheme for Boussinesq model of surface water, *Proc.ICFD* **5** (1996), Oxford University Press, 343-349.
- [14] Christov, C., Kolkovska, N., Vasileva D.: On the Numerical Simulation of Unsteady Solutions for the 2D Boussinesq Paradigm Equation, *LNCS* **6046** (2011), 386-394.
- [15] Christov, C., Velarde, M.: Inelastic iteration for Boussinesq solutions, *Intern. J Bifurcation Chaos* **4** (1994), 1095-1112.
- [16] Christov, C., Maugin, G., Velarde, M.: Well-posed Boussinesq paradigm equation with purely spatial higher-order derivatives, *Physics Review E* **54** (1996), 3621-3637.
- [17] Daripa, P., Dash, R.: Weakly non-local solitary wave solutions of a singularly perturbed Boussinesq equation, *Mathematics and Computers in Simulations* **55** (2001), 393-405.

- [18] Day, B., Khare, A., Kumar, C.: Stationary solutions of the fifth order KdV-type equations and their stabilization, *Physics Letters A*, **223** (1996), 449-452.
- [19] Dimova, M., Vasileva, D.: Comparison of two Numerical Approaches to Boussinesq Paradigm Equation, *LNCS* **8236** (2013), 255-262.
- [20] Esfahani, A., Farah, L.: Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **385** (2012), 230-242.
- [21] Feng, B., Kawahara, T., Mitsui, T., Chan, Y.: Solitary wave propagation and interactions for a sixth-order generalized Boussinesq equation, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **9** (2005), 1435-1448.
- [22] De Frutos, J., Ortega, T., Sanz-Serna, J.: Pseudospectral method for the "good" Boussinesq equation, *Mathematics of computation* **57** (1991), 109-122.
- [23] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G.: Geometric numerical integration, *Springer* (2004).
- [24] Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G.: Geometric numerical integration by Störmer-Verlet method, *Acta Numerica*, (2003), 399-450.
- [25] Huang, L., Zeng, W., Qin, M.: A new multisymplectic scheme for nonlinear 'good' Boussinesq Equation, *Journal of Computational Mathematics* **21** (2003), No 6, 703-714.
- [26] Kolkovska, N.: Two families of finite difference schemes for a multidimensional Boussinesq equation, *AIP CP* **1301** (2010), 395-403.
- [27] Kolkovska, N.: Convergence of finite difference schemes for a multidimensional Boussinesq equation, *LNCS* **6046** (2011), 469-476.

- [28] Kolkovska, N.: Four level conservative finite difference schemes for Boussinesq paradigm equation, *AIP CP* **1561** (2013), 68-74
- [29] Kolkovska, N., Angelow, K.: A Multicomponent Alternating Direction Method for Numerical Solving of Boussinesq Paradigm Equation, *Lecture Notes in Computer Science*, LNCS , **8236** (2013), 371–378
- [30] Kolkovska, N., Dimova, M.: A New Conservative Finite Different Scheme for Boussinesq Paradigm Equation, *Cent. Eur. J. Math.* **10** (3) (2012), 1159-1171.
- [31] Kolkovska, N., Vucheva, V.: Numerical investigation of sixth order Boussinesq equation, *AIP CP* **1895** (2017), 110003.
- [32] Kolkovska, N., Vucheva, V.: Energy preserving finite difference scheme for sixth order Boussinesq equation, *Procedia Engineering*, (2017).
- [33] Kolkovska, N., Vucheva, V.: Invariant preserving schemes for double dispersion equation, *Advances in Difference Equations*, <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2152-y>
- [34] Mehdi, Dehghan, Rezvan, Salehi , A meshless based numerical technique for traveling solitary wave solution of Boussinesq equation, *Appl. Math. Model* **36** (2012), 1939-1956.
- [35] Ortega, T., Sanz-Serna, J.M.:Nonlinear stability and convergence of finite-difference methods for the "good" Boussinesq equation, *Numer. Math.* **58** (1990), 215-229.
- [36] Pani, A., Saranga, H.: Finite element Galerkin method for the "good" Boussinesq equation, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications* **29** (1997), 937-956.

- [37] Pelinovski, D., Stepanyants, Y.: Convergence of Petviashvili's iteration method for numerical approximation of stationary solutions of nonlinear wave equations, *SIAM J. Numer. Analysis* **42** (3) (2004), 1110-1127.
- [38] Petviashvili, V.: Equation of an extraordinary soliton, *Plasma Physics* **2** (1976), 469-472.
- [39] Samarsky, A.: The theory of difference schemes, *Marcel Dekker Inc.*, New York, 2001.
- [40] Sanz-Serna, J., Calvo. M.: Numerical Hamiltonian Problems
- [41] Vucheva, V., Kolkovska, N.: Convergence analysis of finite difference scheme for sixth order Boussinesq equation, *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics , SJR=<https://doi.org/10.1063/1.5044103>;
- [42] Vucheva, V., Kolkovska, N.: A symplectic numerical method for the sixth order Boussinesq equation, accepted for publication.
- [43] Xu Runzhang, Liu Yacheng: Global existence and nonexistence of solution for Cauchy problem of multi-dimensional double dispersion equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **359** (2009), 739-751.
- [44] Yan, J., Zhang, Z.: New energy-preserving schemes using Hamiltonian boundary value and Fourier pseudospectral methods for the numerical solution of the 'good' Boussinesq equation, *Comput. Phys. Commun* **201** (2016), 33-43.
- [45] Zhang, C., Huang, J., Wang, C., Yue, X.: On the operator splitting and integral equation preconditioned deferred correction methods for the "good" Boussinesq equation, *J.Sci.Comput.* **75** (2018), 687-712.