ОТЧЕТ

Численное решение уравнения теплопроводности в двумерном случае.

Автор
Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Описание

Завершающая работа по численным методам. Необходимо было написать неявную схему для решения стационарного уравнения теплопроводности с порядком сходимости $o(\tau + h_x^2 + h_y^2)$, где коэффицент при ∇u является константой. Также использовалась программа из предыдущего семестра, в которой был описан двумерный Фурье с нужными краевыми. В итоге мы построим гифку при динамике времени и проанализируем скорость сходимости задачи.

2 Программная реализация

Программа реализует указанный метод и проверяет на некотором наборе тестовых функций. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, который содержит запуск метода Фурье и проверку с ответом;
2. func_and_algorithm.cpp - файл, который содержит реализацию явной(просто рекурентно) и неявной схемы(через прогонку), а также тестовые функции;

3 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

3.1 Тест 1

Рассмотрим следующее уравнение

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y) + (x^2-2x)(y^2-2y) - 2(t+1)(x^2-2x+y^2-2y), \quad u(0,x,y) = (x^2-2x)(y^2-2y). \tag{1}$$

И решение $u(t,x,y) = (x^2-2x)(y^2-2y)(t+1)$.

```
N=10, Nx=50, Ny=50, Error=1.64313e-14
N=10, Nx=100, Ny=100, Error=3.24185e-14
N=10, Nx=150, Ny=150, Error=4.4853e-14
N=20, Nx=50, Ny=50, Error=1.79856e-14
N=20, Nx=100, Ny=100, Error=3.24185e-14
N=20, Nx=150, Ny=150, Error=5.41789e-14
N=30, Nx=50, Ny=50, Error=1.5099e-14
N=30, Nx=100, Ny=100, Error=3.28626e-14
N=30, Nx=150, Ny=150, Error=4.52971e-14
N=40, Nx=50, Ny=50, Error=1.73195e-14
N=40, Nx=100, Ny=100, Error=3.13083e-14
N=40, Nx=150, Ny=150, Error=5.30687e-14
N=50, Nx=50, Ny=50, Error=1.84297e-14
N=50, Nx=100, Ny=100, Error=3.57492e-14
N=50, Nx=150, Ny=150, Error=5.41789e-14
```

Рис. 1: Таблица ошибок.

Самое сложное воспользоваться методом Фурье, т.е. перенести на след. слой решение.

Разложим f по б.ф. задачи.

$$f(A, x_i, y_j) = \sum d_{nm} \varphi_i^{(n)}(x) \cdot \psi_j^{(m)}(y)$$

$$u(x, y, A) = \sum c_{nm} \varphi \cdot \psi$$

И знаем и с.ч. и с.ф. Тогда подставим в ур-е (дискрет. вар.)

$$\Leftrightarrow \sum_{n,m=1} c_{nm} \left(\lambda_n^x + \lambda_m^y + \frac{1}{\tau}\right) \varphi_i^{(n)} \psi_j^{(m)} = \sum_{m,n=1} d_{nm} \varphi_i^{(n)} \cdot \psi_j^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow c_{nm} = \frac{d_{nm}}{\lambda_n^y + \lambda_m^x + \frac{1}{\tau}}$$

и заметим, что если в схему перенесли $\frac{u^A_{nm}}{\tau}$ (уже знаем),

то $$c_{nm} = \frac{d_{nm} + \frac{u^A_{nm}}{\tau}}{\lambda_n^y + \lambda_m^x + \frac{1}{\tau}},$$ где d_{nm} – коэф при разлож. f

Устойчивость выразим итеративно по ф-ле

$$u^N_{nm} = C^N_{nm} \cdot u^0_{nm} + d_{nm} \tau \cdot \sum_{i=0}^{N-1} C^i_{nm}, \quad C_{nm} = \frac{1}{\tau \lambda_n^x + \tau \lambda_m^y + 1} < 1$$

Домножим на $h_x h_y$ и просуммир. N, m, n

$$\| u \|_{L_{2,h}} \le \frac{1}{1 - C_{n_0 m_0}} \left(\| u^0 \|_{L_{2,h}} + \| f \|_{L_{2,h}} \right), \quad n_0, m_0 - \max$$

Надо решить

$$\begin{cases} u_t(t,x,y) = \operatorname{div}(k\nabla u) + f(t,x,y) \\ u(t,x,0) = 0 = u(t,0,y) \\ u_x(t,1,y) = 0 = u_y(t,x,1) \end{cases}$$ на равномер. сетке

Будем строить обычную схему (неявную) и проверим на сх-ть

$$\frac{u^{n+1}_{ij} - u^n_{ij}}{\tau} = \cancel{\frac{1}{h_x}} k\left[\frac{u^{n+1}_{i+1j} - 2u^{n+1}_{ij} + u^{n+1}_{i-1j}}{h_x^2} + \frac{u^{n+1}_{ij+1} - 2u^{n+1}_{ij} + u^{n+1}_{ij-1}}{h_y^2}\right] + f^{n+1}_{ij}$$

$j = 1,..,N_y-1;\ i = 1,..,N_x-1;\ n = 0,..,N-1$

$u^n_{0j} = 0,\ u^n_{i0} = 0,\ n = 0,..,N,\ j = 0,..,N_y,\ i = 0,..,N_x$

$$\frac{u^{n+1}_{N_x j} - u^{n+1}_{N_x-1 j}}{h_x} = 0 + \delta_x,\ n = 0,..,N-1,\ \forall j$$

$$\frac{u^{n+1}_{iN_y} - u^{n+1}_{iN_y-1}}{h_y} = 0 + \delta_y,\ n = 0,..,N-1,\ \forall i.$$

Найдем δ_x и δ_y для нужной сх-ти. По схеме из пред. отчета выразим ряд Тейлора

$$\Rightarrow \delta_x = -\frac{h_x}{2} u_{xx}(t_{n+1}, 1, y_j) = -\frac{h_x}{2k}\left(u_t - \cancel{\ldots}\, k u_{yy} - f^{n+1}_{N_x j}\right)(t_{n+1}, y_j)$$

$$\Rightarrow \delta_x = -\frac{h_x}{2k_0}\left(\frac{u^{n+1}_{N_x j} - u^n_{N_x j}}{\tau} - k \cdot \frac{u^{n+1}_{N_x j+1} - 2u^{n+1}_{N_x j} + u^{n+1}_{N_x j-1}}{h_y^2}\right)$$

Аналогично получаем δ_y.

Получили порядок аппрокс. $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$

~~Затем проверим сх-ть [illegible] [illegible] и разные [illegible]~~