
ОТЧЕТ

**Численное решение уравнения
теплопроводности в одномерном случае.**

Автор

Черепахин Иван
409 группа, мехмат

1 Программная реализация

Программа реализует указанный метод и проверяет на некотором наборе тестовых функций. Общая структура проекта:

1. main.cpp - файл, который содержит запуск метода Фурье и проверку с ответом;
2. func_and_algorithm.cpp - файл, который содержит реализацию явной(просто рекуррентно) и неявной схемы(через прогонку), а также тестовые функции;

2 Оценка

Проведем серию тестов для проверки качества алгоритма и подтвердим корректность написанной программы.

2.1 Тест 1

Рассмотрим следующее уравнение

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \frac{x\pi}{2}. \quad (1)$$

И решение $u(t, x) = \sin(\frac{x\pi}{2})e^{-\frac{t\pi^2}{4}}$.

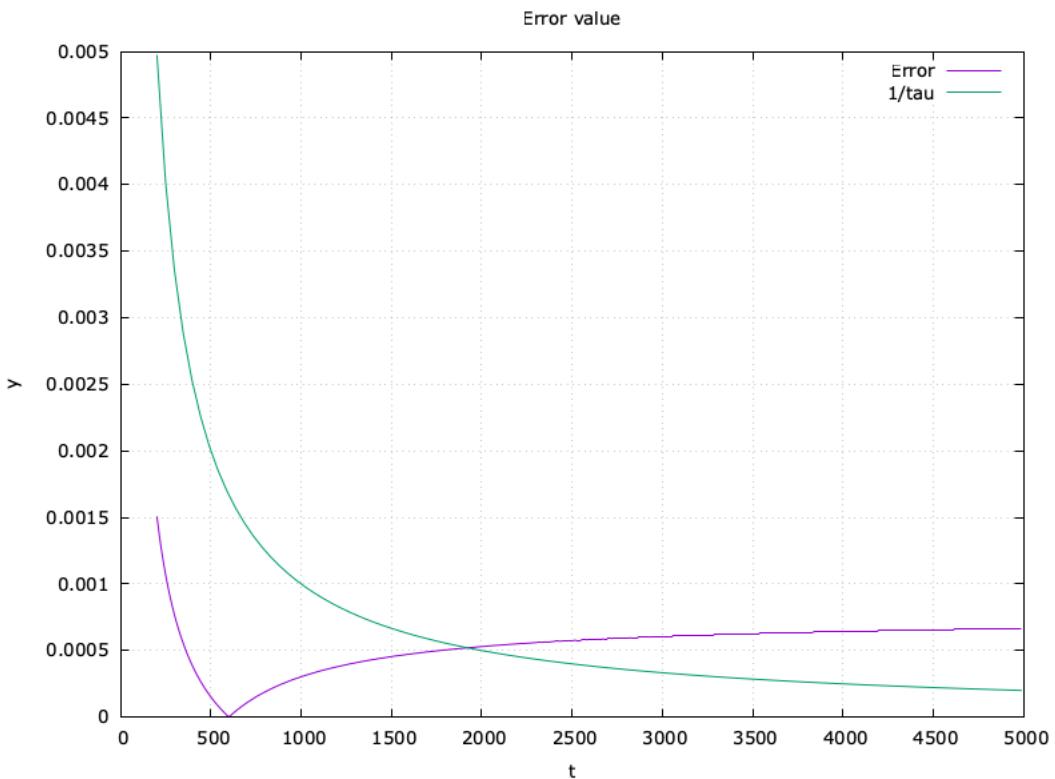


Рис. 1: График ошибки явного метода при фиксированном $M = 10$ и переменном N .

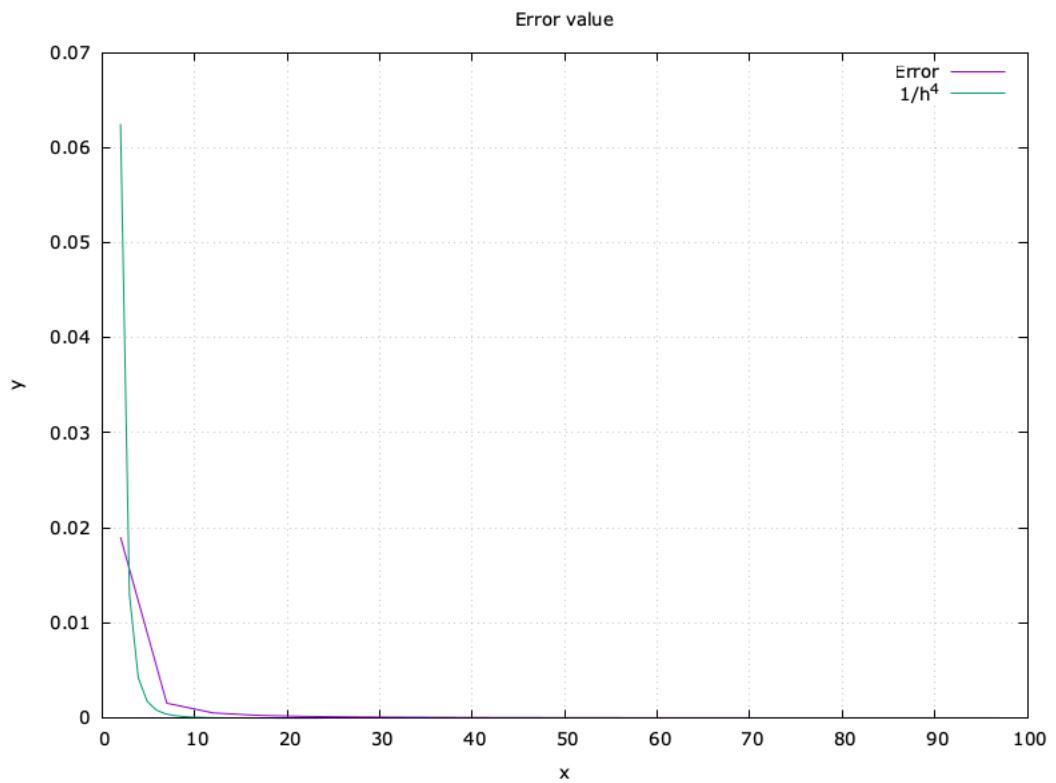


Рис. 2: График ошибки явного метода при фиксированном $N = 21000$ и переменном M .

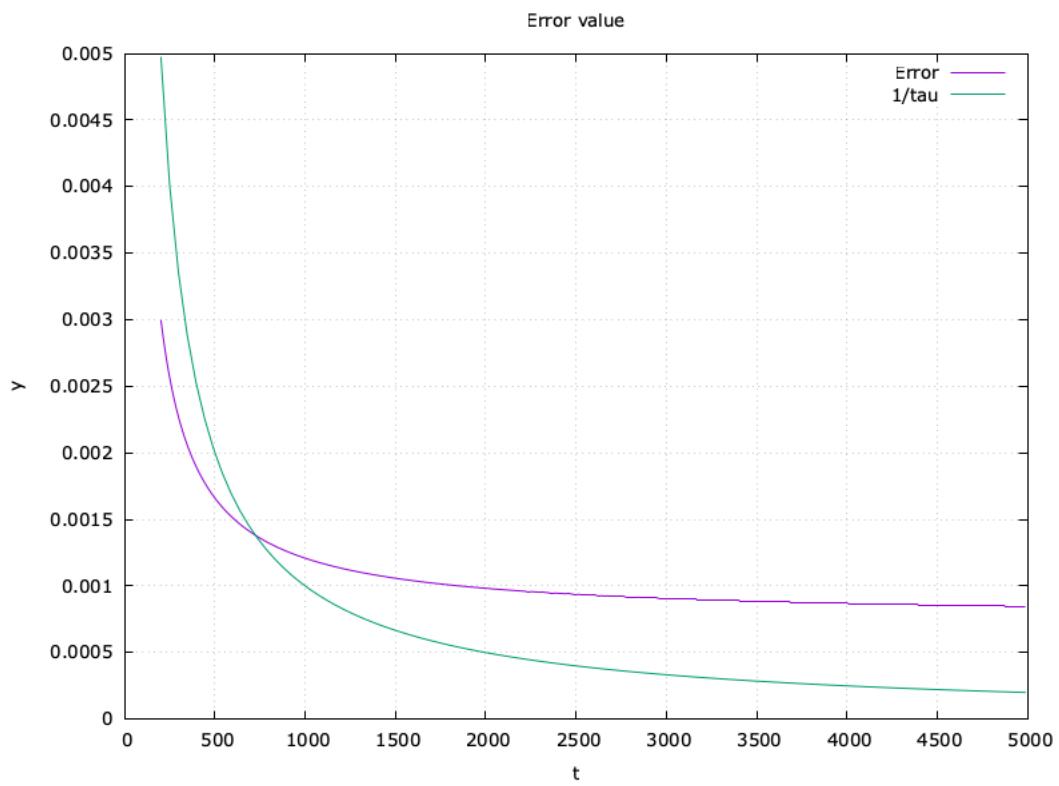


Рис. 3: График ошибки неявного метода при фиксированном $M = 10$ и переменном N .

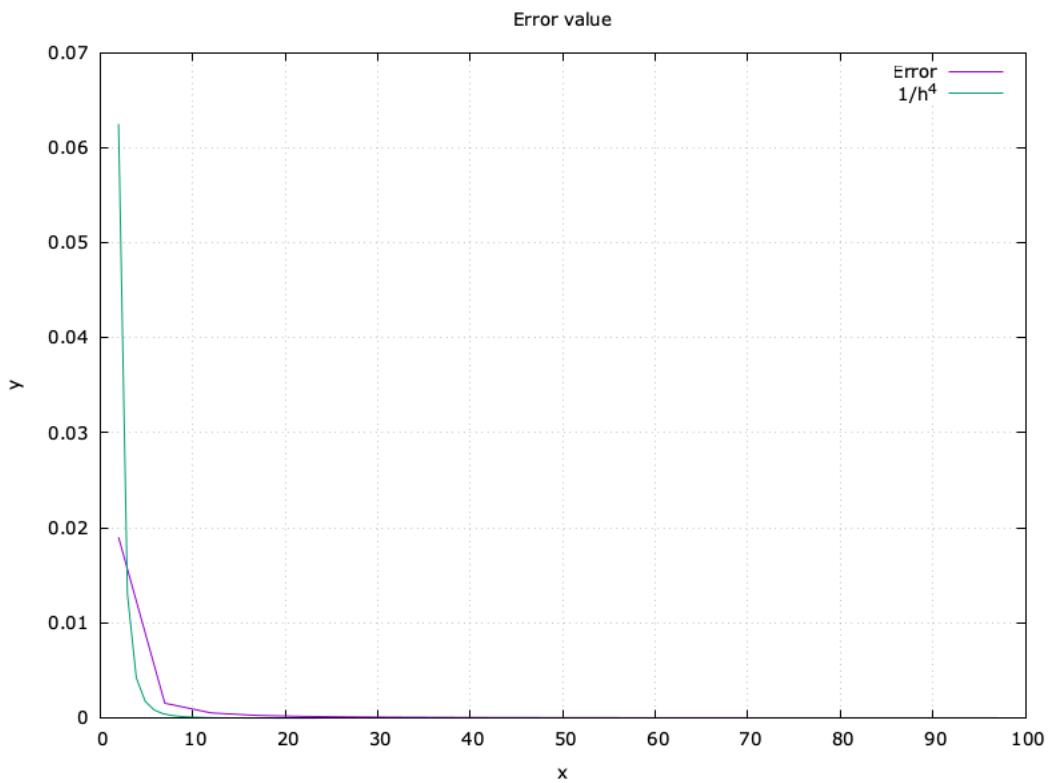


Рис. 4: График ошибки неявного метода при фиксированном $N = 21000$ и переменном M .

10	200	0.001520
11	242	0.001255
12	288	0.001054
13	338	0.000898
14	392	0.000774
15	450	0.000674
16	512	0.000592
17	578	0.000524
18	648	0.000468
20	800	0.000379

Рис. 5: График ошибки явного метода при $2M^2 = N$.

10	200	0.003010
11	242	0.002490
12	288	0.002093
13	338	0.001785
14	392	0.001540
15	450	0.001342
16	512	0.001179
17	578	0.001045
18	648	0.000932
19	722	0.000837
20	800	0.000755

Рис. 6: График ошибки неявного метода при $2M^2 = N$.

2.2 Тест 2

Рассмотрим следующее уравнение

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) + (x^2 - 2x) - 2(t + 1) \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x^2 - 2x. \quad (2)$$

И решение $u(t, x) = (x^2 - 2x)(t + 1)$.

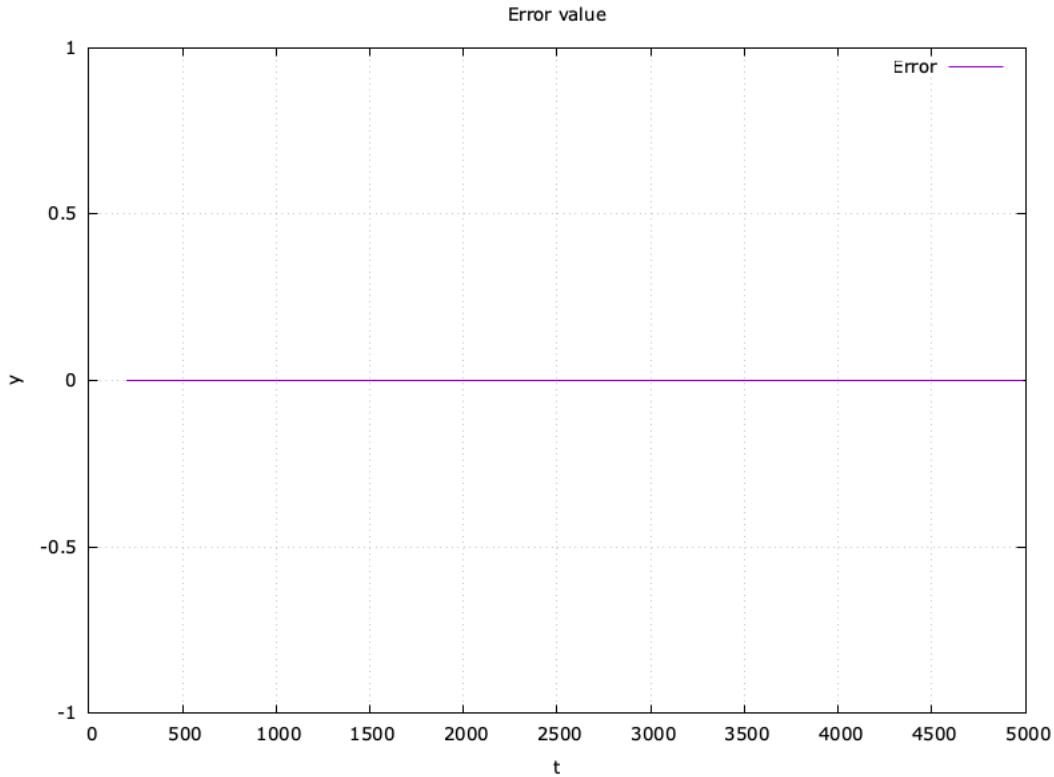


Рис. 7: График ошибки явного метода при фиксированном $M = 10$ и переменном N .

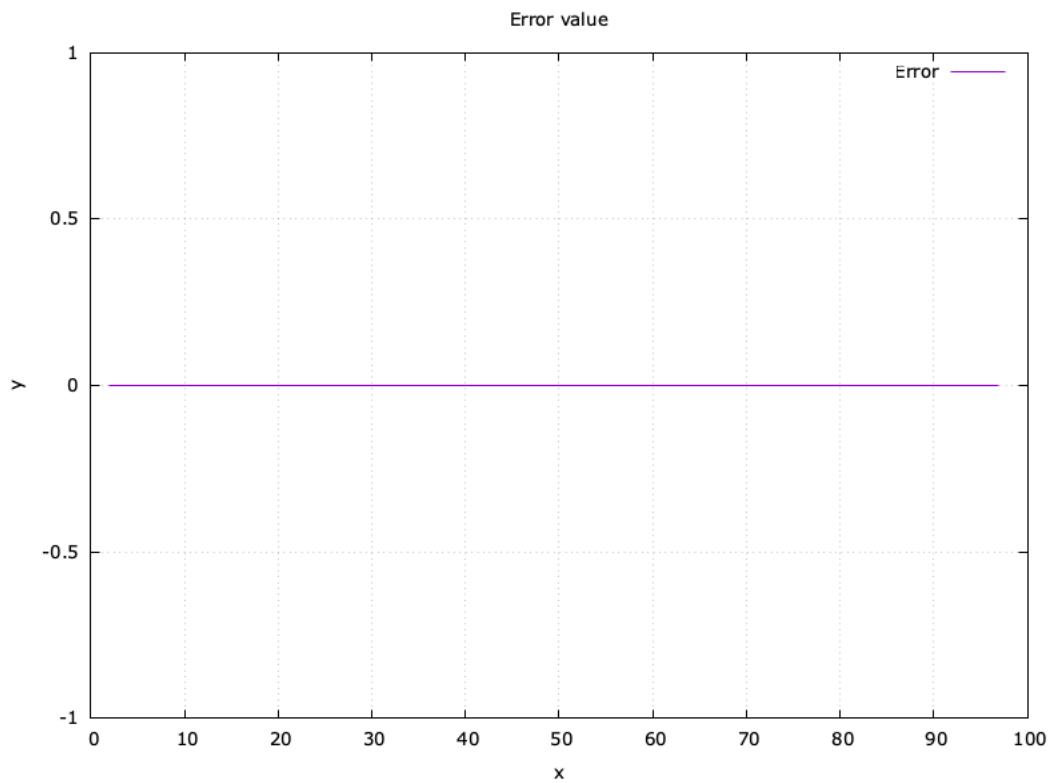


Рис. 8: График ошибки явного метода при фиксированном $N = 21000$ и переменном M .

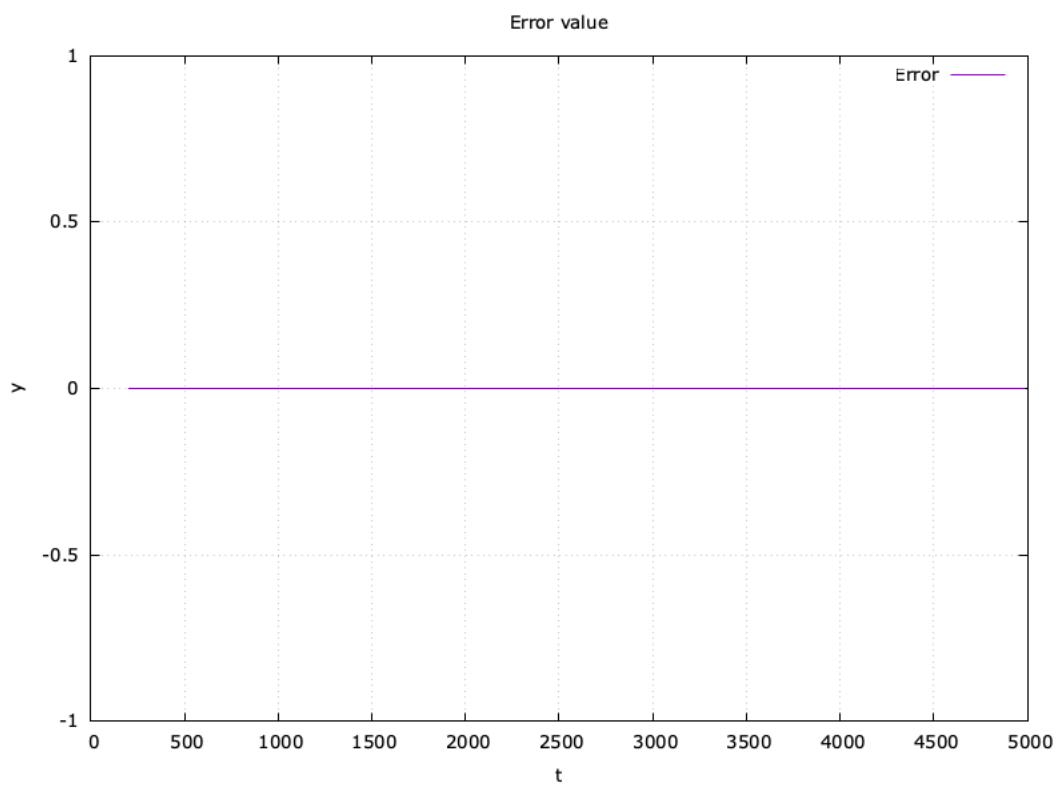


Рис. 9: График ошибки неявного метода при фиксированном $M = 10$ и переменном N .

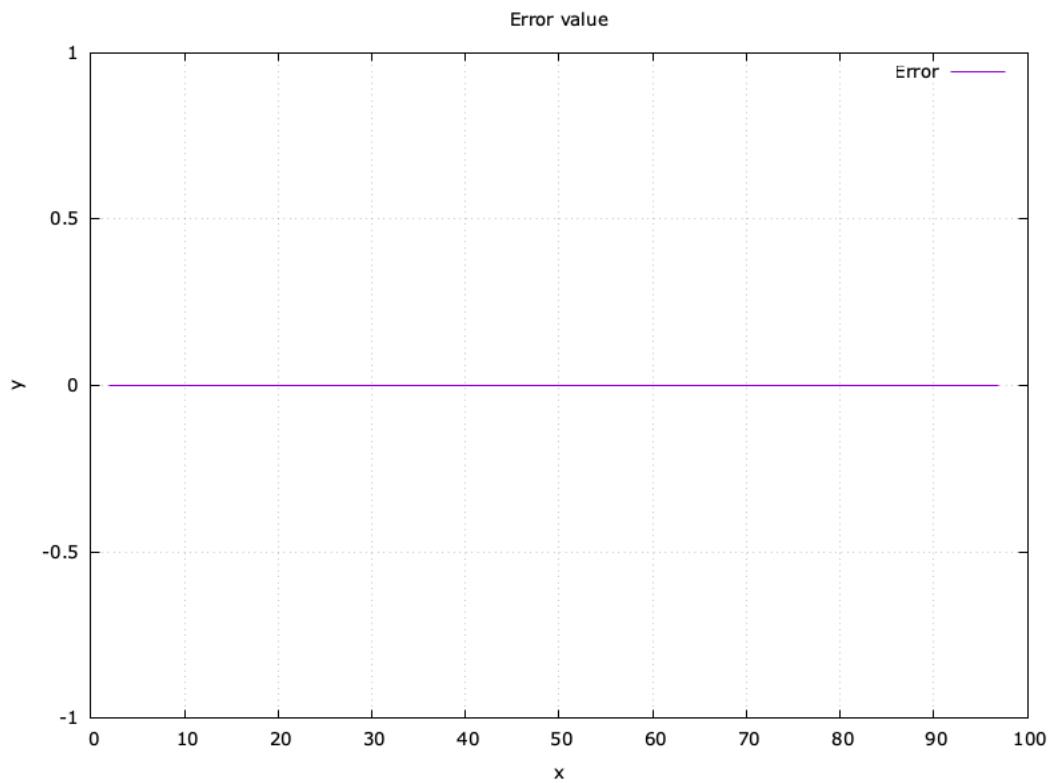


Рис. 10: График ошибки неявного метода при фиксированном $N = 21000$ и переменном M .

На нестационарной стадии решения

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + p(x)u(t, x) = f(t, x), \quad p(x) \geq 0$$

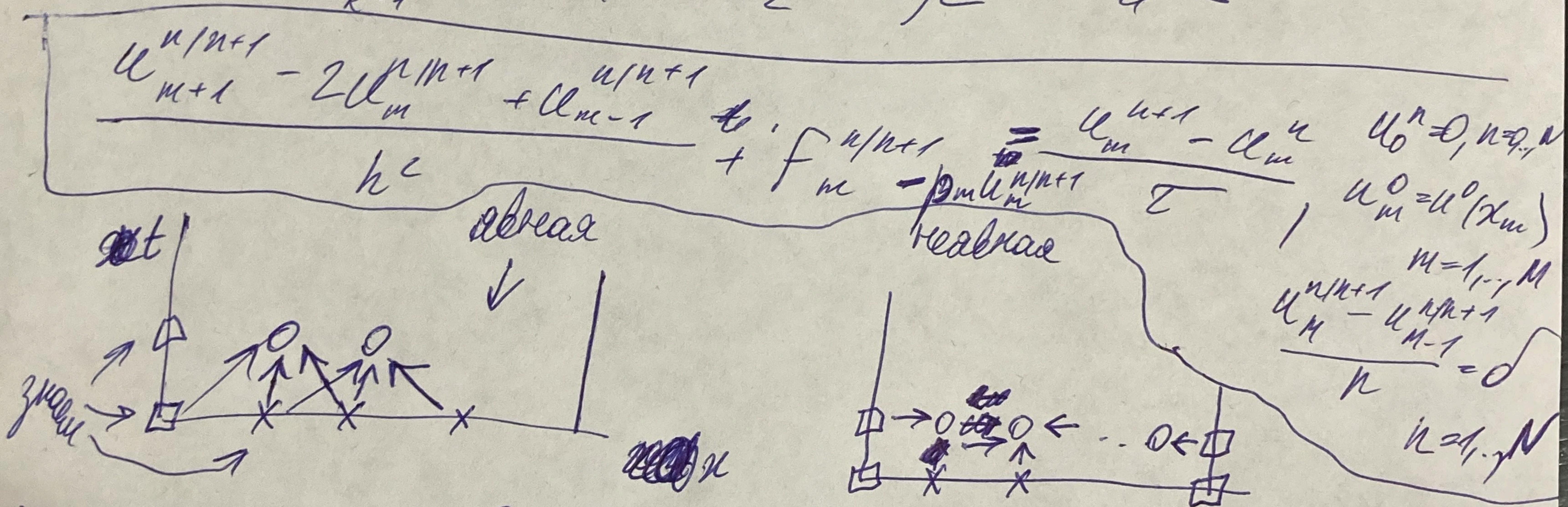
$$u(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = u^0(x).$$

Zagara: решение явной и неявной схемы. Или явно
или неявно (уравнение на Дарье). Система с о.з. и.с.
коэффициентами (уравнение на Дарье). Аналогично наявном

$$x_k(x) = C \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2}\right) \quad \text{и} \quad p_k = -\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4}$$

И можно наявом решить явное уравнение для $u(0, x) = u^0(x)$

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2}\right) e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2 t}{4}}$$



Есть несколько проблем.

- 1). Для явной схемы из условия стабильности (условия)
- 2). Умное блюдо или аналогично. Малые блюда $\frac{y'}{h} = -10^5$ кухни подскакиваю в зоне пограничной области. То все норм. кр.
- 3). Несколько зон явной схемы, чтобы уменьшить погрешность. Ошибки

$$\frac{u^n_M - u^n_{M-1}}{h} \times \frac{u(t_n, 1) - u(t_{n-1}, 1)}{h} = u_x(t_n, 1) - \frac{h}{2} u_{xx}(t_n, 1) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \delta = -\frac{h}{2} (u_x(t_n, 1) + p(t_n, 1)) u(t_n, 1) - f(t_n, 1) \quad (\Rightarrow O(h^2) \Rightarrow O(h^2))$$

Аналогично gilt bekannt, dass die Approximationen oben

$$\delta = -\frac{h}{2} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + p_m u_m^{n+1} - f_m^{n+1} \right), \quad n=0, \dots, N-1$$

Jetzt soll nun alle Approximationen für alle Zeitschritte berechnet werden.

► Wenn n -tes gilt obige (gilt für zweite Ordnung $O(\tau+h^2)$)

$$1) u(t_n, x_m) = u(t_n, x_m) + \mathcal{E}_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_n, x_m) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{\tau} = u_t(t_n, x_m) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(t_n, x_m) + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt}(t_n, x_m) + O(h^4)$$

$$2) u(t_n, x_{m+1}) = u(t_n, x_m) + h u_x(t_n, x_m) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_n, x_m) + \\ + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_n, x_m) + \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^5)$$

$$\Rightarrow \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = \frac{u(t_n, x_{m+1}) - 2u(t_n, x_m) + u(t_n, x_{m-1})}{h^2} = \\ = u_{xx}(t_n, x_m) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(h^4).$$

$$3) \|L_n u - f_n\|_h = \max_{n,m} \left| \frac{\tau}{2} u_{tt}(t_n, x_m) \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(t_n, x_m) + O(\tau^2) + O(h^4) \right|$$

Die Schätzungen gilt abschließend für alle Zeitschritte

unter $\tau \leq \frac{h^2}{2}$.

► Provozeno doppelseitige Bevorausnahme.

$$u_m^{n+1} = P u_{m+1}^n - (1-2P) u_m^n + S u_{m-1}^n - \tau p(x_m) u_m^n + \\ + \mathcal{E}_f(t_n, x_m)$$

Um passende P zu finden und somit $\|u^n\|_h \leq \|u^0\|_h$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2}.$$

Durch Koeffizientenmethode wird monotonie gezeigt bewiesen wird

$$\|u^{n+1}\|_h - \|u_m^{n+1}\|_h \leq \|u_m^{n+1} + P(2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}) + \tau p(x_m) u_m^{n+1}\|_h$$

und weiter $\leq \|u^0\|_h + T \max_k \|f^k\|_h$

Dann ist analoges für Pattersonsche Zeitschrittweise