

Кубический сплайн с натяжением.

Представление кубического сплайна через наклоны. Будем считать, что $m_i = f'(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$

$$S(x) = (1-t)^2 t m_i h_i - t^2 (1-t) m_{i+1} h_i + (1-t)^2 (2t+1) f_i + t^2 (3-2t) f_{i+1}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = (x - x_i)/h_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Заменим условия непрерывности второй производной в узлах сетки (получаемое в методе построения кубического сплайна через наклоны) на весовое равенство $w_{i-1} S''(x_i^-) = w_i S''(x_i^+)$, $i = 1, \dots, n-1$, $w_i > 0$. Данные соотношения порождают трехдиагональную систему уравнений, коэффициенты которой зависят от параметров w_i :

$$\lambda_i m_{i-1} + 2 m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

где

$$c_i = 3\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + 3\mu_i f[x_i, x_{i+1}], \quad \lambda_i = \frac{w_{i-1} h_i}{w_{i-1} h_i + w_i h_{i-1}},$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i, \quad f[x_i, x_{i+1}] = (f_{i+1} - f_i)/h_i.$$

Представление весового кубического сплайна через вторые производные.

Будем считать, что $M_i = w_{i-1} S''(x_i^-) = w_i S''(x_i^+)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $M_0 = w_0 S''(x_0^+)$, $M_n = w_n S''(x_n^-)$.

Тогда для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$S(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t - t(1+t) \frac{h_i^2}{6w_i} [(2-t)M_i + (1-t)M_{i+1}], \quad t = (x - x_i)/h_i.$$

Условие непрерывности $S'(x_i^-) = S'(x_i^+)$, $i = 1, \dots, n-1$ приводят к системе уравнений

$$\frac{h_{i-1}}{w_{i-1}} M_{i-1} + 2 \left(\frac{h_{i-1}}{w_{i-1}} + \frac{h_i}{w_i} \right) M_i + \frac{h_i}{w_i} M_{i+1} = 6(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]).$$

1. Реализовать программный код, позволяющий построить сплайн $S(x)$ при заданных значениях $\{x_i, f_i, w_i\}$.

2. Подготовить **удобный** интерфейс для **«ручного»** подбора параметров w_i , обеспечивающих сохранение монотонности и выпуклости.